

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КВАЗИКООРДИНАТ И КВАЗИУГЛОВ ОРИЕНТАЦИИ В МОДЕЛЯХ КОРРЕКЦИИ БИНС

А.А. ГОЛОВАН¹, А.В. ШАРОНОВ²

¹*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва,
Россия*

²*Московский авиационный институт (национальный исследовательский
университет),
г. Москва, Россия*

Инерциальное счисление в полярных районах имеет особенность, связанную с невозможностью определения значений долготы и угла истинного курса в точке полюса. Ранее был описан методический прием, устраняющий отмеченную особенность. Он основан на введении квазигринвичской системы координат и использовании соответствующих квазигеографических координат и квазиуглов ориентации вместо традиционных. Показано, что прием добавляет необременительные вычисления в штатный алгоритм бескарданной инерциальной навигационной системы (БИНС). Вместе с тем, модели позиционной, скоростной коррекции БИНС в квазикоординатах описаны не были. Описанию последних посвящена данная статья.

Ключевые слова: инерциальное счисление, полярные районы, квазикоординаты, квазиуглы ориентации, модели коррекции БИНС в квазикоординатах.

Введение

Инерциальное счисление в полярных районах имеет особенность, связанную с невозможностью определения значений долготы и угла истинного курса в точке полюса. Ранее в [1], а затем в [7] был детально описан методический прием, устраняющий отмеченную особенность. Он основан на введении квазигринвичской системы координат и использовании соответствующих квазигеографических координат, квазиуглов ориентации вместо традиционных.

Схожие вопросы рассматривались на работах [2]-[5], которые были связаны с проведением аэрогравиметрических съемок в районах Арктики и Антарктики, где проявилась проблема плохой обусловленности указанных навигационных параметров. Полезной оказалась также публикация [6]. Однако модели позиционной, скоростной коррекции БИНС в квазикоординатах описаны не были. Этому посвящена данная статья.

Выделим особенности перехода от традиционных географических координат λ (долгота), φ (широта), параметров ориентации корпуса объекта: углов истинного курса ψ , тангажа ϑ , крена γ к их квазианалогам:

- традиционные параметры основаны на понятии географической вертикали и направлением на север;
- квазипараметры связаны с понятием геоцентрической вертикали и направлением на квазисевер;
- уравнения автономного инерциального (шулеровского) счисления должны быть записаны в осях опорного географического трехгранника с законом относительно либо абсолютно свободной ориентации в азимуте, когда азимутальная (вертикальная) компонента относительной или абсолютной угловой скорости упомянутого географического трехгранника равна нулю [7], [8];
- переход от традиционных параметров к их квазианалогам и обратно описывается алгебраическими соотношениями.

Структура представляемого материала такова. Сначала приводятся описания используемых систем координат, затем описывается взаимосвязь географических координат и квазипараметров, приводятся известные модели инерциального счисления, уравнения ошибок горизонтальных каналов БИНС, и, в конце, собственно модели коррекции измерений в квазипараметрах.

Используемые системы координат

1. *Гринвичская (земная) система координат $O\eta$* . Точка O – центр навигационного эллипсоида; ось $O\eta_3$ – ось вращения Земли; оси $O\eta_1, O\eta_2$ лежат в плоскости экватора; ось $O\eta_1$ лежит в плоскости гринвичского (нулевого) меридиана.
2. *Квазигринвичская система координат $O\eta^q$* . За квазисеверный полюс принимается точка N^q с географическими координатами $\lambda = 180^\circ, \varphi = 0^\circ$, квазियюжный полюс S^q будет иметь координаты $\lambda = 0^\circ, \varphi = 0^\circ$. Плоскость квазиекватора совпадает с плоскостью меридиана, содержащего точки с координатами $(\lambda = 90^\circ, \varphi = 0^\circ), (\lambda = 270^\circ, \varphi = 0^\circ)$. Нулевым квазимеридианом полагается меридиан, проходящий через ось вращения Земли и точки северного и южного квазиполюсов, который совпадает с нулевым гринвичским меридианом. Взаимосвязь систем координат $O\eta, O\eta^q$ задается следующим образом

$$O\eta \xrightarrow{-\pi/2} O\eta^q, \quad A_{\eta\eta^q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \eta_1^q \\ \eta_2^q \\ \eta_3^q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_3 \\ \eta_2 \\ -\eta_1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

$A_{\eta\eta^q}$ – соответствующая матрица взаимной ориентации, η_i, η_i^q , ($i=1,2,3$) – декартовы координаты некой точки.

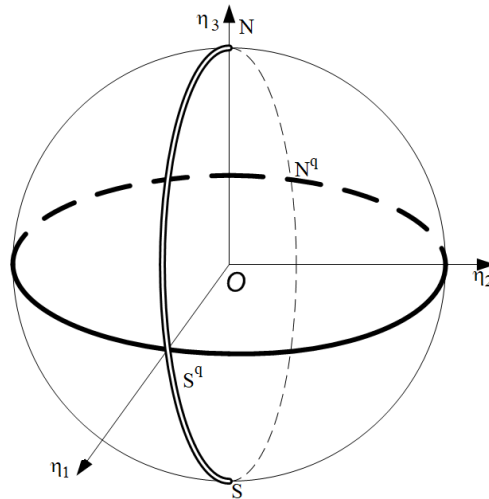


Рис. 1. [6] O – центр навигационного эллипсоида, N, S – северный, южный полюса, N^q, S^q – квазисеверный, квазियюжный полюса, жирные линии – экватор и нулевой меридиан.

3. *Географические системы координат Mx^0, Mx* . Точка M – начало соответствующих систем координат. Оси Mx_3^0, Mx_3 , направлены вдоль географической вертикали в точке M – вдоль нормали к поверхности навигационного эллипсоида, проходящей через точку M . Географическая (северная) широта φ – угол между Mx_3^0 (или Mx_3) и экваториальной плоскостью $O\eta_1\eta_2$, отсчитываемый от этой плоскости к Северу. Восточная долгота λ – угол между проекцией орта Mx_3^0 на экваториальную плоскость и осью $O\eta_1$, отсчитываемый от этой оси к Востоку. Акцент « 0 » в обозначении трехгранника Mx^0 отражает частный случай ориентации его горизонтальных осей в азимуте, когда ось Mx_2^0 лежит в плоскости текущего меридиана и направлена на Север, ось Mx_1^0 направлена на Восток. Такая ориентация трехгранника Mx^0 называется ориентацией в географической координатной сетке.

Ориентацию произвольного географического трехгранника Mx относительно Mx^0 будем определять азимутальным углом χ : Переход от трехгранника Mx^0 к Mx осуществляется поворотом против часовой стрелки на угол χ вокруг оси Mx_3^0 .

Одновременно с трехгранниками Mx^0, Mx рассматриваются системы координат Ox^0, Ox (с началом в точке O), оси которых параллельны соответствующим осям трехгранников Mx^0, Mx . Имеем

$$O\eta \xrightarrow{\frac{\pi+\lambda}{3}} \xrightarrow{\frac{\pi-\varphi}{1}} Ox^0 \xrightarrow{\frac{\chi}{3}} Ox, \quad (2)$$

$$B_{x\eta} = \begin{pmatrix} -\sin \lambda \cos \chi - \cos \lambda \sin \varphi \sin \chi & -\sin \varphi \sin \lambda \sin \chi + \cos \lambda \cos \chi & \cos \varphi \sin \chi \\ \sin \lambda \sin \chi - \cos \lambda \sin \varphi \cos \chi & -\sin \varphi \sin \lambda \cos \chi - \cos \lambda \sin \chi & \cos \varphi \cos \chi \\ \cos \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \sin \lambda & \sin \varphi \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Поведение во времени азимутального угла χ определяется принятым законом азимутальной ориентации опорного географического трехгранника Mx . В случае относительно свободной ориентации третья компонента Ω_3 вектора $\vec{\omega}$ относительной угловой скорости этого трехгранника равна нулю и

$$\frac{d\chi}{dt} = -\frac{V_E}{R_E} \tan \varphi. \quad (4)$$

В случае абсолютно свободной ориентации третья компонента ω_3 вектора $\vec{\omega}$ абсолютной угловой скорости этого трехгранника равна нулю и

$$\frac{d\chi}{dt} = -\frac{V_E}{R_E} \tan \varphi - u \sin \varphi. \quad (5)$$

В (4), (5) V_E – восточная составляющая вектора относительной линейной скорости точки M , R_E – долготный радиус кривизны (соответствующая формула будет представлена ниже), u – угловая скорость вращения Земли.

4. *Квазигеоцентрическая система координат Mx^{0q}* . Ось Mx_3^{0q} квазигеоцентрической системы координат Mx^{0q} направлены по геоцентрической вертикали или по радиус-вектору $\vec{r} = \overline{OM}$. Квазигеоцентрические координаты λ^q (квазидолгота), φ^q (квазиширота) вводятся по аналогии с обычными геоцентрическими координатами λ^0 , φ^0 , но отсчитываются от осей квазигринвичской системы координат Mx^{0q} . Оси Mx_1^{0q} , Mx_2^{0q} лежат в плоскости, перпендикулярной радиус-вектору OM , ось Mx_1^{0q} направлена на квазивосток, ось Mx_2^{0q} направлена на квазисевер. Матрица $C_{x^q\eta^q}$ взаимной ориентации трехгранников Mx_3^{0q} , $O\eta^q$ задается матрицей

$$C_{x^q\eta^q} = \begin{pmatrix} -\sin \lambda^q & \cos \lambda^q & 0 \\ -\sin \varphi^q \cos \lambda^q & -\sin \varphi^q \sin \lambda^q & \cos \varphi^q \\ \cos \varphi^q \cos \lambda^q & \cos \varphi^q \sin \lambda^q & \sin \varphi^q \end{pmatrix}. \quad (6)$$

5. *Связанная система координат Ms* . Углы истинного курса ψ , гироскопического курса ψ_g , крена γ , тангажа v . Поскольку все дальнейшие построения связаны моделями инерциальной навигации, то точка M совпадает с приведенным центром БИНС или совпадает с началом ее приборной системы координат. Ось Ms_1 направлена в сторону правого крыла (борта), ось Ms_2 направлена по продольной оси к носу объекта, ось Ms_3 расположена в плоскости симметрии и направлена вверх:

$$Mx^0 \begin{pmatrix} -\psi \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} Ms, \text{ и } Mx^0 \begin{pmatrix} \gamma \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} Mx \begin{pmatrix} -\psi_g \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} Ms. \quad (7)$$

Углом истинного курса ψ называется угол между осью Mx_2^0 (направлением на Север) и проекцией продольной оси объекта на горизонтальную плоскость Mx_1^0, x_2^0 , отсчитываемый по часовой стрелке.

Углом гироскопического курса ψ_g называется угол между осью Mx_2 и проекцией продольной оси объекта на горизонтальную плоскость Mx_1, x_2 , отсчитываемый по часовой стрелке.

Углом тангаж v называется угол между продольной осью Ms_2 и горизонтальной плоскостью Mx_1^0, x_2^0 .

Углом крена γ называется угол поворота в плоскости симметрии объекта.

При этом матрица взаимной ориентации D_{sx^0} систем Ms , Mx^0 имеет вид:

$$D_{sx^0} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \gamma + \sin \psi \sin v \sin \gamma & -\sin \psi \cos \gamma + \cos \psi \sin v \sin \gamma & -\cos v \sin \gamma \\ \sin \psi \cos v & \cos \psi \cos v & \sin v \\ \cos \psi \sin \gamma - \sin \psi \sin v \cos \gamma & -\sin \psi \sin \gamma - \cos \psi \sin v \cos \gamma & \cos v \cos \gamma \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Матрица ориентации D_{sx} имеет аналогичный вид (8), в которой угол истинного курса ψ заменяется на угол гироскопического курса ψ_g .

Замечание. В [1], [7] показано, что переход к квазипараметрам не затрагивает углы гироскопического курса ψ_g , крена γ и тангажа v поскольку не возникает никаких особенностей вычисления этих углов в зависимости от района навигации.

Взаимосвязь географических координат и квазипараметров

Приведем реферативно основные формулы.

Взаимосвязь гринвичских $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)^T$ и географических координат λ, φ, h

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R_E + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ (R_E + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ (R_E(1 - e^2) + h) \sin \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R_E + h)b_{31} \\ (R_E + h)b_{32} \\ (R_E(1 - e^2) + h)b_{33} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$R_E = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 b_{33}^2}}.$$

Здесь b_{13}, b_{23}, b_{33} – элементы третьих столбцов матриц $B_{x\eta}, B_{x^0\eta} = B_{x\eta}(\chi = 0)$, a – большая полуось навигационного эллипсоида Земли, e^2 – квадрат первого эксцентриситета.

Взаимосвязь традиционных и квазигринвичских координат

$$\eta = R \begin{pmatrix} \cos \varphi^0 \cos \lambda^0 \\ \cos \varphi^0 \sin \lambda^0 \\ \sin \varphi^0 \end{pmatrix}, \quad \eta^q = R \begin{pmatrix} \cos \varphi^q \cos \lambda^q \\ \cos \varphi^q \sin \lambda^q \\ \sin \varphi^q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_3 \\ \eta_2 \\ -\eta_1 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где λ^0, φ^0 – геоцентрические (сферические) координаты точки M (очевидно, что $\lambda = \lambda^0$), R – модуль радиус-вектора.

Тогда

$$\varphi^q = \text{atan2} \left(-\eta_1, \sqrt{\eta_2^2 + \eta_3^2} \right), \quad \lambda^q = \text{atan2}(\eta_2, \eta_3). \quad (11)$$

Другая форма записи взаимосвязи может быть представлена следующим образом

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi^0 \cos \lambda^0 \\ \cos \varphi^0 \sin \lambda^0 \\ \sin \varphi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi^q \\ \cos \varphi^q \sin \lambda^q \\ \cos \varphi^q \cos \lambda^q \end{pmatrix},$$

и

$$\varphi^q = -\arcsin(\cos \varphi^0 \cos \lambda^0), \quad \lambda^q = \text{atan2}(\cos \varphi^0 \sin \lambda^0, \sin \varphi^0) \quad (12)$$

В [1], [7] показано, что справедлива следующая приближенная формула, связывающая с высокой точностью значения геоцентрической и географической широт

$$\varphi^0 = \varphi - \Delta\varphi, \quad \Delta\varphi = \frac{1}{2}e^2 \sin 2\varphi \left(1 - \frac{h}{a} + e^2 \sin^2 \varphi \right) + O(0.01'')$$

и

$$\varphi^q = -\arcsin \left(b_{31} \left(1 + e^2 b_{33}^2 \left(1 - \frac{h}{a} + e^2 b_{33}^2 \right) \right) \right), \quad (13)$$

$$\lambda^q = \text{atan2} \left(b_{32} \left(1 + e^2 b_{33}^2 \left(1 - \frac{h}{a} + e^2 b_{33}^2 \right) \right), b_{33} \left(1 - e^2 (1 - b_{33}^2) \left(1 - \frac{h}{a} + e^2 b_{33}^2 \right) \right) \right). \quad (14)$$

Формулы (13), (14) не имеют особенностей в зависимости от района навигации, постольку оперируют с элементами b_{13}, b_{23}, b_{33} матриц ориентации $B_{x\eta}, B_{x^0\eta}$ не имеющих особенностей вычисления.

Вычисление угла квазикурса ψ^q . В условиях, когда опорный географический трехгранник реализует закон относительной, либо абсолютной ориентации в азимуте, угол истинного курса ψ определяется при помощи значений углов гироскопического курса ψ_g и азимутального угла или угла «платформы» χ :

$$\psi = \psi_g - \chi. \quad (15)$$

Углы ψ_g, χ в свою очередь вычисляются при помощи обратных тригонометрических функций от элементов матрицы ориентации D_{sx} (см. (8), где вместо ψ надо использовать ψ_g), и матрицы $B_{x\eta}$ (см. (3)). Напомним, что угол χ характеризует взаимную ориентацию вектора направления на Север, спроектированного на горизонтальную плоскость Mx_1x_2 , и оси Mx_2 .

По аналогии вводится квазиугол платформы χ^q , который будет теперь отсчитываться от проекции на плоскость Mx_1x_2 направления на квазисевер до оси Mx_2 . Соответственно имеем

$$B_{x\eta^q} = B_{x\eta} A_{\eta\eta^q} = \begin{pmatrix} b_{13} & b_{12} & -b_{11} \\ b_{23} & b_{22} & -b_{21} \\ b_{33} & b_{32} & -b_{31} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где $B_{x\eta^q}$ – матрица ориентации географического трехгранника Mx относительно квазигринвичской системы координат $O\eta^q$, b_{ij} , $(i, j = 1, 2, 3)$ – элементы матрицы $B_{x\eta}$.

Тогда угол квазикурса ψ^q будет определяться так

$$\psi^q = \psi_g - \chi^q, \quad \chi^q = \text{atan2}(-b_{11}, -b_{21}). \quad (17)$$

Заметим, что при вычислении угла квазикурса ψ^q в (17) используется значение угла гироскопического курса ψ_g – выходного параметра алгоритмов стандартного счисления БИНС, а квазиугол χ^q «платформы» однозначно определяется значениями элементов матрицы $B_{x\eta}$, также являющимися выходными параметрами алгоритмов стандартного счисления БИНС. Таким образом, не возникает, особенностей вычисления значения угла квазигироскопического курса ψ^q .

Уравнения автономного инерциального счисления.

Модель динамических уравнений движения точки M в осях Mx .

В соответствии с [7] получаем

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= (\Omega_3 + u_3)V_2 - (\Omega_2 + u_2)V_3 + f_1, \\ \dot{V}_2 &= -(\Omega_3 + u_3)V_1 + (\Omega_1 + u_1)V_3 + f_2, \\ \dot{V}_3 &= (\Omega_2 + u_2)V_1 - (\Omega_1 + u_1)V_2 + f_3 - g, \\ \Omega_1 &= -V_2 \left(\frac{\sin^2 \chi}{R_E + h} + \frac{\cos^2 \chi}{R_N + h} \right) - V_1 \sin \chi \cos \chi \left(\frac{1}{R_N + h} - \frac{1}{R_E + h} \right), \\ \Omega_2 &= V_1 \left(\frac{\sin^2 \chi}{R_N + h} + \frac{\cos^2 \chi}{R_E + h} \right) + V_2 \sin \chi \cos \chi \left(\frac{1}{R_N + h} - \frac{1}{R_E + h} \right), \\ R_N &= \frac{a(1-\varepsilon^2)}{\sqrt[3]{2}\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{\sqrt[3]{2}\sqrt{1-\varepsilon^2 b_{33}^2}}, \quad u_1 = ub_{13}, \quad u_2 = ub_{23}, \quad u_3 = ub_{33}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$g = 9.78030(1 + 0.005702)b_{33}^2 - 0.000007(2b_{33}^2(b_{13}^2 + b_{23}^2)) - 0.00014 - 2\omega_0^2 h.$$

Здесь f_1, f_2, f_3 – перепроектированные из приборных осей БИНС при помощи матрицы D_{sx}^T показания акселерометров, g – абсолютное значение нормальной удельной силы тяжести вычисляемое, например, по формуле Гельмерта, ω_0^2 – квадрат частоты Шулера, Ω_1, Ω_2 – горизонтальные компоненты вектора относительной угловой скорости трехгранника Mx .

В случае закона относительно свободной ориентации трехгранника Mx в азимуте $\Omega_3 = 0$, а случае закона абсолютно свободной ориентации $\Omega_3 = -u_3$.

Вопрос неустойчивости автономного вертикального канала БИНС здесь не затрагивается.

Кинематическое уравнения для матрицы $B_{x\eta}$. Имеем

$$\dot{B}_{x\eta} = \tilde{\Omega}_x B_{x\eta}, \quad \tilde{\Omega}_x = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_3 & -\Omega_2 \\ -\Omega_3 & 0 & \Omega_1 \\ \Omega_2 & -\Omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega_x = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)^T, \quad (23)$$

и в обычной ситуации

$$\varphi = \arcsin(b_{32}), \quad \lambda = \text{atan2}(b_{32}, b_{31}), \quad \chi = \text{atan2}(b_{13}, b_{23}), \quad (24)$$

Кинематическое уравнения для матрицы D_{sx} . Это уравнение можно записать в разных формах, с использованием кватернионов, использованием различных методов численного интегрирования. Приведем одну из них

$$\dot{D}_{sx} = \tilde{\omega}_s D_{sx} - D_{sx} \tilde{\omega}_x, \quad \omega_x = \Omega_x + u_x, \quad u_x = (u_1, u_2, u_3)^T, \quad (25)$$

Здесь $\omega_s = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ – измерения датчиков угловой скорости БИНС.

Легко заметить, что уравнения (22)-(25) не имеют особенностей в зависимости от района навигации, за исключением вычисления географических координат φ, λ и азимутального угла χ по формулам (24). Особенности вычисления последних возникают в высоких широтах, когда и следует переходить к квазикоординатам.

Уравнения ошибок горизонтальных каналов БИНС.

Используется модель, когда полные ошибки определения относительной линейной скорости разделяются на динамическую и кинематическую составляющие [7], типовые модели инструментальных погрешностей (для простоты иллюстрации моделей учитываются только смещения их нулевых сигналов и шумовые составляющие) инерциальных датчиков – акселерометров и датчиков угловой скорости. В качестве угловых ошибок БИНС используются две угловые ошибки построения приборной вертикали и кинематическая азимутальная ошибка. Такая модель получила распространение в авиационных приложениях, см., например, [8].

Расширенный фазовый вектор ошибок БИНС и инструментальных погрешностей инерциальных датчиков имеет 13 порядок и включает в себя (при желании состав этого вектора

очевидным образом расширяется за счет более детальных моделей инструментальных погрешностей):

$$\Delta r_1, \Delta r_2, \delta V_1, \delta V_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_3, v_1^0, v_2^0, v_3^0, \Delta f_1^o, \Delta f_2^o, \Delta f_3^o \quad (26)$$

Уравнения ошибок БИНС для горизонтальных каналов (с некоторыми упрощениями), соответствующие принятой модели инструментальных ошибок, в географическом трехграннике для определенности с относительно свободной ориентацией в азимуте имеют вид [7]:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{r}_1 &= \delta V_1 + \beta_3 V_2, \\ \Delta \dot{r}_2 &= \delta V_2 - \beta_3 V_1, \\ \delta \dot{V}_1 &= 2u_3 \delta V_2 - g \alpha_2 + \Delta f_{z1}^0 d_{11} + \Delta f_{z2}^0 d_{12} + \Delta f_{z3}^0 d_{13} + \Delta f_1^s, \\ \delta \dot{V}_2 &= -2u_3 \delta V_1 + g \alpha_1 + \Delta f_{z1}^0 d_{21} + \Delta f_{z2}^0 d_{22} + \Delta f_{z3}^0 d_{23} + \Delta f_2^s, \\ \dot{\alpha}_1 &= -u'_3 \frac{\Delta r_1}{R_1} - \frac{\delta V_2}{R_2} + u'_3 \alpha_2 - u'_2 \beta_3 + v_{z1}^0 d_{11} + v_{z2}^0 d_{12} + v_{z3}^0 d_{13} + v_1^s, \\ \dot{\alpha}_2 &= -u_3 \frac{\Delta r_2}{R_2} + \frac{\delta V_1}{R_1} - u_3 \alpha_1 + u_1 \beta_3 + v_{z1}^0 d_{21} + v_{z2}^0 d_{22} + v_{z3}^0 d_{23} + v_2^s, \\ \dot{\beta}_3 &= \omega_{x1} \frac{\Delta r_1}{R_1} + \omega_{x2} \frac{\Delta r_2}{R_2} + \omega_{x2} \alpha_1 - \omega_{x1} \alpha_2 + v_{z1}^0 d_{31} + v_{z2}^0 d_{32} + v_{z3}^0 d_{33} + v_3^s. \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь:

V_i' – проекции скорости ЛА на оси модельного географического трехгранника,

u'_i – проекции угловой скорости Земли на оси этого трехгранника,

g – номинальное значение ускорения силы тяжести,

R_i – радиусы кривизны сечений поверхности земного эллипсоида,

d'_{ij} – элементы вычисляемой матрицы ориентации D_{xs} приборного трехгранника БИНС относительно модельного географического [7].

Вектор состояния уравнений ошибок включает в себя переменные:

$\Delta r_1, \Delta r_2$ – ошибки определения местоположения в горизонтальной плоскости в осях модельного географического трехгранника с относительно свободной ориентацией в азимуте [6],

$\delta V_1, \delta V_2$ – динамические ошибки определения горизонтальных составляющих относительной скорости в этих же осях,

α_1, α_2 – угловые ошибки построения приборной вертикали в тех же осях, β_3 – азимутальная кинематическая ошибка [6].

Уравнения ошибок замыкаются при помощи формирующих уравнений для параметров инструментальных погрешностей датчиков БИНС:

$$\Delta \dot{f}_{zi}^0 = 0, \quad \dot{v}_{zi}^0 = 0, \quad (28)$$

Математические модели корректирующих измерений алгоритма

Традиционные модели позиционной и скоростной коррекции по информации спутниковых навигационных систем (СНС).

Векторы позиционных измерений $z^{pos} = (z_1^{pos}, z_2^{pos})^T$ и скоростных измерений $z^{vel} = (z_1^{vel}, z_2^{vel})^T$ для коррекции горизонтальных каналов формируются при помощи информации БИНС

$(\lambda', \varphi', V_E', V_N')$ и СНС $(\lambda^{CHC}, \varphi^{CHC}, V_E^{CHC}, V_N^{CHC})$ о географической долготы, географической широте, восточной и северной составляющих относительной скорости.

Позиционные измерения:

$$\begin{aligned} z_1^{pos} &= \Delta r_1 = \Delta r_\varphi \sin \chi + \Delta r_\lambda \cos \chi \\ z_2^{pos} &= \Delta r_2 = \Delta r_\varphi \cos \chi - \Delta r_\lambda \sin \chi \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \Delta r_\varphi &= (\varphi' - \varphi^{CHC}) R_N \\ \Delta r_\lambda &= (\lambda' - \lambda^{CHC}) R_E \cos \varphi' \\ R_E &= \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi'}} \quad R_N = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi')^{3/2}}. \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь:

R_E, R_N – радиусы кривизны меридионального сечения и первого вертикала,

a и e – большая полуось земного эллипсоида и его эксцентриситет,

χ – угол, характеризующий азимутальную ориентацию модельного географического трехгранника с относительно свободной ориентацией в азимуте.

Скоростные измерения:

$$\begin{aligned} z_1^{vel} &= V_1' - V_1^{CHC} = \delta V_1 + \beta_3 V_2 \\ z_2^{vel} &= V_2' - V_2^{CHC} = \delta V_2 - \beta_3 V_1 \\ V_1^{CHC} &= V_N^{CHC} \sin(\chi - \Delta\lambda \sin \varphi') + V_E^{CHC} \cos(\chi - \Delta\lambda \sin \varphi') \\ V_2^{CHC} &= V_N^{CHC} \cos(\chi - \Delta\lambda \sin \varphi') - V_E^{CHC} \sin(\chi - \Delta\lambda \sin \varphi') \end{aligned} \quad (31)$$

$\Delta\lambda$ – оценка погрешности долготы, полученная в алгоритме коррекции.

Модели позиционной и скоростной коррекции при помощи данных СНС в квазипараметрах.

В квазикоординатах модели (29), (30) позиционной коррекции модифицируются следующим очевидным образом

$$\begin{aligned} z_1^{pos} &= \Delta r_1 = \Delta r_{\varphi^q} \sin \chi^q + \Delta r_{\lambda^q} \cos \chi^q \\ z_2^{pos} &= \Delta r_2 = \Delta r_{\varphi^q} \cos \chi^q - \Delta r_{\lambda^q} \sin \chi^q \end{aligned} \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta r_{\varphi^q} &= (\varphi^{q'} - \varphi^{qCHC}) R, \\ \Delta r_{\lambda^q} &= (\lambda^{q'} - \lambda^{qCHC}) R \cos \varphi^{q'} \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь R – модуль радиус-вектора.

Фигурирующие в (33) квазигеографические координаты $\lambda^{qCHC}, \varphi^{qCHC}$ СНС вычисляются на основе моделей (11). Напомним, что изначально спутниковые позиционные, скоростные решения СНС определяются в гринвичских осях $O\eta$.

В квазикоординатах модели (31) скоростной коррекции модифицируются следующим образом.

Пусть $V_\eta^{CHC} = (V_{\eta_1}^{CHC}, V_{\eta_2}^{CHC}, V_{\eta_3}^{CHC})^T$ – вектор относительной линейной скорости – скоростной решение СНС. Тогда квазигеографические скорости $V_E^{CHC}, V_N^{CHC}, V_{UP}^{CHC}$ определяются так. (6)

$$\begin{pmatrix} V_{E^q}^{CHC} \\ V_{N^q}^{CHC} \\ V_{UP^q}^{CHC} \end{pmatrix} = C_{x^q \eta^q} \begin{pmatrix} V_{\eta_3}^{CHC} \\ V_{\eta_2}^{CHC} \\ -V_{\eta_1}^{CHC} \end{pmatrix} \quad (34)$$

Далее

$$\begin{aligned} z_1^{vel} &= V_1' - V_1^{qCHC} = \delta V_1 + \beta_3 V_2 \\ z_2^{vel} &= V_2' - V_2^{qCHC} = \delta V_2 - \beta_3 V_1 \\ V_1^{qCHC} &= V_{N^q}^{CHC} \sin(\chi^q - \Delta\lambda^q \sin \varphi') + V_{E^q}^{CHC} \cos(\chi^q - \Delta\lambda^q \sin \varphi') \\ V_2^{qCHC} &= V_{N^q}^{CHC} \cos(\chi^q - \Delta\lambda^q \sin \varphi') - V_{E^q}^{CHC} \sin(\chi^q - \Delta\lambda^q \sin \varphi') \end{aligned} \quad (35)$$

$\Delta\lambda^q$ – оценка погрешности квазидолготы, полученная в алгоритме коррекции.

Традиционные модели скоростной коррекции при помощи данных лага.

В морской навигации для коррекции БИНС привлекаются показания лага V^{log} – датчика продольной скорости судна относительно водной среды. Это скалярное измерение трансформируется в векторное измерение за счет приведения к осям опорного географического трехгранника Mx :

$$\begin{pmatrix} V_1^{log} \\ V_2^{log} \\ V_3^{log} \end{pmatrix} = D_{xz}(\psi_g, \gamma, \nu) \begin{pmatrix} 0 \\ V^{log} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (36)$$

И

$$\begin{aligned} z_1^{log} &= V_1' - V_1^{log} = \delta V_1, \\ z_2^{log} &= V_2' - V_2^{log} = \delta V_2, \end{aligned} \quad (37)$$

Поскольку в (36) фигурируют углы ψ_g, γ, ν , которые не зависят от активизации режима квазиординат, то модели коррекции БИНС при помощи показаний лага справедливы для любого района навигации.

Выводы.

Для избежания особенностей инерциального счисления БИНС в приполярных районах предлагается:

- использовать закон абсолютно- либо -свободной ориентации в азимуте опорного географического трехгранника Mx при моделировании кинематических и динамических модельных уравнений БИНС;
- использовать матрицу $B_{x\eta}$ (либо соответствующий кватернион) для моделирования ориентации этого трехгранника;
- вычислять квазиординаты λ^q (квазидолгота), φ^q (квазиширота) по формулам (13), (14);
- вычислять угол квазикурса ψ^q по формуле (17);
- в интегрированном режиме БИНС-СНС использовать модели (31)-(37).

Все эти дополнительные перевычисления представляются не обременительными для бортового вычислителя БИНС.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 19-01-00179.

Список литературы

- [1] Golovan A.A. Inertial navigation in the Earth polar regions with using spatial quasi-coordinates. в *Mathematics in Engineering, Science and Aerospace (MESA)*, 2019, V 10, #4, p. 707-714
- [2] *Современные методы и средства измерения параметров гравитационного поля Земли. Под общ. ред. В.Г.Пешехонова, СПб.: ГНЦ РФ АО "Концерн "ЦНИИ "Электронприбор", 2017, с. 201-209, с. 389*
- [3] Richter T.G., Greebaum J.S., Young D.A., Blankenship D.D., Hewison W.Q., Tuckett H. *University of Texas Airborne Gravimetry in Antarctica, 2008 to 2013 // Proceeding of IAG International Symposium on Terrestrial Gravimetry: Static and Mobile Measurements. Saint-Petersburg, Russia, 2013*

- [4] Koneshov, V.N., Klevtsov, V.V. & Solovev, V.N. Upgrading the GT-2A aerogravimetric complex for airborne gravity measurements in the Arctic *Izv., Phys. Solid Earth* (2016) 52: 452.
<https://doi.org/10.1134/S106935131603006X>
- [5] Golovan A.A., Iakushyk L.Yu, Smoller Yu L., Yurist S.Sh, Wayne Hewison. Using quasicoordinates in software of multi-antenna GPS receivers and airborne gravimeter GT-2A for surveys in polar areas. *Proceedings of the 4th Symposium on Terrestrial Gravimetry: Static and Mobile Measurements (TG-SMM 2016)*, Saint-Petersburg, Russia, 2016
- [5] Smoller, Y.L., Yurist, S.S., Golovan, A.A. et al. Using a multiantenna GPS receiver in the airborne gravimeter GT-2a for surveys in polar areas. *Gyroscopy Navig.* (2015) 6: 299.
<https://doi.org/10.1134/S2075108715040100>
- [6]. Юманов В.С. Алгоритм преобразования квазигеографических координат из одной системы геодезических координат в другую. Материалы XV конференции молодых ученых под общей редакцией В. Г. Пешехонова. Издательство: "Концерн "Центральный научно-исследовательский институт "Электроприбор" (Санкт-Петербург). 2013
- [7]. Вавилова Н.Б., Голован А.А., Парусников Н.А. *Математические основы инерциальных навигационных систем*. М.: Издательство Московского университета, 2020. -160 с.
- [8] Savage P.G. *Strapdown Analytics. Second Edition*, Strapdown Associates, Inc., Maple Plane, Minnesota, 2007.
- [8]. О.А. Зорина, Е.А. Измайлов, С.Е. Кухтевич, Б.И. Портнов, А.В. Фомичев, Н.Б. Вавилова, А.А. Голован, И.А. Папуша, Н.А. Парусников. «О расширении возможностей интеграции инерциальных и спутниковых навигационных систем в авиационных приложениях» *Гироскопия и навигация*. Том 25, №2(97), 2017