МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Чернавская Екатерина Александровна

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ТЯЖЕЛЫМИ ХВОСТАМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ВРЕМЕН ОБСЛУЖИВАНИЯ

Специальность 01.01.05 —
«теория вероятностей и математическая статистика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:
доктор физико-математических наук,
профессор Афанасьева Л. Г.
кандидат физико-математических наук,
доцент Баштова Е. Е.

Москва – 2016

Оглавление

Введение

Предметом диссертации является доказательство предельных теорем для процесса, равного числу занятых приборов в системе в фиксированный момент времени. Доказаны аналоги закона больших чисел и центральной предельной теремы, а также найдены условия C-сходимости в некоторых частных случаях. Для рассматриваемых систем предполагается, что:

1. система имеет бесконечное число приборов;
2. в начальный момент времени($t = 0$) все приборы свободны;
3. один прибор обслуживает одновременно не более одного требования. Времена обслуживания являются положительными независимыми одинаково распределенными случайными величинами(н.о.р.с.в.) с функцией распределения $B(t)$,($t > 0$) и бесконечным средним.

Когда среднее время обслуживания приборов конечно, бесконечноканальная система является эргодичной [4](Боровков, 1972). Мы предполагаем, что среднего времени обслуживания требований не существует. В этом случае число занятых приборов в системе неограниченно возрастает и возникает проблема асимптотического анализа этого процесса.

Актуальность темы исследования. Бесконечноканальные системы обслуживания встречаются в литературе еще в начале 50-х годов 20-го века. В 1951 г. в [76](Riordan, 1951) была рассмотрена телефонная станция, в которой ни один звонок не задерживается или теряется из-за отсутствия оборудования. Эта система является системой типа $M/G/\infty$.

В 60-70-е годы появляется серия работ, посвященных этим системам. Например, [82](Takacs, 1962), [42](Downton, 1963), [67](Mirasol, 1963), [55](Kaplan, 1975) и др. В них приведены результаты, касающиеся распределения числа занятых приборов, а также доказано, что выходящий поток из системы $M/G/\infty$ является пуассоновским.

В 1980-е годы публикуются статьи, посвященные изучению бесконечноканальных систем в случае высокой нагрузки("heavy traffic")(см., например, [89](Whitt, 1982), [91](Yamada, 1988)). Так в [89](Whitt, 1982), [68](Pang, Whitt, 2010) рассмотрена последовательность систем $GI/G/\infty$, интенсивность входящего потока в которых стремится к бесконечности, в то время как распределение времен обслуживания фиксировано. Отметим, что подобные предельные теоремы носят характер, отличный от рассматриваемых нами. В нашем случае, распределение входящего потока неизменяется, но $\int\limits_0^t (1 - B(x))dx \to \infty$, $t \to \infty$. В связи с этим, в предельных теоремах появляется невполне традиционная нормировка $\sqrt{\int\limits_0^t (1 - B(x))dx}$, а не $\sqrt{t}$. Стоит отметить, что нетрадиционная нормировка возникает и в случаях высокой загрузки(см. например [47](Glynn, 1991)).

Смысл распределений, имеющих тяжелые хвосты можно объяснить так. Среди интервалов обслуживания имеются очень длинные интервалы и их доля высока. Такое распределение имеет, например, размер файла в сети интернет, а также длительность передачи файла в сети, причем это верно для всех типов файлов: изображения, аудио, видео, текст [37](Crovella, Taqqu, Bestavros, 1998). Подобные распределения естественным образом возникают в страховании, так как распределение страховых требований часто имеет тяжелые хвосты, а также в приложениях финансовой математики [25](Asmussen, 2000), [90](Whitt, 2002).

На рубеже 80-х и 90-х годов выходят работы, посвященные бесконечноканальным системам с групповым поступлением требований(см., например, [56](Keilson, 1988), [61](Liu, 1990)). Согласно [61](Lui, 1990) число занятых приборов в таких системах, может быть смоделировано как процесс дробового шума, который вызван наложением случайности величины скачков входящего процесса и случайностью моментов этих скачков. В [61](Lui, 1990) изучается процесс, равный числу требований в системе $GI/G/\infty$

с групповым поступлением требований. Далее эти результаты обобщаются для системы $GI/G/\infty$ с разными типами входящих групп, например, времена обслуживания для разных групп могут иметь разные распределения(см. [62](Lui, 1991), [35](Cong, 1994)). В 90-е, в статье [63](Lui, 1991) получены результаты для периода занятости в системе $GI/G/\infty$ с групповым поступлением требований, в [81](Sumita, 1997) рассмотрена система $GI/G/\infty$ с групповым поступлением требований и зависимыми временами обслуживания. Также рассмотрены системы с групповым поступлением требований и групповым обслуживанием, например, [86](Ushakumari, 1998), [49](Gullu, 2004), системы с групповым поступлением в случае высокой загрузки [11](Лебедев, 2000). Интерес к таким системам вполне понятен, так как они могут быть применены во многих областях, таких, как транспортные системы, компьютерные системы, распределение ресурсов.

Далее, появляются работы с еще более сложной структурой систем обслуживания. Например, в [66](Masuyama, 2002) рассмотрена бесконечноканальная система с несколькими входящими потоками и разной процедурой обслуживания для разных потоков.

В литературе рассматриваются различные модели бесконечноканальных систем, например, системы с ограничениями [54](Kang, 2012), системы в случайной среде [39](D'Auria, 2007), [28](Blom, 2014), сети бесконечноканальных систем(см., например, [64](Massey, 1993), [57](Keilson, 1994), [45](Ferreira, 2013)), бесконечноканальные системы с прерыванием обслуживания [53](Jayawardene, 1996) и другие. Это обусловлено как широким кругом практических вопросов, в которых эти модели оказываются полезными, так и целым рядом возникающих здесь интересных математических задач. Для бесконечноканальных систем изучается поведение разных процессов, например, период занятости(время в течение которого будет занят хоть один прибор в системе, [50](Hall, 1985), [73](Ramalhoto, 1984)), [85](Tsybakov, 2006), число занятых приборов. В статьях [71](Preater, 2002), [77](

Roijers, Mandjes, Berg, 2007) рассматриваются такие характеристики бесконечноканальных систем, как длина C-перегруженного периода(length of the C-congested episode) и высота C-перегруженного периода(height of the C-congested episode).

На первый взгляд, бесконечноканальные системы кажутся нереалистичными, но на самом деле они могут быть использованы при описании многих реальных объектов. Например, в теории связи при изучении суммарного потока импульсов [3](Афанасьева, Биленко, 1972), при моделировании интернет трафика [58](Kulkarni, 2001), [75](Resnick, 2003), [48](Guerin, 2003), при описании процессов образования очередей на неуправляемых перекрестках автомобильных дорог [2](Афанасьева, Руденко, 2012), в некоторых задачах страхования(например, о связи рисковой модели Крамера-Лундберга и системы $G/G/\infty$ см. в [60](Lipsky, 2011). Интересно приложение бесконечноканальных систем в тестировании(отладке) программного обеспечения, предложенное в [40](Dohi, Matsuoka, Osaki, 2002). В этой статье число сбоев(багов) программы интерпретируется как число занятых приборов в бесконечноканальной системе обслуживания. Развитие этого подхода можно найти, например, в [51](Huang, 2006). Есть приложения теории очередей в биологии(например, [22](Arazi, 2004), [78](Schwabe, 2012)), при моделирование систем ремонта(например, самолетных парков, судов или грузовиков [45](Ferreira, 2013)).

Системы с бесконечным числом приборов могут быть рассмотрены в качестве мажорирующих для многоканальных систем, так как число заявок в бесконечноканальной системе оценивает снизу число заявок в системе с любым конечным числом приборов и неограниченной очередью. Также, при изучении некоторых сложных систем, бывает полезно рассмотреть бесконечноканальную систему, как более простую для анализа. Кроме того, удобно рассматривать такие системы, когда в них не образуется очередь, по каким-либо причинам [70](Postan, 1977). Отметим, что подходы, используемые для изучении таких систем, оказываются полезными для задач массового обслуживания в случае высокой загрузки [4](Боровков, 1972).

Основная трудность при доказательстве предельных теорем для числа требований $q(t)$ в момент времени t – найти условия на характеристики системы, описывающие входящий поток и процедуру обслуживания, при которых будет иметь место предел

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathsf{D}q(t)}{\mathsf{E}q(t)} = 1.$$

Доказательству этой сходимости для каждого из рассматриваемых нами входящих потоков и посвящена основная часть диссертации.

Естественным развитием теории массового обслуживания для бесконечноканальных систем является исследование систем с входными потоками все более общего вида. В настоящей работе приводятся результаты для систем с дважды стохастическим пуассоновским(ДСП) и регенерирующим входными потоками. Потоки переменной интенсивности интересны, поскольку могут быть использованы при построении моделей многих реальных объектов. В этом случае интенсивность может зависеть от времени, более того, быть случайным процессом.

ДСП потоки являются естественным обобщением пуассоновского потока, поскольку в данном случае интенсивность может быть случайным процессом. Регенерирующие потоки представляют интерес для анализа, поскольку такими являются большинство потоков, обычно используемых в теории очередей в качестве входных потоков(например, марковский поток, полумарковский поток и др.). Сразу отметим, что ДСП поток является регенерирующим только в том случае, когда его случайная интенсивность – регенерирующий процесс. Системы с таким входящим потоком сложны для анализа, поскольку здесь в общем случае не удается выписать явные формулы для характеристик системы.

В диссертации рассмотрены задачи, связанные с доказательством предельных теорем для одномерных распределений числа требований, находящихся на обслуживании в системе. А также более общая задача – доказательство функциональных теорем для этого процесса. Этой проблеме посвящены статьи [52](Igloi, 2005), [69](Lu, Pang, 2015), [18](Anderson, 2016), [5](Боровков, 1980) и т.д. Доказательство слабой сходимости в функциональном пространстве производится в два этапа. Во-первых, доказывается слабая сходимость конечномерных распределений рассматриваемого процесса, во-вторых, проверяется условие плотности для этого процесса [27](Billingsley, 2013).

Краткое содержание работы

1. В Главе 1 рассматривается система с ДСП входящим потоком. Основное внимание уделяется асимптотическому анализу процесса, равного числу требований в системе в данный момент времени. Выписана производящая функция одномерных распределений этого процесса, доказаны аналоги закона больших чисел и центральной предельной терремы. В качестве следствий получены предельные теоремы для систем, которые являются частными случаями исходной. Например, система с регенерирующим ДСП входящим потоком, а также система с полумарковским марковски модулированным входящим потоком.
2. В Главе 2 рассматривается система с регенерирующим входящим потоком. Для ее изучения вводятся другие, более простые для изучения системы, мажорирующие исходную. В них требования поступают группами случайного объема через н.о.р. промежутки времени. Для этих систем были получены предельные теоремы для числа требований, находящихся на обслуживании. Далее, эти результаты переносятся на случай регенерирующего входящего потока.

   Изучение систем с групповым поступлением требований может иметь и самостоятельный интерес, например в [72](Purdue, 1981) рассмотрена аналогичная система типа $GI^X/M/\infty$, для которой получено предельное распределение числа занятых приборов и другие результаты. Условия на входящий поток, при которых справедливы утверждения этой главы, достаточно легко проверять, поскольку они состоят только в конечности моментов характеристик, описывающих систему, и не затрагивают глубоких свойств входящего потока.

3. В Главе 3 изучается система с пуассоновским входящим потоком, интенсивность которого зависит от времени(таким системам посвящено большое число работ, см., например, [44](Eick, 1993)). В первой части получены условия, при которых конечномерные распределения нормированного и центрированного процесса, равного числу требований в системе, слабо сходится к конечномерным распределениям гауссовского процесса. Во второй части главы найдены условия для слабой сходимости распределений последовательности процессов $q(tT)$ к распределению гауссовского процесса при $T \to \infty$, в предположении, что интенсивность входящего пуассоновского потока постоянна.

Научная новизна. Результаты работы являются новыми. Их можно разделить в следующие две группы.

— Доказательство предельных теорем для процесса $q(t)$ равного числу требований в системе в момент времени t, в бесконечноканальных системах с ДСП и регенерирующими входными потоками, при $t \to \infty$.

— Нахождение условий функциональной сходимости процессов $q(tT)$ к гауссовскому процессу при $T \to \infty$, $t \in (0, h)$, $h > 0$.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа носит теоретический характер. Ее результаты, касающиеся бесконечноканальных систем обслуживания, могут быть интересны специалистам в области ветвящихся процессов, поскольку схожа структура рассматриваемых объектов. Отметим, что поскольку результаты для систем обслуживания имеют широкое практическое применение, то работа имеет и практическую значимость.

Методы исследования. В диссертации используются различные методы и результаты математического анализы, теории вероятностей и теории случайных процессов: метод характеристических функций, результат об асимптотике свертки функций [17], теорема о неявной функции, теорема о случайной замене времени в предельных теоремах [43], максимальные неравенства теории демимартингалов [34], критерий сходимости в пространстве непрерывных функций [4].

Апробация результатов. По теме диссертации были сделаны доклады на следующих семинарах механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова:

- Большом семинаре кафедры теории вероятностей под руководством действительного члена РАН, профессора А. Н. Ширяева (2016 г.),
- Спецсеминаре кафедры теории вероятностей под руководством д.ф.-м.н., профессора Л. Г. Афанасьевой (2013–2016 гг., неоднократно).

Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях: Результаты диссертации докладывались на международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных "Ломоносов" (г. Москва, 2014 – 2016 г.г.), "XXXII International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models" (Trondheim, Norway, 2014), "16th Applied Stochastic Models and Data Analysis International Conference (ASMDA2015)" (Piraeus, Greece, 2015), "Международная конференция по стохастическим методам" (Абрау-Дюрсо, Россия, 2016), "VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM 2016)" (Moscow, Russia, 2016).

Публикации. Результаты диссертации изложены в четырех работах, три из которых входят в перечень ВАК: [32], [33], [15].

Благодарность. Автор выражает глубокую благодарность и признательность своим научным руководителям доктору физико-математических наук, профессору Л. Г. Афанасьевой и кандидату физико-математических наук, доценту Е. Е. Баштовой за постановку задач и постоянное внимание к работе. Автор высоко ценит содействие и внимание, оказанное работе сотрудниками кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова.

Обозначения и сокращения. Если не оговорено иначе, за исходное вероятностное пространство принято $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, и все случайные элементы предполагаются заданными на этом пространстве. Для случаев, рассмотренных в диссертации, доказательство существования единого вероятностного пространства для нескольких случайных элементов опирается на теорему Колмогорова(А. В. Булинский, А. Н. Ширяев, 2016 [8, Глава I]) и опускается в тексте диссертации в силу очевидности. Функции распределения случайных величин полагаются непрерывными справа, таким образом для случайной величины ξ её функция распределения равна $F_\xi(x) = \mathsf{P}(\xi \leq x)$.

Сумма по пустому множеству индексов полагается равной нулю, а произведение — единице.

В работе используются следующие общепринятые обозначения:

п.н. — почти наверное.

$\xrightarrow{p}$ — сходимость по вероятности.

$\overset{d}{=}$ — равенство распределений.

$\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ — множество действительных чисел.

$\sigma(\mathcal{A})$ — наименьшая сигма-алгебра, порождённая системой множеств $\mathcal{A}$.

$\mathbb{I}(A)$ — индикатор множества A.

Для функций $f(t)$ и $g(t)$ запись $f(t) \sim g(t)$ при $t \to \infty$ означает, что $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 1$.

Для функций $f(t)$ и $g(t)$ запись $f(t) = \overline{o}\left(g(t)\right)$ при $t \to \infty$ означает, что $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 0$.

$\overline{B}(t) = 1 - B(t)$, где $B(t)$ – функция распределения.

$\mathcal{N}(0,1)$ — нормальное распределение с нулевым средним и единичной дисперсией.

$\mathsf{E}_{\mathcal{F}}\xi = \mathsf{E}\left(\xi|\mathcal{F}\right)$.

н.о.р.с.в. — независимые одинаково распределенные случайные величины.

н.с.в. — независимые случайные величины.

ДСП — дважды стохастический пуассоновский.

Глава 1. Предельные теоремы для системы обслуживания с бесконечным числом приборов и дважды стохастическим пуассоновским входящим потоком

1.1. Введение

В данной главе предполагается, что процесс поступления требований $X(t)$ является дважды стохастическим пуассоновским(ДСП) потоком. Этот поток заслуживает внимания, так как он является обобщением многих потоков, например, марковски-модулированного потока [84](Thorisson, 1983), полумарковского марковски модулированного потока, потока Льюиса и т.д., часто используемых в теории очередей в качестве входных потоков.

Мы предполагаем, что среднего времени обслуживания требований не существует. Одна из первых работ, в которых изучались подобные системы, – статья Н. Каплана [55](Kaplan, 1975), где доказаны предельные теоремы для числа требований в системе $GI/G/\infty$. Мы использовали подход из [55] при доказательстве предельных теорем этой главы.

Основная цель главы – анализ асимптотического поведения с ростом времени процесса, определяющего число занятых приборов. Выписана производящая функция одномерных распределений этого процесса и доказаны аналоги закона больших чисел и центральной предельной теремы. В качестве следствий получены предельные теоремы для систем, которые являются частными случаями исходной. Например, система с регенерирующим ДСП входящим потоком, а также система с полумарковским марковски модулированным входящим потоком.

Результаты, приведенные в данной главе диссертации, опубликованы в [32], [33].

1.2. Описание системы

Рассматривается бесконечноканальная система обслуживания. Заявки, поступающие на вход системы, образуют дважды стохастический пуассоновский(ДСП) поток $A(t)$. Следуя [46](Grandell, 1976) дадим определение ДСП процесса.

Определение 1. *Пусть на вероятностном пространстве* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ *задан случайный процесс* $\Lambda(t)$, *имеющий с вероятностью 1 неубывающие непрерывные справа траектории, и на том же вероятностном пространстве задан стандартный пуассоновский процесс* $\{A^*(s), s \geq 0\}$, *не зависящий от* $\{\Lambda(t), t \in \mathbb{R}\}$. *Тогда ДСП процесс* $\{A(t), t \geq 0\}$ *определяется при помощи формулы*

$$A(t) = A^*(\Lambda(t)).$$

В данной работе предполагаем, что $\Lambda(t) = \int\limits_0^t \lambda(y, \omega) dy$, где $\{\lambda(y, \omega), y \geq 0\}$ – неотрицательный и ограниченный с вероятностью 1 стационарный в широком смысле случайный процесс. При этом процесс $\Lambda(t)$ будем называть ведущим процессом, а $\lambda(t)$ интенсивностью ДСП потока $\{A(t), t \geq 0\}$. Обозначим $\mathsf{E}\lambda(t) = \lambda < \infty$. Будем считать, что для интенсивности входящего потока выполнено следующее условие.

Условие 1. *Для некоторых положительных постоянных* α, c_0 *имеет место неравенство*

$$|r(x)| = |\mathrm{cov}(\lambda(0), \lambda(x))| \leq \frac{c_0}{(1+x)^\alpha} \text{ для } x \geq 0. \qquad (1.1)$$

Времена обслуживания заявок представляют собой последовательность $\{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$ н.о.р.с.в. с функцией распределения $B(x)$. Обозначим $\overline{B}(x) = 1 - B(x)$.

Условие 2. *Существуют положительные постоянные* c_1, c_2 *и* $0 < \Delta < 1$ *такие, что при всех* $t \geq 0$

$$\frac{c_1}{(1+t)^\Delta} \leq \overline{B}(t) \leq \frac{c_2}{(1+t)^\Delta}. \qquad (1.2)$$

Из (1.2) следует, что $\int\limits_0^\infty x dB(x) = \infty$, поэтому распределение $B(x)$ имеет тяжелый хвост [30](Боровков А.А., Боровков К.А., 2008).

Основное внимание в данной работе направлено на изучение процесса $q(t)$, который представляет собой число заявок, находящихся в системе в момент времени t.

1.3. Вспомогательные результаты

Пользуясь свойствами ДСП процесса [46](Grandell, 1976), можно получить формулу для распределения вероятностей $q(t)$ при любом фиксированном t

$$\mathsf{P}(q(t) = k) = \mathsf{E}\,\mathsf{P}\left(q(t) = k|\Lambda(t), t \in [0, \infty)\right) = \mathsf{E}\left(e^{-\rho(t)}\frac{(\rho(t))^k}{k!}\right), \qquad (1.3)$$

где $\rho(t) = \int\limits_0^t \overline{B}(t - x)\lambda(x)dx$.

Используя формулу (1.3) получаем, что производящая функция для $q(t)$ имеет вид

$$P(u, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u^k\,\mathsf{P}(q(t) = k) = \sum_{k=0}^{\infty} u^k \mathsf{E}\left(e^{-\rho(t)}\frac{(\rho(t))^k}{k!}\right) = \mathsf{E}e^{-\rho(t)(1-u)}. \quad (1.4)$$

Из этого соотношения и свойств ДСП процесса [46](Grandell, 1976) следует, что

$$\mathsf{E}q(t) = \mathsf{E}\mathsf{E}\left(q(t)|\Lambda(t), t \in [0, \infty)\right) = \mathsf{E}\rho(t) = \lambda\int\limits_0^t \overline{B}(y)dy,$$

$$\mathsf{E}q^2(t) = \mathsf{E}\mathsf{E}\left(q^2(t)|\Lambda(t), t \in [0, \infty)\right) = \mathsf{E}\rho(t) + \mathsf{E}\rho^2(t).$$

Условия (1.1) и (1.2) дают возможность найти оценки для $\mathsf{E}\rho(t)$ и $\mathsf{D}\rho(t)$. Очевидно, что оценка для $\mathsf{E}\rho(t)$ имеет вид при $t \to \infty$

$$\frac{\lambda c_1}{1-\Delta}t^{1-\Delta} \le \mathsf{E}\rho(t) \le \frac{\lambda c_2}{1-\Delta}t^{1-\Delta}. \qquad (1.5)$$

Найдем оценку для $\mathsf{D}\rho(t)$.

Лемма 1.1. *Пусть выполнены условия (1.1) и (1.2). Тогда для некоторой положительной константы C, при достаточно больших t имеет место следующее неравенство*

$$\mathsf{D}\rho(t) \leq C(t^{2-2\Delta-\alpha} + t^{-2\Delta} + t^{1-\alpha}) \ln^2 t. \tag{1.6}$$

Доказательство. По определению

$$\mathsf{D}\rho(t) = \int_0^t du \int_0^t \overline{B}(t-u)\overline{B}(t-v) \operatorname{cov}(\lambda(u), \lambda(v)) dv =$$

$$= 2\int_0^t dz \int_0^{t-z} \overline{B}(u+z)\overline{B}(z) \operatorname{cov}(\lambda(0), \lambda(u)) du \leq 2\int_0^t dz \overline{B}^2(z) \int_0^{t-z} |r(u)| du.$$

Из условий (1.1) и (1.2) следует, что

$$\mathsf{D}\rho(t) \leq 2c_0c_2^2 \int_0^t \frac{dz}{(1+z)^{2\Delta}} \int_0^{t-z} \frac{du}{(1+u)^{\alpha}} = 2c_0c_2^2 \int_0^t \frac{dz}{(1+z)^{2\Delta}} g(t-z),$$

где

$$g(t) = \int_0^t \frac{du}{(1+u)^{\alpha}}.$$

Таким образом, дисперсия процесса $q(t)$ оценивается сверткой функций $\frac{1}{(1+z)^{2\Delta}}$ и $g(z)$. Заметим, что имеет место эквивалентность, при $z \to \infty$

$$g(z) \sim \begin{cases} \ln(1+z) & \text{если } \alpha = 1, \\ \frac{1}{1-\alpha}(1+z)^{1-\alpha} & \text{если } \alpha \neq 1. \end{cases}$$

Вычисление асимптотики свертки $\frac{1}{(1+z)^{2\Delta}}$ и $g(z)$ будет опираться на следующую лемму:

Лемма. *(лемма 2, о свертках) [17]*

Пусть для непрерывных функций $\varphi(t)$, $\chi(t) \geq 0$, $t \geq 0$, при $t \to \infty$ справедливы асимптотические представления

$$\varphi(t) \sim \varphi_0 t^{\mu} (\ln t)^{\overline{\mu}}, \ \chi(t) \sim \chi_0 t^{\nu} (\ln t)^{\overline{\nu}}$$

и пусть

$$I(t) = \int_0^t \varphi(t-s)\chi(s)ds = \int_0^t \chi(t-s)\varphi(s)ds.$$

Тогда

1. *при* $\mu > -1$, $\nu > -1$, $\overline{\nu}$, $\overline{\mu}$ – *произвольные*

$$I(t) \sim \varphi_0\chi_0 \frac{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\mu+\nu+2)} t^{1+\mu+\nu}(\ln t)^{\overline{\mu}+\overline{\nu}};$$

2. *при* $\mu > -1$, $\nu = -1$, $\overline{\mu}$ *произвольном и* $\overline{\nu} > -1$

$$I(t) \sim \varphi_0\chi_0 \frac{1}{\overline{\nu}+1} t^{\mu}(\ln t)^{\overline{\mu}+\overline{\nu}+1};$$

3. *при* $\mu > -1$, $\nu < -1$, $\overline{\mu}$, $\overline{\nu}$ – *произвольные*

$$I(t) \sim \varphi_0 t^{\mu}(\ln t)^{\overline{\mu}} \int_0^{\infty} \chi(s)ds;$$

4. *при* $\mu = -1$, $\nu = -1$, $\overline{\mu} > -1$, $\overline{\nu} > -1$

$$I(t) \sim \varphi_0\chi_0 \left(\frac{1}{\overline{\mu}+1} + \frac{1}{\overline{\nu}+1}\right) \frac{(\ln t)^{\overline{\mu}+\overline{\nu}+1}}{t};$$

5. *при* $\mu = -1$, $\nu < -1$, $\overline{\mu}$, $\overline{\nu}$ – *произвольные*

$$I(t) \sim \varphi_0 \frac{(\ln t)^{\overline{\mu}}}{t} \int_0^{\infty} \chi(s)ds;$$

6. *при* $\mu < -1$, $\nu < -1$, $\mu = \nu$, $\overline{\mu} = \overline{\nu}$

$$I(t) \sim t^{\mu}(\ln t)^{\overline{\mu}} \left(\varphi_0 \int_0^{\infty} \chi(s)ds + \chi_0 \int_0^{\infty} \varphi(s)ds\right);$$

7. *при* $\mu < -1$, $\nu < -1$, $\mu = \nu$, $\overline{\mu} > \overline{\nu}$

$$I(t) \sim \varphi_0 t^{\mu}(\ln t)^{\overline{\mu}} \int_0^{\infty} \chi(s)ds;$$

8. *при* $\mu < -1$, $\nu < -1$, $\mu > \nu$, $\overline{\mu}$, $\overline{\nu}$ – *произвольные*

$$I(t) \sim \varphi_0 t^{\mu}(\ln t)^{\overline{\mu}} \int_0^{\infty} \chi(s)ds.$$

Из этой леммы следует, что найдется постоянная $C > 0$ такая, что при $\alpha = 1$:

$$\frac{1}{C}\mathsf{D}\rho(t) \le t^{1-2\Delta}\ln t\mathbb{I}\left\{0 < \Delta < 1/2\right\} + \ln^2 t\mathbb{I}\left\{\Delta = 1/2\right\} + \ln t\mathbb{I}\left\{1/2 < \Delta < 1\right\};$$

при $\alpha \ne 1$:

$$\frac{1}{C}\mathsf{D}\rho(t) \le t^{1-\alpha}\ln t\mathbb{I}\left\{\Delta = 1/2, 0 \le \alpha \le 2\right\} + \frac{1}{t}\mathbb{I}\left\{\Delta = 1/2, \alpha > 2\right\} +$$

$$+t^{-\alpha}\mathbb{I}\left\{\Delta > 1/2, 0 \le \alpha \le 2\right\} + t^{-2\Delta}\mathbb{I}\left\{\Delta > 1/2, \alpha > 2\right\} +$$

$$+t^{2-\alpha-2\Delta}\mathbb{I}\left\{0 < \Delta \le 1/2, 0 \le \alpha < 2\right\} + t^{-2\Delta}\ln t\mathbb{I}\left\{0 < \Delta < 1/2, \alpha = 2\right\}.$$

Объединяя приведенные оценки, получаем (1.6). □

1.4. Основные теоремы и их доказательства

Обозначим $\beta(t) = \int\limits_0^t \overline{B}(x)dx$, тогда $\mathsf{E}\rho(t) = \lambda\beta(t)$.

Теорема 1. *Если выполнены условия (1.1), (1.2) и $\alpha > 2\Delta - 1$, то*

$$q^*(t) = \frac{q(t)}{\lambda\beta(t)} \xrightarrow{p} 1 \text{ при } t \to \infty. \tag{1.7}$$

Доказательство. Запишем характеристическую функцию для $q^*(t) - 1$

$$\varphi(z,t) = \mathsf{E}e^{iz(q^*(t)-1)} = \mathsf{E}\exp\left\{-\rho(t)(1 - e^{\frac{iz}{\lambda\beta(t)}}) - iz\right\}.$$

Обозначим $G_\rho(z,t) = \exp\left\{-\rho(t)(1 - e^{\frac{iz}{\lambda\beta(t)}}) - iz\right\}$. Так как $|G_\rho(z,t)| \le 1$ с вероятностью 1, то согласно теореме Лебега о мажорируемой сходимости для доказательства (1.7), достаточно установить, что

$$\ln G_\rho(z,t) \xrightarrow{p} 0 \tag{1.8}$$

при фиксированном z и $t \to \infty$.

Представим $\ln G_\rho(z,t)$ в следующем виде:

$$\ln G_\rho(z,t) = iz\left(\frac{\rho(t)}{\lambda\beta(t)} - 1\right) + R(t),$$

где $R(t) = \rho(t)\left(e^{\frac{iz}{\lambda\beta(t)}} - 1 - \frac{iz}{\lambda\beta(t)}\right)$.

Для выполнения (1.8) достаточно, чтобы при $t \to \infty$

$$\frac{\rho(t)}{\lambda\beta(t)} - 1 \xrightarrow{p} 0, \tag{1.9}$$

$$R(t) \xrightarrow{p} 0. \tag{1.10}$$

Поскольку при любом $\varepsilon > 0$

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{\rho(t)}{\lambda\beta(t)} - 1\right| > \varepsilon\right) \le \frac{\mathsf{E}\left(\rho(t) - \lambda\beta(t)\right)^2}{\varepsilon^2(\lambda\beta(t))^2} = \frac{\mathsf{D}\rho(t)}{\varepsilon^2(\lambda\beta(t))^2},$$

то, как следует из (1.6), сходимость (1.9) имеет место, если α и Δ удовлетворяют неравенству

$$\alpha > 2\Delta - 1.$$

Соотношение (1.10), следует из (1.9) и неравенства $|e^{ix} - 1 - ix| \le \frac{x^2}{2}$, $x \ge 0$. $\square$

Теорема 2. *Если выполнены условия (1.1), (1.2) и* $\alpha > \max(\Delta, 1 - \Delta)$, *то при* $t \to \infty$ *имеет место слабая сходимость распределения величины* $q^*(t) = \frac{q(t) - \lambda\beta(t)}{\sqrt{\lambda\beta(t)}}$ *к нормальному распределению, с параметрами (0,1).*

Доказательство. В соответствии с (1.4) характеристическая функция для $q^*(t)$ имеет вид

$$\phi(z,t) = \mathsf{E}e^{izq^*(t)} = \mathsf{E}\exp\left\{-\rho(t)(1 - e^{\frac{iz}{\sqrt{\lambda\beta(t)}}}) - iz\sqrt{\lambda\beta(t)}\right\}.$$

Обозначим

$$\Phi_\rho(t,z) = \mathsf{E}(\exp\{izq^*(t)\}|\rho(t), t \ge 0) = \exp\{-\rho(t)(1 - e^{\frac{iz}{\sqrt{\lambda\beta(t)}}}) - iz\sqrt{\lambda\beta(t)}\}.$$

Заметим, что $|\Phi_\rho(t,z)| \le 1$ с вероятностью 1, поэтому в силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости для доказательства теоремы 2 достаточно показать, что

$$\ln\Phi_\rho(t,z) \xrightarrow{p} -\frac{z^2}{2},\ t \to \infty, \tag{1.11}$$

при фиксированном z.

Рассмотрим следующее представление для $\ln \Phi_\rho(t,z)$:

$$\ln \Phi_\rho(t,z) = iz\left(\frac{\rho(t)}{\sqrt{\lambda\beta(t)}} - \sqrt{\lambda\beta(t)}\right) - \frac{z^2}{2}\frac{\rho(t)}{\lambda\beta(t)} + R(t), \tag{1.12}$$

где

$$R(t) = \rho(t)\left(e^{\frac{iz}{\sqrt{\lambda\beta(t)}}} - 1 - \frac{iz}{\sqrt{\lambda\beta(t)}} + \frac{z^2}{2\lambda\beta(t)}\right).$$

Из (1.12) следует, что для доказательства теоремы достаточно установить следующие соотношения:

$$\frac{\rho(t)}{\sqrt{\lambda\beta(t)}} - \sqrt{\lambda\beta(t)} \xrightarrow{p} 0, \tag{1.13}$$

$$R(t) \xrightarrow{p} 0, \tag{1.14}$$

при фиксированном z и $t \to \infty$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $\mathsf{E}\rho(t) = \lambda\beta(t)$, то по неравенству Чебышева, имеем

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{\rho(t)}{\sqrt{\lambda\beta(t)}} - \sqrt{\lambda\beta(t)}\right| > \varepsilon\right) \le \frac{\mathsf{E}\left(\rho(t) - \lambda\beta(t)\right)^2}{\varepsilon^2\lambda\beta(t)} = \frac{\mathsf{D}\rho(t)}{\varepsilon^2\lambda\beta(t)}. \tag{1.15}$$

Как следует из (1.5) и (1.6), соотношение (1.13) будет выполнено при таких α и Δ, которые удовлетворяют следующей системе неравенств

$$\begin{cases} 1 - \Delta - \alpha < 0, \\ -\alpha + \Delta < 0. \end{cases} \tag{1.16}$$

Эта система имеет решение при $\alpha > \max(\Delta, 1-\Delta)$, $0 < \Delta < 1$.

Соотношение (1.14) следует из (1.15) и неравенства $\left|e^{ix} - 1 - ix + \frac{x^2}{2}\right| \le \frac{x^3}{6}$, верного при всех $x \ge 0$. $\square$

Из *теорем 1* и *2* очевидным образом вытекают утверждения *следствия 1.*

Следствие 1. *Пусть* $\overline{B}(t) \sim ct^{-\Delta}$ *и положим* $a_1 = c\lambda(1-\Delta)^{-1}$.

- *Если выполнены условия (1.1), (1.2) и* $\alpha > 2\Delta - 1$, *то*

$$\frac{q(t)}{a_1 t^{1-\Delta}} \xrightarrow{p} 1 \text{ \textit{при} } t \to \infty.$$

- *Если выполнены условия (1.1), (1.2) и* $\alpha > \max(\Delta, 1-\Delta)$, *то имеет место сходимость при* $t \to \infty$

$$\frac{q(t) - a_1 t^{1-\Delta}}{\sqrt{a_1 t^{1-\Delta}}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1).$$

В качестве примеров рассмотрим следующие частные случаи.

Пример 1. Пусть $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$ и $\{\tau_j\}_{j=1}^{\infty}$ – две независимые последовательности одинаково распределенных внутри каждой последовательности независимых случайных величин и $F(t) = \mathsf{P}(\tau_1 < t)$, $\mathsf{E}\tau_1 = \mu < \infty$, $\mathsf{E}\xi_1 = a$, $\mathsf{D}\xi_1 = \sigma_\xi^2 < \infty$.

Случайные величины ξ_0 и τ_0 – независимы и не зависят от последовательностей $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$ и $\{\tau_j\}_{j=1}^{\infty}$, причем

$$\mathsf{P}(\tau_0 < t) = \frac{1}{\mu}\int_0^t \overline{F}(y)dy.$$

Введем случайное блуждание $S_n = \sum\limits_{j=0}^{n} \tau_j$ и считающий процесс $N(t) = \min\{k \geq 0 : S_k > t\}$, $n \geq 0$. Заметим, что в данном случае процесс $N(t)$ имеет стационарные приращения [6](Боровков А.А., 1986), то есть по распределению при $u > 0$

$$N(t+u) - N(t) \stackrel{d}{=} N(u) - N(0) \stackrel{d}{=} N(u). \tag{1.17}$$

Зададим интенсивность входящего ДСП потока следующим соотношением

$$\lambda(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \xi_j \mathbb{I}\left(N(t) = j\right),$$

где $\mathbb{I}(A)$ – индикаторная функция события A.

Заметим, что $\lambda(t)$ является стационарным процессом и $\mathsf{E}\lambda(t) = a$. Для определения условий, при которых будут выполнены предельные *теоремы*

1 и *2*, найдем оценку для $\operatorname{cov}(\lambda(t), \lambda(t+u))$. Учитывая (1.17), имеем при $u \geq 0$

$$\mathsf{E}\lambda(t)\lambda(t+u) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=j}^{\infty} \mathsf{E}\xi_j\xi_k \mathbb{I}\left(N(t)=j, N(t+u)=k\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=j+1}^{\infty} \mathsf{E}\xi_j\xi_k \mathbb{I}\left(N(t)=j, N(t+u)=k\right) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{\infty} \mathsf{E}\xi_j^2 \mathbb{I}\left(N(t)=j, N(t+u)=j\right) =$$

$$= a^2 P(N(t+u)-N(t)>0) + (\sigma_\xi^2 + a^2)P(N(t+u)-N(t)=0) =$$

$$= a^2(1 - P(\tau_0 > u)) + (\sigma_\xi^2 + a^2)P(\tau_0 > u).$$

Таким образом, $\operatorname{cov}(\lambda(t), \lambda(t+u)) = \frac{\sigma_\xi^2}{\mu}\int\limits_u^\infty \overline{F}(y)dy$.

Используя это равенство, получаем, что если $\overline{F}(y) \sim cy^{-\beta}$ и $c > 0$, то *теорема 1* будет выполнена при $\beta > 2\Delta$ и $0 < \Delta < 1$, а *теорема 2* – при $\beta > \max(\Delta + 1, 2 - \Delta)$ и $0 < \Delta < 1$. $\square$

Заметим, что в рассмотренной системе процесс $\lambda(t)$ является регенерирующим, точки регенерации – моменты скачков процесса $N(t)$. Мы рассмотрели систему, в которой случайные величины $\{\xi_j\}_{j=0}^\infty$ и $\{\tau_j\}_{j=0}^\infty$, на которых строится процесс $\lambda(t)$, являются независимыми. Случай, когда эти величины могут быть зависимыми, будет рассмотрен в следующем пункте.

1.5. Следствия полученных результатов

В этом пункте мы рассмотрим бесконечноканальные системы, для которых выполнено условие (1.2), а интенсивность входящего ДСП потока является стационарным регенерирующим процессом. Сформулируем и докажем следствия теорем 1 и 2 для этих систем, а также для частного случая, когда интенсивность входящего ДСП потока – полумарковский марковски модулированный процесс.

Результаты, приведенные в этой части диссертации, опубликованы в [33].

1.5.1. Регенерирующий дважды стохастический пуассоновский входящий поток

ДСП поток $A(t)$ является регенерирующим, если его случайная интенсивность $\lambda(t)$ является регенерирующим случайным процессом [1](Афанасьева, Булинская, 1980). Определение, свойства и ряд примеров таких потоков, можно найти в статье [21](Афанасьева, Баштова, 2014).

Обозначим θ_j момент j-й регенерации процесса $\lambda(t)$, $(j \geq 0)$ и $\tau_j = \theta_j - \theta_{j-1}$, $(j \geq 0)$, $\theta_{-1} = 0$. Последовательность $\{\tau_j\}_{j=1}^{\infty}$ состоит из н.о.р.с.в. с функцией распределения $F(t) = \mathsf{P}(\tau_1 \leq t)$, $\mathsf{E}\tau_1 = \mu < \infty$. Поскольку мы рассматриваем стационарный регенерирующий процесс, то τ_0 не зависит от последовательности $\{\tau_j\}_{j=1}^{\infty}$ и $F_0(t) = \mathsf{P}(\tau_0 < t) = \frac{1}{\mu}\int\limits_0^t \overline{F}(y)dy$.

Теорема 3. *Если $\lambda(t)$ стационарный регенерирующий процесс и $\sup_t \lambda(t,\omega) \leq \lambda_M < \infty$ с вероятностью 1, то*

$$|r(t)| = |\mathrm{cov}(\lambda(0), \lambda(t))| \leq 4\lambda_M^2\,\mathsf{P}(\tau_0 > t) = 4\lambda_M^2\overline{F_0}(t) \text{ при } t \geq 0. \quad (1.18)$$

Доказательство. По определению при $t \geq 0$ имеем

$$r(t) = \mathrm{cov}(\lambda(0), \lambda(t)) = \mathsf{E}\lambda(0)\lambda(t) - \mathsf{E}\lambda(0)\mathsf{E}\lambda(t) =$$

$$= \mathsf{E}\big(\lambda(0)\lambda(t)\,(\mathbb{I}(\tau_0 > t) + \mathbb{I}(\tau_0 \leq t))\,\big) -$$

$$-\mathsf{E}\big(\lambda(0)\,\big(\mathbb{I}(\tau_0 > t) + \mathbb{I}(\tau_0 \leq t)\big)\big)\mathsf{E}\big(\lambda(t)\,(\mathbb{I}(\tau_0 > t) + \mathbb{I}(\tau_0 \leq t))\,\big).$$

Заметим, что поскольку $\lambda(t)$ регенерирующий процесс, то $\lambda(0)$ и $\lambda(t)$ условно независимы при условии $\{\tau_0 \leq t\}$. Поэтому

$$\mathsf{E}(\lambda(0)\lambda(t)|\tau_0 \leq t) = \mathsf{E}(\lambda(0)|\tau_0 \leq t)\mathsf{E}(\lambda(t)|\tau_0 \leq t).$$

Используя последнее равенство, находим

$$r(t) = \mathsf{E}(\lambda(0)\lambda(t)|\tau_0 > t)\,\mathsf{P}(\tau_0 > t) +$$

$$+\mathsf{E}(\lambda(0)|\tau_0 \le t)\mathsf{E}(\lambda(t)|\tau_0 \le t)\,\mathsf{P}(\tau_0 \le t)\,\mathsf{P}(\tau_0 > t)-$$

$$-\mathsf{E}(\lambda(0)|\tau_0 > t)\mathsf{E}(\lambda(t))\,\mathsf{P}(\tau_0 > t)-$$

$$-\mathsf{E}(\lambda(0)|\tau_0 \le t)\mathsf{E}(\lambda(t)|\tau_0 > t)\,\mathsf{P}(\tau_0 \le t)\,\mathsf{P}(\tau_0 > t) =$$

$$= \mathsf{P}(\tau_0 > t)\big(\mathsf{E}(\lambda(0)\lambda(t)|\tau_0 > t) + \mathsf{E}(\lambda(0)|\tau_0 \le t)\mathsf{E}(\lambda(t)|\tau_0 \le t)\,\mathsf{P}(\tau_0 \le t)-$$

$$-\mathsf{E}(\lambda(0)|\tau_0 > t)\mathsf{E}(\lambda(t)) - \mathsf{E}(\lambda(0)|\tau_0 \le t)\mathsf{E}(\lambda(t)|\tau_0 > t)\,\mathsf{P}(\tau_0 \le t)\big).$$

Поскольку $\lambda(t) \le \lambda_M$ с вероятностью 1, то из последнего неравенства очевидным образом следует (1.18). □

Следствие 2. *В условиях теоремы 3, если* $\overline{F}(t) \le ct^{-d}$, $d > 1$, *то*

- *теорема 1 верна при* $d > 2\Delta$, $0 < \Delta < 1$.
- *теорема 2 верна при* $d > \max(\Delta + 1, 2 - \Delta)$, $0 < \Delta < 1$,

Возвращаясь к *примеру 1*, отметим, что процесс $\lambda(t)$ является регенерирующим, с точками регенерации $\theta_j = \sum\limits_{i=0}^{j} \tau_i$, $j \ge 0$. Заметим, что здесь не предполагается независимость ξ_j и τ_j при каждом $j \ge 0$, и для нахождения оценки для корреляционной функции процесса $\lambda(t)$ достаточным является требование $\mathsf{P}(\xi_j \le \lambda_M) = 1$.

1.5.2. Входящий поток, управляемый полумарковским марковски модулированным процессом

Эти потоки образуют важный подкласс ДСП потоков. Случайная интенсивность в данном случае представляется в следующем виде

$$\lambda(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k \mathbb{I}(U(t) = k), \tag{1.19}$$

где $\{U(t), t \in (-\infty, +\infty)\}$ – стационарный полумарковский процесс, принимающий значения $\{0, 1, 2, \ldots\}$, а $\{\lambda_k, \lambda_k < C < \infty, k \ge 0\}$ – совокупность неотрицательных чисел. В таком случае интенсивность $\lambda(t)$ также является стационарным процессом. Как известно(см. например, [9]), распределение

$U(t)$ определяется двумя матрицами $\mathbb{P} = (p_{ij})$ и $\mathbb{G} = (G_{ij}(x))$. Первая состоит из вероятностей перехода из (i) в (j), а вторая – из функций распределения времен нахождения $U(t)$ в состояниях $i = 0, 1, 2, \ldots$ при условии, что следующим состоянием будет j. Пусть $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ – моменты скачков $U(t)$ и $U_n = U(t_n + 0)$. Тогда $\mathbb{P}$ является матрицей переходных вероятностей для вложенной цепи Маркова U_n. Заметим, что процесс $\lambda(t)$ является регенерирующим и в качестве его точек регенерации $\{\theta_i\}_{i=0}^{\infty}$ можно взять моменты попадания цепи U_n в некоторое фиксированное состояние, например, в нулевое. Положим

$$\theta_0 = \inf\left\{t \geq 0 : U(t) = 0\right\}, \ \theta_i = \inf_{n\geq 1}\left\{t_n > \theta_{i-1} : U_n = 0\right\}, \ i = 1, 2, \ldots,$$

$$\tau_0 = \theta_0, \ \tau_i = \theta_i - \theta_{i-1}, \ i = 1, 2 \ldots .$$

Наша цель – выяснить условия, при которых для бесконечноканальной системы с полумарковским входящим потоком будут справедливы утверждения *теорем 1* и *2*. Для этого, как следует из *теоремы 3*, необходимо выяснить асимптотическое поведение при $t \to \infty$ вероятности

$$\mathsf{P}(\tau_0 > t) = \frac{1}{\mathsf{E}\tau_1}\int_t^{\infty} \mathsf{P}(\tau_1 > y)dy.$$

Заметим, что период регенерации τ_j, $j \geq 1$, состоит из времени, которое процесс $U(t)$ проводит в нулевом состоянии после попадания в него, и времени возвращения в нулевое состояние после выхода из него.

Определим

$$\nu_{jk} = \min\left\{n > 0 : U_n = k, \text{ при условии } U_0 = j\right\}.$$

Теорема 4. *Пусть выполнены следующие условия.*

1. *Существует функция распределения $G(x)$ с конечным средним такая, что при достаточно больших x*

$$1 - G_{ij}(x) \leq 1 - G(x), \ \textit{для } i, j = 0, 1, \ldots .$$

2. *Найдутся $\beta \in (0,1)$, постоянная $C > 0$ и целое n_0 такие, что*

$$\mathsf{P}(\nu_{00} > n) \le C(1-\beta)^n \text{ при } n > n_0. \tag{1.20}$$

Тогда для любого $h \in (0,1)$, некоторых постоянных C_1, C_2 и всех достаточно больших x выполняется неравенство

$$\mathsf{P}(\tau_1 > x) \le C_1(1 - G(x^{1-h})) + C_2 e^{-\gamma x^h}, \tag{1.21}$$

где $\gamma = -\ln(1-\beta)$.

Доказательство. Введем последовательность $\{\eta_j\}_{j=0}^{\infty}$ н.о.р.с.в. с функцией распределения $G(x)$. Для любого $M > n_0$ имеем цепочку неравенств

$$\mathsf{P}(\tau_1 > x) \le \mathsf{P}\left(\sum_{j=0}^{\nu_{00}} \eta_j > x, \nu_{00} \le M\right) + \mathsf{P}\left(\sum_{j=0}^{\nu_{00}} \eta_j > x, \nu_{00} > M\right) \le$$

$$\le \mathsf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{M} \left\{\sum_{j=0}^{n} \eta_j > x, \nu_{00} = n\right\}\right) + \mathsf{P}(\nu_{00} > M) \le$$

$$\le \sum_{n=0}^{M} \mathsf{P}\left(\sum_{j=0}^{n} \eta_j > x, \nu_{00} = n\right) + \mathsf{P}(\nu_{00} > M) \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{M} n\,\mathsf{P}\left(\eta_1 > \frac{x}{n}\right) \mathsf{P}(\nu_{00} = n) + \mathsf{P}(\nu_{00} > M) \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{M} n\left(1 - G\left(\frac{x}{n}\right)\right) \mathsf{P}(\nu_{00} = n) + \mathsf{P}(\nu_{00} > M) \le \left(1 - G\left(\frac{x}{M}\right)\right) \mathsf{E}\nu_{00} + C(1-\beta)^M.$$

Полагая $M = [x^h]$, для $h \in (0,1)$, и $\gamma = -\ln(1-\beta)$, получаем (1.21). $\square$

Следствие 3. *В условиях теоремы 4 для системы обслуживания с входящим потоком интенсивности $\lambda(t)$, определяемой соотношением (1.19), имеют место утверждения.*

1. *Если $1 - G(x) \le e^{-qx}$ для некоторого $q > 0$, то выполняются теоремы 1 и 2.*
2. *Если $1 - G(x) \le \frac{c}{x^\delta}$ для $\delta > 0$, $c > 0$ при $x \to \infty$, то теорема 1 выполнена при $\delta > 2\Delta$, а теорема 2 – при $\delta > \max(\Delta + 1, 2 - \Delta)$.*

Доказательство. 1. В силу *теоремы 3*, корреляционная функция $r(t)$ при $t \to \infty$ будет оцениваться экспоненциальной, так что *теоремы 1* и *2* справедливы.

2. Из (1.21) для $h \in (0,1)$ и любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ имеем

$$\mathsf{P}(\tau_1 > x) \le \mathsf{E}\nu_{00}\frac{c}{x^{\delta(1-h)}} + e^{-\gamma x^h} \le \frac{C}{x^{(1-h)(\delta-\varepsilon)}}$$

при $x \to \infty$. Здесь C – некоторая постоянная. Таким образом, получаем, что для некоторой постоянной C_1 имеет место оценка

$$|r(t)| \le \frac{C_1}{t^{(1-h)(\delta-\varepsilon)-1}} \tag{1.22}$$

при $t \to \infty$.

Если $\delta > \max(\Delta+1, 2-\Delta)$, то найдутся $\varepsilon > 0$, $h \in (0,1)$ для которых выполнено (1.22) и, стало быть, *теорема 2* верна. Аналогично устанавливается справедливость *теоремы 1* при $\delta > 2\Delta$. □

Пример 2. Предположим, что полумарковский процесс $U(t)$ имеет конечное множество состояний и матрица переходных вероятностей $\mathbb{P}$ – неприводима и непериодична. Тогда для некоторого $n_0 > 0$

$$\mathsf{P}_{ij}(n_0) > 0, \text{ при всех } i,j = 0\dots N,$$

где $\mathsf{P}_{ij}(n_0) = \mathsf{P}(U_{n_0} = j|U_0 = i)$. При $k \ge 0$ и $n \ge n_0$, имеем

$$\mathsf{P}(\nu_{00} > kn) \le (1-\beta)^n,$$

где $\beta = \min\limits_i \mathsf{P}_{i0}(n_0)$. Ясно, что $0 < \beta < 1$. Последнее неравенство можно переписать в следующем виде

$$\mathsf{P}(\nu_{00} > n) \le (1-\beta)^{\frac{n}{k}}.$$

Это и означает, что справедлива вторая часть *теоремы 4*.

Все множество пар состояний $\{(i,j), i,j = 0,1,\dots,N\}$ разобьем на два класса K_0 и K_1 следующим образом. Если $1-G_{ij}(x) \le e^{-q_{ij}x}$ для некоторого

$q_{ij} > 0$, то $(i,j) \in K_0$. Если $(i,j) \in K_1$, то $1 - G_{ij}(x) \le \frac{c_{ij}}{x^{\delta_{ij}}}$ при $x \to \infty$. В качестве мажорирующей функции $G(x)$ возьмем $\widetilde{G}(x) = \min\limits_{i,j} G_{ij}(x)$, которая при конечном N является функцией распределения.

Если класс K_1 пуст, то $1 - G(x) \le e^{-qx}$ для некоторого $q > 0$ и *теоремы 1* и *2* всегда имеют место. В противном случае для некоторой постоянной C_0, имеем

$$1 - G(x) \sim \frac{C_0}{x^{\delta_0}} \text{ при } x \to \infty,$$

где $\delta_0 = \min\limits_{(i,j)\in K_1} \delta_{ij}$. Теперь воспользовавшись *следствием 3* получаем, что если $0 < \Delta < 1$, то *теорема 2* будет иметь место при $\delta_0 > |\Delta - 1/2| + 3/2$, а *теорема 1* – при условии, что $\delta_0 > 2\Delta$. $\square$

Пример 3. Рассмотрим ДСП поток $A(t)$ с интенсивностью $\lambda(t)$, которая является полумарковским марковски модулированным процессом. Этот процесс управляется полумарковским процессом $U(t)$, который имеет счетное множество состояний. Предположим, что $U(t)$ – процесс размножения и гибели. Матрица переходных вероятностей $\mathbb{P}$ определяется следующим образом

$$p_{0\ 1} = 1,\ p_{i\ i+1} = p_i,\ p_{i\ i-1} = 1 - p_i,$$

$$p_{i\ j} = 0, \text{ при } |j - i| > 1.$$

Пусть выполнено условие 1 *теоремы 4* и при всех $i = 1, 2 \ldots$

$$p_i < \frac{1}{2} - \varepsilon \tag{1.23}$$

для некоторого $\varepsilon > 0$. Покажем, что тогда справедливы утверждения *следствия 3*. Для этого нам достаточно показать, что случайная величина ν_{00} стохастически мажорируются геометрически распределенной случайной величиной $\widetilde{\nu}$.

Для этого рассмотрим случайное блуждание S_n, задаваемое рекуррентным соотношением $S_n = [S_{n-1} + \xi_n]^+$ при $n > 0$, $S_0 = 0$. Здесь $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$

– н.о.р.с.в. и
$$\mathsf{P}(\xi_n = 1) = \frac{1}{2} - \varepsilon, \ \ \mathsf{P}(\xi_n = -1) = \frac{1}{2} + \varepsilon,$$
$\mathsf{E}\xi_n = -2\varepsilon$, $\mathsf{D}\xi_n = 1 - 4\varepsilon^2$. Пусть $\widehat{\nu}_{10}$ – число шагов до первого попадания S_n в (0) из состояния (1). Тогда

$$\mathsf{P}(\widehat{\nu}_{10} > n) = \mathsf{P}(S_1 > 0, S_2 > 0 \ldots S_n > 0) \leq \mathsf{P}(S_n > 0).$$

Согласно центральной предельной теореме, имеем при достаточно больших n
$$\mathsf{P}(S_n > 0) \sim 1 - \Phi\left(\frac{2\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{1-4\varepsilon^2}}\right),$$
где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$. Используя в данном случае оценку [16](Feller, 1984),
$$1 - \Phi(x) < \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$
получаем асимптотическое неравенство для вероятности
$$\mathsf{P}(S_n > 0) < \frac{1}{c\sqrt{2\pi n}} e^{-\frac{c^2 n}{2}} \tag{1.24}$$
при $n \to \infty$. Здесь $c = \frac{2\varepsilon}{\sqrt{1-4\varepsilon^2}}$. Таким образом, при достаточно больших n справедлива следующая цепочка неравенств

$$\mathsf{P}(\nu_{00} > n) = \mathsf{P}(\nu_{10} > n-1) \leq \mathsf{P}(\widehat{\nu}_{10} > n-1) < \mathsf{P}(S_{n-1} > 0) \leq$$
$$\leq \frac{1}{c\sqrt{2\pi(n-1)}} e^{-\frac{c^2(n-1)}{2}} \leq \left(e^{-\frac{c^2}{2}}\right)^n, \tag{1.25}$$
что и доказывает выполнение условия 2 *теоремы 4*. Так что имеет место *следствие 3*. □

Глава 2. Предельные теоремы для системы обслуживания с регенерирующим входящим потоком

2.1. Введение

В настоящей главе рассматривается система с регенерирующим входящим потоком. В общем случае, для систем с таким входящим потоком не удается явно выписать какие-либо характеристики для процесса $q(t)$, равного числу требований в системе в момент t. Для анализа процесса $q(t)$ вводятся две вспомогательные мажорирующие системы S_1 и S_2, входящий поток в которые отличается от исходного. А именно, в систему S_1 все требования, которые пришли бы в систему S на данном периоде регенерации, поступают группой в его начале, а в систему S_2 – в конце. Исследование подобных систем с групповым поступлением требований, имеет и самостоятельный интерес, что подтверждается работами [56](Keilson, 1988), [61](Liu, 1990), [62](Liu, 1991).

Далее, в теоремах для систем с групповым поступлением требований делается случайная замена времени. Ключевым в этом переходе является то обстоятельство, что центрированный процесс, равный числу требований в системе, является условным отрицательным демимартингалом [74](Rao, 2012). Применение демимартингалов в теории очередей достаточно ново, впервые оно встречается в [19](Angrishi, 2015) и состоит в применении демимартингальных неравенств для тандемных сетей $GI/GI/1$.

Стоит отметить, что параметры предельного распределения процесса $q(t)$ и в этой главе выражены через простые характеристики входящего потока, такие как математическое ожидание периодов регенерации и математическое ожидание скачков входящего потока на периодах регенерации, что может быть удобно для приложений.

Глава организована следующим образом. В п.2 дается описание рассматриваемой системы, мажорирующих систем и связи исходной системы и мажорирующих через последовательность случайных сумм. Здесь же формулируются основные результаты данной главы. В п.3 доказываются предельные теоремы для последовательности случайных сумм, введенных в п.2, для неслучайного индекса. Центральной задачей п.4 является переход к случайному индексу в предельных теоремах, полученных в п.3. Этот переход опирается на максимальные неравенства для отрицательных условных демимартингалов. П.3 завершает доказательство теорем. В нем производится переход к неслучайной нормировке в предельных теоремах для сумм со случайным индексом.

2.2. Описание модели с групповым поступлением требований

Пусть $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{\tau_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательности положительных н.о.р. в каждой последовательности случайных величин. Обозначим $\theta_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \tau_i$, $\theta_0 = 0$, $\mathsf{E}\tau_1 = a$.

Рассмотрим бесконечноканальную систему обслуживания S, в которой требования поступают в моменты θ_i группами объема ξ_i, $i \geq 1$. Таким образом, число требований в группах и интервалы между их поступлениями могут быть зависимы. Пусть $\mathcal{F}$ — σ-алгебра, порожденная случайными векторами $\{\xi_i, \tau_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Времена обслуживания заявок $\{\eta_i, i \geq 1\}$ представляют собой последовательность н.о.р.с.в. с функцией распределения $B(t)$, не зависящую от $\{\xi_i, \tau_i\}_{i=1}^{\infty}$. Обозначаем $\overline{B}(t) = 1 - B(t)$.

Основное внимание в данной работе направлено на изучение процесса $q(t)$, который представляет собой число требований, находящихся на обслуживании, в момент времени t.

2.3. Предельные теоремы для системы с групповым поступлением требований

Доказательство предельных теорем для $q(t)$ будет происходить в три шага. Сначала доказываются предельные теоремы для $q(\theta_n)$, $n \to \infty$. Затем в этих теоремах производится случайная замена времени, переход от индекса n к $N(t)$, $N(t) = \max\{n : \theta_n < t\}$. И оканчивается переходом от теорем для $q(\theta_{N(t)})$ к теоремам для $q(t)$.

2.3.1. Предельные теоремы для процесса $q(\theta_n)$

Поскольку

$$q(\theta_n) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{\xi_i} \mathbb{I}\left(\eta_{U_{k-1}+j} > \theta_n - \theta_k\right),\ n \geq 1,\ U_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i,\ U_0 = 0,$$

то характеристическая функция $q(\theta_n)$ имеет вид

$$\Phi_n(z) = \mathsf{E}\exp\left(izq(\theta_n)\right) = \mathsf{E}\prod_{k=1}^{n}\prod_{j=1}^{\xi_k} \mathsf{E}_{\mathcal{F}}\exp\left(iz\mathbb{I}\left(\eta_{U_{k-1}+j} > \theta_n - \theta_k\right)\right) =$$

$$= \mathsf{E}\prod_{k=1}^{n}\left(\overline{B}(\theta_n - \theta_k)e^{iz} + B(\theta_n - \theta_k)\right)^{\xi_k}. \tag{2.1}$$

Здесь $\mathcal{F}$ – σ-алгебра, порожденная случайными величинами $\{\xi_i, \tau_i\}_{i=1}^{\infty}$. Используем сокращение $\mathsf{E}_{\mathcal{F}}\xi = \mathsf{E}(\xi|\mathcal{F})$, ξ – случайная величина.

Дифференцируя (2.1) и полагая $z = 0$, находим

$$\mathsf{E}q(\theta_n) = \mathsf{E}M_n,\ \mathsf{D}q(\theta_n) = \mathsf{E}M_n + \mathsf{D}M_n,$$

где $M_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k\overline{B}(\theta_n - \theta_k)$.

Сформулируем основной результат этого пункта.

Теорема 5. *Если*

$$\mathsf{E}\eta_1 = \infty,\ \mathsf{E}\xi_1^2 < \infty,\ \mathsf{E}\tau_1^r < \infty,\ r > 2,$$

то при $n \to \infty$ имеют место сходимость по распределению

$$\frac{q(\theta_n) - \lambda\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}{\sqrt{\lambda\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1), \tag{2.2}$$

и по вероятности

$$\frac{q(\theta_n)}{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)} \xrightarrow{p} \lambda. \tag{2.3}$$

Для доказательства этой предельной теоремы потребуются некоторые вспомогательные результаты, приведем их в следующем пункте.

2.3.2. Вспомогательные результаты

Введем обозначения, которые не раз будут использоваться далее в этой главе. Пусть $\phi(x)$ – некоторая положительная возрастающая функция. Определим следующие функции для $x \geq 0$

$$B_{min}(x) = \overline{B}\left(x\mathsf{E}\tau_1 + \phi(x)\right),\ B_{max}(x) = \overline{B}\left(x\mathsf{E}\tau_1 - \phi(x)\right),$$

$$B_{ctr}(x) = \overline{B}\left(x\mathsf{E}\tau_1\right),\ \mathcal{D}(x) = B_{max}(x) - B_{min}(x) \tag{2.4}$$

и события

$$H_{n,i} = \{\omega : |\theta_n - \theta_i - (n-i)\mathsf{E}\tau_1| > \phi(n-i)\},\ 1 \leq i \leq n, \tag{2.5}$$

$$H_i = \{\omega : |\theta_i - i\mathsf{E}\tau_1| > \phi(i)\},\ i \geq 1.$$

Также будет полезно обозначение

$$M_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \overline{B}\left(\theta_n - \theta_i\right), n \geq 1. \tag{2.6}$$

Замечание 1. *Отметим, что для любой функции $0 < \varphi(n) < n$ будут иметь место следующие неравенства.*

1. *Для $1 \leq i \leq n - \varphi(n)$ в случае, когда $B_{min}(n-i) \leq \overline{B}(\theta_n - \theta_i) \leq B_{max}(n-i)$, имеем*

$$\left|\xi_i\overline{B}(\theta_n - \theta_i) - \mathsf{E}\xi_i\overline{B}(\theta_n - \theta_i)\right| \leq (\xi_i + \mathsf{E}\xi_i)\mathcal{D}(n-i) + |\xi_i - \mathsf{E}\xi_i| B_{ctr}(n-i) \text{ п.н.} \tag{2.7}$$

2. Для $1 \le i \le n$, имеем

$$\left|\xi_i \overline{B}(\theta_n - \theta_i) - \mathsf{E}\left(\xi_i \overline{B}(\theta_n - \theta_i)\right)\right| \le \xi_i + \mathsf{E}\xi_i \text{ п.н.} \tag{2.8}$$

При доказательстве предельных теорем будет полезна следующая лемма.

Лемма 2.1. *Пусть $\beta(t) = \int\limits_0^t \overline{B}(y)dy \to \infty$ при $t \to \infty$, $\phi(t) = \frac{t^{1-\delta}}{(\beta(t))^{1/2-\delta}}$, $0 < \delta < 1/2$. Тогда найдется монотонно возрастающая функция $\varphi(t)$($0 < \varphi(t) < t$) такая, что $\frac{\varphi(t)}{\sqrt{\beta(t)}} \to 0$ при $t \to \infty$ и имеет место сходимость*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\beta(t)}} \int\limits_{\varphi(t)}^{t} \mathcal{D}(x)dx = 0, \tag{2.9}$$

где функция $\mathcal{D}(x)$ определена в (2.4) с помощью функции $\phi(x)$.

Доказательство. Не ограничивая общности, при доказательстве считаем $\mathsf{E}\tau_1 = 1$. Будем искать $\phi(x)$ в следующем виде

$$\phi(x) = \frac{a(x)x}{\sqrt{\beta(x)}},$$

где $a(x) = \left(\frac{\beta(x)}{x}\right)^{\delta}$ – монотонно убывает к нулю при $x \to \infty$. Поэтому

$$\phi'(x) = \frac{2\beta(x)(a(x) + xa'(x)) - a(x)x\overline{B}(x)}{2(\beta(x))^{3/2}} \le \frac{a(x)}{(\beta(x))^{1/2}}.$$

Используя последнюю оценку можно записать следующие неравенства

$$\frac{1}{1-\phi'(x)} \le \frac{1}{1-\varepsilon(x)}, \quad \frac{1}{1+\phi'(x)} \ge \frac{1}{1+\varepsilon(x)}.$$

Здесь $\varepsilon(x) = \frac{a(x)}{\sqrt{\beta(x)}}$. Найдем оценку сверху для интеграла

$$\int\limits_{\varphi(t)}^{t} \overline{B}_{max}(x)dx = \int\limits_{\varphi(t)}^{t} \overline{B}(x-\phi(x))\frac{1-\phi'(x)}{1-\phi'(x)}dx \le \frac{1}{1-\varepsilon(\varphi(t))} \int\limits_{\varphi(t)-\phi(\varphi(t))}^{t-\phi(t)} \overline{B}(y)dy \le$$

$$\le \frac{\beta(t-\phi(t)) - \beta(\varphi(t) - \phi(\varphi(t)))}{1-\varepsilon(\varphi(t))};$$

аналогично получаем оценку снизу

$$\int\limits_{\varphi(t)}^{t} \overline{B}_{min}(x)dx \geq \frac{\beta(t+\phi(t)) - \beta(\varphi(t)+\phi(\varphi(t)))}{1+\varepsilon(\varphi(t))}.$$

Из приведенных оценок следует, что

$$\frac{1}{\sqrt{\beta(t)}} \int\limits_{\varphi(t)}^{t} \mathcal{D}(x)dx \leq$$

$$\leq \frac{\beta(t-\phi(t)) - \beta(\varphi(t)-\phi(\varphi(t))) - \beta(t+\phi(t)) + \beta(\varphi(t)+\phi(\varphi(t)))}{(1-\varepsilon(\varphi(t)))\sqrt{\beta(t)}} +$$

$$+ \frac{2\varepsilon(\varphi(t))}{(1-\varepsilon^2(\varphi(t)))\sqrt{\beta(t)}} \left(\beta(t+\phi(t)) - \beta(\varphi(t)+\phi(\varphi(t)))\right) =$$

$$= \left| \frac{\beta(\varphi(t)+\phi(\varphi(t))) - \beta(\varphi(t)-\phi(\varphi(t)))}{(1-\varepsilon(\varphi(t)))\sqrt{\beta(t)}} - \frac{\beta(t+\phi(t)) - \beta(t-\phi(t))}{(1-\varepsilon(\varphi(t)))\sqrt{\beta(t)}} \right| +$$

$$+ \frac{2\varepsilon(\varphi(t))}{(1-\varepsilon^2(t))\sqrt{\beta(t)}} \left(\beta(t+\phi(t)) - \beta(\varphi(t)+\phi(\varphi(t)))\right) \leq$$

$$\leq 2\frac{\beta(t+\phi(t)) - \beta(t-\phi(t))}{(1-\varepsilon(\varphi(t)))\sqrt{\beta(t)}} + 2\frac{\varepsilon(\varphi(t))}{(1-\varepsilon^2(\varphi(t)))} \frac{\beta(t+\phi(t)) - \beta(\varphi(t)+\phi(\varphi(t)))}{\sqrt{\beta(t)}} =$$

$$= 2\frac{I_t}{(1-\varepsilon(\varphi(t)))} + 2\frac{II_t}{(1-\varepsilon^2(\varphi(t)))}.$$

Найдем функцию $\varphi(t)$ такую, что пределы I_t и II_t при $t \to \infty$ равны 0, но при этом $\frac{\varphi(t)}{\sqrt{\beta(t)}} \to 0$ при $t \to \infty$. Заметим, что

$$II_t = \varepsilon(\varphi(t)) \frac{\beta(t+\phi(t)) - \beta(\varphi(t)+\phi(\varphi(t)))}{\sqrt{\beta(t)}} =$$

$$= \left(\frac{\beta(\varphi(t))}{\varphi(t)}\right)^{\delta} \frac{\beta(t+\phi(t)) - \beta(\varphi(t)+\phi(\varphi(t)))}{\sqrt{\beta(t)}\sqrt{\beta(\varphi(t))}} =$$

$$= \frac{\beta(t+\phi(t)) - \beta(\varphi(t)+\phi(\varphi(t)))}{\sqrt{\beta(t)}\left(\beta(\varphi(t))\right)^{1/2-\delta}\left(\varphi(t)\right)^{\delta}}.$$

Поэтому

$$II_t = \varepsilon(\varphi(t)) \frac{\beta(t+\phi(t)) - \beta(\varphi(t)+\phi(\varphi(t)))}{\sqrt{\beta(t)}} =$$

$$= \left(\frac{\beta(\varphi(t))}{\varphi(t)}\right)^{\delta} \frac{\beta(t+\phi(t)) - \beta(\varphi(t)+\phi(\varphi(t)))}{\sqrt{\beta(t)}\sqrt{\beta(\varphi(t))}} =$$

$$= \frac{\beta(t+\phi(t)) - \beta(\varphi(t)+\phi(\varphi(t)))}{\sqrt{\beta(t)}\left(\beta(\varphi(t))\right)^{1/2-\delta}\left(\varphi(t)\right)^{\delta}}.$$

Для любой положительной функции $b(t)$ функция

$$F(t,y) = \frac{\beta(t+\phi(t)) - \beta(y+\phi(y))}{\sqrt{\beta(t)}\left(\beta(y)\right)^{1/2-\delta} y^{\delta}} - b(t)$$

монотонно убывает по y, $0 < y < t$. Поэтому по теореме о неявной функции [12](Люстерник, Соболев, 1965) существует функция $\varphi(t)$ такая, что

$$\frac{\beta(t+\phi(t)) - \beta(\varphi(t)+\phi(\varphi(t)))}{\sqrt{\beta(t)}\left(\beta(\varphi(t))\right)^{1/2-\delta}\left(\varphi(t)\right)^{\delta}} = b(t).$$

Пусть $b(t) = C_1\left(\frac{\overline{B}(t+\phi(t))}{t^{\delta}(\beta(t))^{1/2-\delta}}\right)^{\Delta}$, $\Delta > 1$, C_1 – некоторая положительная постоянная. При таком выборе $b(t)$

1. $II_t \to 0$, при $t \to \infty$;
2. $\frac{\varphi(t)}{\sqrt{\beta(t)}} \to 0$ при $t \to \infty$.

   Покажем последнее. Поскольку

$$\frac{\varphi(t)}{\sqrt{\beta(t)}} = \frac{b(t)\left(\beta(\varphi(t))\right)^{1/2-\delta}\left(\varphi(t)\right)^{\delta+1}}{\beta(t+\phi(t)) - \beta(\varphi(t)+\phi(\varphi(t)))} \leq$$

$$\leq \frac{b(t)t^{\delta+1}\left(\beta(t)\right)^{1/2-\delta}}{\overline{B}(t+\phi(t))(t+\phi(t))/2} \leq$$

$$\leq C\frac{b(t)t^{\delta}\left(\beta(t)\right)^{1/2-\delta}}{\overline{B}(t+\phi(t))} \leq C_0\left(\frac{\overline{B}(t+\phi(t))}{t^{\delta}\left(\beta(t)\right)^{1/2-\delta}}\right)^{\Delta-1}, \ \Delta > 1.$$

Далее, так как

$$I_t = \frac{\beta(t+\phi(t)) - \beta(t-\phi(t))}{\sqrt{\beta(t)}} \leq \frac{2\phi(t)\overline{B}(t-\phi(t))}{\sqrt{\beta(t)}} = 2\frac{t\overline{B}(t-\phi(t))}{\beta(t)}a(t) \leq 2a(t).$$

Последнее следует из цепочки неравенств:

$$t\overline{B}(t-\phi(t)) = (t-\phi(t))\overline{B}(t-\phi(t)) + \phi(t)\overline{B}(t-\phi(t)) \leq \beta(t).$$

Поэтому $I_t \to 0$ при $t \to \infty$. Лемма доказана. $\square$

Далее будет полезен следующий результат.

Лемма 2.2. *Пусть* $\{X_i\}_{i=1}^{\infty}$ *– последовательность н.о.р.с.в.,* $X_i \geq 0$. *Обозначим* $\Xi_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, $n \geq 1$. *Предположим, что* $\mathsf{E}X_1^r < \infty$. *Тогда при любом* $r \geq 2$ *найдутся постоянные* C_1 *и* C_2 *такие, что*

$$\mathsf{P}\left(|\Xi_n - \mathsf{E}\Xi_n| > c_n\right) \leq C_1 \frac{1}{n^{r-1}} + C_2 \exp\left(-\frac{c_n^2}{2n\mathsf{E}X_1^2}\right), \ n \geq 1.$$

Здесь $c_n = \overline{o}(n)$, $n \to \infty$.

Доказательство. Заметим, что

$$\mathsf{P}\left(|\Xi_n - \mathsf{E}\Xi_n| > c_n\right) = \mathsf{P}\left(\Xi_n - \mathsf{E}\Xi_n > c_n\right) + \mathsf{P}\left(\mathsf{E}\Xi_n - \Xi_n > c_n\right).$$

Для оценки первого слагаемого используем следующую лемму.

Лемма.(c_r-неравенства, [59](Loeve, 1977))

$\mathsf{E}|X+Y|^r \leq c_r\mathsf{E}|X|^r + c_r\mathsf{E}|Y|^r$, *где* $c_r = 1$ *при* $0 < r < 1$ *и* $c_r = 2^{r-1}$ *при* $r \geq 1$.

Используя эту лемму в нашем случае получаем, что при всех $n \geq 1$ найдутся постоянные C_1 и C_0 такие, что

$$\mathsf{P}\left(\Xi_n > \mathsf{E}\Xi_n + c_n\right) \leq C_1 \frac{n\mathsf{E}X_1^r}{(n\mathsf{E}X_1 + c_n)^r} \leq C_0 \frac{1}{n^{r-1}},$$

для любого $r > 1$. Для оценки второго слагаемого используем следующий результат.

Лемма.(теорема 2.1, [65](Maurer, 2003))

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ *– н.с.в.,* $\mathsf{E}X_i^2 < \infty$, $X_i \geq 0$. *Положим* $S_k = \sum\limits_{i=1}^{k} X_i$. *Тогда для* $t > 0$ *и* $n \geq 1$, *имеем*

$$\mathsf{P}\left(\mathsf{E}S_n - S_n \geq t\right) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2\sum\limits_{i=1}^{n}\mathsf{E}X_i^2}\right).$$

Согласно этой лемме получаем, что

$$\mathsf{P}\left(\mathsf{E}\Xi_n - \Xi_n \geq c_n\right) \leq \exp\left(-\frac{c_n^2}{2\sum\limits_{i=1}^{n}\mathsf{E}X_i^2}\right) = \exp\left(-\frac{c_n^2}{2n\mathsf{E}X_1^2}\right).$$

Объединяя приведенные неравенства, получаем утверждение леммы. □

Следствие 4. *Пусть* $\{\tau_i\}_{i=1}^{\infty}$ *– последовательность н.о.р.с.в.,* $\theta_n = \sum\limits_{i=1}^{n}\tau_i$, $N(t) = \max\{n : \theta_n < t\}$, $\mathsf{E}\tau_1^r < \infty$. *Если* $r \geq 2$, *то для некоторых постоянных* C_1^*, C_2^*

$$\mathsf{P}\left(\left|N(t) - \frac{t}{\mathsf{E}\tau_1}\right| > c_t\right) \leq C_1^*\frac{1}{t^{r-1}} + C_2^*\exp\left(-\frac{(c_t\mathsf{E}\tau_1)^2}{2t\mathsf{E}\tau_1^2}\right),\ n \geq 1. \tag{2.10}$$

Здесь $c_t = \overline{o}(t)$, $t \to \infty$.

Доказательство. Утверждение следствия сразу вытекает из следующей цепочки равенств

$$\left\{\left|N(t) - \frac{t}{\mathsf{E}\tau_1}\right| > c_t\right\} = \left\{N(t) > \frac{t}{\mathsf{E}\tau_1} + c_t\right\}\bigcup\left\{N(t) < \frac{t}{\mathsf{E}\tau_1} - c_t\right\} =$$

$$= \left\{\theta_{\frac{t}{\mathsf{E}\tau_1}+c_t} < t\right\}\bigcup\left\{\theta_{\frac{t}{\mathsf{E}\tau_1}-c_t > t}\right\} =$$

$$= \left\{\left(\frac{t}{\mathsf{E}\tau_1} + c_t\right)\mathsf{E}\tau_1 - \theta_{\frac{t}{\mathsf{E}\tau_1}+c_t} > c_t\mathsf{E}\tau_1\right\}\bigcup\left\{\theta_{\frac{t}{\mathsf{E}\tau_1}-c_t} - \left(\frac{t}{\mathsf{E}\tau_1} - c_t\right)\mathsf{E}\tau_1 > c_t\mathsf{E}\tau_1\right\}.$$

Везде, где в индексе возникает выражение, принимающее вещественные значения, понимается, что взята его целая часть. Для краткости на этих деталях не будем останавливаться. Далее, используя для каждого из событий утверждение леммы 2.2, получаем (2.10). □

В доказательстве теоремы 5 ключевую роль играет утверждение следующей леммы.

Лемма 2.3. *Пусть*

$$\mathsf{E}\eta_1 = \infty,\ \mathsf{E}\xi_1^2 < \infty,\ \mathsf{E}\tau_1^r < \infty,\ r > 2,$$

то

1.

$$\frac{M_n - \mathsf{E}M_n}{\sqrt{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}} \xrightarrow{p} 0 \textit{ при } n \to \infty, \tag{2.11}$$

2.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathsf{E}M_n - \lambda\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}{\sqrt{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}} = 0. \tag{2.12}$$

Здесь $M_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \overline{B}\left(\theta_n - \theta_i\right)$, *как было определено в (2.6).*

Доказательство. 1. Для любого $\delta > 0$ и любой функции $0 < \varphi(n) < n$, имеем

$$\mathsf{P}\left(|M_n - \mathsf{E}M_n| > \delta\sqrt{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}\right) =$$

$$= \mathsf{P}\left(|M_n - \mathsf{E}M_n| > \delta\sqrt{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}, \bigcap_{1\le i\le n-\varphi(n)} \overline{H}_{n,i}(\varepsilon)\right) +$$

$$+ \mathsf{P}\left(|M_n - \mathsf{E}M_n| > \delta\sqrt{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}, \bigcup_{1\le i\le n-\varphi(n)} H_{n,i}(\varepsilon)\right) \le$$

$$\le \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{n-\varphi(n)} \left|\xi_i\overline{B}\left(\theta_n - \theta_i\right) - \mathsf{E}\xi_i\overline{B}\left(\theta_n - \theta_i\right)\right| > \frac{\delta}{2}\sqrt{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}, \bigcap_{1\le i\le n-\varphi(n)} \overline{H}_{n,i}(\varepsilon)\right) +$$

$$+ \mathsf{P}\left(\sum_{i=n-\varphi(n)+1}^{n} \left|\xi_i\overline{B}\left(\theta_n - \theta_i\right) - \mathsf{E}\xi_i\overline{B}\left(\theta_n - \theta_i\right)\right| > \frac{\delta}{2}\sqrt{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}, \bigcap_{1\le i\le n-\varphi(n)} \overline{H}_{n,i}(\varepsilon)\right) +$$

$$+ \sum_{i=\varphi(n)}^{n-1} \mathsf{P}(H_i(\varepsilon)) = I_1^n + I_2^n + I_3^n.$$

Из леммы 2.2, при условии, что $\mathsf{E}\tau_1^r < \infty$, $r > 2$, следует, что ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(H_i(\varepsilon))$ сходится, при $\phi(n)$ удовлетворяющем следующему условию

$$\frac{\phi^2(n)}{n} \to \infty \text{ при } n \to \infty. \tag{2.13}$$

Выберем функцию $\phi(n)$ равной этой же функции из леммы 2.1. В таком случае $\lim\limits_{n\to\infty} I_3^n = 0$.

Используя (2.7) и (2.8) для оценки I_1^n, имеем

$$I_1^n < \mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{n-\varphi(n)} (\xi_i + \mathsf{E}\xi_i)\mathcal{D}(n-i) > \frac{\delta}{4}\sqrt{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}\right) +$$

$$+\mathsf{P}\left(\sum_{i=1}^{n-\varphi(n)} |\xi_i - \mathsf{E}\xi_i| B_{ctr}(n-i) > \frac{\delta}{4}\sqrt{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}\right) \leq$$

$$\leq \frac{2\mathsf{E}\xi_1}{\frac{\delta}{4}\sqrt{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}} \sum_{i=1}^{n-\varphi(n)} \mathcal{D}(n-i) + \frac{\mathsf{D}\xi_1}{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)(\frac{\delta}{4})^2} \sum_{i=1}^{n-\varphi(n)} B_{ctr}^2(n-i).$$

Первое слагаемое сходится к нулю согласно *лемме 2.1*, при соответствующем выборе функций φ и ϕ, удовлетворяющих лемме 2.1. Далее

$$\frac{1}{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)} \sum_{i=1}^{n-\varphi(n)} B_{ctr}^2(n-i) \leq \frac{1}{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)} B_{ctr}(\varphi(n))\beta(n\mathsf{E}\tau_1) =$$

$$= B_{ctr}(\varphi(n)) \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Согласно (2.7), (2.8) и неравенству Чебышева, имеем

$$I_2^n \leq \frac{\mathsf{D}\xi_1}{\delta/2} \frac{\varphi(n)}{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}.$$

Поскольку $\varphi(n)$ выбрана удовлетворяющей *лемме 2.1*, то $I_2^n \to 0$ при $n \to \infty$.

2. Так же, как в предыдущем пункте, получаем

$$\mathsf{E}M_n = \sum_{i=1}^{n-\varphi(n)} \mathsf{E}\xi_i \left(\overline{B}(\theta_n - \theta_i) - B_{ctr}(n-i)\right) + \mathsf{E}\xi_1 \sum_{i=1}^{n-\varphi(n)} B_{ctr}(n-i) +$$

$$+ \sum_{i=n-\varphi(n)}^{n} \mathsf{E}\xi_i \overline{B}(\theta_n - \theta_i) = J_1^n + J_2^n + J_3^n;$$

$$J_1^n \leq \mathsf{E}u_1 \sum_{i=1}^{n-\varphi(n)} \mathcal{D}(n-i) + \mathsf{E}\xi_1 \sum_{i=\varphi(n)}^{n-1} \mathsf{P}\left(H_i(\varepsilon)\right),$$

$$J_2^n = \mathsf{E}\xi_1 \sum_{i=1}^{n-\varphi(n)} B_{ctr}(n-i),$$

$$J_3^n = \mathsf{E}\xi_1\varphi(n).$$

Оценки J_1^n и J_3^n сразу следуют из *леммы 2.1.* Из определения $B_{ctr}(n-i)$, имеем

$$\frac{-\mathsf{E}\xi_1\varphi(n)}{\sqrt{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}} \leq \frac{J_2^n - \frac{\mathsf{E}\xi_1}{\mathsf{E}\tau_1}\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}{\sqrt{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}} \leq 0.$$

Последнее неравенство получено с помощью оценки сверху суммы ряда интегралом. Далее, при выборе $\varphi(n)$, равной этой функции в лемме 2.1, получаем (2.12).

2.3.3. Доказательство теоремы 5

Обозначим

$$q^*(\theta_n) = \frac{q(\theta_n) - \lambda\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}{\sqrt{\lambda\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}}.$$

Учитывая (2.1), находим

$$\mathsf{E}_{\mathcal{F}}\left(e^{isq^*(\theta_n)}\right) = \prod_{j=1}^{n}\left(1 + (e^{\frac{is}{\sqrt{\lambda\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}}} - 1)\overline{B}(\theta_n - \theta_j)\right)^{\xi_j} e^{-is\sqrt{\lambda\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}}.$$

Здесь, как и ранее, $\mathcal{F}$ – σ-алгебра, порожденная случайными векторами $\{\xi_i, \tau_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Поскольку $\ln(1+z) = z(1+\varepsilon(z))$, где $\varepsilon(z) \leq |z|$ и $|z| \leq 1/2$ (см. [82]), то при фиксированном s и достаточно больших t выполняются равенства

$$\ln \mathsf{E}_{\mathcal{F}}\left(e^{isq^*(\theta_n)}\right) = \sum_{j=1}^{n}\xi_j \ln\left(1 + (e^{\frac{is}{\sqrt{\lambda\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}}} - 1)\overline{B}(\theta_n - \theta_j)\right) -$$

$$-is\sqrt{\lambda\beta(n\mathsf{E}\tau_1)} =$$

$$= (e^{\frac{is}{\sqrt{\lambda\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}}} - 1)\sum_{j=1}^{n}\xi_j\overline{B}(\theta_n - \theta_j)\left(1 + \varepsilon\left((e^{\frac{is}{\sqrt{\lambda\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}}} - 1)\overline{B}(\theta_n - \theta_j)\right)\right) -$$

$$-is\sqrt{\lambda\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}.$$

Отсюда, используя разложение e^{is} в окрестности нуля и определение M_n(см. (2.6)), имеем

$$\ln \mathsf{E}_{\mathcal{F}}\left(e^{isq^*(\theta_n)}\right) = is\left(\frac{M_n - \lambda\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}{\sqrt{\lambda\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}}\right) - \frac{s^2}{2}\frac{M_n}{\lambda\beta(n\mathsf{E}\tau_1)} + R_n,$$

где

$$R_n = \left(e^{\frac{is}{\sqrt{\lambda\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}}} - 1 - \frac{is}{\sqrt{\lambda\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}} + \frac{s^2}{2\lambda\beta(n\mathsf{E}\tau_1)} \right) M_n +$$

$$+ \left(e^{\frac{is}{\sqrt{\lambda\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}}} - 1 \right)^2 \sum_{j=1}^{n} \xi_j \overline{B}^2(\theta_n - \theta_j) = R_1^n + R_2^n.$$

Из *леммы 2.3*, в условиях *теоремы 5*, имеют место сходимости

$$\frac{M_n - \lambda\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}{\sqrt{\lambda\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}} \xrightarrow{p} 0 \text{ и } \frac{M_n}{\lambda\beta(n\mathsf{E}\tau_1)} \xrightarrow{p} 1 \text{ при } n \to \infty.$$

Поскольку для любого $x \geq 0$ справедливо неравенство

$$|e^{ix} - 1 - ix + \frac{x^2}{2}| \leq \frac{x^3}{6},$$

то

$$|R_1^n| \leq \frac{1}{6} \left(\frac{s}{\sqrt{\lambda\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}} \right)^3 M_n = \frac{1}{6} \left(\frac{s^3}{\sqrt{\lambda\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}} \right) \frac{M_n}{\lambda\beta(n\mathsf{E}\tau_1)} \xrightarrow{p} 0$$

при $n \to \infty$. Для $|R_2^n|$, используя $|e^{ix} - 1| \leq x$, $x \geq 0$, а также монотонное убывание функции $\overline{B}$, получаем, что найдется n_0 такое, что при $n \geq n_0$ почти наверное

$$|R_2^n| \leq \left(\frac{s}{\sqrt{\lambda\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}} \right)^2 \sum_{j=1}^{n} \xi_j \overline{B}^2(\theta_n - \theta_j) \leq$$

$$\leq s^2 \overline{B}(\theta_n - \theta_{n-\varphi(n)}) \frac{M_n}{\lambda\beta(n\mathsf{E}\tau_1)} + \frac{s^2}{\lambda\beta(n\mathsf{E}\tau_1)} \sum_{j=n-\varphi(n)}^{n} \xi_j.$$

Из последнего неравенства и *леммы 2.3* следует, что $R_n \xrightarrow{p} 0$ при $n \to \infty$.

Итак, мы показали сходимость $\mathsf{E}_{\mathcal{F}}\left(e^{isS_n^*}\right) \xrightarrow{p} e^{-\frac{s^2}{2}}$ при $n \to \infty$, поэтому $\mathsf{E}\left(e^{isS_n^*}\right) \to e^{-\frac{s^2}{2}}$ при $n \to \infty$. Это завершает доказательство теоремы. $\square$

Из *теоремы 5* сразу получается аналог закона больших чисел для $q(\theta_n)$, $n \geq 0$, сформулируем его.

Следствие 5. *Пусть*

$$\mathsf{E}\eta_1 = \infty,\ \mathsf{E}\xi_1^2 < \infty,\ \mathsf{E}\tau_1^r < \infty,\ r > 2.$$

Тогда имеет место сходимость по вероятности

$$\frac{q(\theta_n)}{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)} \xrightarrow{p} \lambda \text{ при } n \to \infty. \tag{2.14}$$

2.3.4. Случайная замена времени в предельных теоремах

Для осуществления перехода к случайному индексу в (2.2) и (2.14) используем следующий результат.

Теорема.(*Durret, Resnik, 1977) Пусть* $Y_n \xrightarrow{d} Y$, $n \to \infty$ *и*

1. $\frac{N(t)}{t} \xrightarrow{p} N$, $t \to \infty$, *для случайных величин* N *таких, что* $\mathsf{P}(0 < N < \infty) = 1$,
2. *для всех* A *таких, что* $\mathsf{P}(N \in A) > 0$

$$\mathsf{P}(Y_n \in *|N \in A) \to \mathsf{P}(Y \in *), \tag{2.15}$$

3. *если* $\Delta_{n,c} = \max\limits_{|m-n|<nc} |Y_m - Y_n|$, *то*

$$\lim_{c\to 0} \sup_{\{B:\mathsf{P}(B)>0\}} \limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}(\Delta_{n,c} > \varepsilon|N \in B) = 0, \tag{2.16}$$

тогда

$$Y_{N(t)} \xrightarrow{d} Y.$$

В нашем случае $N(t) = \max\{n : \theta_n \le t\}$.

Доказательство перехода к случайному индексу будем проводить для результата теоремы 5. Поскольку справедливость (2.15) следует из результата *теоремы 5*, который имеет место при условии, что $\mathsf{E}\eta_1 = \infty$, $\mathsf{E}\tau_1^r < \infty$, $r > 2$, $\mathsf{E}\xi_1^2 < \infty$. Поэтому достаточно найти требования, при которых выполнено (2.16). Заметим, что условие (2.16) в нашем случае можно переписать в таком виде

$$\lim_{c\to 0}\limsup_{n\to\infty}\mathsf{P}\left(\max_{|m-n|<nc}|Y_m-Y_n|>\varepsilon\right)=0. \tag{2.17}$$

поскольку $N=\frac{1}{\mathsf{E}\tau_1}=const.$

Проверка этого максимального неравенства будет строиться на том наблюдении, что условно относительно σ-алгебры $\mathcal{F}$ центрированная последовательность сумм S_n является условным отрицательным демимартингалом относительно $\mathcal{F}$ и максимальных неравенствах для условных отрицательных демимартингалов.

Определение условного отрицательного демимартингала можно найти, например, в [74](Rao, 2012). Для удобства приведем его.

Определение 2. *L^1-последовательность $\{S_n, n\geq 1\}$ случайных величин, определенных на полном вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{A},\mathsf{P})$, называется условным относительно σ-алгебры $\mathcal{F}$ отрицательным демимартингалом, если выполнено неравенство*

$$\mathsf{E}_{\mathcal{F}}\left[(S_{j+1}-S_j)\,f\left(S_1,\ldots,S_j\right)\right]\leq 0,\ \ j\geq 1 \tag{2.18}$$

для любой покомпонентно неубывающей функции f, для которой математическое ожидание (2.18) определено. Здесь $\mathcal{F}$ – некоторая σ-подалгебра $\mathcal{A}$.

Обозначим

$$Y_n=S_n(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{a})-\mathsf{E}_{\mathcal{F}}S_n(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{a})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{u_i}\left(\zeta_{ij}(n)-\mathsf{E}_{\mathcal{F}}\zeta_{ij}(n)\right),\ n\geq 1 \tag{2.19}$$

где

$$\zeta_{ij}(n)=\begin{cases}1, & \text{если } \eta_{U_{i-1}+j}>\theta_n-\theta_i,\\ 0, & \text{иначе,}\end{cases}$$

для $i\geq 1$ и $1\leq j\leq \xi_i$, $Y_0=0$. Для краткости обозначаем $\mathsf{E}\left(\xi|\mathcal{F}\right)=\mathsf{E}_{\mathcal{F}}\xi$, $\mathsf{P}\left(A|\mathcal{F}\right)=\mathsf{P}_{\mathcal{F}}\left(A\right)$.

Лемма 2.4. *Последовательность*

$$\{Z_{m,n} = Y_m - Y_n\}_{m \ge n}$$

образует условный отрицательный демимартингал относительно $\mathcal{F}$ для любого $n \ge 0$. Здесь, как и ранее, $\mathcal{F}$ – σ-алгебра, порожденная случайными векторами $\{\xi_i, \tau_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Доказательство. По определению, при $m \ge n$

$$\mathsf{E}_{\mathcal{F}}\big((Z_{m+1,n}-Z_{m,n})f(Z_{n+1,n},\dots,Z_{m,n})\big) = \mathsf{E}_{\mathcal{F}}\big((Y_{m+1}-Y_m)f(Z_{n+1,n},\dots,Z_{m,n})\big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{u_i} \mathsf{E}_{\mathcal{F}}\Big(\,\big((\zeta_{ij}^{m+1} - \zeta_{ij}^{m}\big) - \big(\mathsf{E}_{\mathcal{F}}\zeta_{ij}^{m+1} - \mathsf{E}_{\mathcal{F}}\zeta_{ij}^{m}\big)\big)\, f(Z_{n+1,n},\dots,Z_{m,n})\Big) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{u_{m+1}} \mathsf{E}_{\mathcal{F}}\Big(\,\big(\zeta_{m+1,j}^{m+1} - \mathsf{E}_{\mathcal{F}}\zeta_{m+1,j}^{m+1}\big)\, f(Z_{n+1,n},\dots,Z_{m,n})\Big) = I_n + II_n.$$

Поскольку при любом $1 \le j \le u_{m+1}$ величины

$$\zeta_{m+1,j}^{m+1} - \mathsf{E}_{\mathcal{F}}\zeta_{m+1,j}^{m+1} \text{ и } f(Z_{n+1,n},\dots,Z_{m,n})$$

условно независимы относительно $\mathcal{F}$, то

$$\mathsf{E}_{\mathcal{F}}\Big(\,\big(\zeta_{m+1,j}^{m+1} - E_{\mathcal{F}}\zeta_{m+1,j}^{m+1}\big)\, f(Z_{n+1,n},\dots,Z_{m,n})\Big) = 0,\ 1 \le j \le \xi_{m+1}.$$

Поэтому

$$II_n = 0.$$

Теперь рассмотрим I_n.

Введем следующие события

$$A_{ij}(m) = \left\{\omega : \zeta_{ij}^{m+1} - \zeta_{ij}^{m} = -1\right\},\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le \xi_i.$$

Отметим, что тогда

$$A_{ij}(m) = \left\{\omega : \zeta_{ij}^{m+1} = 0, \zeta_{ij}^{m} = 1\right\} = \left\{\omega : \theta_m - \theta_i < \eta_{U_{i-1}+j} < \theta_{m+1} - \theta_i\right\}. \tag{2.20}$$

Из последнего следует, что для всех $i \geq 1$

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}}\left(A_{ij}(m)\right) = \overline{B}(\theta_m - \theta_i) - \overline{B}(\theta_{m+1} - \theta_i),\ 1 \leq j \leq \xi_i.$$

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое в двойной сумме I_n

$$N_{i,j}(n,m) = \mathsf{E}_{\mathcal{F}}\Big(\left(\zeta_{ij}^{m+1} - \zeta_{ij}^{m}\right) f(Z_{n+1,n}, \ldots, Z_{m,n})\Big) -$$

$$- \left(\mathsf{E}_{\mathcal{F}}\zeta_{ij}^{m+1} - \mathsf{E}_{\mathcal{F}}\zeta_{ij}^{m}\right) \mathsf{E}_{\mathcal{F}} f(Z_{n+1,n}, \ldots, Z_{m,n}).$$

Заметим, что

$$\left(\mathsf{E}_{\mathcal{F}}\zeta_{ij}^{m+1} - \mathsf{E}_{\mathcal{F}}\zeta_{ij}^{m}\right) \mathsf{E}_{\mathcal{F}}\left(f(Z_{n+1,n}, \ldots, Z_{m,n})\right) =$$

$$= - \left(\overline{B}(\theta_m - \theta_i) - \overline{B}(\theta_{m+1} - \theta_i)\right) \mathsf{E}_{\mathcal{F}}\left(f(Z_{n+1,n}, \ldots, Z_{m,n})\right).$$

Далее, в силу (2.20) имеем

$$\mathsf{E}_{\mathcal{F}}\Big(\left(\zeta_{ij}^{m+1} - \zeta_{ij}^{m}\right) f(Z_{n+1,n}, \ldots, Z_{m,n})\Big) = -\mathsf{E}_{\mathcal{F}} f(Z_{n+1,n}, \ldots, Z_{m,n}) \mathbb{I}\left\{A_{ij}(m)\right\} =$$

$$= -\mathsf{E}_{\mathcal{F}}\big(f(Z_{n+1,n}, \ldots, Z_{m,n}) | A_{ij}(m)\big) \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\left\{A_{ij}(m)\right\} =$$

$$= -\mathsf{E}_{\mathcal{F}}\big(f(Z_{n+1,n}, \ldots, Z_{m,n}) | A_{ij}(m)\big) \left(\overline{B}(\theta_m - \theta_i) - \overline{B}(\theta_{m+1} - \theta_i)\right).$$

Таким образом

$$N_{i,j}(n,m) = -\big(\overline{B}(\theta_m - \theta_i) - \overline{B}(\theta_{m+1} - \theta_i)\big) \cdot$$

$$\cdot \left(\mathsf{E}_{\mathcal{F}}\left(f(Z_{n+1,n}, \ldots, Z_{m,n}) | A_{ij}(m)\right) - \mathsf{E}_{\mathcal{F}}\left(f(Z_{n+1,n}, \ldots, Z_{m,n})\right)\right).$$

Поскольку функция $\overline{B}$ монотонно убывает, то

$$\overline{B}(\theta_m - \theta_i) - \overline{B}(\theta_{m+1} - \theta_i) \geq 0,\ 0 \leq i \leq m.$$

Это означает, что для доказательства леммы остается показать

$$\mathsf{E}_{\mathcal{F}}\big(f(Z_{n+1,n}, \ldots, Z_{m,n}) | A_{ij}(m)\big) - \mathsf{E}_{\mathcal{F}}\big(f(Z_{n+1,n}, \ldots, Z_{m,n})\big) \geq 0. \tag{2.21}$$

Заметим, что

$$\mathsf{E}_{\mathcal{F}}\big(f(Z_{n+1,n}, \ldots, Z_{m,n}) | A_{ij}(m)\big) = \mathsf{E}_{\mathcal{F}}\big(f(Z^*_{n+1,n}, \ldots, Z^*_{m,n})\big),$$

где

$$Z^*_{k,n} = \begin{cases} Z_{k,n} + \zeta^n_{ij} - \zeta^k_{ij} & \text{если } 1 \le i \le n, \\ Z_{k,n} + 1 - \zeta^k_{ij} & \text{для } n < i \le k, \\ Z_{k,n} & \text{для } k < i \le m, \end{cases}$$

для $n < k \le m$.

Поэтому $Z^*_{k,n} \ge Z_{k,n}$, $n < k \le m$. Следовательно из покомпонентного неубывания f получаем неравенство (2.21).

Таким образом доказательство *леммы 2.4* завершено. □

Итак, последовательность

$$\{q(\theta) - E_{\mathcal{F}} q(\theta_n)\}_{n=0}^{\infty}$$

образует условный относительно $\mathcal{F}$ отрицательный демимартингал. Этот результат интересен тем, что в системах, подобных рассматриваемой, число требований находящихся на обслуживании будет условным отрицательным демимартингалом(возможно, непрерывным).

Как уже было сказано, для случайной замены времени в предельной теореме требуется доказать максимальное неравенство (2.17). При его проверке оказывается полезной следующая лемма.

Лемма 2.5. I. *Пусть* $\mathsf{E}\tau_1^r < \infty$, $r > 2$, $\mathsf{E}\xi_1^2 < \infty$ *и* $\beta(t) = \int_0^t \overline{B}(x)dx \to \infty$, $t \to \infty$, *тогда для любой постоянной* $0 < c < 1$ *справедливы следующие утверждения, для пределов по вероятности*

1.

$$\lim_{c\to 0} \lim_{n\to\infty} \frac{\mathsf{E}_{\mathcal{F}} \left(Y_n - Y_{n(1-c)}\right)^2}{\beta^2(n\mathsf{E}\tau_1)} = 0, \tag{2.23}$$

2.

$$\lim_{c\to 0} \lim_{n\to\infty} \frac{\mathsf{E}_{\mathcal{F}} Y^2_{n(1-c)}}{\beta^2(n\mathsf{E}\tau_1)} \le 1, \tag{2.24}$$

3.

$$\lim_{c\to 0} \lim_{n\to\infty} \frac{\mathsf{E}_{\mathcal{F}} \left(Y_n - Y_{n(1+c)}\right)^2}{\beta^2(n\mathsf{E}\tau_1)} = 0. \tag{2.25}$$

4.
$$\lim_{c\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{\mathsf{E}_{\mathcal{F}}Y^2_{n(1+c)}}{\beta^2(n\mathsf{E}\tau_1)}\le 1. \tag{2.26}$$

II. *Если к тому же для функции $\beta(t)$ имеет место условие*
$$\lim_{c\to 0}\lim_{t\to\infty}\frac{\beta(ct)}{\beta(t)}=0, \tag{2.27}$$
тогда для любой постоянной $0<c<1$ справедливы следующие утверждения, для пределов по вероятности

1.
$$\lim_{c\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{\mathsf{E}_{\mathcal{F}}\left(Y_n-Y_{n(1-c)}\right)^2}{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}=0, \tag{2.28}$$

2.
$$\lim_{c\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{\mathsf{E}_{\mathcal{F}}Y^2_{n(1-c)}}{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}\le 1, \tag{2.29}$$

3.
$$\lim_{c\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{\mathsf{E}_{\mathcal{F}}\left(Y_n-Y_{n(1+c)}\right)^2}{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}=0. \tag{2.30}$$

4.
$$\lim_{c\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{\mathsf{E}_{\mathcal{F}}Y^2_{n(1+c)}}{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}\le 1. \tag{2.31}$$

Доказательство. Приведем доказательство (2.28), остальные сходимости получаются аналогичным образом. Поскольку, для $m<n$
$$\mathsf{E}_{\mathcal{F}}\left(Y_n-Y_m\right)^2=\sum_{i=1}^{m}\xi_i\left(\overline{B}(\theta_m-\theta_i)-\overline{B}(\theta_n-\theta_i)\right)\left(\overline{B}(\theta_n-\theta_i)+B(\theta_m-\theta_i)\right)+$$
$$+\sum_{i=m+1}^{n}\xi_i\overline{B}(\theta_n-\theta_i)B(\theta_n-\theta_i)\le 2\sum_{i=1}^{m}\xi_i\left(\overline{B}(\theta_m-\theta_i)-\overline{B}(\theta_n-\theta_i)\right)+$$
$$+\sum_{i=m+1}^{n}\xi_i\overline{B}(\theta_n-\theta_i)=2I_{n,m}+II_{n,m}.$$
Ниже используем обозначения, введенные в (2.4) и (2.5), оценки (2.7) и (2.8), а также рассуждения леммы 10. Для любого $\delta>0$ и функции $\varphi(n)$, определяемой леммой 6, имеем
$$\mathsf{P}\left(\frac{I_{n,m}}{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}>\delta\right)\le$$

$$\leq \mathsf{P}\left(\frac{1}{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}\sum_{i=1}^{m-\varphi(m)}\xi_i\left(\overline{B}(\theta_m-\theta_i)-\overline{B}(\theta_n-\theta_i)\right)>\frac{\delta}{2},\bigcap_{1\leq i\leq m-\varphi(m)}H_{m,i}(\varepsilon)\right)+$$

$$+\mathsf{P}\left(\frac{1}{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}\sum_{i=1}^{m-\varphi(m)}\xi_i\left(\overline{B}(\theta_m-\theta_i)-\overline{B}(\theta_n-\theta_i)\right)>\frac{\delta}{2},\bigcup_{1\leq i\leq m-\varphi(m)}\overline{H}_{m,i}(\varepsilon)\right)+$$

$$+\mathsf{P}\left(\frac{1}{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}\sum_{i=m-\varphi(m)+1}^{m}\xi_i>\frac{\delta}{2}\right)\leq$$

$$\leq \mathsf{P}\left(\frac{1}{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}\sum_{i=1}^{m-\varphi(m)}\xi_i\left(B_{ctr}(m-i)-B_{ctr}(n-i)\right)>\frac{\delta}{4}\right)+$$

$$+\mathsf{P}\left(\frac{1}{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}\sum_{i=1}^{m-\varphi(m)}\xi_i\left(\mathcal{D}(m-i)+\mathcal{D}(n-i)\right)>\frac{\delta}{4}\right)+$$

$$+\mathsf{P}\left(\bigcup_{1\leq i\leq m-\varphi(m)}\overline{H}_{m,i}(\varepsilon)\right)+\mathsf{P}\left(\frac{1}{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}\sum_{i=m-\varphi(m)+1}^{m}\xi_i>\frac{\delta}{2}\right).$$

По неравенству Чебышева, имеем

$$\mathsf{P}\left(\frac{I_{n,m}}{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}>\delta\right)\leq\frac{1}{\delta/4}\frac{\mathsf{E}\xi_1}{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}\sum_{i=1}^{m-\varphi(m)}\left(B_{ctr}(m-i)-B_{ctr}(n-i)\right)+$$

$$+\frac{1}{\delta/4}\frac{\mathsf{E}\xi_1}{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}\sum_{i=1}^{m-\varphi(m)}\left(\mathcal{D}(m-i)+\mathcal{D}(n-i)\right)+$$

$$+\sum_{i=\varphi(m)}^{m-1}\mathsf{P}\left(\overline{H}_i(\varepsilon)\right)+\frac{\mathsf{E}\xi_1}{\delta/2}\frac{\varphi(n)}{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}=I_1(n)+I_2(n)+I_3(n)+I_4(n).$$

Оценивая сверху сумму интегралом получаем, что

$$I_1(n)\leq C\left(\frac{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)-\beta(m\mathsf{E}\tau_1)}{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}+\frac{\beta((n-m)\mathsf{E}\tau_1)}{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}\right),$$

где C – постоянная. Не ограничивая общности предположим, что $\mathsf{E}\tau_1=1$ и для $n\geq m$

$$\frac{\beta(n)-\beta(m)}{\beta(n)}=\frac{\int\limits_m^n\overline{B}\,(x)\,dx}{\int\limits_0^m\overline{B}\,(x)\,dx+\int\limits_m^n\overline{B}\,(x)\,dx}\leq\frac{\int\limits_m^n\overline{B}\,(x)\,dx}{\int\limits_0^m\overline{B}\,(x)\,dx}\leq$$

$$\leq \frac{n-m}{m}\frac{\overline{B}\,(m)}{\overline{B}\,(m)} = \frac{n-m}{m}.$$

Поэтому

$$\frac{I_1(n)}{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)} \leq C\left(\frac{n-m}{n} + \frac{\beta((n-m)\mathsf{E}\tau_1)}{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}\right).$$

Далее, поскольку $I_2(n) \leq 3I_1(n)$, то достаточным условием для сходимости $I_1(n)$, $I_2(n)$ к нулю будет (2.27).Из *леммы 2.2* следует, что при $\mathsf{E}\tau_1^r < \infty$, $r > 2$

$$I_3(n) \to 0 \text{ при } n > m, n \to \infty.$$

И наконец, $I_4(n) \to 0$, $n \to \infty$ для $\varphi(n)$ взятой из *леммы 2.1*. Оценим $II_{n,m}$. Для любого $\delta > 0$

$$\mathsf{P}\left(\frac{II_{n,m}}{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)} > \delta\right) \leq \mathsf{P}\left(\frac{1}{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}\sum_{i=m+1}^{n-\varphi(n)}\xi_i\overline{B}(\theta_n-\theta_i) > \frac{\delta}{2}, \bigcap_{m+1\leq i\leq n-\varphi(n)} H_{n,i}(\varepsilon)\right) +$$

$$+\mathsf{P}\left(\frac{1}{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}\sum_{i=m+1}^{n-\varphi(n)}\xi_i\overline{B}(\theta_n-\theta_i) > \frac{\delta}{2}, \bigcup_{m+1\leq i\leq n-\varphi(n)} \overline{H}_{n,i}(\varepsilon)\right) +$$

$$+\mathsf{P}\left(\frac{1}{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}\sum_{i=n-\varphi(n)}^{n}\xi_i > \frac{\delta}{2}\right) \leq \mathsf{P}\left(\frac{1}{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}\sum_{i=m+1}^{n-\varphi(n)}\xi_i B_{ctr}(n-i) > \frac{\delta}{4}\right) +$$

$$+\mathsf{P}\left(\frac{1}{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}\sum_{i=m+1}^{n-\varphi(n)}\xi_i\mathcal{D}(n-i) > \frac{\delta}{4}\right) +$$

$$+\sum_{i=m+1}^{n-\varphi(n)}\mathsf{P}\left(\overline{H}_{n,i}(\varepsilon)\right) + \mathsf{P}\left(\frac{1}{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}\sum_{i=n-\varphi(n)+1}^{n}\xi_i > \frac{\delta}{2}\right).$$

Применяя неравенство Чебышева для первого, второго и четвертого слагаемого, имеем

$$\mathsf{P}\left(\frac{II_{n,m}}{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)} > \delta\right) \leq \frac{1}{\delta/4}\frac{\mathsf{E}\xi_1}{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}\sum_{i=m+1}^{n-\varphi(n)}B_{ctr}(n-i)+$$

$$+\frac{1}{\delta/4}\frac{\mathsf{E}\xi_1}{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}\sum_{i=m+1}^{n-\varphi(n)}\mathcal{D}(n-i) + \sum_{i=m+1}^{n-\varphi(n)}\mathsf{P}\left(\overline{H}_{n,i}(\varepsilon)\right) + \frac{1}{\delta/2}\frac{\mathsf{E}\xi_1\varphi(n)}{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\delta/4}\frac{\mathsf{E}\xi_1}{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}\int\limits_{m+1}^{n-\varphi(n)}\overline{B}\left((n-x)\mathsf{E}\tau_1\right)dx+$$

$$+\frac{1}{\delta/4}\frac{\mathsf{E}\tau_1}{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}\int\limits_{m+1}^{n-\varphi(n)}\mathcal{D}(n-x)dx+\sum_{i=m+1}^{n-\varphi(n)}\mathsf{P}\left(\overline{H}_{n,i}(\varepsilon)\right)+\frac{1}{\delta/2}\frac{\mathsf{E}\xi_1\varphi(n)}{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}.$$

Из приведенных соотношений следует, что если $I_{n,m}\to 0$ при $n\to\infty$, то $II_{n,m}\to 0$ при $n\to\infty$. □

Теперь все готово для проверки (2.17).

Проверка условия (2.17). Используя обозначение (2.19), можно записать, что

$$\frac{q(\theta)-\lambda\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}{\sqrt{\lambda\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}}=\frac{Y_n}{\sqrt{\lambda\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}}+\frac{\mathsf{E}_{\mathcal{F}}q(\theta_n)-\lambda\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}{\sqrt{\lambda\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}}=$$

$$=\frac{Y_n}{\sqrt{\lambda\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}}+\frac{M_n-\mathsf{E}M_n}{\sqrt{\lambda\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}}+\frac{\mathsf{E}M_n-\lambda\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}{\sqrt{\lambda\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}}.$$

Поскольку третье слагаемое неслучайно и согласно (2.12) сходится к нулю, то проверку условия 2.17 можно проводить в два шага – для первого и второго слагаемого.

Проверка условия (2.17) для первого слагаемого.

Поскольку

$$\mathsf{P}\left(\max_{|n-m|<nc}\left|\frac{Y_m}{\sqrt{\beta(m\mathsf{E}\tau_1)}}-\frac{Y_n}{\sqrt{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}}\right|>\varepsilon\right)\leq$$

$$\leq\mathsf{P}\left(\max_{|n-m|<nc}\frac{|Y_m-Y_n|}{\sqrt{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}}+\max_{|n-m|<nc}|Y_m|\left|\frac{1}{\sqrt{\beta(m\mathsf{E}\tau_1)}}-\frac{1}{\sqrt{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}}\right|>\varepsilon\right)\leq$$

$$\leq\mathsf{P}\left(\max_{|n-m|<nc}|Y_m-Y_n|>\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}\right)+$$

$$+\mathsf{P}\left(\max_{|n-m|<nc}|Y_m|\left|\frac{1}{\sqrt{\beta(m\mathsf{E}\tau_1)}}-\frac{1}{\sqrt{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}}\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right)=$$

$$=\mathsf{P}\left(\max_{n<m<n(1+c)}|Y_m-Y_n|>\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}\right)+$$

$$+\mathsf{P}\left(\max_{(1-c)n<m<n}|Y_m-Y_n|>\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}\right)+$$

$$+\mathsf{P}\left(\max_{n<m<n(c+1)}|Y_m|\left|\frac{1}{\sqrt{\beta(m\mathsf{E}\tau_1)}}-\frac{1}{\sqrt{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}}\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right)+$$
$$+\mathsf{P}\left(\max_{n(1-c)<m<n}|Y_m|\left|\frac{1}{\sqrt{\beta(m\mathsf{E}\tau_1)}}-\frac{1}{\sqrt{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}}\right|>\frac{\varepsilon}{2}\right)=$$
$$=r_1(n)+r_2(n)+r_3(n)+r_4(n).$$

Для оценки этих вероятностей будем использовать следующий результат:

Лемма. [34, Следствие 18]*(Christofides, Hadjikyriakou, 2013)*

Пусть последовательность $\{S_j, j\geq 0\}$ является отрицательным демимартингалом условным относительно σ-алгебры $\mathcal{F}$, тогда для любого $x>0$

$$\lambda\,\mathsf{P}_{\mathcal{F}}\left(\max_{1\leq k\leq n}S_k\geq x\right)\leq \mathsf{E}_{\mathcal{F}}\left(S_n\mathbb{I}\left\{\max_{1\leq k\leq n}S_k\geq x\right\}\right). \tag{2.32}$$

Если $\{S_j, j\geq 0\}$ есть отрицательный демимартингал, то $\{-S_j, j\geq 0\}$ также является отрицательным демимартингалом. Тогда применяя дважды неравенство (2.32) получаем, что для любого $x>0$

$$\lambda\,\mathsf{P}_{\mathcal{F}}\left(\max_{1\leq k\leq n}|S_k|\geq x\right)\leq \lambda\,\mathsf{P}_{\mathcal{F}}\left(\max_{1\leq k\leq n}S_k\geq x\right)+\lambda\,\mathsf{P}_{\mathcal{F}}\left(\max_{1\leq k\leq n}-S_k\geq x\right)\leq$$
$$\leq\frac{2}{x}\mathsf{E}_{\mathcal{F}}|S_n|. \tag{2.33}$$

Используя (2.33), оценим вероятности $r_1(n)$, $r_2(n)$, $r_3(n)$ и $r_4(n)$. Поскольку

$$r_2(n)\leq \mathsf{E}\,\mathsf{P}_{\mathcal{F}}\left(\max_{n(1-c)<m<n}\left|Y_m-Y_{n(1-c)}\right|>\frac{\varepsilon}{4}\sqrt{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}\right)+$$
$$+\mathsf{P}\left(\left|Y_n-Y_{n(1-c)}\right|>\frac{\varepsilon}{4}\sqrt{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}\right)\leq$$
$$\leq \mathsf{E}\sqrt{\frac{\mathsf{E}_{\mathcal{F}}(Y_n-Y_{n(1-c)})^2}{\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^2\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}}+\mathsf{E}\frac{\mathsf{E}_{\mathcal{F}}(Y_n-Y_{n(1-c)})^2}{\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^2\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}.$$

Аналогично

$$r_1(n)\leq \mathsf{E}\sqrt{\frac{\mathsf{E}_{\mathcal{F}}(Y_{n(1+c)}-Y_n)^2}{\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^2\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}}.$$

Далее

$$r_3(n) \le \left(\frac{1}{\sqrt{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}} - \frac{1}{\sqrt{\beta(n(1+c)\mathsf{E}\tau_1)}} \right) \mathsf{E}\sqrt{\mathsf{E}_{\mathcal{F}}(Y_{n(c+1)})^2},$$

$$r_4(n) \le \mathsf{P}\left(\max_{n(1-c)<m<n} |Y_m - Y_{n(1-c)}| \left| \frac{1}{\sqrt{\beta(m\mathsf{E}\tau_1)}} - \frac{1}{\sqrt{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}} \right| > \frac{\varepsilon}{4} \right) +$$

$$+ \mathsf{P}\left(|Y_{n(1-c)}| \left| \frac{1}{\sqrt{\beta(n(1-c)\mathsf{E}\tau_1)}} - \frac{1}{\sqrt{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}} \right| > \frac{\varepsilon}{4} \right) \le$$

$$\le \left(\frac{1}{\sqrt{\beta(n(1-c)\mathsf{E}\tau_1)}} - \frac{1}{\sqrt{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}} \right) \mathsf{E}\sqrt{\mathsf{E}_{\mathcal{F}}(Y_n - Y_{n(1-c)})^2} +$$

$$+ \left(\frac{1}{\sqrt{\beta(n(1-c)\mathsf{E}\tau_1)}} - \frac{1}{\sqrt{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}} \right)^2 \mathsf{E}\mathsf{E}_{\mathcal{F}}(Y_{n(1-c)})^2.$$

Итак, сходимость к нулю при $n \to \infty$ и $c \to 0$ для вероятностей $r_1(n)$, $r_2(n)$, $r_3(n)$ и $r_4(n)$ следует из оценок *леммы 2.5*.

Проверка условия (2.17) для второго слагаемого.

В этом случае нам нужно показать, что выполнена следующая лемма.

Лемма 2.6. *Пусть* $M_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \overline{B}(\theta_n - \theta_i)$, $\beta(t) \to \infty$, $t \to \infty$, $\mathsf{E}\xi_1^2 < \infty$ *и* $\mathsf{E}\tau^r < \infty$, $r > 2$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{c\to 0} \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\max_{|m-n|<nc} \left| \frac{M_m - \mathsf{E}M_m}{\sqrt{\beta(m\mathsf{E}\tau_1)}} - \frac{M_n - \mathsf{E}M_n}{\sqrt{\beta(m\mathsf{E}\tau_1)}} \right| > \varepsilon \right) = 0. \tag{2.34}$$

Доказательство. Напомним, что

$$M_n - \mathsf{E}M_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\xi_i \overline{B}(\theta_n - \theta_i) - \mathsf{E}\xi_i \overline{B}(\theta_n - \theta_i) \right).$$

Не ограничивая общности предположим, что $m > n$. Заметим, что для

$$\omega \in \bigcap_{1\le i\le n-\varphi(n)} \overline{H}_{n,i}(\varepsilon)$$

выполнено

$$\xi_i \overline{B}(\theta_n - \theta_i) - \mathsf{E}\xi_i \overline{B}(\theta_n - \theta_i) \le (\xi_i - \mathsf{E}\xi_i) B_{ctr}(n-i) + (\mathsf{E}\xi_i + \xi_i)\mathcal{D}(n-i)$$

а с другой стороны

$$\xi_i\overline{B}(\theta_n-\theta_i)-\mathsf{E}\xi_i\overline{B}(\theta_n-\theta_i)\geq(\xi_i-\mathsf{E}\xi_i)B_{ctr}(n-i)-(\mathsf{E}\xi_i+\xi_i)\mathcal{D}(n-i).$$

Поэтому

$$A_n-B_n\leq M_n-\mathsf{E}M_n\leq A_n+B_n, \tag{2.35}$$

где $A_n=\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i-\mathsf{E}\xi_i)B_{ctr}(n-i)$, $B_n=\sum\limits_{i=1}^{n}(\mathsf{E}\xi_i+\xi_i)\mathcal{D}(n-i)$.

Из (2.35) следует, что

$$|(M_m-\mathsf{E}M_m)-(M_n-\mathsf{E}M_n)|\leq|A_m-A_n|+B_m+B_n.$$

Итак, для $\omega\in\bigcap\limits_{1\leq i\leq n-\varphi(n)}\overline{H}_{n,i}(\varepsilon)$, имеем

$$\left|\frac{(M_m-\mathsf{E}M_m)}{\sqrt{\beta(m\mathsf{E}\tau_1)}}-\frac{(M_n-\mathsf{E}M_n)}{\sqrt{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}}\right|=$$

$$=\left|\frac{(M_m-\mathsf{E}M_m)-(M_n-\mathsf{E}M_n)}{\sqrt{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}}\right|+|M_m-\mathsf{E}M_m|\left|\frac{1}{\sqrt{\beta(m\mathsf{E}\tau_1)}}-\frac{1}{\sqrt{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}}\right|\leq$$

$$\leq\frac{|A_m-A_n|}{\sqrt{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}}+\frac{B_m+B_n}{\sqrt{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}}+(A_m+B_m)\left|\frac{1}{\sqrt{\beta(m\mathsf{E}\tau_1)}}-\frac{1}{\sqrt{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}}\right|=$$
$$=I_1(n,m)+I_2(n,m)+I_3(n,m).$$

Далее мы будем использовать максимальное неравенство Колмогорова [8, Глава V](Булинский, Ширяев, 2016), приведем его формулировку.

Пусть $X_1,\ldots,X_n$ – н.с.в. такие, что $\mathsf{E}X_i=0$, $\mathsf{D}X_i<\infty$, $1\leq i\leq n$. Положим $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$, $d_n^2=\mathsf{D}S_n$. Тогда для любого $x\in\mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\mathsf{P}\left(\max_{1\leq i\leq n}|S_i|\geq xd_n\right)\leq 2\,\mathsf{P}\left(|S_n|\geq(x-\sqrt{2})d_n\right). \tag{2.36}$$

Из неравенства (2.36) следует, что

$$\mathsf{P}\left(\max_{n\leq m\leq(1+c)n}I_1(n,m)>\varepsilon,\bigcap_{1\leq i\leq n-\varphi(n)}\overline{H}_{n,i}(\varepsilon)\right)\leq\frac{\mathsf{E}|A_{n(1+c)}-A_n|}{\varepsilon\sqrt{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}}, \tag{2.37}$$

$$\mathsf{P}\left(\max_{n\le m\le(1+c)n} I_2(n,m)>\varepsilon, \bigcap_{1\le i\le n-\varphi(n)} \overline{H}_{n,i}(\varepsilon)\right) \le \frac{\mathsf{E}(B_{n(1+c)}+B_n)}{\varepsilon\sqrt{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}}, \quad (2.38)$$

$$\mathsf{P}\left(\max_{n\le m\le(1+c)n} I_3(n,m)>\varepsilon, \bigcap_{1\le i\le n-\varphi(n)} \overline{H}_{n,i}(\varepsilon)\right) \le$$

$$\le \mathsf{E}(A_{n(1+c)}+B_{n(1+c)})\left(\frac{1}{\sqrt{\beta(n\mathsf{E}\tau_1)}}-\frac{1}{\sqrt{\beta(n(1+c)\mathsf{E}\tau_1)}}\right). \quad (2.39)$$

Заметим, что имеет место неравенство

$$\mathsf{E}(A_m-A_n)^2 \le \mathsf{D}\xi_1\left(\beta_1(m\mathsf{E}\tau_1)+\beta_1(n\mathsf{E}\tau_1)\right), \quad (2.40)$$

где $\beta_1(t)=\int\limits_0^t \overline{B}^2(x)dx$. А также сходимость

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\beta_1(n(1+c))+\beta_1(n)}{\beta(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\overline{B}^2(n(1+c))+\overline{B}^2(n)}{\overline{B}(n)} \le 2\lim_{n\to\infty}\overline{B}(n)=0.$$

Из этих двух наблюдений и (2.37) получаем, что

$$\lim_{c\to0}\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\left(\max_{n\le m\le(1+c)n} I_1(n,m)>\varepsilon, \bigcap_{1\le i\le n-\varphi(n)} \overline{H}_{n,i}(\varepsilon)\right)=0.$$

Из (2.38) и *леммы 2.5*, а также оценки

$$\frac{\beta(n(1+c))}{\beta(n)} \le 1+\frac{nc\overline{B}(n)}{n\overline{B}(n)} = 1+c, \quad (2.41)$$

имеем

$$\lim_{c\to0}\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\left(\max_{n\le m\le(1+c)n} I_2(n,m)>\varepsilon, \bigcap_{1\le i\le n-\varphi(n)} \overline{H}_{n,i}(\varepsilon)\right)=0.$$

Из (2.39), (2.40), (2.41) и *леммы 2.5* следует, что

$$\lim_{c\to0}\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\left(\max_{n\le m\le(1+c)n} I_3(n,m)>\varepsilon, \bigcap_{1\le i\le n-\varphi(n)} \overline{H}_{n,i}(\varepsilon)\right)=0.$$

Таким образом, получаем, что

$$\lim_{c\to0}\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\left(\max_{|m-n|<nc}\left|\frac{M_m-\mathsf{E}M_m}{\sqrt{\beta(m\mathsf{E}\tau_1)}}-\frac{M_n-\mathsf{E}M_n}{\sqrt{\beta(m\mathsf{E}\tau_1)}}\right|>\varepsilon, \bigcap_{1\le i\le n-\varphi(n)} \overline{H}_{n,i}(\varepsilon)\right)=0. \quad (2.42)$$

Далее, из *леммы 2.2* следует, что

$$\lim_{c\to 0}\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\left(\max_{|m-n|<nc}\left|\frac{M_m-\mathsf{E}M_m}{\sqrt{\beta(m\mathsf{E}\tau_1)}}-\frac{M_n-\mathsf{E}M_n}{\sqrt{\beta(m\mathsf{E}\tau_1)}}\right|>\varepsilon,\bigcup_{1\le i\le n-\varphi(n)}H_{n,i}(\varepsilon)\right)\le$$

$$\le\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}\left(\bigcup_{1\le i\le n-\varphi(n)}H_{n,i}(\varepsilon)\right)=0. \tag{2.43}$$

Объединяя (2.42) и (2.43), получаем (2.34). □

Таким образом, условие (2.17) проверили, а значит получен переход к случайной замене времени. Сформулируем его:

Теорема 6. *Пусть* $\mathsf{E}\tau_1^r<\infty$, $r>2$, $\mathsf{E}\xi_1^2<\infty$ *и выполнено следующее условие*

$$\lim_{c\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{\beta(ct)}{\beta(t)}=0,$$

то

$$\frac{q(\theta_{N(t)})-\lambda\beta(N(t)\mathsf{E}\tau_1)}{\sqrt{\lambda\beta(N(t)\mathsf{E}\tau_1)}}\xrightarrow{d}\mathcal{N}(0,1)\,,\ \textit{при}\ t\to\infty.$$

Производя аналогичные выкладки, а также используя (2.23)-(2.26), можно получить аналог закона больших чисел в этом случае. Сформулируем его.

Следствие 6. *Пусть* $\mathsf{E}\eta_1=\infty$, $\mathsf{E}\tau_1^r<\infty$, $r>2$, $\mathsf{E}\xi_1^2<\infty$, *то*

$$\frac{q(\theta_{N(t)})}{\beta(N(t)\mathsf{E}\tau_1)}\xrightarrow{p}\lambda\ \textit{при}\ t\to\infty.$$

2.3.5. Переход к неслучайной нормировке

Докажем следующий вспомогательный результат.

Лемма 2.7. *Если* $\mathsf{E}\tau_1^r<\infty$, $r\ge 2$ *и* $\beta(t)\to\infty$, $t\to\infty$, *то имеет место сходимость по вероятности*

$$\frac{\beta\left(N(t)\mathsf{E}\tau_1\right)-\beta\left(t\right)}{\sqrt{\beta(t)}}\xrightarrow{p}0,\ t\to\infty.$$

Доказательство. Поскольку для $\omega \in \left\{\omega : \left|N(t) - \frac{t}{\mathsf{E}\tau_1}\right| < c_t\right\}$, для любой функции c_t и некоторой константы C, имеем

$$\frac{\beta\left(N(t)\mathsf{E}\tau_1\right) - \beta\left(t\right)}{\sqrt{\beta\left(t\right)}} \le \frac{\beta\left(t + c_t\mathsf{E}\tau_1\right) - \beta\left(t\right)}{\sqrt{\beta\left(t\right)}} \le$$

$$\le \frac{\left(1 + \frac{c_t}{t}\mathsf{E}\tau_1\right)\int\limits_0^t \overline{B}\left(y\right)dy - \int\limits_0^t \overline{B}(y)dy}{\sqrt{\int\limits_0^t \overline{B}(y)dy}} \le C\sqrt{\frac{c_t^2}{t^2}\beta(t)}.$$

Аналогично получаем оценку снизу

$$\frac{\beta\left(N(t)\mathsf{E}\tau_1\right) - \beta\left(t\right)}{\sqrt{\beta\left(t\right)}} \ge -C\sqrt{\frac{c_t^2}{t^2}\beta(t)}.$$

Пусть $c_t = \frac{t^{1-\delta}}{(\beta(t))^{1/2-\delta}}$, $0 < \delta < 1/2$. В этом случае

$$\frac{c_t^2}{t^2}\beta(t) = \left(\frac{\beta(t)}{t}\right)^{2\delta} \to 0,\ t \to \infty.$$

При этом, согласно следствию 4,

$$\mathsf{P}\left(\left|N(t) - \frac{t}{\mathsf{E}\tau_1}\right| > c_t\right) \to 0,\ t \to \infty.$$

Таким образом, лемма доказана. □

Поскольку имеет место следующее представление, $i = 1, 2$

$$\frac{q(\theta_{N(t)}) - \lambda\left(\beta(N(t)\mathsf{E}\tau_1) - \beta(t) + \beta(t)\right)}{\sqrt{\lambda\beta(t)}}\sqrt{\frac{\beta(t)}{\beta(N(t)\mathsf{E}\tau_1)}} =$$

$$= \frac{q(\theta_{N(t)}) - \lambda\beta(t)}{\sqrt{\beta(t)}}\sqrt{\frac{\beta(t)}{\beta(N(t)\mathsf{E}\tau_1)}} - \frac{\beta(N(t)\mathsf{E}\tau_1) - \beta(t)}{\sqrt{\beta(t)}}\sqrt{\frac{\beta(t)}{\beta(N(t)\mathsf{E}\tau_1)}},$$

Используя последнее наблюдение и результат следствия 4, получаем следующую теорему.

Теорема 7. *Пусть* $\mathsf{E}\eta_1 = \infty$, $\mathsf{E}\tau_1^r < \infty$, $r > 2$, $\mathsf{E}\xi_1^2 < \infty$, *то*

$$\frac{q(\theta_{N(t)})}{\beta(N(t)\mathsf{E}\tau_1)} \xrightarrow{p} \lambda \text{ при } t \to \infty.$$

Более того, если выполнено условие:

$$\lim_{c\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{\beta(ct)}{\beta(t)}=0,$$

то

$$\frac{q(\theta_{N(t)})-\lambda\beta(t)}{\sqrt{\lambda\beta(t)}}\xrightarrow{d}\mathcal{N}\left(0,1\right),\ \textit{при}\ t\to\infty.$$

2.4. Предельные теоремы для системы с регенерирующим входящим потоком

2.4.1. Описание модели

Рассматривается бесконечноканальная система S с регенерирующим входящим потоком $X(t)$, заданным на фильтрованном вероятностном пространстве $\left(\Omega,\mathcal{F},\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0},\mathsf{P}\right)$, фильтрация $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ согласована с процессом $X(t)$. Приведем определение такого потока [21](Афанасьева, Баштова, 2014).

Определение 3. *Случайный процесс $\{X(t),t\geq 0\}$ с неубывающими непрерывными слева траекториями называется регенерирующим потоком, если существует неубывающая последовательность $\{\theta_i,i\geq 0\}$, $\theta_0=0$ марковских моментов, относительно фильтрации $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ таких, что последовательность*

$$\{\kappa_i\}_{i=0}^{\infty}=\{(X(\theta_{i-1}+t)-X(\theta_{i-1})),\theta_i-\theta_{i-1},t\in[0;\theta_i-\theta_{i-1})\}_{i=0}^{\infty}$$

состоит из н.о.р. случайных элементов.

Величины θ_i и $\tau_i=\theta_i-\theta_{i-1}$($i\geq 1$) называются i-м моментом регенерации и i-м периодом регенерации, соответственно.

Считаем, что $X(t)$ – число требований поступивших в систему обслуживания к моменту времени t, $X(0)=0$. Обозначим $\xi_i=X\left(\theta_i\right)-X\left(\theta_{i-1}\right)$ – число требований, пришедших за $i-$й период регенерации, $i\geq 1$.

В соответствии с *определением 3*, $\{\tau_i\}_{i=1}^{\infty}$ – последовательность н.о.р.с.в.

Из *определения 3* следует, что ξ_i и τ_j независимы при $i \neq j$. Обозначим $\lambda = \frac{\mathsf{E}\xi_1}{\mathsf{E}\tau_1}$.

Времена обслуживания заявок $\{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$ образуют последовательность н.о.р.с.в. с функцией распределения $B(t)$, не зависящую от входящего потока $X(t)$. Хвост распределения $B(t)$ обозначаем через $\overline{B}(t) = 1 - B(t)$.

Основное внимание в данной главе направлено на изучение процесса $q(t)$, равного числу заявок, находящихся на обслуживании в системе S в момент времени t.

2.4.2. Формулировка результатов

Обозначим
$$\beta(t) = \int_0^t \overline{B}(x)dx.$$
Отметим, что если $\mathsf{E}\eta_1 = \infty$, то $\lim\limits_{t\to\infty} \beta(t) = \infty$.

Приведем основные результаты главы.

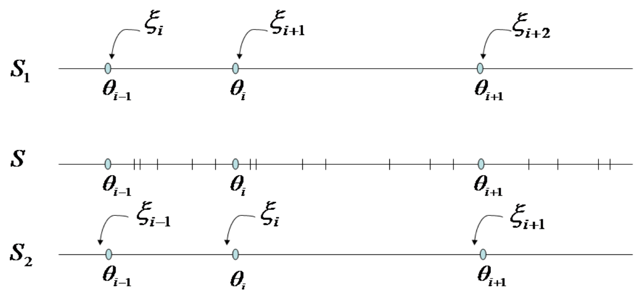
Теорема 8. *Пусть* $\mathsf{E}\eta_1 = \infty$, $\mathsf{E}\tau_1^r < \infty$, $r > 2$, $\mathsf{E}\xi_1^2 < \infty$, *тогда*
$$\frac{q(t)}{\beta(t)} \xrightarrow{p} \lambda \ \textit{при}\ t \to \infty.$$

Теорема 9. *Пусть* $\mathsf{E}\tau_1^r < \infty$, $r > 2$, $\mathsf{E}\xi_1^2 < \infty$ *и выполнено следующее условие*
$$\textit{для}\ 0 < c < 1\ \lim_{c\to 0}\lim_{t\to\infty} \frac{\beta(ct)}{\beta(t)} = 0, \tag{2.44}$$
тогда
$$\frac{q(t) - \lambda\beta(t)}{\sqrt{\lambda\beta(t)}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)\ \ \textit{при}\ t \to \infty.$$

Заметим, что в класс распределений, удовлетворяющих (2.44), входят, например, регулярно меняющиеся функции с индексом $0 < \alpha < 1$ [30](Боровков, Боровков, 2008).

2.4.3. Мажорирующие системы

Для изучения асимптотического поведения очереди в S, вводим две вспомогательные системы S_1 и S_2. В S_1 требования поступают в момент θ_{i-1} группой объема ξ_i, $i \geq 1$. Вторая система S_2 аналогична первой, только группа объема ξ_i поступает не в начале периода, а в его конце(т.е. в момент θ_i).



Предполагаем, что системы S, S_1 и S_2 заданы на одном вероятностном пространстве. Будем обозначать $q_i(t)$ – число требований в системе S_i, $i = 1, 2$.

Лемма 2.8. *Почти наверное выполнено следующее двойное неравенство*

$$q_1\left(\theta_{N(t)+1}\right) - \xi_{N(t)+1} \leq q(t) \leq q_2\left(\theta_{N(t)}\right) + \xi_{N(t)+1}, \; t \geq 0, \tag{2.45}$$

где $N(t) = \max\{n : \theta_n \leq t\}$.

Доказательство. 1. Из определения систем S_2 и S следует, что при $n \geq 1$

$$q(\theta_n) \leq q_2(\theta_n) \text{ п.н.}$$

Поэтому при $t \geq 0$

$$q(\theta_{N(t)}) \leq q_2(\theta_{N(t)}) \text{ п.н.}$$

Далее

$$q(t) \leq q(\theta_{N(t)}) + \xi_{N(t)+1} \leq q_2(\theta_{N(t)}) + \xi_{N(t)+1}, \; t \geq 0.$$

2. Поскольку при $n \geq 1$ имеет место неравенство

$$q(\theta_n) \geq q_1(\theta_n) \text{ п.н,}$$

то при $t \geq 0$

$$q(\theta_{N(t)+1}) \geq q_1(\theta_{N(t)+1}) \text{ п.н.}$$

Так как $q(\theta_{N(t)+1}) \leq q(t) + \xi_{N(t)+1}$, то при $t \geq 0$

$$q(t) \geq q(\theta_{N(t)+1}) - \xi_{N(t)+1} \geq q_1(\theta_{N(t)+1}) - \xi_{N(t)+1} \text{ п.н.}$$

Лемма 3 доказана.

□

Для дальнейшего изложения удобно ввести вспомогательные процессы. Пусть $\boldsymbol{u} = \{u_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\boldsymbol{v} = \{v_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\boldsymbol{a} = \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ – последовательности независимых одинаково распределенных, внутри каждой последовательности, случайных величин такие, что $\boldsymbol{a}$ не зависит от $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$. Случайные величины в $\boldsymbol{u}$ принимают целочисленные значения. Предполагаем, что $\mathsf{P}(a_i > t) = \overline{B}(t)$.

Определим для каждого набора таких последовательностей следующую последовательность сумм

$$S_n(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{u_i} \mathbb{I}\left(a_{U_{i-1}+j} > V_n - V_i\right), \; n \geq 1, \; S_0 = 0, \tag{2.46}$$

где $U_n = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i$, $U_0 = 0$, $V_n = \sum\limits_{i=1}^{n} v_i$, $V_0 = 0$.

Смысл этих обозначений проясняет следующая лемма.

Лемма 2.9. *Имеют место следующие равенства по распределению*

1. $q_2(\theta_n) \stackrel{d}{=} S_n(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta})$, $n \geq 0$;
2. $q_1(\theta_n) \stackrel{d}{=} \sum\limits_{j=1}^{\xi_1} \mathbb{I}(\eta_j > \theta_n) - \xi_{n+1} + S_n(\boldsymbol{\xi'}, \boldsymbol{\tau'}, \boldsymbol{\eta'})$, $n \geq 0$,

где

$$(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}) = (\xi_i, \tau_i, \eta_i), \; (\boldsymbol{\xi'}, \boldsymbol{\tau'}, \boldsymbol{\eta'}) = (\xi'_i, \tau'_i, \eta'_i) = (\xi_{i+1}, \tau_i, \eta_{\xi_1+i}), \; i \geq 1. \tag{2.47}$$

Доказательство. П.1 сразу следует из определения системы S_2.

Обозначим $C_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$, $n \geq 1$. Величину $q_1(\theta_n)$ можно представить в виде суммы

$$q_1(\theta_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{\xi_i} \mathbb{I}\left(\eta_{C_{i-1}+j} > \theta_n - \theta_{i-1}\right) \right), \; n \geq 1. \tag{2.48}$$

Тогда для $n \geq 2$

$$q_1(\theta_n) = \sum_{j=1}^{\xi_1} \mathbb{I}\left(\eta_j > \theta_n\right) + \sum_{i=2}^{n} \left(\sum_{j=1}^{\xi_i} \mathbb{I}\left(\eta_{C_{i-1}+j} > \theta_n - \theta_{i-1}\right) \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\xi_1} \mathbb{I}\left(\eta_j > \theta_n\right) + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^{\xi_{i+1}} \mathbb{I}\left(\eta_{C_i+j} > \theta_n - \theta_i\right) \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\xi_1} \mathbb{I}\left(\eta_j > \theta_n\right) + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{\xi_{i+1}} \mathbb{I}\left(\eta_{C_i+j} > \theta_n - \theta_i\right) \right) - \xi_{n+1}.$$

Для $k \geq 2$, по распределению имеют место равенства

$$C_k \stackrel{d}{=} \xi_1 + \sum_{i=2}^{k} \xi_i = C'_{k-1} + \xi_1,$$

$$\eta_{\xi_1 + C'_{k-1} + j} \stackrel{d}{=} \eta'_{C'_{k-1}+j}.$$

Поэтому

$$q_1(\theta_n) \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^{\xi_1} \mathbb{I}\left(\eta_j > \theta_n\right) - \xi_{n+1} + S_n(\boldsymbol{\xi}', \boldsymbol{\tau}', \boldsymbol{\eta}').$$

$\square$

Из лемм 2.7 и 2.8 следует, что по распределению выполнено следующее неравенство

$$\sum_{j=1}^{\xi_1} \mathbb{I}\left(\eta_j > \theta_{N(t)+1}\right) - \xi_{N(t)+1} + S_{N(t)+1}(\boldsymbol{\xi}', \boldsymbol{\tau}', \boldsymbol{\eta}') - \xi_{N(t)+1} \leq q(t) \leq$$

$$\leq S_{N(t)}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta}) + \xi_{N(t)+1}, \; t \geq 0, \tag{2.49}$$

где $N(t) = \max\{n : \theta_n \leq t\}$. Далее, поскольку величина $\xi_{N(t)+1}$ имеет собственное предельное распределение, то применяя результаты пунктов 2.3.1-2.3.6 для $S_{N(t)}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\eta})$ и $S_{N(t)+1}(\boldsymbol{\xi}', \boldsymbol{\tau}', \boldsymbol{\eta}')$, получаем результаты *теорем 7* и *8*.

Глава 3. Функциональные предельные теоремы

3.1. Введение

В первой части этой главы изучается сходимость конечномерных распределений процесса $q(t)$, равного числу требований в бесконечноканальной системе в момент времени t, с пуассоновским входящим потоком и интенсивностью зависящей от времени. Показано, что конечномерные распределения нормированного и центрированного процесса $q(tT)$ сходятся к конечномерным распределениям гауссовского процесса при $T \to \infty$, $t \in (0, h)$.

Во второй части показывается, что процесс $q(t)$ является условным отрицательным демимартингалом в непрерывном времени. Благодаря этому удается проверить условие плотности для процесса $q(t)$, в предположении, что интенсивность входящего пуассоновского потока – постоянна. Поэтому в этом частном случае имеет место C-сходимость нормированного процесса $q(tT)$ к гауссовскому процессу при $T \to \infty$, $t \in (0, h)$.

3.2. Описание системы

Мы рассматриваем систему обслуживания с бесконечным числом приборов. Моменты поступления требований образуют пуассоновский процесс $X(t)$ с интенсивностью $\lambda(t)$. Предполагаем, что для интенсивности $\lambda(t)$ входящего потока выполнено следующее условие.

Условие 1. *Обозначим* $\Lambda(t) = \int\limits_0^t \lambda(y)dy$. *Найдется конечное число* $\tau \geq 0$, $\lambda > 0$ *и последовательность* $\{S_k\}_{k=0}^{\infty}$ *такие, что* $S_k \to \infty$ *при* $k \to \infty$ *и*

$$0 < S_k - S_{k-1} \leq \tau \text{ и } \Lambda(S_k) = \lambda S_k,\ k \geq 1,\ S_0 = 0.$$

Следует отметить, что из *Условия 1* следует, что предел $\frac{1}{t}\Lambda(t)$ существует при $t \to \infty$ и равен λ.

Мы предполагаем, что времена обслуживания $\{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$ – н.о.р.с.в. с функцией распределения $B(x)$, $\overline{B}(x) = 1 - B(x)$. Будем считать, что эта функция удовлетворяет следующему условию.

Условие 2.

$$\overline{B}(t) \sim \frac{\mathcal{L}(t)}{t^{\Delta}} \text{ } \textit{при } t \to \infty, \tag{3.1}$$

для некоторого $0 < \Delta < 1$ *и медленно меняющейся на бесконечности функции* $\mathcal{L}(t)$ *[14](Сенета, 1985).*

Пусть $q(t)$ – число требований в системе в момент времени t и $q(0) = 0$ п.н. Задача состоит в изучении асимптотического поведения процесса $q(tT)$ при $T \to \infty$ для $t \in (0, h)$, $h > 0$.

3.3. Сходимость конечномерных распределений

Сформулируем наш результат.

Теорема 10. *Предположим, что условия 1 и 2 выполнены, то конечномерные распределения процесса*

$$\frac{q(tT) - \rho(tT)}{\sqrt{\mathcal{L}(T)T^{1-\Delta}}}$$

слабо сходятся при $T \to \infty$ *к конечномерным распределениям центрированного гауссовского процесса* $\xi(t)$ *с ковариационной функцией*

$$R(t, t+u) = \frac{\lambda}{1-\Delta}\left((t+u)^{1-\Delta} - u^{1-\Delta}\right), \ (t \geq 0, u \geq 0).$$

Здесь $\rho(tT) = \int\limits_0^{tT} \overline{B}(Tt - x)\lambda(x)dx$, $t \in (0, h)$.

Чтобы прояснить основную идею, использованную в доказательстве *Теоремы 10*, начнем с рассмотрения более простого случая.

3.3.1. Частный случай: интенсивность входящего потока – постоянна

Предполагаем, что входящий в систему поток – пуассоновский процесс интенсивности λ. Заметим, что *Условие 1* всегда выполнено в этом случае. Будем обозначать эту систему S^*.

Для того чтобы доказать *теорему 10*, фиксируем некоторые моменты времени $0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n < \infty$. Обозначим число требований, которые поступили в систему на $[Tt_{i-1}; Tt_i]$ и обслужились на интервале $[Tt_j; Tt_{j+1}]$, через ξ_{ij}^T для некоторого фиксированного T, где $1 \le i \le j \le n$. Здесь мы предполагаем, что $t_0 = 0$, $t_{n+1} = \infty$.

Лемма 3.1. *Для случайных величин ξ_{ij}^T, $i \le j$, справедливы следующие утверждения*

- *ξ_{ij}^T и ξ_{kl}^T независимы, для $i \ne k$, $j \ne l$;*
- *ξ_{ij}^T имеет пуассоновское распределение с параметром α_{ij}^T, где*

$$\alpha_{ij}^T = \lambda \int_{Tt_{i-1}}^{Tt_i} \left(\overline{B}(Tt_j - y) - \overline{B}(Tt_{j+1} - y)\right) dy$$

для $1 \le i \le n$, $1 \le j \le n$, $i \le j$.

Доказательство. Введем вектор

$$\vec{\xi_i^T} = (\xi_{ii}^T, \xi_{ii+1}^T, \ldots, \xi_{in}^T),$$

где $1 \le i \le n$.

Заметим, что независимость векторов $\vec{\xi_k}^T$ и $\vec{\xi_l}^T$, для $k \ne l$ следует из свойства независимости числа скачков пуассоновского процесса на непересекающихся интервалах и независимости времен обслуживания.

Покажем независимость координат вектора $\vec{\xi_i}^T$, $1 \le i \le n$. Для этого фиксируем неотрицательные целые числа $\{k_j\}_{j=i}^n$. Обозначим p_{ij}^T – вероятность того, что требование, которое пришло в систему на интервале

$[Tt_{i-1}, Tt_i]$, обслужится на $[Tt_j, Tt_{j+1}]$. Используя формулу полной вероятности находим совместное распределение координат этого вектора $\vec{\xi}_i^T$

$$\mathsf{P}\left(\xi_{ii}^T = k_i, \xi_{ii+1}^T = k_{i+1}, \ldots, \xi_{in}^T = k_n\right) =$$

$$= \sum_{N \geq k_i + k_{i+1} + \ldots + k_n} \frac{N!}{k_i! k_{i+1}! \ldots k_n! (N - k_i - k_{i+1} - \ldots - k_n)!} \times$$

$$\times \left(p_{ii}^T\right)^{k_i} \left(p_{ii+1}^T\right)^{k_{i+1}} \ldots \left(p_{in}^T\right)^{k_n} \left(1 - p_{ii}^T - p_{ii+1}^T - \ldots - p_{in}^T\right)^{N - k_i - k_{i+1} - \ldots - k_n} \times$$

$$\times \frac{(Tt_i - Tt_{i-1})^N}{N!} e^{-\lambda(Tt_i - Tt_{i-1})} =$$

$$= \prod_{j=i}^{n} \frac{\left(\lambda p_{ij}^T (Tt_i - Tt_{i-1})\right)^{k_j}}{k_j!} e^{-\lambda p_{ij}^T (Tt_i - Tt_{i-1})} = \prod_{j=i}^{n} \mathsf{P}\left(\xi_{ij}^T = k_j\right).$$

Таким образом, мы получили, что координаты вектора $\vec{\xi}_i^T$ независимы. Утверждение, что ξ_{ij}^T имеют пуассоновское распределение с параметром α_{ij}^T, следует из цепочки равенств предыдущего рассуждения, итак

$$\mathsf{P}\left(\xi_{ij}^T = k_j\right) = \frac{\left(\lambda p_{ij}^T (Tt_i - Tt_{i-1})\right)^{k_j}}{k_j!} e^{-\lambda p_{ij}^T (Tt_i - Tt_{i-1})},$$

где $p_{ij}^T = \frac{1}{Tt_i - Tt_{i-1}} \int\limits_{Tt_{i-1}}^{Tt_i} \left(\overline{B}(Tt_j - y) - \overline{B}(Tt_{j+1} - y)\right) dy$. Таким образом, вторая часть леммы доказана. □

Лемма 3.2. *Если выполнено Условие 2, то для функций* α_{ij}^T, $1 \leq i \leq j \leq n$ *имеет место следующая асимптотика*

$$\alpha_{ij}^T \sim \frac{\lambda}{1 - \Delta} \mathcal{L}(T) T^{1-\Delta} d_{ij} \text{ при } T \to \infty,$$

где $d_{ij} = (t_{j+1} - t_i)^{1-\Delta} + (t_j - t_{i-1})^{1-\Delta} - (t_j - t_i)^{1-\Delta} - (t_{j+1} - t_{i-1})^{1-\Delta}$.

Доказательство. Для упрощения записи расчетов введем обозначение

$$\mu_{ij}^T = \lambda \int_0^{Tt_i} \overline{B}(Tt_j - y) dy, \ i \leq j,$$

тогда α_{ij}^T может быть переписано в следующем виде

$$\alpha_{ij}^T = \mu_{ij}^T - \mu_{i-1j}^T - \mu_{ij+1}^T + \mu_{i-1j+1}^T.$$

Найдем асимптотическое поведение μ_{ij}^T. Для этого рассмотрим случаи:

1. Пусть $i < j$. Из *Условия 2* следует, что для любого $\varepsilon > 0$ и достаточно больших t выполнено неравенство

$$(1-\varepsilon)\frac{\mathcal{L}(t)}{t^{\Delta}} \le \overline{B}(t) \le \frac{\mathcal{L}(t)}{t^{\Delta}}(1+\varepsilon). \tag{3.2}$$

Аналогично, из определения медленно меняющихся функций следует, что для любых $a > 0$, $\varepsilon > 0$ и достаточно больших t

$$(1-\varepsilon)\mathcal{L}(t) \le \mathcal{L}(at) \le \mathcal{L}(t)(1+\varepsilon). \tag{3.3}$$

Из (3.2) и (3.3) получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\bar{t}$ такое, что для $t > \bar{t}$

$$\mu_{ij}^T = \lambda \int_0^{Tt_i} \overline{B}(Tt_j - y)dy = \lambda T \int_0^{t_i} \overline{B}(T(t_j - z))dz \ge$$

$$\ge (1-\varepsilon)\lambda T \int_0^{t_i} \frac{\mathcal{L}(T(t_j - z))}{(T(t_j - z))^{\Delta}}dz = \lambda(1-\varepsilon)T^{1-\Delta} \int_0^{t_i} \frac{\mathcal{L}(T(t_j - z))}{(t_j - z)^{\Delta}}\frac{\mathcal{L}(T)}{\mathcal{L}(T)}dz \ge$$

$$\ge (1-\varepsilon)^2 \lambda \mathcal{L}(T) T^{1-\Delta} \int_0^{t_i} \frac{dz}{(t_j - z)^{\Delta}} =$$

$$= (1-\varepsilon)^2 \frac{\lambda}{1-\Delta}\mathcal{L}(T)T^{1-\Delta}\left(t_j^{1-\Delta} - (t_j - t_i)^{1-\Delta}\right).$$

Подобным образом, используя неравенства (3.2) и (3.3), находим верхнюю оценку μ_{ij}^T. Объединяя эти результаты, получаем эквивалентность

$$\mu_{ij}^T \sim \frac{\lambda}{1-\Delta}\mathcal{L}(T)T^{1-\Delta}\left(t_j^{1-\Delta} - (t_j - t_i)^{1-\Delta}\right) \text{ для любых } 1 \le i < j \le n \tag{3.4}$$

при $T \to \infty$.

2. Пусть $i = j$. Обозначим

$$I(t) = \int_0^t \overline{B}(y)dy.$$

Тогда $\mu_{ii}^T = \lambda I(Tt_i)$. Найдем асимптотическое поведение интеграла $I(t)$ при $t \to \infty$. Поскольку, для любого $0 < \gamma < 1$ имеет место следующее представление

$$I(t) = \int_0^{t^{\gamma}} \overline{B}(y)dy + \int_{t^{\gamma}}^t \overline{B}(y)dy = I_1(t) + I_2(t),$$

найдем асимптотики $I_1(t)$ и $I_2(t)$.

- Используя неравенства (3.2) и (3.3), получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\widetilde{t}$ такое, что при всех $t > \widetilde{t}$
$$I_2(t) = \int_{t^\gamma}^{t} \overline{B}(y)dy = t\int_{t^{\gamma-1}}^{1} \overline{B}(zt)dz \geq (1-\varepsilon)t\int_{t^{\gamma-1}}^{1} \frac{\mathcal{L}(tz)}{(tz)^\Delta}dz =$$
$$= (1-\varepsilon)t^{1-\Delta}\int_{t^{\gamma-1}}^{1} \frac{\mathcal{L}(tz)}{z^\Delta}\frac{\mathcal{L}(t)}{\mathcal{L}(t)}dz \geq (1-\varepsilon)^2 t^{1-\Delta}\mathcal{L}(t)\int_{t^{\gamma-1}}^{1}\frac{dz}{z^\Delta} =$$
$$= (1-\varepsilon)^2\frac{t^{1-\Delta}}{1-\Delta}\mathcal{L}(t)\left(1 - t^{(\gamma-1)(1-\Delta)}\right).$$
Аналогично получаем оценку сверху. Таким образом, при $t \to \infty$
$$I_2(t) \sim \frac{t^{1-\Delta}}{1-\Delta}\mathcal{L}(t).$$

- Заметим, что для первого интеграла имеет место неравенство $I_1(t) \leq t^\gamma$, поскольку $\overline{B}(x) \leq 1$ для всех x. Следовательно, если выбрать $0 < \gamma < 1-\Delta$, то главным членом асимптотики $I(t)$ будет $t^{1-\Delta}$.

Объединяя эти оценки, имеем
$$I(t) \sim \frac{t^{1-\Delta}}{1-\Delta}\mathcal{L}(t) \text{ при } t \to \infty.$$
Поскольку $\mu_{ii}^T = \lambda I(Tt_i)$, то для любого $i \geq 1$
$$\mu_{ii}^T \sim \frac{\lambda}{1-\Delta}\mathcal{L}(T)T^{1-\Delta}t_i^{1-\Delta} \tag{3.5}$$
при $T \to \infty$.

Утверждение *Леммы 3.2* следует из представления для α_{ij}^T и приведенных асимптотик (3.4) и (3.5). □

Лемма 3.3. *Пусть* $\vec{d} = (d_{11}, d_{12}\dots d_{1n}, d_{22}, d_{23}\dots d_{2n}, \dots, d_{nn})$. *Обозначим*
$$\widehat{\vec{\xi}}^T = \frac{\vec{\xi}^T - \frac{\lambda}{1-\Delta}T^{1-\Delta}\mathcal{L}(T)\vec{d}}{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\Delta}\mathcal{L}(T)T^{1-\Delta}}}.$$
Если Условие 2 выполнено, то
$$\widehat{\vec{\xi}}^T \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, D) \text{ при } T \to \infty. \tag{3.6}$$

Здесь $\vec{\xi}^T = \left(\xi_{11}^T, \xi_{12}^T \dots \xi_{1n}^T, \xi_{22}^T, \xi_{23}^T \dots \xi_{2n}^T, \dots, \xi_{nn}^T\right)$, D *– диагональная матрица со значениями*

$$\{d_{11}, d_{12} \dots d_{1n}, d_{22}, d_{23} \dots d_{2n}, \dots, d_{nn}\}$$

на ее главной диагонали, где $\{d_{ij}\}_{i,j=1}^n$ *определены в Лемме 3.2.*

Доказательство. Утверждение следует из *Леммы 3.2* и следующего свойства пуассоновского распределения. Если случайная величина ζ_λ имеет пуассоновское распределение с параметром λ и $\zeta_\lambda^\beta = \beta\frac{\zeta_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$, то

$$\zeta_\lambda^\beta \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \beta^2) \text{ при } \lambda \to \infty.$$

Так как ξ_{ij}^T имеет пуассоновское распределение с параметом α_{ij}^T и $\alpha_{ij}^T \to \infty$ согласно *Лемме 3.3* при $T \to \infty$, то

$$\frac{\xi_{ij}^T - \frac{\lambda}{1-\Delta}T^{1-\Delta}\mathcal{L}(T)d_{ij}}{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\Delta}T^{1-\Delta}\mathcal{L}(T)}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, d_{ij}) \text{ при } T \to \infty$$

где $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$.

Поскольку случайные величины $\left\{\xi_{ij}^T\right\}_{i,j=1}^n$ независимы, то из покомпонентной сходимости следует сходимость векторов. Итак, *Лемма 3.3* доказана. $\square$

Свормулируем и докажем аналог *Теоремы 10* для системы S^*.

Теорема 11. *Если для системы* S^* *выполнено Условие 2, то*

$$\frac{\vec{q}^T - \vec{\rho}\frac{\lambda}{1-\Delta}\mathcal{L}(T)T^{1-\Delta}}{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\Delta}\mathcal{L}(T)T^{1-\Delta}}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, R) \text{ при } T \to \infty.$$

Здесь вектор средних $\vec{\rho} = (t_1^{1-\Delta}, t_2^{1-\Delta}, \dots, t_n^{1-\Delta})$, *матрица ковариации* $R = (r_{ij})$ *состоит из элементов* $r_{ij} = t_j^{1-\Delta} - (t_j - t_i)^{1-\Delta}$ *для* $1 \leq i \leq j \leq n$.

Доказательство. Заметим, что для любого $1 \leq k \leq n$

$$q(Tt_k) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k}^{n}\xi_{ij}^T,$$

поэтому вектор $\vec{q}^T = (q(Tt_1), q(Tt_2), \ldots, q(Tt_n))$ можно представить в следующем виде

$$\vec{q}^T = C\vec{\xi}^T.$$

Здесь C – матрица с постоянными коэффициентами размера $\frac{n(n+1)}{2} \times n$. Например, для $n = 4$ матрица C имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что вектор

$$\widehat{\vec{q}^T} = \frac{\vec{q}^T - \frac{\lambda}{1-\Delta} T^{1-\Delta} \mathcal{L}(T) C\vec{d}}{\sqrt{\frac{\lambda}{1-\Delta} T^{1-\Delta} \mathcal{L}(T)}}$$

можно переписать как $\widehat{\vec{q}^T} = C\widehat{\vec{\xi}^T}$. Поскольку $\widehat{\vec{\xi}^T} \xrightarrow{d} \xi^\infty$ при $T \to \infty$, то $\widehat{\vec{q}^T} \xrightarrow{d} C\xi^\infty$ при $T \to \infty$. Согласно *Лемме 3.3* случайный вектор ξ^∞ имеет нормальное распределение.

Здесь было использовано следующее свойство гауссовского распределения. Если вектор X имеет нормальное распределение с параметрами (μ, Σ), то для любой матрицы A вектор AX будет иметь нормальное распределение с параметрами $(A\mu, A\Sigma A^T)$. Итак, вектор $C\xi^\infty$ имеет нормальное распределение с нулевым средним и некоторой ковариационной матрицей. Чтобы найти вид этой матрицы, заметим, что для $i \leq k$ мы имеем следующее равенство

$$\operatorname{cov}(q(Tt_i), q(Tt_k)) = \lambda \int_0^{Tt_i} \overline{B}(Tt_k - y)dy = \mu_{ik},$$

Поэтому далее все следует из доказательства *Леммы 3.3.* $\square$

Таким образом, в случае, когда $\lambda(t) = const$, теорема 10 доказана.

3.3.2. Доказательство в общем случае

Предположим, что интенсивность входящего потока $\lambda(t)$ удовлетворяет *Условию 1.* Заметим, что утверждения лемм, которые были доказаны в предыдущем пункте, остаются верными и в этом случае. Рассмотрим их одно за другим. Утверждение *Леммы 3.1* сохраняется с той лишь разницей, что в этом случае

$$\alpha_{ij}^T = \int_{Tt_{i-1}}^{Tt_i} \left(\overline{B}(Tt_j - y) - \overline{B}(Tt_{j+1} - y)\right) \lambda(y)dy.$$

Лемма 3.2 формулируется так же, как и в случае постоянной интенсивности. На доказательстве *Леммы 3.2* остановимся более детально.

Лемма 3.4. *Если Условия 1 и 2 выполнены, то для функции α_{ij}^T утверждение Леммы 3.2 имеет место.*

Доказательство. Обозначим

$$m_{ij}^T = \int_0^{Tt_i} \overline{B}(Tt_j - y)\lambda(y)dy.$$

Используя это обозначение, α_{ij}^T можно переписать в следующем виде

$$\alpha_{ij}^T = m_{ij}^T - m_{i-1j}^T - m_{ij+1}^T + m_{i-1j+1}^T. \tag{3.7}$$

Итак, чтобы найти асимптотику α_{ij}^T при $T \to \infty$, достаточно найти асимптотику для m_{ij}^T при $T \to \infty$, $1 \le i \le j \le n$. Будем доказывать эту лемму так же, как *Лемму 3.2*, в два шага.

1. Пусть $i < j$. Для этого случая нам достаточно получить асимптотику интеграла для $i = 1$, $j = 2$

   $$J_T = \int_0^{Tt_1} \overline{B}(Tt_2 - y)\lambda(y)dy.$$

   Пусть $N(T) = \max\{k : S_k < Tt_1\}$. Ввиду монотонности функции $\overline{B}(Tt_2 - y)$, имеем

   $$J_T \le J_T^+ = \sum_{k=0}^{N(T)-1} \overline{B}(Tt_2 - S_{k+1}) \int_{S_k}^{S_{k+1}} \lambda(y)dy =$$

$$= \lambda \sum_{k=0}^{N(T)-1} \overline{B}(Tt_2 - S_{k+1})(S_{k+1} - S_k).$$

Поскольку $t_2 > t_1$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется $T_\varepsilon^{(1)}$ такое, что

$$\overline{B}(Tt_2 - S_{k+1}) \leq (1+\varepsilon)\frac{\mathcal{L}(Tt_2 - S_k)}{(Tt_2 - S_k)^\Delta}$$

для всех $k \geq 0$. Поэтому

$$J_T^+ \leq \lambda(1+\varepsilon)T \sum_{k=1}^{N(T)-1} \frac{\mathcal{L}(Tt_2 - S_k)}{T^\Delta \left(t_2 - \frac{S_k}{T}\right)^\Delta} \frac{S_{k+1} - S_k}{T} =$$

$$= \lambda(1+\varepsilon)T^{1-\Delta}\mathcal{L}(T) \sum_{k=1}^{N(T)-1} \frac{\mathcal{L}(T(t_2 - \frac{S_k}{T}))}{\mathcal{L}(T)} \frac{1}{\left(t_2 - \frac{S_k}{T}\right)^\Delta} \frac{S_{k+1} - S_k}{T}.$$

Это означает, что найдется $T_\varepsilon^{(2)}$ такое, что для $T > \max(T_\varepsilon^{(1)}, T_\varepsilon^{(2)})$

$$J_T^+ \leq \lambda(1+\varepsilon)^2 T^{1-\Delta}\mathcal{L}(T) \sum_{k=0}^{N(T)-1} \left(t_2 - r_k\right)^\Delta \left(r_{k+1} - r_k\right),$$

где $r_k = \frac{S_k}{T}$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{N(T)} \frac{r_{k+1} - r_k}{(t_2 - r_k)^\Delta} \to \int_0^{t_1} \frac{dy}{(t_2 - y)^\Delta} = \frac{1}{1-\Delta}\left[t_2^{1-\Delta} - (t_2 - t_1)^{1-\Delta}\right] \text{ при } T \to \infty.$$

Имеем

$$J_T^+ \leq \frac{\lambda}{1-\Delta}(1+\varepsilon_1)T^{1-\Delta}\mathcal{L}(T)$$

для любого $\varepsilon_1 > 0$ и всех достаточно больших T. Аналогично получаем оценку снизу. Итак, для всех $i < j$ мы получили следующую эквивалентность

$$m_{ij}^T \sim \frac{\lambda}{1-\Delta}\left(t_j^{1-\Delta} - (t_j - t_i)^{1-\Delta}\right) T^{1-\Delta}\mathcal{L}(T) \text{ при } T \to \infty.$$

2. Рассмотрим случай, когда $i = j$. Обозначим $I(t) = \int\limits_0^t \overline{B}(y)\lambda(t-y)dy$, тогда $\mu_{ii}^T = I(Tt_i)$. Найдем асимптотику функции $I(t)$ при $t \to \infty$, используя представление

$$I(t) = \int_0^{t^\gamma} \overline{B}(y)\lambda(t-y)dy + \int_{t^\gamma}^t \overline{B}(y)\lambda(t-y)dy = I_1(t) + I_2(t),$$

для любого $0 < \gamma < 1$. Найдем асимптотику каждого из слагаемых при $t \to \infty$.

- Рассуждая аналогично первой части этой леммы (случай для $i < j$), получаем
$$I_2(t) \sim \frac{\lambda}{1-\Delta} t^{1-\Delta} \mathcal{L}(t) \text{ при } t \to \infty.$$
- Далее, заметим, что $I_1(t) \leq \int\limits_0^{t^\gamma} \lambda(t-y)dy = \Lambda(t) - \Lambda(t - t^\gamma) \sim \lambda t^\gamma$ при $t \to \infty$.

Итак, если выбрать $0 < \gamma < 1 - \Delta$, то главным членом асимптотики $I(t)$ будет $t^{1-\Delta}$. Итак, получаем, что для любого $1 \leq i \leq n$
$$m_{ii}^T \sim \frac{\lambda}{1-\Delta} t_i^{1-\Delta} \mathcal{L}(T) T^{1-\Delta}.$$

Лемма 3.4 следует из полученных асимптотик для m_{ij}^T и представления (3.7) для α_{ij}^T. □

Замечание 2. *Если выполнены условия 1 и 2, то, как это следует из леммы 3.4, имеет место асимптотика*
$$\rho(tT) \sim \frac{\lambda}{1-\Delta} (tT)^{1-\Delta} \mathcal{L}(tT),$$
поэтому несложно показать, что утверждение теоремы 10, может быть переписано в более простой форме.

Приведем эту формулировку.

Следствие 7. *Предположим, что условия 1 и 2 выполнены, то конечномерные распределения процесса*
$$\frac{q(tT) - \frac{\lambda}{1-\Delta}(tT)^{1-\Delta}\mathcal{L}(tT)}{\sqrt{\mathcal{L}(T)T^{1-\Delta}}}$$
слабо сходятся при $T \to \infty$ к конечномерным распределениям гауссовского процесса $\xi(t)$ с нулевым средним и ковариационной функцией
$$R(t, t+u) = \frac{\lambda}{1-\Delta} \left((t+u)^{1-\Delta} - u^{1-\Delta} \right), \; (t \geq 0, u \geq 0).$$

Далее, используя подход, приведенный для случая постоянной интенсивности, получаем *Теорему 10*.

Замечание 3. *Рассмотрим систему с пуассоновским входящим потоком интенсивности* $\lambda(t)$, *где* $\lambda(t)$ *является периодической функцией с периодом* $\tau > 0$. *Если Условие 2 выполнено, то теорема 10 выполнена и* $\lambda = \frac{\Lambda(\tau)}{\tau}$.

3.4. Плотность

Теперь перейдем к доказательству слабой сходимости в пространстве $C[0,1]$. Это пространство всех непрерывных действительных функций на замкнутом единичном интервале $[0,1]$, метризованное расстоянием между двумя функциями $x = x(t)$ и $y = y(t)$:

$$\rho(x,y) = \sup_{0 \le t \le 1} |x(t) - y(t)|. \tag{3.8}$$

Отметим, что слабая сходимость распределений в C не следует из слабой сходимости конечномерных распределений. Но в предположении относительной компактности слабая сходимость конечномерных распределений влечет слабую сходимость распределений в $C[0,1]$. Поскольку пространство $C[0,1]$ сепарабельно и полно, из теоремы Прохорова следует, что относительная компактность семейства вероятностных мер на $(C[0,1], \mathcal{C}[0,1])$ эквивалентна плотности этого семейства. Таким образом, имеет место следующий результат.

Теорема.*(Боровков, 1980 [5, стр. 21])*

Пусть $X_n(u)$, $n \ge 1$, $X(u)$ *– сепарабельные процессы в пространстве* $(R(0,1), \mathcal{R}(0,1))$, $C[0,1] \subset R(0,1)$.

Для того, чтобы $X_n \overset{C}{\to} X$, $n \to \infty$, *т.е. для любого* $\mathcal{R}(0,1)$*-измеримого функционала* f, *непрерывного в "точках"пространства* $C[0,1]$ *относительно равномерной метрики (3.8), имеет место*

$$\mathsf{P}(f(X_n) < x) \to \mathsf{P}(f(X) < x), \ n \to \infty,$$

необходимо и достаточно выполнение условий.

1. *Существует всюду плотное на* $[0,1]$ *множество* S *такое, что конечномерные распределения* $\{X_n(u),\ u \in S\}$ *слабо сходятся к распределениям* $\{X(u),\ u \in S\}$.
2. *Для любого* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{c\to 0}\limsup_{n\to\infty}\mathsf{P}\left(\sup_{|u-v|\le c}|X(u)-X(v)|>\varepsilon\right)=0. \tag{3.9}$$

Поскольку сходимость конечномерных распределений нами уже показана, то для доказательства C-сходимости достаточно проверить условие (3.9). Для этого снова воспользуемся методами теории демимартингалов. Проведем его в два этапа:

1. Дадим определение условного непрерывного отрицательного демимартингала. Приведем рассуждения, с помощью которых известные максимальные неравенства для демимартингалов в дискретном времени, можно перенести на случай непрерывного времени.
2. Покажем, что условно центрированный процесс $q(tT)$ является условным относительно σ-алгебры, образованной входящим потоком, отрицательным демимартингалом в непрерывном времени.

Определение 4. *Пусть* $\{S_t, t\in[0,T]\}$ *– случайный процесс, определенный на полном вероятностном пространстве* $(\Omega,\mathcal{A},\mathsf{P})$. *Этот процесс называется условным относительно* $\mathcal{F}$ *отрицательным демимартингалом с непрерывным временем, если для всех* $0=t_0\le t_1\le t_2\le\ldots\le t_k=T$, $k\ge 1$ *последовательность*

$$\left\{S_{t_j}, 0\le j\le k-1\right\}$$

является условным относительно $\mathcal{F}$ *отрицательным демимартингалом в дискретном времени, в смысле определения приведенного в [34](Christofides, Hadjikyriakou, 2013).*

Здесь $\mathcal{F}$ *–* σ*-подалгебра* $\mathcal{A}$.

Определение отрицательного условного демимартингала в дискретном времени сформулировано также в определении 3 диссертации.

Итак, вернемся к рассмотрению бесконечноканальной системы, описанной в начале этой главы, и процесса $q(t)$, равного числу занятых приборов в этой системе в момент времени t.

Пусть времена прихода требований в систему образуют последовательность $\{\theta_i\}_{i=0}^{\infty}$, а времена обслуживания – $\{\eta_i\}_{i=0}^{\infty}$. Тогда можем записать

$$\bar{q}_T(t) = q(tT) - \mathsf{E}_{\mathcal{F}} q(tT) = \sum_{i:\ \theta_i \le tT} \zeta_i^{tT} - \sum_{i:\ \theta_i \le tT} \overline{B}(tT - \theta_i),$$

где $\zeta_i^{tT} = \mathbb{I}\left(\eta_i > tT - \theta_i\right)$.

Лемма 3.5. *Случайный процесс* $\left\{\bar{Q}_T(s,t) = \bar{q}_T(t) - \bar{q}_T(s)\right\}_{t \ge s}$, $s, t \in (0, h)$, $T \ge 0$ *является условным относительно* $\mathcal{F}$ *отрицательным демимартингалом.*

Доказательство. Пусть $s = h_0 \le h_1 \le h_2 \le \ldots \le h_N = h$, то нужно доказать, что

$$\mathsf{E}_{\mathcal{F}}\left(\bar{Q}_T(h_0, h_{n+1}) - \bar{Q}_T(h_0, h_n)\right) f(\bar{Q}_T(h_0, h_0), \ldots, \bar{Q}_T(h_0, h_n)) \le 0$$

для любой покомпонентно неубывающей функции f. По определению, имеем

$$\mathsf{E}_{\mathcal{F}}\left(\bar{Q}_T(h_0, h_{n+1}) - \bar{Q}_T(h_0, h_n)\right) f(\bar{Q}_T(h_0, h_0), \ldots, \bar{Q}_T(h_0, h_n)) =$$

$$= \mathsf{E}_{\mathcal{F}}\left(\bar{q}_T(h_{n+1}) - \bar{q}_T(h_n)\right) f(\bar{Q}_T(h_0, h_0), \ldots, \bar{Q}_T(h_0, h_n)) =$$

$$= \sum_{i:\theta_i \le h_n T} \mathsf{E}_{\mathcal{F}}\left(\left(\zeta_i^{h_{n+1}T} - \zeta_i^{h_n T} - \mathsf{E}_{\mathcal{F}}\zeta_i^{h_{n+1}T} + \mathsf{E}_{\mathcal{F}}\zeta_i^{h_n T}\right) f(\bar{Q}_T(h_0, h_0), \ldots, \bar{Q}_T(h_0, h_n))\right)$$

$$+ \sum_{i:h_n T < \theta_i \le h_{n+1} T} \mathsf{E}_{\mathcal{F}}\left(\left(\zeta_i^{h_{n+1}T} - \mathsf{E}_{\mathcal{F}}\zeta_i^{h_{n+1}T}\right) f\big(\bar{Q}_T(h_0, h_0), \ldots, \bar{Q}_T(h_0, h_n)\big)\right) = I_n + II_n.$$

Поскольку при любом i таком, что $\{h_n T < \theta_i \le h_{n+1} T\}$, величины

$$\zeta_i^{h_{n+1}T} - \mathsf{E}_{\mathcal{F}}\zeta_i^{h_{n+1}T} \text{ и } f\big(\bar{Q}_T(h_0, h_0), \ldots, \bar{Q}_T(h_0, h_n)\big)$$

условно независимы относительно $\mathcal{F}$, то $II_n = 0$.

Теперь рассмотрим I_n. Введем следующие события

$$A_i(n)=\left\{\omega:\zeta_i^{h_{n+1}T}-\zeta_i^{h_nT}=-1\right\},\ 1\le i\le n.$$

Отметим, что тогда

$$A_i(n)=\left\{\omega:\zeta_i^{h_{n+1}T}=0,\zeta_i^{h_nT}=1\right\}=\left\{\omega:h_n-\theta_i<\eta_i<h_{n+1}-\theta_i\right\}. \quad (3.10)$$

Из последнего следует, что для всех $i\ge 1$

$$\mathsf{P}_{\mathcal{F}}\left(A_i(n)\right)=\overline{B}(h_n-\theta_i)-\overline{B}(h_{n+1}-\theta_i).$$

Рассмотрим отдельно каждое слагаемое в I_n

$$N_i(n)=\left(\zeta_i^{h_{n+1}T}-\zeta_i^{h_nT}\right)f\big(\bar{Q}_T(h_0,h_0),\dots,\bar{Q}_T(h_0,h_n)\big)-$$

$$-\left(\mathsf{E}_{\mathcal{F}}\zeta_i^{h_{n+1}T}-\mathsf{E}_{\mathcal{F}}\zeta_i^{h_nT}\right)f\big(\bar{Q}_T(h_0,h_0),\dots,\bar{Q}_T(h_0,h_n)\big).$$

Заметим, что

$$\left(\mathsf{E}_{\mathcal{F}}\zeta_i^{h_{n+1}T}-\mathsf{E}_{\mathcal{F}}\zeta_i^{h_nT}\right)\mathsf{E}_{\mathcal{F}}f\big(\bar{Q}_T(h_0,h_0),\dots,\bar{Q}_T(h_0,h_n)\big)=$$

$$=-\big(\overline{B}(h_nT-\theta_i)-\overline{B}(h_{n+1}T-\theta_i)\big)\,\mathsf{E}_{\mathcal{F}}f\big(\bar{Q}_T(h_0,h_0),\dots,\bar{Q}_T(h_0,h_n)\big).$$

Далее, в силу (3.10) имеем

$$\mathsf{E}_{\mathcal{F}}\left(\zeta_i^{h_{n+1}T}-\zeta_i^{h_nT}\right)f\big(\bar{Q}_T(h_0,h_0),\dots,\bar{Q}_T(h_0,h_n)\big)=$$

$$=-\mathsf{E}_{\mathcal{F}}f\big(\bar{Q}_T(h_0,h_0),\dots,\bar{Q}_T(h_0,h_n)\big)\mathbb{I}\left\{A_i(n)\right\}=$$

$$=-\mathsf{E}_{\mathcal{F}}\big(f\big(\bar{Q}_T(h_0,h_0),\dots,\bar{Q}_T(h_0,h_n)\big)|A_i(n)\big)\,\mathsf{P}_{\mathcal{F}}\left\{A_i(n)\right\}=$$

$$=-\mathsf{E}_{\mathcal{F}}\big(f\big(\bar{Q}_T(h_0,h_0),\dots,\bar{Q}_T(h_0,h_n)\big)|A_i(n)\big)\left(\overline{B}(h_n-\theta_i)-\overline{B}(h_{n+1}-\theta_i)\right).$$

Таким образом

$$N_i(n)=-\big(\overline{B}(h_n-\theta_i)-\overline{B}(h_{n+1}-\theta_i)\big)\cdot$$

$$\cdot\Big(\mathsf{E}_{\mathcal{F}}\left(f\big(\bar{Q}_T(h_0,h_0),\dots,\bar{Q}_T(h_0,h_n)\big)|A_i(n)\right)-\mathsf{E}_{\mathcal{F}}\left(f\big(\bar{Q}_T(h_0,h_0),\dots,\bar{Q}_T(h_0,h_n)\big)\right)\Big).$$

Поскольку функция $\overline{B}$ монотонно убывает, то

$$\overline{B}(h_n - \theta_i) - \overline{B}(h_{n+1} - \theta_i) \geq 0, \ i : \theta_i \leq h_n.$$

Это означает, что для доказательства леммы остается показать, что

$$\mathsf{E}_{\mathcal{F}}\big(f\big(\bar{Q}_T(h_0, h_0), \ldots, \bar{Q}_T(h_0, h_n)\big)|A_i(n)\big) - \mathsf{E}_{\mathcal{F}}\big(f\big(\bar{Q}_T(h_0, h_0), \ldots, \bar{Q}_T(h_0, h_n)\big) \geq 0. \tag{3.11}$$

Заметим, что

$$\mathsf{E}_{\mathcal{F}}\big(f\big(\bar{Q}_T(h_0, h_0), \ldots, \bar{Q}_T(h_0, h_n)\big)|A_i(n)\big) = \mathsf{E}_{\mathcal{F}}\big(f\big(\bar{Q}_T^*(h_0, h_0), \ldots, \bar{Q}_T^*(h_0, h_n)\big)\big),$$

где

$$\bar{Q}_T^*(h_0, h_k) = \begin{cases} \bar{Q}_T^*(h_0, h_k) + 1 - \zeta_i^{h_k T} & \text{для } 1 \leq i \leq k, \\ \bar{Q}_T^*(h_0, h_k) & \text{для } k < i \leq n, \end{cases}$$

для $0 \leq k \leq n$.

Поэтому $\bar{Q}_T^*(h_0, h_k) \geq \bar{Q}_T(h_0, h_k)$, $0 \leq k \leq n$. Следовательно из покомпонентного неубывания f получаем неравенство (3.11). □

Сформулируем следствие из результата для условных отрицательных демимартингалов в дискретном времени.

Лемма. *[34, следствие 18](Christofides, Hadjikyriakou, 2013) пусть $\{S_n, n \in N\}$ – условный отрицательный демимартингал относительно $\mathcal{F}$. Тогда для любой измеримой относительно $\mathcal{F}$ случайной величины ε такой, что $\varepsilon > 0$ почти наверное, имеем*

$$\varepsilon\, \mathsf{P}_{\mathcal{F}}\left(\max_{1 \leq k \leq n} S_k \geq \varepsilon\right) \leq \mathsf{E}_{\mathcal{F}} S_n. \tag{3.13}$$

Перенесем этот результат на случай демимартингалов с непрерывным временем. Но перед этим сформулируем следующее определение:

Определение 5. *Говорят, что случайный процесс $\{S_t, t \in [0, T]\}$ – сепарабельный, если найдутся измеримое множество B, $\mathsf{P}(B) = 0$ и счетное* *подмножество $\tau \subset [0,T]$ такие, что для любого замкнутого интервала $A \subset \mathbb{R}$ и любого открытого интервала $(a,b) \subset [0,T]$, множества*

$$\{\omega : S_t(\omega) \in A, t \in (a,b)\} \;\; \text{и} \;\; \{\omega : S_t(\omega) \in A, t \in (a,b) \cap \tau\}$$

отличаются не более чем на подмножестве B.

Сразу отметим, что любой действительно значный процесс S_t, $t \in [0,T] \subset \mathbb{R}$ имеет сепарабельную версию [41, стр. 57](Doob, 1953).

Используя приведенные замечания, получаем:

Теорема 12. *Пусть $\{S_t, t \in [0,T]\}$ сепарабельный условный относительно $\mathcal{F}$ отрицательный демимартингал. Для любой случайной величины $\varepsilon > 0$ п.н. положим,*

$$A_T = \left\{\omega \in \Omega : \sup_{0 \le t \le T} S_t > \varepsilon\right\}.$$

Тогда

$$\varepsilon \, \mathsf{P}_{\mathcal{F}}(A_T) \le \mathsf{E}_{\mathcal{F}}\left(S_T \mathbb{I}\{A_T\}\right). \tag{3.14}$$

Доказательство. Согласно аналогичной теореме для демимартингалов в дискретном времени(см. (3.13)) получаем, что неравенство (3.14) выполнено, если супремум берется по конечному подмножеству параметра, включая 0 и T.

Поскольку

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} D_k\right) = \mathsf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} D_k\right),$$

для любой последовательности $D_k \in \mathcal{A}$, то неравенство (3.14) остается справедливым, когда параметр t в супремуме пробегает счетное подмножество $[0,T]$. Из сепарабельности процесса, множество A_T отличается от соответствующего множества, где параметр принимает значения в интервале $[0,T]$, на множество меры 0. Это доказывает теорему. □

Из (3.14) следует, что

$$\lambda \, \mathsf{P}_{\mathcal{F}}(A_T) \le 2\mathsf{E}_{\mathcal{F}}|S_T|. \tag{3.15}$$

Вернемся к нашей задаче. Пусть

$$\widehat{q}(tT) = \frac{q(tT) - \rho(tT)}{\sqrt{\mathcal{L}(T)T^{1-\beta}}},$$

где $\mathcal{F}$ – σ-алгебра, образованная входящим потоком. Для доказательства плотности $\widehat{q}(tT)$ нужно показать, что для любого $\varepsilon > 0$, выполнено

$$\lim_{\delta\to 0} \limsup_{T\to\infty} \mathsf{P}\left(\sup_{|u-v|\le\delta} |\widehat{q}(tT) - \widehat{q}(sT)| > \varepsilon\right) = 0.$$

Поскольку

$$\mathsf{P}\left(\sup_{|t-s|\le\delta} |\widehat{q}(tT) - \widehat{q}(sT)| > \varepsilon\right) \le \mathsf{P}\left(\sup_{|t-s|\le\delta} |\bar{q}(tT) - \bar{q}(sT)| > \varepsilon/2\sqrt{\mathcal{L}(T)T^{1-\beta}}\right) +$$

$$+ \mathsf{P}\left(\sup_{|t-s|\le\delta} |\mathsf{E}_{\mathcal{F}} q(tT) - \rho(tT) + \rho(sT) - \mathsf{E}_{\mathcal{F}} q(sT)| > \varepsilon/2\sqrt{\mathcal{L}(T)T^{1-\beta}}\right) =$$

$$= \mathsf{P}\left(\sup_{t<s<t+\delta} |\bar{q}(tT) - \bar{q}(sT)| > \varepsilon/2\sqrt{\mathcal{L}(T)T^{1-\beta}}\right) +$$

$$+ \mathsf{P}\left(\sup_{t-\delta<s<t} |\bar{q}(tT) - \bar{q}(sT)| > \varepsilon/2\sqrt{\mathcal{L}(T)T^{1-\beta}}\right) +$$

$$+ \mathsf{P}\left(\sup_{|t-s|\le\delta} |\mathsf{E}_{\mathcal{F}} q(tT) - \rho(tT) + \rho(sT) - \mathsf{E}_{\mathcal{F}} q(sT)| > \varepsilon/2\sqrt{\mathcal{L}(T)T^{1-\beta}}\right) +$$

$$= I^1_{\delta,T} + I^2_{\delta,T} + II_{\delta,T}.$$

Из леммы 20 и (3.15) следует, что

$$I^1_{\delta,T} \le \mathsf{E}\frac{\mathsf{E}_{\mathcal{F}} |\bar{q}(tT + \delta T) - \bar{q}(tT)|}{\sqrt{(\varepsilon/2)^2\mathcal{L}(T)T^{1-\beta}}} = \frac{\mathsf{E}\, |\bar{q}(tT + \delta T) - \bar{q}(tT)|}{\sqrt{(\varepsilon/2)^2\mathcal{L}(T)T^{1-\beta}}} \le$$

$$\le \sqrt{\frac{\mathsf{E}\left(q(tT) - q((t+\delta)T)\right)^2}{(\varepsilon/2)^2\mathcal{L}(T)T^{1-\beta}}} = \sqrt{\lambda\frac{\rho(tT) - \rho(T(t+\delta)) + 2\rho(T\delta)}{(\varepsilon/2)^2\mathcal{L}(T)T^{1-\beta}}}.$$

Используя лемму 3.5, имеем

$$0 \le \lim_{T\to\infty} I^1_{\delta,T} \le C(t^{1-\Delta} - (t+\delta)^{1-\Delta} + 2\delta^{1-\Delta}),$$

а поэтому

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{T\to\infty} I^1_{\delta,T} = 0.$$

Аналогичным образом получается оценка $I^2_{\delta,T}$. Сходимости для слагаемого $II_{\delta,T}$ в общем случае, пока не ясно как получить. Но если предположить, что интенсивность входящего потока постоянна, т.е. $\lambda(t)=\lambda$, тогда интервалы между поступлением требований становятся н.о.р.с.в. и сходимость

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{T\to\infty} II_{\delta,T}=0$$

сразу следует из леммы 2.5, в предположении, что $\xi_i=1,\ i\geq 1$.

Таким образом, для процесса $q(t)$ в бесконечноканальной системе с пуассоновским входящим потоком постоянной интенсивности удалось доказать функциональную предельную теорему. Сформулируем ее.

Теорема 13. *Пусть выполнено условие 2, а также интенсивность входящего потока λ постоянна. Тогда последовательность процессов*

$$\frac{q(tT)-\rho(tT)}{\sqrt{\mathcal{L}(T)T^{1-\beta}}},\ t\in(0,h)$$

C-сходится при $T\to\infty$ к гауссовскому процессу с нулевым средним и ковариационной функцией

$$R(t,t+u)=\frac{\lambda}{1-\Delta}((t+u)^{1-\Delta}-u^{1-\Delta}),\ t\geq 0, u\geq 0.$$

Заключение

В диссертации найдены условия для сходимости нормированного и центрированного процесса равного числу требований в системе в фиксированный момент времени t, при $t \to \infty$. Рассмотрены случай различных входящих потоков. Это дважды стохастический пуассоновский и регенерирующий потоки. Основные результаты работы заключаются в следующем.

1. Доказательство предельных теорем для процесса $q(t)$ равного числу требований в системе в момент времени t, в бесконечноканальных системах с дважды стохастическим пуассоновским входящим потоком, при $t \to \infty$.
2. Доказательство предельных теорем для процесса $q(t)$ равного числу требований в системе в момент времени t, в бесконечноканальных системах с регенерирующим входящим потоком, при $t \to \infty$.
3. Нахождение условий функциональной сходимости процессов $q(tT)$ к гауссовскому процессу при $T \to \infty$, $t \in (0, h)$, $h > 0$.

Кратко приведем результаты каждой из глав.

В первой главе была рассмотрена бесконечноканальная система обслуживания с дважды стохастический пуассоновским входящим потоком и бесконечным средним времени обслуживания требования. Для процесса $q(t)$ были доказаны аналоги закона больших чисел и центральной предельной теоремы. В качестве следствий были рассмотрены системы с регенерирующим входящим ДСП потоком, а также системы с входящим ДСП потоком, управляемым полумарковским марковски модулированным процессом. Известно, что если входящий поток – пуассоновский с интенсивностью λ, то процесс $\frac{q(t)-\lambda\beta(t)}{\sqrt{\lambda\beta(t)}}$ имеет предельное стандартное нормальное распределение, при условии, что

$$\beta(t) = \int_0^t \overline{B}(y)dy \to \infty, \ t \to \infty.$$

Таким образом, результаты главы 1 обобщают этот факт, на случай дважды стохастического пуассоновского входящего потока со стационарной интенсивностью, которая имеет корреляционную функцию достаточно быстро сходящуюся к нулю.

Во второй главе рассмотрена бесконечноканальная система массового обслуживания с регенерирующим входящим потоком. Для процесса $q(t)$ доказаны аналоги закона больших чисел и центральной предельной теоремы. Заметим, что в первой главе была рассмотрена система с регенерирующим дважды стохастическим пуассоновским входящим потоком и показано, что предельные теоремы для $q(t)$ имеют место при некотором более слабом условии на ковариацию интенсивности входящего ДСП потока, чем то, что получено в этой главе(в случае ДСП въодящего потока может требоваться менее одного момента у периодов регенерации). Но это и понятно, ведь дважды стохастический пуассоновский поток имеет более определенный вид, чем регенерирующий и поэтому проще для анализа.

В третьей главе была рассмотрена бесконечноканальная система обслуживания с пуассоновским входящим потоком, с интенсивностью зависящей от времени, и временами обслуживания хвост распределения которых является регулярно меняющейся функцией. Как и в первых двух главах изучается асимптотическое поведение процесса $q(t)$ – число требований в системе в момент времени t. В первой части этой главы показана сходимость конечномерных распределений нормированного и центрированного процесса $q(t)$ к гауссовскому процессу, явно выписана ковариационная функция этого процесса. Во второй части этой главы делается попытка проверить условие плотности для нормированного и центрированного $q(t)$. Для этого доказывается, что $q(t)$ является отрицательным условным демимартингалом в непрерывном времени. Благодаря этому можно использовать максимальные неравенства, известные для демимартингалов. Однако, при проверке плотности возникают некоторые сложности в оценках и до конца довести проверку этого условия, удается лишь в случае постоянной интенсивности.

Что касается развития и обобщения, полученных результатов, стоит сказать о функциональных предельных теоремах для систем с дважды стохастическим и регенерирующим входящими потоками. Доказательства таких теорем состоят из двух частей. Первая – доказательство сходимости конечномерных распределений, является обобщением сходимости одномерных распределений, которая и была доказана в диссертации. Вторая часть – проверка условия плотности распределений процесса. Его доказательство достаточно просто будет получаться, если использовать наблюдения о том, что исследуемый процесс обладает свойствами отрицательного демимартингала.

Литература

1. Афанасьева Л.Г., Булинская Е. В. *Случайные процессы в теории массового обслуживания и управления запасами.*-М.: Изд-во МГУ,113 с.(1980)
2. Афанасьева Л.Г., Руденко И.В., *Системы обслуживания $GI|G|\infty$ и их приложения к анализу транспортных моделей.* Теория вероятностей и ее применения 57, № 3: pp427–52. (2012)
3. Афанасьева Л.Г., Биленко А.П. *Характеристика суммарного потока импульсов.* Вопросы радиоэлектроники в.4. (1972)
4. Боровков А.А. *Вероятностные процессы в теории массового обслуживания.*-М.: Наука,375 с.(1972)
5. Боровков А.А.*Асимптотические методы в теории массового обслуживания* - М.Наука,388 с.(1980)
6. Боровков А. А. Теория вероятностей. – 1986.
7. Боровков А.А., Боровков К.А.*Вероятности больших уклонений для обобщенных процессов восстановления с правильно меняющимися распределениями скачков.* Математические труды 2005, том 8, №2, 69-136.
8. Ширяев А., Булинский А. Теория случайных процессов. – Litres, 2016.
9. Королюк В.С., Броди С.М., Турбин А.Ф., *Полумарковские процессы и их применения* Итоги науки и техн. Сер. Теор. вероятн. Мат. стат. Теор. кибернет., том 11, страницы 47-97. (1974)
10. Крамер Г., Лидбеттер М. Стационарные случайные процессы. – 1969.
11. Лебедев А. В. Максимумы в системе $M^X|G|\infty$ с "тяжелыми хвостами" размеров групп //Автоматика и телемеханика. – 2000. – №. 12. – С. 115-121.
12. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа, 2 изд., М., 1965.

13. Севастьянов Б. А., "Ветвящиеся процессы." – Москва: Наука(1971).
14. Сенета Е., Шиганов И. С. Правильно меняющиеся функции/ Пер. с англ. –М: Наука, 1985.
15. Чернавская Е. А. Предельные теоремы для системы обслуживания с бесконечным числом приборов и групповым поступлением требований //Вестник МГУ. – 2016. – №. 6.
16. Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Том 1., Том 2.– М.:Мир, 511 с.(1984).
17. Яровая Е. Б. Модели ветвящихся блужданий и их применение в теории надежности //Автоматика и телемеханика. – 2010. – №. 7. – С. 29-46.
18. Anderson D. et al. A functional central limit theorem for a Markov-modulated infinite-server queue //Methodology and Computing in Applied Probability. – 2016. – Т. 18. – №. 1. – С. 153-168.
19. Angrishi K., Killat U. Using demisubmartingales for the stochastic analysis of networks //AEU-International Journal of Electronics and Communications. – 2015. – Т. 69. – №. 4. – С. 693-698.
20. Afanasyeva L. G., Bashtova E. E., Bulinskaya E.V. *Limit Theorems for Semi-Markov Queues and Their Applications.* Communications in Statistics - Simulation and Computation. 41:1-22. (2012)
21. Afanasyeva L. G., Bashtova E. E., *Coupling method for asymptotic analysis of queues with regenerative input and unreliable server.* Queueing Systems. vol. 76, Issue 2, pp125-147. (2014)
22. Arazi A., Ben-Jacob E., Yechiali U. Bridging genetic networks and queueing theory //Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. – 2004. – Т. 332. – С. 585-616.
23. S. Asmussen, " Applied Probability and Queues", Wiley, Chichester (1987).
24. Asmussen S. Semi-Markov queues with heavy tails //Semi-Markov Models and Applications. – Springer US, 1999. – С. 269-284.

25. Asmussen S. et al. Rare events simulation for heavy-tailed distributions //Bernoulli. – 2000. – T. 6. – №. 2. – C. 303-322.
26. Bartlett, M.S.(1949) Some evolutionary stochastic processes. *J.Roy.Statist.Soc. Ser. B* 11 211-229.
27. Billingsley P. Convergence of probability measures. – John Wiley Sons, 2013.
28. Blom J. et al. Markov-modulated infinite-server queues with general service times //Queueing Systems. – 2014. – T. 76. – №. 4. – C. 403-424.
29. Borovkov A. A. Stochastic processes in queueing theory. –N. Y.: Springer-Verlag, 1976.
30. Borovkov A. A., Borovkov K. A. Asymptotic analysis of random walks: Heavy-tailed distributions. – Cambridge University Press, 2008. – №. 118.
31. Chernavskaya E. A. (2015) Limit theorems for $M(t)/G/\infty$ queuing system with a heavy tailed distribution of service times. ASMDA 2015 Proceedings: 16th Applied Stochastic Models and Data Analysis International Conference with 4th Demographics 2015 Workshop / [ed] Christos H. Skiadas, ISAST: International Society for the Advancement of Science and Technology , 2015, 37-52 p.Conference paper (Refereed)
32. Chernavskaya E. A. Limit theorems for an infinite-server queuing system //Mathematical Notes. – 2015. – T. 98. – №. 3-4. – C. 653-666.
33. Chernavskaya E. A. Limit Theorems for Queuing Systems with Regenerative Doubly Stochastic Input Flow //Journal of Mathematical Sciences. – 2016. – T. 214. – №. 1. – C. 34-43.
34. Christofides T. C., Hadjikyriakou M. Conditional demimartingales and related results //Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2013. – T. 398. – №. 1. – C. 380-391.
35. Cong T. D. On the $M^X/G/\infty$ Queue with Heterogeneous Customers in a Batch //Journal of applied probability. – 1994. – C. 280-286.
36. Cox, David Roxbee, et al. Renewal theory. Vol. 4. London: Methuen, 1962.

37. Crovella M. E., Taqqu M. S., Bestavros A. Heavy-tailed probability distributions in the World Wide Web //A practical guide to heavy tails. – 1998. – T. 1. – C. 3-26.
38. Daley D. J. Queueing output processes //Adv. Appl. Prob. 1976. **8**, N 2, 395-415.
39. D'Auria, Bernardo, " Stochastic decomposition of the queue in a random environment",in: *Operations Research Letters* 35, № 6: 805–12(2007).
40. Dohi T., Matsuoka T., Osaki S. An infinite server queuing model for assessment of the software reliability //Electronics and Communications in Japan (Part III: Fundamental Electronic Science). – 2002. – T. 85. – №. 3. – C. 43-51.
41. Doob J. L:(1953): Stochastic Processes //New York: Wilcy. – 1953.
42. Downton F. Congestion systems with incomplete service //J. Roy. Statist. Soc. Ser. B (Methodological). 1962. Vol. 24, N 1, 107–111.
43. Durrett, Richard T., and Sidney I. Resnick. "Weak convergence with random indices."Stochastic Processes and their Applications 5.3 (1977): 213-220.
44. Eick S. G., Massey W. A., Whitt W. The physics of the $Mt/G/\infty$ queue //Operations Research. – 1993. – T. 41. – №. 4. – C. 731-742.
45. Ferreira M. A. M. Modelling and differential costs evaluation of a two echelons repair system through infinite servers nodes queuing networks //Applied Mathematical Sciences. – 2013. – T. 7. – №. 112. – C. 5567-5576.
46. Grandell J. (1976). Doubly stochastic Poisson process. *Lecture Notes in Mathematics, 529:1-276.*
47. Glynn P. W., Whitt W. A new view of the heavy-traffic limit theorem for infinite-server queues //Advances in Applied Probability. – 1991. – C. 188-209.

48. Guerin C. A. et al. Empirical testing of the infinite source Poisson data traffic model //Stochastic Models. – 2003. – Т. 19. – №. 2. – С. 151-200.

49. Gullu R. Analysis of an $M/G/\infty$ queue with batch arrivals and batch-dedicated servers //Operations Research Letters. – 2004. – Т. 32. – №. 5. – С. 431-438.

50. Hall P. Heavy traffic approximations for busy period in an $M/G/\infty$ queue //Stochastic Processes and their Applications. – 1985. – Т. 19. – №. 2. – С. 259-269.

51. Huang W. C., Huang C. Y., Sue C. C. Software reliability prediction and assessment using both finite and infinite server queueing approaches //2006 12th Pacific Rim International Symposium on Dependable Computing (PRDC'06). – IEEE, 2006. – С. 194-201.

52. Igloi E. A dilative stable type functional limit theorem for Cox processes //Unpublished Manuscript. – 2005.

53. Jayawardene A. K., Kella O. $M/G/\infty$ with alternating renewal breakdowns //Queueing Systems. – 1996. – Т. 22. – №. 1-2. – С. 79-95.

54. K. Weining, K. Ramanan. " Asymptotic Approximations for Stationary Distributions of Many-Server Queues with Abandonment",in: *The Annals of Applied Probability* 22, № 2:477–521(2012).

55. Kaplan N. Limit theorems for a $GI/G/\infty$ queue.*The Annals of Probability 1975, Vol.3,No.5, 780-789*

56. Keilson J., Seidmann A. $M/G/\infty$ with batch arrivals //Operations research letters. – 1988. – Т. 7. – №. 5. – С. 219-222.

57. Keilson J., Servi L. D. Networks of Non-Homogeneous $M/G/\infty$ //Journal of Applied Probability. – 1994. – С. 157-168.

58. Kulkarni V. G., Marron J. S., Smith F. D. A cascaded on-off model for tcp connection traces //Dept. of Statistics, University of North Carolina, Chapel Hill, North Carolina. – 2001.

59. Loeve M. Probability theory. – 1977.

60. L. Lipsky, D. Derek, G. Swapna, “ New frontiers in applied probability”,(2011).
61. Liu L., Kashyap B. R. K., Templeton J. G. C. On the $GI^X/G/\infty$ system //Journal of Applied Probability. – 1990. – С. 671-683.
62. Liu L., Templeton J. G. C. The $Gr_n^X/G_n/\infty$ system: System size //Queueing Systems. – 1991. – Т. 8. – №. 1. – С. 323-356.
63. Liu L., Shi D. H. Busy period in $GI^X/G/\infty$ //Journal of Applied Probability. – 1996. – С. 815-829.
64. Massey, A. William , W. Whitt. “ Networks of Infinite-Server Queues with Non-stationary Poisson Input”, in: *Queueing Systems* 13, № 1–3: 183–250(1993).
65. Maurer A. et al. A bound on the deviation probability for sums of non-negative random variables //J. Inequalities in Pure and Applied Mathematics. – 2003. – Т. 4. – No. 1. – С. 15.
66. Masuyama H., Takine T. Analysis of an infinite-server queue with batch Markovian arrival streams //Queueing Systems. – 2002. – Т. 42. – №. 3. – С. 269-296.
67. Mirasol N. M. Letter to the editor-the output of an $M/G/\infty$ queuing system is Poisson //Oper. Res. 1963. **11**, N 2, 282-284.
68. Pang G., Whitt W. Two-parameter heavy-traffic limits for infinite-server queues //Queueing Systems. – 2010. – Т. 65. – №. 4. – С. 325-364.
69. Pang G., Mandjes M. A Functional central limit theorem for markov additive arrival processes and its applications to queuing systems. – 2015.
70. M. Ya. Postan, *Flow of Serviced Requests in Infinite-Channel Queueing Systems in a Transient Mode*, Probl. Peredachi Inf., 13:4, 89–95, 1977.
71. Preater J. On the severity of $M/M/\infty$ congested episodes //Journal of applied probability. – 2002. – С. 228-230.
72. Purdue P., Linton D. An infinite-server queue subject to an extraneous phase process and related models //Journal of Applied Probability. – 1981.

– С. 236-244.

73. Ramalhoto M. F. Bounds for the variance of the busy period of the $M/G/\infty$ queue //Advances in applied probability. – 1984. – С. 929-932.
74. Rao B. L. S. P. Associated sequences, demimartingales and nonparametric inference. – Springer Science Business Media, 2012.
75. Resnick S., Samorodnitsky G. Limits of on/off hierarchical product models for data transmission //Annals of Applied Probability. – 2003. – С. 1355-1398.
76. Riordan J. Telephone traffic time averages //Bell Labs Technic. J. 1951. **30**, N 4, 1129-1144.
77. Roijers F., Mandjes M., van den Berg H. Analysis of congestion periods of an $M/M/\infty$-queue //Performance Evaluation. – 2007. – Т. 64. – №. 7. – С. 737-754.
78. Schwabe A., Rybakova K. N., Bruggeman F. J. Transcription stochasticity of complex gene regulation models //Biophysical journal. – 2012. – Т. 103. – №. 6. – С. 1152-1161.
79. Steinebach J. Almost sure convergence of delayed renewal processes //Journal of the London Mathematical Society. – 1987. – Т. 2. – №. 3. – С. 569-576.
80. Strasser H. Martingale difference arrays and stochastic integrals //Probability Theory and Related Fields. – 1986. – Т. 72. – №. 1. – С. 83-98.
81. Sumita U., Masuda Y. Tandem queues with bulk arrivals, infinitely many servers and correlated service times //Journal of Applied Probability. – 1997. – С. 248-257.
82. Takacs L. An introduction to queueing theory. N. Y.: Oxford University Press, 1962.
83. Takacs L. Queues with infinitely many servers //Revue française d'automatique, d'informatique et de recherche opérationnelle. Recherche

opérationnelle. – 1980. – T. 14. – №. 2. – C. 109-113.

84. H. Thorisson, "The coupling of regenerative processes",in: *Adv. Appl. Probability*, 15, 531–561 (1983).

85. Tsybakov B. Busy periods in $M/M/\infty$ systems with heterogeneous servers //Queueing Systems. – 2006. – T. 52. – №. 2. – C. 153-156.

86. Ushakumari P. V., Krishnamoorthy A. On a bulk arrival bulk service infinite service queue //Stochastic analysis and applications. – 1998. – T. 16. – №. 3. – C. 585-595.

87. A.D. Ventcel, *Course of the Theory of the Stochastic Processes.* Nauka, Moscow, 1975.

88. White J. A., Schmidt J.W., Bennet G.K. Analysis of queueing systems. – N. Y.: Academic Press, 1975.

89. Whitt W. On the heavy-traffic limit theorem for $GI/G/\infty$ queues //Advances in Applied Probability. – 1982. – C. 171-190.

90. Whitt W. Stochastic-process limits: an introduction to stochastic-process limits and their application to queues. – Springer Science Business Media, 2002.

91. Yamada K. A heavy traffic limit theorem for $G/M/\infty$ queueing networks //Probability Theory and Mathematical Statistics. – Springer Berlin Heidelberg, 1988. – C. 549-564.