МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Часовских Анатолий Александрович

Полнота и выразимость в классах линейных автоматов

01.01.09 – Дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант
доктор физико-математических наук,
профессор
Кудрявцев Валерий Борисович

Москва – 2021

Работа выполнена на кафедре математической теории интеллектуальных систем механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова.

Научный консультант: **Кудрявцев Валерий Борисович,**
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Алехина Марина Анатольевна,**
доктор физико-математических наук, профессор, заведующая кафедрой математики и физики Пензенского государственного технологического университета.

Золотых Николай Юрьевич,
доктор физико-математических наук, доцент, директор института информационных технологий, математики и механики Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского.

Чечкин Александр Витальевич,
Член-корреспондент АТН РФ, доктор физико-математических наук, профессор, профессор финансового университета при правительстве РФ.

Защита диссертации состоится 6 октября 2021 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета *МГУ.05.01* Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: *Москва, Ленинские горы, д. 1, Главное здание МГУ, ауд. 14-08*

E-mail: vasenin@msu.ru

Диссертация находится на хранении в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27).

С диссертацией в электронном виде и с информацией о регистрации участия в защите в удаленном интерактивном режиме можно ознакомиться на сайте ИАС «ИСТИНА»: https://istina.msu.ru/dissertations/381474766/

Автореферат разослан 5 августа 2021 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к. ф.-м. н. М. Кривчиков *М. А. Кривчиков*

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Интерес к автоматам, как преобразователям накапливающим и обобщающим поступающую в дискретные моменты времени информацию благодаря возможности менять свое внутреннее состояние, возник с середины прошлого столетия. Начало теории автоматов было положено работами Дж. фон-Неймана[1], С. К. Клини[2], М. Л. Минского[3], Э. Ф. Мура[4].

Возможность моделирования автоматами процессов обработки информации живыми организмами и бурное развитие вычислительной техники обусловили интенсивные исследования в области теории автоматов и их обобщений. Работа Э. Ф. Мура[5] об отличимости состояний конечного автомата и работа С. К. Клини[6] о представимых конечными автоматами событиях задали начальное направление развития теории. Решения задачи об автоматах в лабиринтах, полученные Л. Будахом[7] и А. С. Подколзиным[8], положили начало многочисленным исследованиям поведения конечных автоматов в сложных средах.

Одним из важных направлений исследований стала структурная теория автоматов, развиваемая в работах научной школы кибернетики, основателями которой являются А. А. Ляпунов, В. М. Глушков, С. В. Яблонский, О. Б. Лупанов, Р. Г. Бухараев, В. Б. Кудрявцев. В рамках структурной теории решаются задачи, связанные с выразимостью через заданные множества конечных автоматов при использовании некоторого "естественного" набора операций. В качестве операций, как правило, при этом выбираются операции суперпозиции, перенесенные из классов функций, не обладающих памятью, или операции композиции, включающие помимо суперпозиций операцию обратной связи.

Важнейшие обобщения понятия конечного автомата связаны с моделированием функционирования биологических систем. К ним относятся однородные

[1] Нейман Дж. Вероятностная логика и синтез надежных организмов из ненадежных компонент // Автоматы. — М.: ИЛ, 1956. — С. 68-139.

[2] Клини С. К. Представление событий в нервных сетях и конечных автоматах // Автоматы. —М.: ИЛ, 1956. — С. 15-67.

[3] Минский М. Л. Некоторые универсальные элементы для конечных автоматов // Автоматы. — М.: ИЛ, 1956. — С. 163-178.

[4] Мур Э. Ф. Умозрительные эксперименты с последовательными машинами // Автоматы. — М.: ИЛ, 1956. — С. 179-210.

[5] Там же.

[6] Клини С. К.Представление событий в нервных сетях и конечных автоматах // Автоматы. — М.: ИЛ, 1956. — С. 15-67.

[7] Budach L. Automata and labyrinth // Mathematische Nachrichten. — 1978. — Vol. 86. — P. 195–282.

[8] Будах Л. Лабиринты и автоматы // Проблемы кибернетики. — 1978. — Вып. 34. — С. 83–94.

структуры, называемые еще клеточными автоматами, начало исследованиям которых было положено Дж. фон-Нейманом[9] и Э. Ф. Муром [10]. Предложенная модель исследовалась в работах Е. А. Гото[11], Д. Майхилла[12], А. С. Подколзина [13], А. А. Болотова [14], И. В. Кучеренко [15] и других авторов.

Ввиду существенных современных результатов, достигнутых в областях, связанных с моделированием восприятия и поведения биологических существ, в последние годы возникла потребность к теоретическим исследованиям в классах искусственных нейронных сетей, рекуррентный вариант которых также является обобщением конечных автоматов. В 1982 году Д. Хопфилд предложил использовать рекуррентные нейронные сети для сжатия данных и моделирования ассоциативной памяти[16]. В дальнейшем были предложены архитектуры рекуррентных нейронных сетей, позволившие получить практически значимые решения для задач автоматического распознавания речи, перевода, распознавания сцен в видеоряде и других. К таким архитектурам следует отнести сеть с долговременной и кратковременной памятью (англ. Long short term memory, LSTM)[17], управляемый рекуррентный блок (англ. Gated recurrent units, GRU)[18].

Известно, что для класса конечных автоматов с операциями суперпозиции отсутствуют конечные полные системы. Ситуация меняется при переходе к операциям композиции. Несмотря на конечнопорожденность этого класса конечных автоматов, исследование полноты его конечных подмножеств затрудне-

---

[9] Von Neumann J. A., Burks W. Theory of Self-Reproducing Automata / Urbana, London: University of Illinois Press, 1966. — 388 p.

[10] Moore E. F. Machine models of self-reproduction // Math. Soc. Proc. of Symposia in Applied Mathematics. — 1962. — Vol. 14. — P. 17–33.

[11] Goto E. A Minimal Time Solution of the Firing Squad Problem // Dittoed course notes for Applied Mathematics, Harvard University 298. — 1962. — P. 52–59.

[12] Myhill J. The converse of Moore's Garden-of-Eden theorem // Proc. Amer. Math. Soc. — 1963. — Vol. 14. — P. 685–686.

[13] 1)Подколзин А. С. О сложности моделирования в однородных структурах // Проблемы кибернетики. — М.: Наука, 1975. — Вып. 30. — С. 199–225. 2) Подколзин А. С. О поведениях однородных структур // Проблемы кибернетики. — М.: Наука, 1976. — Вып. 31. — С. 133–166. 3)Подколзин А. С. Об универсальных однородных структурах // Проблемы кибернетики. — М.: Наука, 1978. — Вып. 34. — С. 109–131.

[14] Болотов А. А. О задачах сводимости и выразимости для однородных структур со входами и выходами // М.: ДАН СССР. — 1980.—Т. 254, № 1. — С. 14–16.

[15] Кучеренко И. В. О структуризации класса обратимых клеточных автоматов // Дискретная математика. — 2007. — Т. 19, № 3. С. 102–121.

[16] Hopfield J. J. Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities // Proceedings of National Academy of Sciences. — 1982. — Vol. 79, № 8. P. 2554–2558.

[17] Hochreiter S., Schmidhuber J. Long Short-Term Memory // Neural Computation. — 1997. — Vol. 9, № 8. P. 1735–1780.

[18] Chung J., Gulcehre C., Kyung Hyun C., Yoshua B. Empirical Evaluation of Gated Recurrent Neural Networks on Sequence Modeling // [Электронный ресурс]: Cornell University. URL: https://arxiv.org/pdf/1412.3555.pdf (дата обращения 05.01.2019).

но, с одной стороны, по причине континуальности количества максимальных собственных подклассов, называемых предполными классами[19], с другой стороны, отсутствием алгоритма для определения полноты конечных подмножеств[20]. Сложность класса конечных автоматов показана в работе С. В. Алешина[21] о вложенности в этот класс группы Бернсайда.

Возникшие трудности преодолевались несколькими путями, среди которых следует выделить следующие три: изменение понятия замыкания, возможность использования некоторого "естественного" множества автоматов, изучение "содержательных" подклассов в классе автоматов. Так в работах В. А. Буевича рассматривались отображения, осуществляемые конечными автоматами на словах длины τ. Им найдены все τ-предполные классы, что позволило получить алгоритм проверки τ-полноты конечных множеств конечных автоматов. В. А. Буевичем было введено понятие аппроксимационной полноты[22] множества конечных автоматов, означающее τ-полноту этого множества для любого натурального τ. Оказалось, что количество аппроксимационно предполных классов счетно, но задача проверки аппроксимационной полноты конечных множеств конечных автоматов осталась алгоритмически неразрешимой.

А. А. Летичевским был получен критерий полноты множеств автоматов Медведева (автоматов без выходов) при использовании специальной операции замыкания[23].

Д. Н. Бабиным для каждого замкнутого класса решетки Поста[24] определено, является ли алгоритмически разрешимой проблема проверки полноты конечных множеств конечных автоматов, если к этим множествам добавлять данный замкнутый класс[25]. В дальнейшем Д. Н. Бабиным для автоматов с k-значными входами и выходами были найдены достаточные условия на до-

[19] Кудрявцев В. Б. О мощности множеств предполных множеств некоторых функциональных систем, связанных с автоматами // Проблемы кибернетики. — 1965. — Вып. 13. — С. 45–74.

[20] Кратко М. И. Алгоритмическая неразрешимость проблемы распознавания полноты для конечных автоматов // ДАН СССР. — 1964. — Т. 155, № 1. — С. 35–37.

[21] Алешин С. В. Конечные автоматы и проблема Бернсайда о периодических группах // Мат. заметки. — 1972. — Вып. 3. — С. 319–328.

[22] Буевич В. А. Об алгоритмической неразрешимости распознавания А-полноты для о.-д. функций // Мат. заметки. — 1972. — Вып. 6. — С. 687–697.

[23] Летичевский А. А. Условия полноты для конечных автоматов // ВМ и МФ. — 1961. — № 4. С. 702–710.

[24] Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б. Функции алгебры логики и классы Поста / М.: Наука, 1966. — 120 с.

[25] 1)Бабин Д. Н. Разрешимый случай задачи о полноте автоматных функций // Дискретная математика. — 1992. — Т. 4, № 4. С. 41–55. 2)Бабин Д. Н. О классификации автоматных базисов Поста по разрешимости свойств полноты и А-полноты // Докл. РАН. — 1999. — Т. 367, № 4. — С. 439–441.v

бавки предполных классов из P_k, которые обеспечивают алгоритмическую разрешимость или сохраняют неразрешимость проверки полноты конечных множеств[26].

Неразрешимость задачи полноты в классе дефинитных автоматов, являющемся одним из содержательных автоматных подклассов, показана Д. Н. Жуком[27]. Оказалось, что этот класс содержит континуум предполных классов[28].

Исследованию свойств конечных автоматов посвящено значительное количество работ, имеющих важное теоретическое и прикладное значение. Отметим здесь работы в области защиты информации[29], построения датчиков псевдослучайных последовательностей[30], распознавания образов[31], разработки компьютерных систем обучения[32], прогнозирования[33], вычислительной техники[34], технической диагностики[35], исследования различных свойств автоматов и их

---

[26] Бабин Д. Н. О классификации базисов в P_k по разрешимости проблемы полноты для автоматов // Фундамент. и прикл. матем. — 2009. — Т. 15, № 3. С. 33–47.

[27] Жук Д. Н. О неразрешимости проблемы полноты для дефинитных автоматов // Интеллектуальные системы. — 2008. — Т. 12. — С. 211–228.

[28] Жук Д. Н. Континуальность множества предполных классов в классе дефинитных автоматов // Фундаментальная и прикладная математика. — 2009. — Т. 15, вып. 4. — С. 29—36.

[29] 1)Галатенко А. В. Автоматные модели защищенных компьютерных систем // Интеллектуальные системы. 2007. — Т. 11, вып. 1–4. — С. 403–418. 2)Носов В. А. О связи периодов состояний и периодов выходов автономных автоматов // Лесной вестник. — 2007. — Вып. 2. — С. 144-149.

[30] Михалев А. В., Нечаев А. А. Цикловые типы семейств полилинейных рекуррент и датчики псевдослучайных чисел // Математические вопросы криптографии. — 2014. — Т. 5, вып. 1, — С. 95–125.

[31] 1)Мазуренко И. Л. Автоматные методы распознавания речи: диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук. — М., 2001. — 119 с. 2)Бабин Д. Н., Мазуренко И. Л., Холоденко А. Б. Автоматные языки с частотным свойством естественных языков // Интеллектуальные системы в производстве. — 2013/ — № 1. С. 9–13.

[32] Алисейчик П. А., Вашик К., Кудрявцев В. Б., Перетрухин В. В., Строгалов А. С. Об автоматном моделировании процесса обучения // Дискретная математика — 1996. — Т. 8, вып. 4. — С. 3-–10.

[33] Гасанов Э. Э. Прогнозирование периодических сверхсобытий автоматами // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2015. — Т. 19, вып. 1. — С. 23–34.

[34] Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов / М.: Физматгиз, 1962. — 476 с.

[35] Богомолов А. М., Грунский И. С., Сперанский Д. В. Контроль и преобразования дискретных автоматов / М.: URSS, 1975. — 174 с.

обобщений[36]. Следует выделить теорию вероятностных автоматов[37]. Широкий спектр свойств конечных автоматов используется в образовательном процессе[38], а также[39].

Степень разработанности темы исследования.

Инициальный конечный автомат $\mathfrak{A}$ может быть задан шестеркой $(A, Q, B, \phi, \psi, \vec{q}_0)$[40], где A, Q и B – конечные множества, называемые входным алфавитом, алфавитом состояний и выходным алфавитом, соответственно, $\phi : A \times Q \to Q$, $\psi : A \times Q \to B$ – функции переходов и выходов, соответственно, $\vec{q}_0$ – некоторый элемент множества Q, называемый начальным состоянием. Обрабатывая последовательность α, $\alpha = \vec{a}(0), \vec{a}(1), \ldots, \vec{a}(t), \ldots$, состоящую из элементов входного алфавита, автомат $\mathfrak{A}$ последовательно переходит в состояния $\vec{q}(1), \vec{q}(2), \ldots, \vec{q}(t{+}1), \ldots$ и вычисляет выходные значения $\vec{b}(0), \vec{b}(1), \ldots, \vec{b}(t), \ldots$, где

$$\vec{q}(0) = \vec{q}_0,$$

$$\vec{q}(t+1) = \phi\left(\vec{q}(t), \vec{a}(t)\right),$$

$$\vec{b}(t) = \psi\left(\vec{q}(t), \vec{a}(t)\right)$$

[36] 1)Алексеев Д. В. Приближение функций нескольких переменных нейронными сетями // Фундамент. и прикл. матем. — 2009. — Т. 15, вып. 3. — С. 9–21. 2)Андреев А. Е., Часовских А. А. Автоматная сложность двуместных булевых базисов // Дискретная математика — 1996. — Т. 8, вып. 4. — С. 123-–133. 3)Ветренникова Е. В. Построение простейшей универсальной о.-д. функции // Математические вопросы кибернетики. — 1988. — Вып. 1. — С. 237–241. 4)Волков Н. Ю. Автоматная модель преследования // Интеллектуальные системы. — 2007.— Т. 11, вып. 1–4. — С. 749–752. 5)Елкин В. И., Высоцкий М. Н. О связи между декомпозициями автоматов и формальных грамматик // Моделирование, декомпозиция и оптимизация сложных динамических процессов. — 2011. — Т. 26, № 1. — С. 24-31. 6)Карацуба А. А. Решение одной задачи из теории конечных автоматов // УМН. — 1960. — Т. 15, Вып. 3. — С. 157–159. 7)Коршунов А. Д. О перечислении конечных автоматов // Проблемы кибернетики. — 1978. — Вып. 34. — С. 5–82. 8)Миронов А. М. Морфизмы реакции для автоматов в категориях: диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук. — М., 1992. — 151 с. 9)Пантелеев П. А. Об отличимости состояний автоматов // Дискретная математика. — 2003.— Т. 15, вып. 3. — С. 76–90. 10)Пантелеев П. А. Об отличимости состояний решетчатых автоматов // Интеллектуальные системы. — 2005.— Т. 8, вып. 1–4. С. 529–542. 11)Пантелеев П. А. Об отличимости состояний автомата при искажениях на входе // Интеллектуальные системы. — 2007.— Т. 11, вып. 1–4. С. 653–678. 12)Половников В. С. О некоторых характеристиках нейронных схем // Интеллектуальные системы. — 2004.— Т. 8, вып. 1–4. — С. 121–145. 13)Саломаа А. Аксиоматизация алгебры событий, реализуемых логическими сетями // Проблемы кибернетики. — М.: Наука, 1966. — Вып. 17. — С. 237–246.

[37] 1)Rabin M. O. Probabilistic automata // Information and Control, — 1963. — Vol. 6, № 3. — P. 230–245. 2)Бухараев Р. Г. Основы теории вероятностных автоматов / М: Наука, 1985. — 288 с. 3)Аблаев Ф. М. О сравнительной сложности вероятностных и детерминированных автоматов // Дискретная математика. — 1991. — Т. 3, № 2. С. 114–120.

[38] 1)Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. Сборник задач по дискретной математике // М.: Наука, 1977. — 368 с. 2)Гашков С. Б., Фролов А. Б. Дискретная математика / М.: Юрайт, 2018. — 448 с. 3)Алексеев В. Б., Ложкин С. А. Элементы теории графов, схем и автоматов // М.: Изд. отдел ф-та ВМиК МГУ, 2000. — 58 с.

[39] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов / М.: Наука, 1985. — 320 с.

[40] Там же.

для любого значения t, пробегающего множество целых неотрицательных чисел и называемого параметром времени.

Таким образом, автомат $\mathfrak{A}$ сопоставляет каждой бесконечной последовательности (сверхслову) α элементов входного алфавита сверхслово β,

$$\beta = \vec{b}(0), \vec{b}(1), \ldots, \vec{b}(t), \ldots,$$

из элементов выходного алфавита и задает ограниченно-детерминированную функцию[41]

$$f_{\mathfrak{A}} : A^{\infty} \to B^{\infty},$$

где через A^{∞} и B^{∞} обозначены множества сверхслов в алфавитах A и B, соответственно. Мы не отличаем автоматы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$, задающие равные ограниченно-детерминированные функции и в дальнейшем под конечным автоматом понимаем ограниченно-детерминированную функцию, которую он задает.

Пусть k – натуральное число, являющееся натуральной степенью некоторого простого числа p. Через E_k мы обозначаем конечное поле (поле Галуа) из k элементов. Конечный автомат $\mathfrak{A}$, задаваемый шестеркой $(A, Q, B, \phi, \psi, \vec{q}_0)$, называется линейным автоматом (ЛА) над полем E_k, если найдутся такие натуральные числа n, s, что $A = E_k^n$, $Q = E_k^s$ и $B = E_k$, а ϕ и ψ – линейные операторы k-значной логики. Таким образом, мы используем определение ЛА из работы[42], которое включает исследование оптимизации схемной реализации ЛА. Значительное число работ посвящено исследованиям свойств ЛА[43].

Линейные автоматы, отличающиеся лишь множествами фиктивных переменных, а на множествах существенных переменных задающие одну и ту же ограниченно-детерминированную функцию, мы называем равными. Предполагаем, что вместе с каким-либо линейным автоматом мы получаем все автоматы, равные ему.

Множество всех ЛА над полем E_k обозначим $\mathfrak{L}_k$. Ранее для множества $\mathfrak{L}_2$, рассматриваемого вместе с операциями композиции (переименования переменных, отождествления переменных, подстановки и обратной связи), были

---

[41] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов / М.: Наука, 1985. — 320 с.

[42] Гилл А. Линейные последовательностные машины / М.: Наука, 1974. — 288 с.

[43] 1)Streich W. J., Rösner Th. / Theorie linearer Automaten / Berlin.: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1978. — 158 p. 2)Родин С. Б. Линейно реализуемые автоматы // Дискретная математика. — 2017. — Т. 29, № 1. — С. 59–79.

найдены все предполные классы. Оказалось, что таких классов счетное число, но задача проверки конечных подмножеств из $\mathfrak{L}_2$ на полноту алгоритмически разрешима [2, 3].

Цели и задачи диссертации: Цели диссертации:

1. Найти все максимальные замкнутые по операциям композиции собственные подклассы в классах линейных автоматов над конечными полями.

2. Решить проблему существования алгоритма, проверяющего полноту конечных подмножеств этих классов и, при положительном решении, построить этот алгоритм.

3. Исследовать выразительные свойства операторов замыкания в классе линейных автоматов над полем из двух элементов через подмножества этих автоматов с естественными допущениями.

4. Разработать и исследовать алгебраические структуры, соответствующие классам линейных автоматов над конечными полями и связанных с ними классами.

Для достижения поставленных целей были сформулированы задачи, перечисленные далее.

1. Для классов $\mathfrak{L}_k$, рассматриваемых вместе с операцией аппроксимационного замыкания, найти все предполные классы. Построить алгоритм проверки аппроксимационной полноты конечных множеств ЛА.

2. Найти все максимальные собственные подалгебры в алгебре одноместных ЛА, сохраняющих нулевое сверхслово, с операциями, индуцированными операциями композиции в классе $\mathfrak{L}_k$.

3. Для конечных полей E_k найти все предполные классы в классах $\mathfrak{L}_k$ ЛА, рассматриваемых вместе с операциями композиции. Получить приведенную критериальную систему замкнутых классов.

4. Получить алгоритм проверки полноты конечных подмножеств из $\mathfrak{L}_k$ при использовании операций композиции.

5. Изучить структуру замкнутых по операциям композиции подклассов $\mathfrak{L}_2$, содержащих сумматор. Получить алгоритм проверки выразимости через конечные подмножества из $\mathfrak{L}_2$ при использовании сумматора и операций композиции. В рассматриваемом классе найти критерий выразимости сумматора.

6. При "естественных" ограничениях на подмножества из $\mathfrak{L}_2$ получить критерии аппроксимационной выразимости через эти подмножества.

7. Найти все предполные по операциям суперпозиции классы в $\mathfrak{L}_2$. Сравнить композиционный, суперпозиционный и аппроксимационный операторы замыкания на множестве $\mathfrak{L}_2$.

8. Используя технику, разработанную для ЛА, решить задачу полноты для линейных 2-адических автоматов, рассматриваемых вместе с операциями композиции, то есть найти в указанном классе все предполные подклассы, получить алгоритм проверки полноты конечных подмножеств.

Объект и предмет исследования. Объектом исследования является класс $\mathfrak{L}_k$ линейных автоматов над конечным полем из k элементов. Наиболее полно выразительные свойства линейных автоматов изучены для случая $k = 2$. Рассатривается также класс линейных 2-адических автоматов.

Предметом исследования являются собственные подклассы в $\mathfrak{L}_k$, замкнутые по операциям композиции, суперпозиции или оператора аппроксимационного замыкания, прежде всего, являющиеся максимальными по включению. В классе линейных 2-адических автоматов изучаются максимальные замкнутые по операциям композиции собственные подклассы.

Научная новизна диссертации. В работе решена проблема полноты для классов ЛА над конечными полями. Часть результатов обобщают полученное ранее решение проблемы полноты для ЛА над полем из двух элементов, рассматриваемых вместе с операциями композиции. При этом, в основном, сохранился подход к решению, использованному для указанного частного случая. Сначала были найдены все аппроксимационно предполные классы и получен алгоритм проверки аппроксимационной полноты конечных подмножеств. Затем, рассмотрена алгебра одноместных ЛА, сохраняющих нулевое сверхслово, вместе с операциями, индуцированными многоместным случаем. В этом классе найдена приведенная критериальная система, состоящая из всех максимальных собственных подалгебр. Эта система в общем случае конечного поля, не являющегося простым, содержит двухпараметрическую серию максимальных подалгебр, в отличии от рассмотренного ранее двузначного случая, для которого в соответствующую систему входят только однопараметрические серии.

Для построения множества всех предполных по операциям композиции классов в $\mathfrak{L}_k$, помимо обобщения ранее построенных для случая поля E_2 классов, понадобилось найти принципиально новые классы, возникающие в случае полей Галуа, не являющихся простыми. Разработанная автором техника, опирается на некоторые результаты о подкольцах трансцендентных расширений конечных полей, например, на теорему Люрота о структуре подполей трансцендентного расширения конечного поля, содержащих это конечное поле, но включает и более общие алгебраические построения. Для построения предполных классов в $\mathfrak{L}_k$ и нахождения инвариантов, сохраняемых при операциях композиции, потребовалось использовать известные теоремы о структуре полей Галуа и их множеств автоморфизмов.

Основным результатом работы следует считать нахождение множества всех предполных по операциям композиции классов для $\mathfrak{L}_k$, включающего пять серий, три из которых счетны, а два – конечны, и три отдельных класса. В работе получен алгоритм проверки полноты конечных систем по этим операциям, имеющий полиномиальную временную сложность, в оценку которой входит пять параметров.

Для случая $k = 2$ решена задача выразимости через подмножества с сумматором при использовании операций композиции (K-выразимости). Найдена структура замкнутых по операциям композиции классов, содержащих сумматор. Получен алгоритм проверки K-выразимости сумматора через конечные множества ЛА, а, в случае положительного решения, K-выразимости через это множество произвольного линейного автомата.

Известно[44], что для решения задачи аппроксимационной выразимости (A-выразимости) не требуется операция обратной связи. С использованием этого результата в настоящей работе решено несколько задач об A-выразимости. Сначала, в качестве вспомогательного результата, решена задача A-выразимости в алгебре одноместных ЛА, сохраняющих нулевое сверхслово, что позволило получить теорему об A-выразимости через множества ЛА, содержащих суще-

[44] Кудрявцев В. Б., Алешин С. В., Подколзин А. С. Введение в теорию автоматов / М.: Наука, 1985. — 320 с.

ственный автомат, а также все константы в своем аппроксимационном замыкании (A-замыкании). Также получен критерий A-выразимости констант через заданное множество ЛА, содержащее существенный автомат, позволяющий проверять это свойство для конечных множеств ЛА. Кроме перечисленного, в работе получены некоторые достаточные условия, позволяющие проверять A-выразимость ЛА через заданное конечное подмножество $\mathfrak{L}_k$. Показана конечнопорожденность невырожденных A-замкнутых множеств ЛА, содержащих сумматор, и, как следствие, их счетность.

Разработанная для ЛА техника позволила найти все предполные классы для $\mathfrak{L}_2$, рассматриваемого вместе с операциями суперпозиции, а также распространить использованный в работе подход на множество линейных 2-адических автоматов, рассматриваемое вместе с операциями композиции. Для этого класса также найдены все максимальные собственные подалгебры и получен алгоритм проверки полноты конечных подмножеств.

Теоретическая значимость работы. Работа имеет теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы для продолжения исследований проблемы полноты как в подклассах ЛА, так и в классах автоматов, не являющихся линейными, но обладающих некоторыми аналогичными свойствами. Выполненные в работе исследования проблем полноты и выразимости для классов ЛА могут определить содержание специальных курсов, семинаров и вычислительных практикумов.

Исследования, выполненные для трансцендентных расширений конечных полей могут быть использованы в алгебре при изучении подколец и, в частности, подполей этих расширений. Подкольца при этом должны обладать свойством замкнутости по операции “близкой” к операции деления, которая рассматривается в настоящей работе.

Практическая значимость работы. Практическая значимость работы определяется возможностью использования ее результатов для вычислений в полях Галуа, в системах кодирования, обнаруживающих и исправляющих ошибки, датчиках псевдослучайных чисел и других важных прикладных областях.

Результаты работы могут быть использованы для решения задач в области рекуррентных нейронных сетей, используемых, например, для моделирования ассоциативной памяти, при решении задач распознавания речи, машинного перевода и других задач, связанных с исследованиями в области искусственного интеллекта.

Методология и методы исследования. В работе используются методы дискретной математики, математической кибернетики, алгебры и математического анализа. В частности, использованы результаты по теории автоматов и теории функциональных систем, теории алгоритмов, теории полей Галуа и их расширений, теории колец.

Если для заданного конечнопорожденного класса дискретных функций существует алгоритм проверки полноты конечных подмножеств, то этот алгоритм может быть получен путем нахождения всех предполных подклассов этого класса. Соответствующий подход был использован, например, в случае классов конечнозначных логик[45], для других классов, а также в настоящей работе.

Автором были исследованы вспомогательные алгебры с операциями, имеющими меньшие ограничения, чем операции композиции в рассматриваемых классах ЛА. Далее решение осуществлялось путем переноса свойств вспомогательных подалгебр на классы $\mathfrak{L}_k$ с изменениями, позволяющими преодолеть возникающие при этом ограничения. Следовательно, для решения проблемы полноты в классах ЛА над конечными полями автором была неоднократно использована редукция к связанным с ними алгебраическим структурам, что и составило основное содержание метода, использованного в настоящей работе.

Положения, выносимые на защиту:

1. В соответствии с существующими подходами к изучению функциональных систем, наиболее важной их характеристикой является структура предполных классов. Так, для классов конечнозначных логик множества предполных классов конечны, а в классе всех конечных автоматов множество предполных классов континуально. В настоящей работе для всех классов ЛА над конечными полями, рассматриваемых вместе с операциями композиции, являющимися содержательными подклассами соответствующих классов конечных автоматов, найдены все предполные классы, множества которых счетны.

2. Несмотря на бесконечность множества предполных классов, составляющих приведенную критериальную систему в классе ЛА, для конечных подмножеств таких автоматов получен алгоритм проверки полноты. Этот

[45] 1)Post E. L. The two-valued iterative systems of mathematical logic //Annals of Mathematics studies / Princeton: Princeton University Press, 1941. — № 5, —122 p. 2)Post E. L. Introduction to a General Theory of Elementary Propositions // American Journal of Mathematics. — 1921. — Vol. 43, No 3. — P. 163–185. 3)Rosenberg I. G. The number of maximal closed classes in the set of functions over a finite domain // Journal of Combinatorial Theory, — 1973. — Vol. 14. — P. 1–7.

алгоритм имеет полиномиальную временную сложность от нескольких параметров.

3. Основу используемой техники составляют методы, изложенные в книге[46]. В настоящей работе разработана техника, позволяющая при определенных условиях сводить исследования операций над многоместными ЛА к операциям в алгебре одноместных ЛА. При этом используется разложение изучаемых автоматов в сумму одноместных. Элементы этой алгебры одноместных ЛА, сохраняют нулевое сверхслово и составляют подкольцо трансцендентного расширения поля Галуа, которое обозначено через $E'_k(\xi)$. В этой алгебре, рассматриваемой вместе с операциями сложения и умножения, а также некоторой частичной операцией “ослабленного деления”, найдены все максимальные подалгебры. В случае простого поля максимальные собственные подалгебры естественным образом группируются в две однопараметрические серии, а, в противном случае, при наличии одного непараметризованного класса, в две однопараметрические серии и одну двупараметрическую.

   Алгебра $E'_k(\xi)$ используется как при решении проблемы K-полноты в $\mathfrak{L}_k$, так и при исследовании вопросов K- и A-выразимости в $\mathfrak{L}_2$.

4. В классе $\mathfrak{L}_2$ решена проблема K-выразимости через конечные множества, содержащие сумматор, а также задача выразимости сумматора через такие множества. Для этого в алгебре $E'_2(\xi)$ выделено счетное семейство $R_i^{(1)}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, замкнутых классов, каждый из которых не содержит единицу. Каждому K-замкнутому множеству ЛА, содержащему сумматор, соответствует (в некотором смысле) единственное замкнутое подмножество в $E'_2(\xi)$, которое не содержится ни в одном из классов семейства $R_i^{(1)}$ или, что равносильно, не содержит единицу. Найдена структура всех таких замкнутых подмножеств множества $E'_2(\xi)$, которая зависит от наличия в замкнутом подмножестве дроби с положительной степенью. Это позволило определить структуру конечнопорожденных невырожденных K-замкнутых классов, содержащих сумматор от трех переменных.

5. В структуре замкнутых классов алгебры $E'_2(\xi)$ найдена подструктура замкнутых по операциям одноместного аппроксимационного замыкания, $A^{(1)}$-

[46] Гилл А. Линейные последовательностные машины / М.: Наука, 1974. — 288 с.

замыкания, классов, которая является счетной, а каждый ее элемент конечнопорожден. Получен алгоритм проверки включения $\mu \in A^{(1)}(M)$ для любого конечного подмножества M алгебры $E_2'(\xi)$ и любого ее элемента μ.

6. Получен алгоритм проверки A-выразимости через конечные подмножества ЛА из $\mathfrak{L}_2$, содержащие существенный автомат (автомат, имеющий две или более непосредственных переменных, то есть переменных, от значения которых в некоторый момент времени значение выхода зависит в тот же момент времени), а также все константы в A-замыкании. Показано, что любое невырожденное множество ЛА M содержит конечное подмножество M' такое, что A-выразимость всех констант через M равносильна их A-выразимости через M'. Найден алгоритм проверки A-выразимости всех констант через конечные множества ЛА.

7. Получены некоторые достаточные условия для возможности проверки A-выразимости в $\mathfrak{L}_2$ через конечные множества ЛА. При некоторых "естественных" ограничениях на множества ЛА получено необходимое и достаточное условие совпадения операторов K-замыкания и A-замыкания.

8. Для множества $\mathfrak{L}_2$ ЛА вместе с операциями суперпозиции найдены все предполные классы, количество которых оказалось счетным. Найденное множество предполных классов составляет приведенную критериальную систему по операциям суперпозиции.

9. Проблема полноты решена для класса линейных 2-адических автоматов, рассматриваемых вместе с операциями композиции. В этом классе также построена счетная критериальная система, состоящая из всех предполных классов. Здесь, как и в случае ЛА, используется возможность декомпозиции автоматов и перехода к исследованию класса одноместных автоматов.

Степень достоверности результатов. Все результаты диссертации математически строго доказаны.

Апробация результатов. Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и научных семинарах:

- XIII Международном научном семинаре «Дискретная математика и ее приложения» имени академика О. Б. Лупанова (Москва, 2019 г.)

- научной конференции “Ломоносовские чтения” (Москва, 2018 г., 2016 г., 2014 г., 2013 г., 2012 г., 2011 г., 2010 г.)
- XI международной конференции "Интеллектуальные системы и компьютерные науки"(Москва, 2016 г.)
- XII Международном научном семинаре «Дискретная математика и ее приложения» имени академика О. Б. Лупанова (Москва, 2016 г.)
- XI Международном научном семинаре «Дискретная математика и ее приложения» имени академика О. Б. Лупанова (Москва, 2012 г.)
- международной конференции «Современные проблемы математики, механики и их приложений», посвященной 70-летию ректора МГУ академика В. А. Садовничего (Москва, 2009 г.)

Результаты диссертации неоднократно докладывались на специальных семинарах механико-математического факультета МГУ:

- “Теория автоматов” под руководством заведующего кафедрой МаТИС профессора В. Б. Кудрявцева (2012 – 2019 гг.)
- “Математические вопросы кибернетики” под руководством профессора О. М. Касим-Заде (2019 г.)
- “Дискретная математика и математическая кибернетика” под руководством профессора С. А. Ложкина и профессора В. Б. Алексеева (2019 г.)
- “Вопросы сложности алгоритмов поиска” под руководством профессора Э. Э. Гасанова и научных сотрудников В. В. Осокина, Ю. С. Шуткина, Г. В. Калачева (2017 г.)
- “Дискретный анализ” под руководством профессора С. В. Алешина, профессора В. А. Буевича и старшего научного сотрудника М. В. Носова (2016 г.)

Публикации. Материалы диссертации опубликованы в 22 работах автора, из них 15 статей [1 — 15] – в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 01.01.09

– Дискретная математика и математическая кибернетика, кроме того, 1 статья [16] опубликована в издании из Перечня ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, выпускаемых в Российской Федерации, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени доктора наук, индексируемом РИНЦ.

Личный вклад автора. Результаты, представленные теоремами в диссертационной работе и автореферате, помимо имеющих ссылки на работы других авторов, положения, выносимые на защиту, получены автором самостоятельно. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась без соавторов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 5 глав, состоящих в совокупности из 18 параграфов, заключения, списка сокращений и условных обозначаний и списка литературы. Общий объем диссертации 268 страниц, из них 268 страницы текста, рисунков нет. Список литературы включает 102 наименования на 9 страницах.

Краткое содержание работы

В параграфе 1 главы 1 введены необходимые понятия и обозначения. Кольцо формальных степенных рядов переменной ξ с коэффициентами из E_k и операциями сложения и умножения мы обозначаем $R_k(\xi)$. Подкольцо этого кольца, состоящее из периодических (с предпериодом) рядов обозначаем $E'_k(\xi)$. Это подкольцо изоморфно кольцу отношений многочленов из $E_k[\xi]$, знаменатели которых не делятся на ξ. Поэтому мы не отличаем указанные подкольца. Линейный автомат от n переменных реализует функцию из $R_k^n(\xi)$ в $R_k(\xi)$ и отождествляется нами с этой функцией.

В работе рассматриваются три набора операций замыкания: операции суперпозиции, композиции и аппроксимационного замыкания, а также приведены две теоремы, которые содержатся в работе[47] и определяют понимание ЛА, как преобразователей рядов. Эти теоремы доказаны с использованием техники работы с рядами.

Теорема 1.1.1.[48] *Для каждого f, $f \in \mathfrak{L}_k$, от переменных x_1, x_2, …, x_n найдутся элементы μ_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, кольца $E'_k(\xi)$, что выполнено равенство:*

[47] Гилл А. Линейные последовательностные машины / М.: Наука, 1974. — 288 с.

[48] Там же.

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i + \mu_0. \tag{1}$$

Теорема 1.1.2.[49] *Для любых элементов μ_i кольца $E'_k(\xi)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ найдется ЛА f, для которого выполнено разложение*

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i + \mu_0.$$

В §2 главы 1 найдены все A-предполные классы, что составляет результат теоремы 1.2.1. Как и в случае поля E_2, состоящего из двух элементов, в общем случае проверка A-полноты осуществляется на словах длины 2. Для случая поля, не являющегося простым, мы получили серию A-предполных классов, каждый из которых соответствует определенному максимальному собственному подполю конечного поля E_k.

Через T_a обозначим множество всех ЛА, сохраняющих в начальный момент времени элемент a поля E_k. Множество V_1 состоит из ЛА, имеющих не более одной непосредственной переменной. ЛА $f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$, для которого имеет место разложение (1), содержится в множестве V_p, $V_p \subset \mathfrak{L}_k$, в точности тогда, когда $\sum_{i=1}^{n} \mu_i(0) = 1$, $n = 1, 2, \ldots$. Множество M_1 состоит из ЛА f, выход которого в состоянии $\vec{q}(1)$ не зависит от входов в начальный момент времени.

Положим в случае простого k:

$$J_k^A = \left\{ \ T_a, \ \ V_1, \ \ V_p, \ \ M_1 \ \mid \ a \in E_k \ \right\}.$$

В случае k, не являющимся простым, через P_s обозначим множество всех ЛА f, свободные члены коэффициентов при переменных в разложении (1) которого содержатся в некотором максимальном по включению подполе E_{k_s} поля E_k, не совпадающему с E_k. Пусть E_{k_1}, E_{k_2}, ..., E_{k_l} — все максимальные по включению подполя в E_k, не совпадающие с E_k. Положим в рассматриваемом случае:

$$J_k^A = \left\{ \ T_a, \ \ V_1, \ \ V_p, \ \ M_1, \ \ P_s \ \mid \ a \in E_k, \ \ s \in \{1, 2, \ldots, l\} \right\}.$$

[49] Гилл А. Линейные последовательностные машины / М.: Наука, 1974. — 288 с.

Теорема 1.2.1. *Множество* J_k^A *является приведенной* A*-критериальной системой в* $\mathfrak{L}_k$.

Для построения множества предполных классов в $\mathfrak{L}_k$ в §3 главы 1 найдено множество максимальных собственных подклассов в $E'_k(\xi)$, замкнутых относительно операций сложения, умножения и операции fb, определенной на парах μ_1, μ_2, в точности если $\mu_2(0) = 0$. При этом $\mathrm{fb}\,(\mu_1, \mu_2) = \frac{\mu_1}{1-\mu_2}$. Замыкание множества M по перечисленным операциям мы обозначаем $K^{(1)}(M)$.

Через $R_0^{(1)}$ обозначим множество дробей из $E'_k(\xi)$, степень числителя которых меньше степени знаменателя.

Перенумеруем все приведенные неприводимые многочлены кольца[50] $E_k[\xi]$: $p_1, p_2, \ldots$, так, что $p_1 = \xi$. Множество всех дробей из $E'_k(\xi)$, несократимый вид которых имеет числитель, делящийся на p_i, обозначим $R_i^{(1)}$.

Множество всех дробей μ из $E'_k(\xi)$, для которых выполнено включение $\mu(0) \in E_{k_s}$ обозначим $P_s^{(1)}$.

Множество $M_1^{(1)}$ состоит из всех μ, $\mu \in E'_k(\xi)$, для которых имеет место включение: $\mu - \mu(0) \in \xi^2 E'_k(\xi)$.

Через Ω_k обозначим множество всех автоморфизмов поля E_k. Пусть $\mu \in E'_k(\xi)$. Дробь $\mu'(\xi)$, $\mu'(\xi) = \mu(1/\xi)$, содержится в $E'_k(\xi)$ в точности тогда, когда степень числителя дроби $\mu(\xi)$ не превосходит степени ее знаменателя. Для заданного автоморфизма ω, $\omega \in \Omega_k$, дробь μ включаем в множество $M_{0,\omega}$, если $\mu'(\xi) \in E'_k(\xi)$ и $\mu'(0) = \omega(\mu(0))$.

Если знаменатель дроби μ, $\mu \in E'_k(\xi)$, не делится на многочлен p_i, $i \in \{2, 3, \ldots\}$, то в кольце $E'_k(\xi)$ для μ имеет место формула для деления с остатком:

$$\mu = p_i \mu' + u',$$

где $\mu' \in E'_k(\xi)$, $u' \in E_k[\xi]$ и $\deg u' < \deg p_i$. Для заданного автоморфизма ω, $\omega \in \Omega_k$, множество $M_{i,\omega}^{(1)}$ состоит из таких μ, что $u' = \omega(\mu(0))$.

Положим в случае поля E_k, не являющегося простым:

$$\begin{aligned} J_k^{(1)} \;=\; \Big\{ \; & M_{i,\omega}^{(1)}, M_1^{(1)}, R_i^{(1)}, P_s^{(1)} \;\mid \\ & \omega \in \Omega_k, i = 0, 2, 3, \ldots, s = 1, 2, \ldots, l \;\Big\}. \end{aligned}$$

В случае простого k имеем лишь один его тождественный автоморфизм

[50] Ван дер Варден Б. Л. Алгебра / М.: Наука, 1976. — 648 с.

id. В этом случае, обозначая множество $M_{i,\mathrm{id}}^{(1)}$ через $M_i^{(1)}$, имеем:

$$J_k^{(1)} = \left\{ M_i^{(1)}, R_i^{(1)} | i = 0, 1, \dots \right\}.$$

Расширение поля[51] F множеством M обозначаем $F(M)$. Если M состоит из единственного элемента μ, то вместо $F(\{\mu\})$ мы можем использовать обозначение $F(\mu)$.

Теорема 1.3.1. *Если для заданного множества M, $M \subseteq E_k'(\xi)$, и любого Θ, $\Theta \in J_k^{(1)}$, выполнено: $M \not\subseteq \Theta$, то*

$$E_p(M) = E_k(\xi).$$

Теорема 1.3.2. *Множество $J_k^{(1)}$ является приведенной $K^{(1)}$-критериальной системой $K^{(1)}$-замкнутых классов. Кроме этого, множество $J_k^{(1)}$ состоит из $K^{(1)}$- предполных классов и все $K^{(1)}$-предполные классы содержатся в $J_k^{(1)}$.*

В главе 2 найдены все предполные классы в $\mathfrak{L}_k$, в терминах предполных классов сформулирован алгоритм проверки полноты конечных множеств.

В §1 этой главы доказаны теоремы 2.1.1 и 2.1.2, позволяющие использовать результаты главы 1 для исследования K-полноты множеств ЛА.

Через J_k' обозначим следующее множество:

$$\{\ V_1,\ \ V_p,\ \ T_a \ \mid\ a \in E_k\ \}.$$

Если для линейного автомата f имеет место разложение (1), то множество,

$$\{\ \mu_i \ \mid\ i = 1, 2, \dots, n\ \},$$

состоящее из коэффициентов при переменных этого разложения, обозначим $U(f)$. Для множества M, $M \subseteq \mathfrak{L}_k$, положим: $U(M) = \cup_{f \in M} U(f)$.

Теорема 2.1.1. *Для множества M, $M \subseteq \mathfrak{L}_k$, равенство*

$$K(M) = \mathfrak{L}_k$$

выполнено в точности тогда, когда имеют место следующие два свойства:

---

[51] Ван дер Варден Б. Л. Алгебра / М.: Наука, 1976. — 648 с.

$$\forall \Theta,\ \ \Theta \in J'_k,\ \ \textit{выполнено: } M \not\subseteq \Theta,$$

$$U(K(M)) = E'_k(\xi).$$

Через $\tilde{M}_0^{(1)}$ обозначим множество, состоящее из всех дробей кольца $E'_k(\xi)$, степень числителя которых не превосходит степени знаменателя, а для $j \in \{2, 3, \dots\}$ через $\tilde{M}_j^{(1)}$ обозначим множество всех дробей из $E'_k(\xi)$, знаменатель которых не делится на p_j.

Теорема 2.1.2. *Множество M, $M \subseteq \mathfrak{L}_k$, является K-полным в $\mathfrak{L}_k$ тогда и только тогда, когда имеет место:*

$$\forall \Theta,\ \ \Theta \in J'_k,\ \ \textit{выполнено: } M \not\subseteq \Theta,$$

а также:

$$\forall \Theta, \Theta \in J_k^{(1)}, \quad U(M) \not\subseteq \Theta,$$

и

$$\forall j, j = 0, 2, 3, \dots, \quad U(K(M)) \not\subseteq \tilde{M}_j^{(1)}.$$

В §2 главы 2 найдены все предполные классы в $\mathfrak{L}_k$. В случае k, не являющегося простым, для каждого $\Theta^{(1)}$ из множества

$$\left\{\ M_{i,\omega}^{(1)}, M_1^{(1)}, P_s^{(1)}\ \mid\ \omega \in \Omega_k, i = 0, 2, 3, \dots, s = 1, 2, \dots, l\ \right\}$$

положим:

$$\Theta = \left\{\ f\ \mid\ f \in \mathfrak{L}_k,\ \ U(f) \subset \Theta^{(1)}\ \right\}.$$

Тем самым определено множество классов J''_k:

$$J''_k = \{\ M_{i,\omega}, M_1, P_s\ \mid\ \omega \in \Omega_k, i = 0, 2, 3, \dots, s = 1, 2, \dots, l\ \}.$$

В случае простого k для каждого i, $i \in \{0, 1, \dots\}$, определим множество M_i

$$M_i = \left\{\ f\ \mid\ f \in \mathfrak{L}_k,\ \ U(f) \subset M_i^{(1)}\ \right\},$$

и множество J''_k,

$$J''_k = \{ \ M_i \ | \ i = 0, 2, 3, \ldots \ \} .$$

Далее положим:

$$R^e_j \ = \ \Big\{ \ f \ | \ f \in \mathfrak{L}_k, \ \ f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i + \mu_0, \\ \forall i, i = 1, 2, \ldots, n, \ \text{ если } \ x_i \ \text{— единственная существенная} \\ \text{переменная ЛА } \ f, \ \text{ то } \ \mu_i \in \tilde{M}^{(1)}_j, \\ \text{в противном случае: } \ \mu_i \in R^{(1)}_j \ \Big\} ,$$

$$R^d_j \ = \ \Big\{ \ f \ | \ f \in \mathfrak{L}_k, \ \ f\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i + \mu_0, \\ \forall i, i = 1, 2, \ldots, n, \ \text{ если } \ x_i \ \text{— единственная непосредственная} \\ \text{переменная ЛА } \ f, \ \text{ то } \ \mu_i \in \tilde{M}^{(1)}_j, \\ \text{в противном случае: } \ \mu_i \in R^{(1)}_j \ \Big\} ,$$

$j = 0, 2, 3, \ldots,$

$$J'''_k = \{ \ R^e_j, R^d_j \ | \ j = 0, 2, 3, \ldots \ \} ,$$

$$J_k = J'_k \cup J''_k \cup J'''_k .$$

Теорема 2.2.1. *Множество K-замкнутых классов J_k является K-критериальной системой в $\mathfrak{L}_k$, то есть для любого подмножества M множества $\mathfrak{L}_k$ его K-полнота в $\mathfrak{L}_k$ равносильна невключению в каждый K-замкнутый класс множества J_k.*

Теорема 2.2.2. *Множество J_k является приведенной K-критериальной системой.*

Теорема 2.2.3. *Множество J_k состоит из K-предполных классов в $\mathfrak{L}_k$ и содержит все K-предполные классы.*

В §3 главы 2 мы приводим алгоритм проверки K-полноты конечных множеств ЛА и оцениваем его сложность.

Пусть множество M ЛА содержит r элементов, количество переменных каждого из которых не превосходит r, а наибольшая степень дроби из $U(M)$ не больше d. Через m обозначим $\log_p k$.

Теорема 2.3.1. *Полученный алгоритм проверки полноты конечных подмножеств ЛА корректен и может быть реализован с временной сложностью*

$$O\left(rnk\right)+O\left(rnd^2m\right)$$

для поля E_k, не являющегося простым. В случае простого поля E_k этот алгоритм может быть реализован с временной сложностью

$$O\left(rnk\right)+O\left(rnd^2\right).$$

В главах 3 — 5 рассматривается класс ЛА над полем E_2. Вместо обозначения $\mathfrak{L}_2$ мы используем $\mathfrak{L}$, а вместо $E'_k(\xi)$ — используем $\mathfrak{L}_0^{(1)}$, подчеркивая автоматное «происхождение» этого множества.

В главе 3 решены некоторые задачи выразимости в $\mathfrak{L}_0^{(1)}$, связанные с наличием сумматора или его получением.

В §1 этой главы введены необходимые понятия и обозначения.

Положим:

$$M^{(1)}(\mu,u_0)=\Big\{a_0+\mu u_0(\mu)\frac{u(\mu)}{v(\mu)}|$$
$$a_0\in E_2, u(\xi)\in E_2[\xi], v(\xi)\in 1+\xi E_2[\xi], (u_0(\xi),v(\xi))=1\Big\},$$

$$P^{(1)}(\mu,u_0)=\Big\{a_0+\mu u_0(\mu)\frac{u(\mu)}{v(\mu)}|a_0\in E_2, u(\xi)\in E_2[\xi],$$
$$v(\xi)\in 1+\xi E_2[\xi], (u_0(\xi),v(\xi))=1,$$
$$\deg u(\xi)\le \deg v(\xi)-2(1+\deg u_0(\xi))\Big\},$$

$$R^{(1)}(\mu,u_0)=\Big\{u_0(\mu)\frac{u(\mu)}{v(\mu)}|$$
$$u(\xi)\in E_2[\xi], v(\xi)\in 1+\xi E_2[\xi], (u_0(\xi),v(\xi))=1\Big\},$$

где $\mu\in\xi\mathfrak{L}_0^{(1)}$, $u_0\in E_2[\xi]\setminus\{0\}$.

Множество $R^{(1)}(\xi,p_i)$, как ранее, так и в дальнейшем, мы обозначаем $R_i^{(1)}$,

$i = 1, 2, \ldots$.

В §2 главы 3 получена структура $K^{(1)}$-замкнутых классов в $\mathfrak{L}_0^{(1)}$, содержащих сумматор (теорема 3.2.1), а также найден критерий вхождения элемента 1 в замкнутый класс из $\mathfrak{L}_0^{(1)}$ (теорема 3.2.2).

Теорема 3.2.1. *1. Пусть*

$$M \subseteq \mathfrak{L}_0^{(1)}, \quad K^{(1)}(M) = M, \quad M \setminus E_2 \neq \emptyset,$$
$$M \not\subseteq R_i^{(1)}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots.$$

Тогда найдутся μ, u_0, T, $\mu \in \xi\mathfrak{L}_0^{(1)}$, $u_0 \in 1+\xi E_2[\xi]$, $T \in \mathbb{N}$, *что выполнено одно из двух следующих соотношений:*

Случай 1.

$$M^{(1)}(\mu, (\xi u_0)^T) \subseteq M \subseteq M^{(1)}(\mu, u_0) \tag{2}$$

Случай 2.

$$P^{(1)}(\mu, (\xi u_0)^T) \subseteq M \subseteq M_0^{(1)}(\mu) \cap M^{(1)}(\mu, u_0) \tag{3}$$

2. Число $K^{(1)}$*-замкнутых в* $\mathfrak{L}_0^{(1)}$ *классов* M*, удовлетворяющих включениям (2) или включениям (3) конечно.*

Теорема 3.2.2. *Соотношение*

$$1 \in K^{(1)}(M)$$

выполнено тогда и только тогда, когда для каждого i, $\quad i = 0, 1, 2, \ldots,$

$$M \not\subseteq R_i^{(1)}.$$

В §3 главы 3 получен алгоритм проверки выразимости через конечное множество ЛА, содержащее сумматор в замыкании.

Множество ЛА, реализующих константы, мы обозначаем $\mathfrak{L}_c$. Если $M \subseteq \mathfrak{L}_0^{(1)}$ и $C \subseteq \mathfrak{L}_c$, то множество

$$\left\{ \sum_{\substack{\gamma \in C', \\ \mu \in K^{(1)}(M)}} \mu\gamma \quad | \quad C' \subset C, \ |C'| < \infty \right\}$$

обозначаем $S(M,C)$.

Теорема 3.3.1. *Существует алгоритм, который для любых μ', γ', M, C,*

$$\mu' \in \mathfrak{L}_0^{(1)}, \quad \gamma' \in \mathfrak{L}_c, \quad M \subset \mathfrak{L}_0^{(1)}, \quad C \subset \mathfrak{L}_c,$$

$$|M| < \infty, \quad |C| < \infty, \quad 1 \in K^{(1)}(M),$$

определяет справедливость соотношений

$$\mu' \in K^{(1)}(M),$$

$$\gamma' \in S(M,C).$$

Теорема 3.3.2. *Проблема выразимости в $\mathfrak{L}$ через конечные системы, содержащие сумматор в замыкании, алгоритмически разрешима.*

Алгоритм проверки выразимости сумматора через конечные множества ЛА содержится в §4 главы 3. Если для линейного автомата выполнено разложение (1), то через $C(f)$ обозначим константную часть $\{\mu_0\}$ этого разложения, а для $M \subseteq \mathfrak{L}$ положим: $C(M) = \cup_{f\in M} C(f)$.

Из множества J_2, которое определялось в главе 2, удалим классы, содержащие сумматор $x_1 + x_2$, получим множество J',

$$J' = \left\{\ T_1,\ \ V_1,\ \ V_2,\ \ R_j^e,\ \ R_j^d\ \mid\ j = 0, 2, 3, \dots\ \right\}.$$

Множество, состоящее из всех ЛА f, для которых $C(f) = 0$, обозначим $\mathfrak{L}_0$.

Теорема 3.4.1. *Пусть $M \nsubseteq \Theta$ для любого Θ,$\Theta \in J' \setminus \{T_1\}$, $|M| < \infty$,*

$$C(M) = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s\},$$

$$C(M \setminus V_2) = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k\}.$$

Условия 1-4 эквивалентны.

1. Найдутся β_1, β_2, …, β_s *из* $K^{(1)}(U(M))$,

$$\sum_{i=1}^{s} \beta_i \gamma_i = 0^\infty$$

и

$$\left| \left\{ \ i \ \mid \ \beta_i \in 1 + \xi \mathfrak{L}_0^{(1)}, \ \ i = 1, 2, \ldots, k \ \right\} \right|$$

нечетно.

2.

$$(K(M) \cap \mathfrak{L}_0) \setminus V_2 \neq \emptyset.$$

3.

$$0 \in K(M).$$

4.

$$x_1 + x_2 \in K(M).$$

Теорема 3.4.2. *Существует алгоритм, проверяющий для любой пары конечных множеств* M, M_1, $\quad M \subset \mathfrak{L}$, $\quad M_1 \subset \mathfrak{L}$, $\quad$ *справедливо ли включение:*

$$M_1 \cup \{x_1 + x_2\} \subseteq K(M).$$

В теореме 3.4.3 получена структура константных частей конечнопорожденных K-замкнутых классов, содержащих трехместный сумматор в замыкании в каждом из двух случаев, выделенных в теореме 3.2.1.

В четвертой главе при некоторых естественных ограничениях решены задачи A-выразимости в $\mathfrak{L}$.

В §1 главы 4 рассматривается задача $A^{(1)}$-выразимости в классе $\mathfrak{L}_0^{(1)}$. Для $\mu \in \xi \mathfrak{L}_0^{(1)} \setminus \{0\}$ через $E_2[\mu]$ будем обозначать кольцо многочленов с коэффициентами из E_2, в которых μ является переменной. Класс одноместных ЛА, которые могут быть построены из сумматора и автомата μ с использованием операций композиции, мы обозначаем $\mathfrak{L}_0^{(1)}(\mu)$.

Теорема 4.1.1. *Для любого* M,

$$M \subseteq \mathfrak{L}_0^{(1)}, \ \ M \setminus E_2 \neq \emptyset,$$

найдется μ, $\mu \in \xi\mathfrak{L}_0^{(1)}$, $\mu \neq 0$, найдется целое неотрицательное число k' и найдется множество многочленов M', $M' \subset E_2[\mu]$, степень каждого из которых меньше k', такие, что выполнено равенство

$$A^{(1)}(M) = M' + \mu^{k'}\mathfrak{L}_0^{(1)}(\mu). \tag{4}$$

Линейные автоматы из $\mathfrak{L}_0^{(1)}$, которые могут быть заданы суммой ряда степеней некоторого μ, $\mu \in \xi\mathfrak{L}_0^{(1)}$, с коэффициентами из E_2, составляют множество $R_2(\mu_0) \cap \mathfrak{L}_0^{(1)}$.

Теорема 4.1.2. *Пусть $\mu_0 \in \xi\mathfrak{L}_1^0 \setminus \{0\}$. Для ЛА $\mu \in \xi\mathfrak{L}_1^0 \setminus \{0\}$ соотношение*

$$R_2(\mu_0) \cap \mathfrak{L}_0^{(1)} = \mathfrak{L}_0^{(1)}(\mu)$$

выполнено в точности тогда, когда μ – дробь минимальной степени такая, что имеют место следующие два свойства.

1. $$\mu_0 \in \mathfrak{L}_1^0(\mu),$$

2. *Если представить μ_0 в виде $\frac{u(\mu)}{v(\mu)}$, где $u(\xi)$ и $v(\xi)$ – элементы $E_2[\xi]$, то $u(\xi) \in \xi + \xi^2 E_2[\xi]$.*

Теорема 4.1.3. *Существует алгоритм, проверяющий по данным μ' и M, $\mu' \in \mathfrak{L}_1^0$, $M \subset \mathfrak{L}_1^0$, $|M| < \infty$, справедливость соотношения*

$$\mu' \in A^{(1)}(M).$$

Теорема 4.1.4. *Любое $A^{(1)}$-замкнутое множество M, $M \subseteq \mathfrak{L}_1^0$, является конечнопорожденным. Число $A^{(1)}$-замкнутых множеств в $\mathfrak{L}_1^0$ счетно.*

Подмножество $\mathfrak{L}$ называется S-системой, если $M \setminus V_1 \neq \emptyset$ и $\mathfrak{L}_c \subset A(M)$. В параграфе 2 главы 4 рассматриваются вопросы A-выразимости через S-системы.

Теорема 4.2.1. *Пусть M является S-системой. Тогда включение $f \in A(M)$ выполнено в точности тогда, когда*

$$U(f) \subseteq A^{(1)}(U(M)).$$

Теорема 4.2.2. *Задача A-выразимости через конечные S-системы алгоритмически разрешима.*

Автомат из множества $\mathfrak{L} \setminus V_1$ называется существенным. В §3 главы 4 получен критерий выразимости констант для множества ЛА, содержащего существенный автомат. Этот критерий позволяет для конечного множества ЛА определять, является ли оно S-системой.

Пусть $M \subset \mathfrak{L}$, $U(M) \nsubseteq E_2$. Тогда существует наибольшее натуральное число r_0 такое, что для любого μ, $\mu \in U(M)$, выполнено:

$$\mu + \mu(0) \in \xi^{r_0} \mathfrak{L}_0^{(1)}.$$

Число r_0 мы называем 1-глубиной множества M. Если для линейного автомата f имеет место разложение (1) и $\mu_0 = \sum_{t=0}^{\infty} a_0(t)\xi^t$, то через $V^{(r_0)}(f)$ мы обозначаем вектор $(b, a_0, a_1, \ldots, a_{r_0-1})$, где $b = 0$, если f имеет нечетное число непосредственных переменных, и $b = 1$, в противном случае. Для множества M ЛА полагаем:

$$V^{(r_0)}(M) = \bigcup_{f \in M} \left\{ V^{(r_0)}(f) \right\}.$$

Замыкание множества $\hat{V}$ векторов из $E_2^{r_0+1}$ по операции сложения обозначим $S(\hat{V})$.

Теорема 4.3.1. *Пусть $M \subseteq \mathfrak{L}$, M содержит существенный ЛА и $U(M) \nsubseteq E_2$. Множество $A(M)$ содержит все константы (т.е. $\mathfrak{L}_c \subseteq A(M)$) в точности тогда, когда $S(V^{(r_0)}(M)) = E_2^{r_0+1}$, где через r_0 обозначена 1-глубина множества M.*

Теорема 4.3.2. *Задача проверки, является ли конечное множество ЛА S-системой, алгоритмически разрешима.*

В §4 главы 4 получены некоторые достаточные условия, обеспечивающие возможность проверки A-выразимости через заданное конечное множество ЛА.

Множество ЛА называется S_0-системой, если оно содержит существенный ЛА, а в его K-замыкание входит нулевая константа. Множество M ЛА называется вырожденным, если $U(M) \subseteq E_2$.

Замыкание по операции сложения множества C констант из $\mathfrak{L}_c$ мы обозначаем $\Sigma(C)$.

Теорема 4.4.1. *Пусть M - конечная вырожденная S_0-система и*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathfrak{L}.$$

Включение $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A(M)$ выполнено в точности тогда, когда

1. *$U(f) \subseteq E_2$ и*

2. *$C(f) \subseteq \Sigma(C(M))$.*

Пусть $f \in \mathfrak{L}$. Отбрасывая первую компоненту вектора $V^{(T_0)}(f)$, получим $\tilde{V}^{(T_0)}(f)$. Для $M \subseteq \mathfrak{L}$ положим

$$\tilde{V}^{(T_0)}(M) = \bigcup_{f \in M} \left\{ \tilde{V}^{(T_0)}(f) \right\}.$$

Теорема 4.4.2. *Пусть конечное множество M таково, что для некоторого T_0 выполнено:*

$$\xi^{T_0} \cdot \mathfrak{L}_c \subseteq A(M).$$

Тогда включение $f \in A(M)$ равносильно выполнению следующих двух свойств.

1. *$U(f) \subseteq A^{(1)}(U(M))$,*

2. *$\tilde{V}^{(T_0)}(f) \in \tilde{V}^{(T_0)}(A(M))$.*

Теорема 4.4.3. *Для конечной невырожденной S_0-системы M и ЛА f проверка включения*

$$\tilde{V}^{(T_0)}(f) \in \tilde{V}^{(T_0)}(A(M))$$

алгоритмически разрешима.

Элемент μ, $\mu \in \xi\mathfrak{L} \setminus \{0\}$, удовлетворяющий равенству (4) для некоторого множества M, $M \subseteq \mathfrak{L}_0^{(1)}$, называется A-основанием множества M.

Теорема 4.4.4. *Пусть M - конечная невырожденная S_0-система, μ_0 является A-основанием $U(M)$, $\mu_0 = \xi^2 + \xi^3\mu'$, для некоторого μ', $\mu' \in \mathfrak{L}_0^{(1)}$. Тогда задача A-выразимости через множество M алгоритмически разрешима.*

В §5 главы 4 показано существенное различие операторов замыкания K и A.

Теорема 4.5.1. *Пусть $\mu \in \xi\mathfrak{L}_0^{(1)} \backslash \{0\}$. Равенство $K(M) = A(M)$ имеет место для любого M со свойствами*

$$M \subseteq \mathfrak{L}, \ \ x_1 + x_2 \in K(M), \ \ U(M) \setminus E_2 \neq \emptyset,$$

и с основанием μ в точности тогда, когда $\mu \notin M_i^{(1)}$, $i = 0, 2, 3, \ldots$

В заключительном, шестом параграфе главы 4 показана конечнопорожденность невырожденных A-замкнутых классов, содержащих сумматор.

Теорема 4.6.1.

1. *Если для множества M имеют место свойства*

$$M \subseteq \mathfrak{L}, \ \ x_1 + x_2 \in A(M), \ \ U(M) \setminus E_2 \neq \emptyset \tag{5}$$

   то $A(M)$ является A-конечнопорожденным.

2. *Множество, состоящее из всех A-замкнутых классов M, удовлетворяющих свойствам (5), счетно.*

Глава 5 содержит два параграфа, решаемая в каждом из которых задача, использует технику, разработанную в предыдущих главах.

В §1 этой главы множество ЛА $\mathfrak{L}$ рассматривается вместе с операциями суперпозиции, включающими переименование переменных, их отождествление и подстановку. Имея ввиду эти операции, мы используем понятия S-замыкания, S-полного множества, S-замкнутого класса, S-предполного класса и S-критериальной системы. В $\mathfrak{L}$ найдены все S-предполные классы, выполнено сравнение оператора S-замыкания с рассмотренными в предыдущих главах операторами A- и K-замыкания.

Пусть

$$\tilde{M}_i = \left\{ \ f \ \mid \ U(f) \subset \tilde{M}_i^{(1)} \ \right\},$$

$i = 0, 2, 3, \ldots$, и

$$J_2^S = \left\{ \ T_0, T_1, V_1, V_2, M_1, \tilde{M}_i \ \mid \ i = 0, 2, 3, \ldots \ \right\}.$$

Теорема 5.1.1. *Множество J_2^S является приведенной S-критериальной системой в $\mathfrak{L}$, состоящей из S-предполных классов.*

Теорема 5.1.2. *Каждый A-предполный класс в $\mathfrak{L}$ является S-предполным и K-предполным. В $\mathfrak{L}$ каждый K-предполный класс содержится в некотором S-предполном классе и любой S-предполный класс из $J_2^S \setminus J_2^A$ содержит ровно три K-предполных класса из $J_2 \setminus J_2^A$.*

Теорема 5.1.3. *Пусть $\rho \in \{A, K\}$. Множество, состоящее из всех ρ-замкнутых классов, содержащих сумматор и константные ЛА, счетно. Множество, состоящее из всех S-замкнутых классов, содержащих сумматор и константные ЛА, континуально.*

Теорема 5.1.4. *В классе $\mathfrak{L}$ любое подмножество, не являющееся S-полным, расширяется до S-предполного класса.*

В §2 главы 5 в классе L_2 линейных 2-адических автоматов, вычисляющих линейные функции от переменных, принимающих значения из кольца $\mathbb{Z}_{(2)}$ целых 2-адических чисел, с рациональными коэффициентами, знаменатели которых нечетны, найдены все K-предполные классы .

Множество всех коэффициентов при переменных в разложении

$$f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \sum_{i=1}^{n} r_i x_i + r_0 \tag{6}$$

для линейного 2-адического автомата f обозначим $\tilde{U}(f)$. Рациональные числа мы будем задавать несократимыми дробями.

Переменная автомата из L_2 является непосредственной, если числитель соответствующего ей коэффициента – нечетное число. Через $\tilde{V}_1$ обозначим множество автоматов из L_2, имеющих не более одной непосредственной переменной, а через $\tilde{V}_2$ — имеющих нечетное число непосредственных переменных.

Множество всех автоматов из L_2, сохраняющих в начальный момент времени элемент a множества E_2, обозначим $\tilde{T}_a$. Множество всех автоматов из L_2, для коэффициентов разложения (6) которого выполнено неравенство $\sum_{i=1}^{n} |r_i| \leq 1$, обозначим $\tilde{I}$.

Все простые числа упорядочим по возрастанию: $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \ldots$. Поэтому $\tilde{p}_1 = 2$. Множество $\tilde{R}_i^e$ состоит из всех автоматов с не более чем одной существенной переменной из L_2, знаменатель коэффициента при существенной переменной которого не делятся на $\tilde{p}_i$, а также всех элементов L_2, числители коэффициентов при переменных которых делятся на $\tilde{p}_i$.

Множество $\tilde{R}_i^d$ состоит из всех автоматов, знаменатель коэффициента которой при единственной непосредственной переменной не делятся на $\tilde{p}_i$, а числители остальных коэффициентов при переменных делятся на $\tilde{p}_i$.

$$J_2^L = \left\{ \ \tilde{T}_0, \tilde{T}_1, \tilde{V}_1, \tilde{V}_2, \tilde{I}, \tilde{R}_i^e, \tilde{R}_i^d \ \mid \ i = 2, 3, \dots \ \right\}$$

Теорема 5.2.1. *Для любого* Θ, $\Theta \in J_2^L$, *выполнено*

$$K(\Theta) = \Theta.$$

Для любых различных Θ_1 *и* Θ_2 *из* J_2^L *выполнено*

$$\Theta_1 \not\subseteq \Theta_2.$$

Автомат f из L_2 называется однородным, если для его разложения (6) выполнено: $r_0 = 0$. Множество всех однородных автоматов из L_2 обозначим L_2^0. Положим:

$$J_2^{L^0} = \left\{ \ \Theta \cap L_2^0 \ \mid \ \Theta \in \ J_2^L \setminus \left\{ \tilde{T}_0, \tilde{T}_1 \right\} \ \right\},$$

Теорема 5.2.2. *Множество* $J_2^{L^0}$ *является* K*-критериальной системой в* L_2^0.
Теорема 5.2.3. *Множество* J_2^L *является приведенной* K*-критериальной системой в* L_2*, состоящей из* K*-предполных классов.*
Теорема 5.2.4. *Задача проверки* K*-полноты конечных систем из* L_2 *алгоритмически разрешима.*

Заключение

В работе для классов линейных автоматов над конечными полями найдены все K-предполные классы. Некоторые из этих классов определяются как обобщение для случая поля из двух элементов, остальные являются новыми. Существование нетривиальных автоморфизмов полей, не являющихся простыми, обусловило наличие двупараметрических семейств K-предполных классов. При этом один из параметров соответствует автоморфизму, а другой — неприводимому приведенному многочлену из кольца многочленов над рассматриваемым полем.

Для классов линейных автоматов над конечными полями получен алгорим проверки K-полноты конечных подмножеств, время работы которого по порядку оценивается произведением квадрата объема входных данных на количество элементов поля. При этом зависимость от количества задержек схем, задающих рассматриваемые автоматы, является квадратичной.

Для класса $\mathfrak{L}$ линейных автоматов над полем из двух элементов найдена структура K-замкнутых классов. Для этого потребовалось изучить алгебру одноместных линейных автоматов, сохраняющих нулевую последовательность, вместе с операциями, индуцированными K-замыканием, что позволило получить алгоритм проверки выразимости через конечные множества линейных автоматов, содержащие сумматор, а также выразимости сумматора через конечные множества линейных автоматов

Найдена структура A-замкнутых классов в $\mathfrak{L}$, содержащих существенный автомат и все константы. Исследован вопрос о возможности A-выразимости всех констант через подмножества $\mathfrak{L}$, содержащие существенный автомат. Получены некоторые достаточные условия для A-выразимости. Выполнено сравнение опрераторов K- и A-замыкания.

В множестве $\mathfrak{L}$, рассматриваемого вместе с операциями суперпозиции, найдены все S-предполные классы. Выполнено сравнение структуры S-предполных классов со стуктурами A-предполных и K-предполных классов.

Техника, разработанная для класса $\mathfrak{L}$, позволила найти все предполные классы в в классе линейных 2-адических автоматов и получить алгоритм проверки K-полноты конечных подмножеств этого класса.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному консультанту профессору Валерию Борисовичу Кудрявцеву за постановку задачи о полноте в классах линейных автоматов над конечными полями, постоянное внимание и поддержку работы, профессору Станиславу Владимировичу Алешину за постановки задач о выразимости, профессору Эльяру Эльдаровичу Гасанову за всестороннюю поддержку, а также всему коллективу кафедры математической теории интеллектуальных систем механико-математического факультета МГУ за внимание и доброжелательное отношение.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Научные статьи, опубликованные в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 01.01.09 “Дискретная математика и математическая кибернетика”.

1. Часовских А. А. Об алгоритмической разрешимости проблемы полноты для линейных автоматов // Вестник Московского университета сер. 1, мат., мех. — 1986. — № 3. — С. 82–84. (Импакт-фактор Web of Science: 0.053.)

2. Часовских А. А. О выразимости систем с сумматором в классе линейных автоматов // Вестник Московского университета сер. 1, мат., мех. — 1990. — № 4. — С. 31–34. (Импакт-фактор Web of Science: 0.087.)

3. Часовских А. А. О полноте в классе конечных автоматов, вычисляющих некоторые аффинные функции // Интеллектуальные системы. — 2013. — Т. 17, вып. 1–4. — С. 202–205. (Импакт-фактор РИНЦ: 0.262.)

4. Часовских А. А. Условия полноты линейно-р-автоматных функций // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2014. — Т. 18, вып. 3. — С. 203–252. (Импакт-фактор РИНЦ: 0.164.)

5. Часовских А. А. Проблема A-полноты линейно-автоматных функций над конечным полем // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2014. — Т. 18, вып. 1. — С. 253–257. (Импакт-фактор РИНЦ: 0.164.)

6. Часовских А. А. Проблема полноты для класса линейно-автоматных функций // Дискретная математика. — 2015. — Т. 27, № 2. — С. 134–151. Перевод: Chasovskikh A. A. Completeness problem for the class of linear automata functions // Discrete Mathematics and Applications. – 2016. – Vol. 26, Iss. 2. – Pp. 89–104. (Импакт-фактор Scopus: 0.245.)

7. Часовских А. А. Критериальные системы в классах линейно-автоматных функций над конечными полями // Интеллектуальные системы. Теория

и приложения. — 2015. — Т. 19, вып. 3. — С. 195–207. (Импакт-фактор РИНЦ: 0.411.)

8. Часовских А. А. Сравнение операторов замыкания в классе линейно-автоматных функций // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2016. — Т. 20, вып. 3. — С. 120–124. (Импакт-фактор РИНЦ: 0.712.)

9. Часовских А. А. О полноте в классе линейных 2-адических автоматов // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2016. — Т. 20, вып. 4. — С. 209–227. (Импакт-фактор РИНЦ: 0.712.)

10. Часовских А. А. Проблема полноты в классах линейных автоматов // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2018. — Т. 22, вып. 2. — С. 151–154. (Импакт-фактор РИНЦ: 0.222.)

11. Часовских А. А. Приведенные критериальные системы предполных классов в классах линейных автоматов над конечными полями // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2018. — Т. 22, вып. 4. — С. 115–134. (Импакт-фактор РИНЦ: 0.222.)

12. Часовских А. А. О числе максимальных надклассов в классе линейных автоматов // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2019. — Т. 23, вып. 3. — С. 81–84. (Импакт-фактор РИНЦ: 0.374.)

13. Часовских А. А. О классах передаточных функций линейных автоматов // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2019. — Т. 23, вып. 3. — С. 135–142. (Импакт-фактор РИНЦ: 0.374.)

14. Часовских А. А. Максимальные подклассы в классах линейных автоматов над конечными полями // Дискретная математика. — 2019. — Т. 31, № 4. — С. 88–101. Перевод: Chasovskikh A. A. Maximum subclasses in classes of linear automata over finite fields // Discrete Mathematics and Applications. – 2020. – Vol. 30, Iss. 6. – Pp. 365–374. (Импакт-фактор Scopus: 0.254.)

15. Часовских А. А. Классы линейных p-автоматов с операциями суперпозиции // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. — 2021. — Т. 25, вып. 2. — С. 155–156. (Импакт-фактор РИНЦ 2019 г.: 0.374.)

Публикации из изданий, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени доктора наук, но не входящих в международные базы научного цитирования.

16. Часовских А. А. Линейно-автоматные функции с операциями суперпозиции // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. — 2013. — № 8. — С. 3–13. (Импакт-фактор РИНЦ: 0.321.)

Другие публикации.

17. Часовских А. А. О полноте в классе линейных автоматов // Математические вопросы кибернетики. — 1991. — Вып. 3. — С. 140–166 (издание из списка ВАК Минобрнауки России).

18. Часовских А. А. Замкнутые классы линейно-автоматных функций // Математические вопросы кибернетики. — 2004. — Вып. 13. — С. 113–136 (издание из списка ВАК Минобрнауки России).

19. Часовских А. А. Об A-выразимости в классе линейно автоматных функций // Математические вопросы кибернетики. — 2008. — Вып. 17. — С. 105–136.

20. Часовских А. А. О проблеме полноты в классе линейно-автоматных функций над простыми конечными полями // в сборнике Материалы международной конференции «Современные проблемы математики, механики и их приложений», посвященной 70-летию ректора МГУ академика В.А.Садовничего. — 2009. — С. 379–379.

21. Часовских А. А. О полноте в классе линейно-автоматных функций с операциями суперпозиции // в сборнике Материалы XI Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения» (Москва, 18-23 июня 2012 г.), 2012 — С. 382–385.

22. Часовских А. А. О проблеме полноты в классах линейных автоматов над конечными полями // в сборнике Материалы XIII Международного семинара «Дискретная математика и ее приложения» (Москва, 17-22 июня 2019 г.), 2019 — С. 50–59.