

Устойчивость фрактальных свойств квазипериодических многослойных структур

М. Г. Давыдова^{1,a}, П. В. Короленко^{1,2,b}, Ю. В. Рыжикова^{1,c}

¹Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, кафедра оптики, спектроскопии и физики наносистем. Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2.

²Физический институт имени П. Н. Лебедева Российской академии наук. Россия, 119991, Москва, Ленинский проспект, д. 53.

E-mail: ^a m_davydova@inbox.ru, ^b pokorolenko@rambler.ru, ^c ryzhikovaju@physics.msu.ru

Статья поступила 04.03.2016, подписана в печать 16.03.2016.

Выполнен анализ устойчивости фрактальных признаков в оптических спектрах квазипериодических многослойных систем при внесении в их структуру детерминированных изменений. Показано, что на скейлинг в характеристиках многослойных систем существенное влияние оказывает трансформация суммационного принципа их построения, переход к модели аппроксимантов и изготовление слоев на основе метаматериалов.

Ключевые слова: квазипериодические многослойные структуры, фрактальные паттерны, скейлинг, аппроксиманты, метаматериалы.

УДК: 535.015. PACS: 68.65.Ac; 42.25.Nz.

Введение

Существует обширная литература (например, [1–3]), посвященная изучению свойств и возможностей практического использования разнообразных структур с фрактальными признаками. В частности, квазипериодические многослойные структуры (КМС) нашли применение при создании широкополосных отражателей [4], оптических переключателей [5], элементов рентгеновской оптики [6] и других устройств. Поскольку свойственная многим из них фрактальность в значительной степени определяет их оптические свойства, существует необходимость в определении степени влияния различных факторов на самоподобие их характеристик. Цель настоящей работы состоит в оценке влияния детерминированного изменения структуры КМС на стабильность фрактальных паттернов их оптических спектров. Предполагается, что такие изменения могут быть внесены в многослойную структуру путем трансформации суммационного принципа их построения [7], переходом к модели аппроксимантов [8, 9] и изготовлением ряда слоев на основе широко применяющихся метаматериалов [10–12].

Использование аппроксимантов позволяет технически упростить процедуру получения структур с заданным набором оптических свойств. Предварительные исследования [8, 9] указывают на перспективность применения аппроксимантов, занимающих промежуточное положение между аperiodическими и периодическими системами, при совершенствовании и разработке новых средств оптической диагностики.

С использованием указанных приемов внесения детерминированных изменений в исследуемые структуры появляется возможность оказывать целе-

направленное воздействие на характеристики КМС. Так, во многих работах, выполненных ранее по близкой тематике, в качестве КМС использовались системы, построенные на базе числовой последовательности Фибоначчи, являющейся частным случаем более общей последовательности Штурма [13]. В настоящей работе для удобства сравнения результатов разных авторов применялись так называемые системы m -боначчи с различными значениями структурного параметра m [14, 15]. Эти системы являются родственными по отношению к системе Фибоначчи и отличаются от нее иным представлением, лежащим в их основе суммационного принципа. При $m = 2$ системы m -боначчи и Фибоначчи совпадают. Рассмотрим свойства системы m -боначчи подробнее.

1. Построение структур m -боначчи

Многослойные системы m -боначчи представлялись в виде структурных блоков $S_l = \{A, B\}$, где l — уровень генерации, A и B — составляющие элементы, чередующиеся по определенному закону и соответствующие различным показателям преломления n_A и n_B . При этом изначально задавались m первых структурных блоков [14, 15]. Так, например, $m = 2$ соответствует заданию двух начальных блоков: $S_0 = B$, $S_1 = A$. При переходе к более высокому уровню генерации $l > 1$ использовались следующие правила замещения: $A \rightarrow AB$, $B \rightarrow A$. Такая форма построения системы эквивалентна такой процедуре: $S_{l+1} = \{S_l S_{l-1}\}$ при $l \geq 1$. Для построения структуры с параметром $m = 3$ задавались три первых блока: $S_0 = B$, $S_1 = A$, $S_2 = AB$. Последующие блоки таких систем формируются объединением элементов трех предшествующих уровней $S_{l+1} = \{S_l S_{l-1} S_{l-2}\}$ при $l \geq 2$. В общем случае, когда $m \geq 3$, с помо-

щью первых структурных блоков $S_0, S_1, S_2, \dots, S_m$ можно сформировать систему m -боначчи, используя следующие правило: $S_{l+1} = \{S_l S_{l-1} \dots S_{l-(m-1)}\}$ при $l \geq m - 1$.

В настоящей работе детерминированные изменения задаваемых структур семейства m -боначчи достигаются, в частности, переходом к моделям их аппроксимантов первого типа [8]. В этом случае аппроксиманты первичной последовательности $A_l = \{S_l\}^p$ представляют собой последовательность элементарных ячеек S_l . В роли таких ячеек могут выступать отдельные уровни генерации l используемой числовой последовательности. Порядок аппроксиманта p определяется числом элементарных ячеек.

Тогда аппроксиманты при $m = 2$ имеют вид

$$\begin{aligned} A_0 &= \left\{ \underbrace{B}_{S_0} \right\}^p, & A_1 &= \left\{ \underbrace{A}_{S_1} \right\}^p, & A_2 &= \left\{ \underbrace{AB}_{S_2} \right\}^p, \\ A_3 &= \left\{ \underbrace{ABA}_{S_3} \right\}^p, & A_4 &= \left\{ \underbrace{ABAAB}_{S_4} \right\}^p, \\ A_5 &= \left\{ \underbrace{ABAABABA}_{S_5} \right\}^p, & \dots, & & A_{l+1} &= \left\{ S_l S_{l-1} \right\}^p. \end{aligned} \quad (1)$$

Аппроксиманты при $m = 3$ подчиняются соотношениям

$$\begin{aligned} A_0 &= \left\{ \underbrace{B}_{S_0} \right\}^p, & A_1 &= \left\{ \underbrace{A}_{S_1} \right\}^p, & A_2 &= \left\{ \underbrace{AB}_{S_2} \right\}^p, \\ A_3 &= \left\{ \underbrace{ABAB}_{S_3} \right\}^p, & A_4 &= \left\{ \underbrace{ABABABA}_{S_4} \right\}^p, \\ A_5 &= \left\{ \underbrace{ABABABAABABAB}_{S_5} \right\}^p, & \dots, & & \\ & & A_{l+1} &= \left\{ S_l S_{l-1} S_{l-2} \right\}^p. \end{aligned} \quad (2)$$

Подобным образом можно сформировать структуры последующих аппроксимантов семейства m -боначчи с $m > 3$. При изменении структурного параметра m достигается трансформация первоначального принципа построения рассматриваемых структур.

2. Оптические свойства структур m -боначчи и их аппроксимантов

При внесении детерминированных изменений в исследуемые структуры, рассматривалась возможность замены части диэлектрических слоев на слои из метаматериалов. Считалось, что слои B выполнены из диэлектрика, а слои A — из материала, который в определенном спектральном интервале имеет отрицательный показатель преломления $n_A = -\sqrt{\varepsilon_A \mu_A}$, где диэлектрическая проницаемость ε_A и магнитная восприимчивость μ_A принимают одновременно отрицательные значения $\varepsilon_A, \mu_A < 0$. Отрицательность показателя преломления приводит к изменению направления фазовой

скорости и вызывает эффект фазовой компенсации, способный изменить структуру оптических спектров КМС [16].

Величины ε_A и μ_A слоев A зададим в дискретном виде, отражающем экспериментальные данные [17, 18]

$$\begin{aligned} \varepsilon_A(f_k) &= 1 + \frac{5^2}{0.9^2 - f_k^2} + \frac{10^2}{11.5^2 - f_k^2}, \\ \mu_A(f_k) &= 1 + \frac{3^2}{0.902^2 - f_k^2}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $f_k = 1.5(1 + 0.0033k)$ определяет частоту, измеряемую в ГГц, $k = 0, \dots, \tilde{N}_{\max}$, \tilde{N}_{\max} — целое число, ограничивающее частотный интервал.

Фазовые набегии в слоях КМС определяются выражением [10]

$$\Phi_{j,k} = \frac{2\pi f_k N_{j,k} d_j}{c}, \quad (4)$$

где j — номер слоя, c — скорость света, d_j — толщина слоев, $N_{j,k}$ — значение показателя преломления j -го слоя с учетом частоты излучения и выбранного закона чередования слоев A и B :

$$N_{j,k} = \begin{cases} \pm \sqrt{\varepsilon_j(f_k) \mu_j(f_k)} & \text{для слоев } A, \\ n_{j,k} & \text{для слоев } B, \end{cases}$$

знак «минус», стоящий перед корнем в последнем выражении, соответствует случаю, когда величины $\varepsilon_j(f_k)$ и $\mu_j(f_k)$ одновременно принимают отрицательные значения, во всех остальных случаях следует выбирать знак «плюс». Параметры окружающей среды принимались равными $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$. Толщины слоев считались равными $d_A = 1.2$ см и $d_B = 2.4$ см.

Оптические характеристики (спектры пропускания и отражения) исследуемых многослойных систем рассчитывались на основе использования известного матричного метода [19] с учетом выполнения закона Френеля для метаматериалов [10]. Самоподобные свойства оптических характеристик систем m -боначчи анализировались путем сопоставления коэффициентов взаимной корреляции формы регистрируемых самоподобных образований (паттернов [20]) многослойных систем с диэлектрическими слоями и многослойных систем с метаматериалами. При этом для более удобного выявления фрактальных паттернов использовалось приведенное логарифмическое представление спектральных зависимостей, основанное на определении величины $r = -\ln(1 - R)$ [5], где R — коэффициент отражения многослойной структуры, связанный с коэффициентом пропускания T соотношением $R = 1 - T$.

Ранее нами было показано [21], что дисперсионные эффекты, описываемые формулами (3), могут оказывать значительное влияние как на положение, так и на форму фиксируемых фрактальных паттернов в спектрах систем Фибоначчи ($m = 2$). В настоящей работе указанное утверждение было проверено для случая $m > 2$. На рис. 1 приведе-

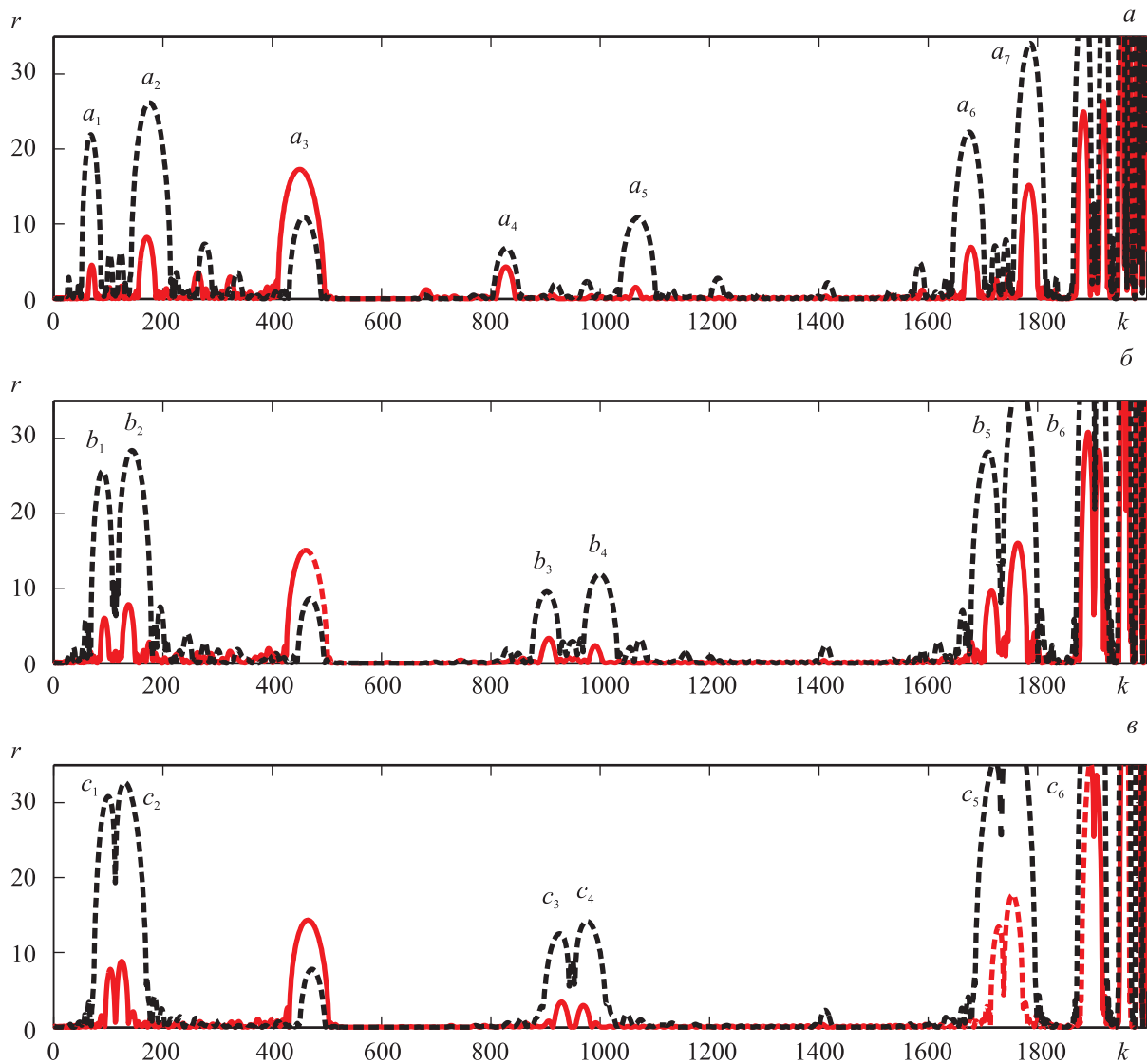


Рис. 1. Трансформация формы паттернов в спектральных характеристиках КМС при $m=2$ (а), 3 (б) и 4 (в) с учетом дисперсионных эффектов. Число слоев $J=64$, a_1a_2 , a_2a_3 , a_4a_5 , a_6a_7 , b_1b_2 , b_3b_4 , b_5b_6 , c_1c_2 , c_3c_4 , c_5c_6 — паттерны. Сплошная линия: $n_B=1.5$, штриховая: $n_B=1$

ны спектральные характеристики систем m -боначки с $m=2, 3, 4$. При проведении расчетов считалось, что дисперсионные эффекты в слоях B являются пренебрежимо слабыми. Буквенными обозначениями a_1a_2 , a_2a_3 , a_4a_5 , a_6a_7 , b_1b_2 , b_3b_4 , b_5b_6 , c_1c_2 , c_3c_4 , c_5c_6 выделены фиксируемые паттерны. Отметим, что сходные по форме паттерны могут фиксироваться и при других значениях $\varepsilon_A(f_k)$ и $\mu_A(f_k)$ в областях, соответствующих как отрицательному, так и положительному значениям показателя преломления. При проведении расчетов показатели преломления слоев B для областей, где показатели преломления слоев A принимают отрицательные или положительные значения, считались равными $n_{jk} = n_B = 1$ (штриховая линия) или $n_{jk} = n_B = 1.5$ (сплошная).

Из приведенных графиков видно, что увеличение m вызывает значительную трансформацию формы паттернов. Для количественной оценки этой трансформации были рассчитаны коэф-

фициенты взаимной корреляции между фиксируемыми паттернами a_1a_2 и b_1b_2 , a_6a_7 и b_5b_6 , b_1b_2 и c_1c_2 , b_5b_6 и c_5c_6 в рассматриваемых спектральных характеристиках, сформированных для $m=2, 3$ (рис. 1, а, б) и $m=3, 4$ (рис. 1, б, в), которые принимают значения $K=0.6-0.8$. В переходной области, разделяющей спектральные диапазоны, где показатель преломления слоев A принимает отрицательные и положительные значения, паттерным образованиям a_4a_5 и b_3b_4 , b_3b_4 и c_3c_4 соответствуют коэффициенты взаимной корреляции $K=0.4-0.5$. Наибольшее соответствие по форме достигается между парами паттернов a_1a_2 и a_6a_7 , b_1b_2 и b_5b_6 , c_1c_2 и c_5c_6 , c_1c_2 и c_3c_4 , при этом $K=0.8-0.95$. Значительный разброс коэффициентов корреляции обусловлен, по всей вероятности, сложным сочетанием влияний эффектов дисперсии и фазовой компенсации [16].

Для того чтобы разделить оценку влияния указанных эффектов, часть расчетов была выполнена

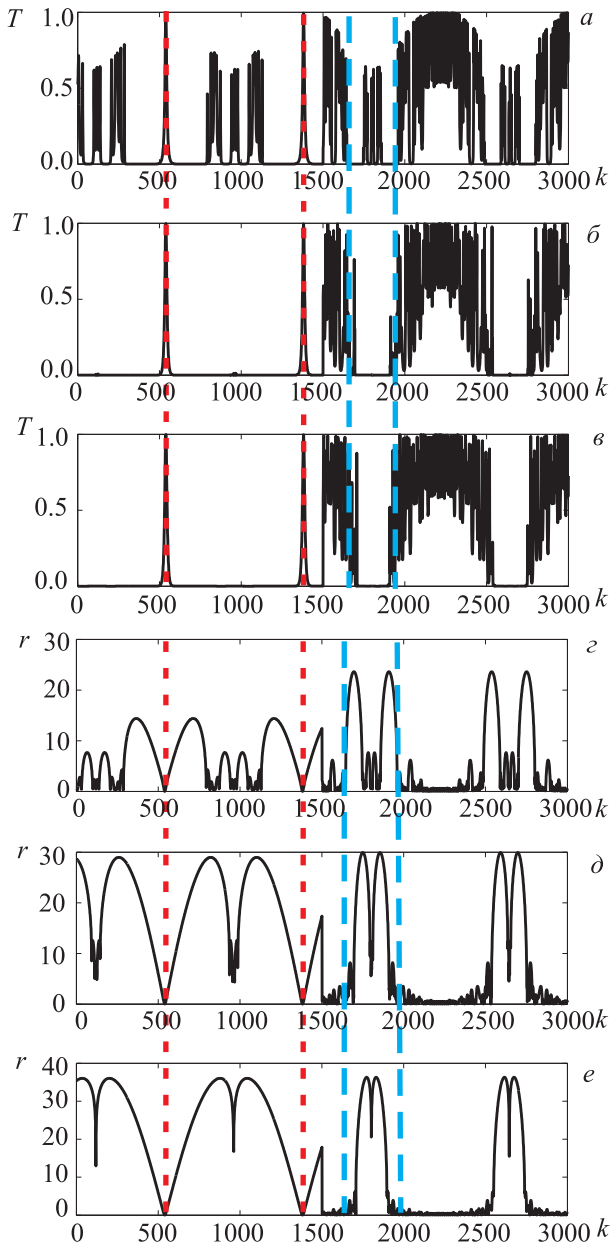


Рис. 2. Спектральные характеристики КМС при $m=2$ (а, з), 3 (б, д), 4 (в, е) (число слоев $J=64$) без учета дисперсии. T — коэффициент пропускания (а–в); r — приведенный коэффициент отражения (з–е). Пунктиром обозначена зона расположения паттерных образований

с использованием упрощенной ступенчатой аппроксимации формулы (3). При этом считалось, что диэлектрическая проницаемость и магнитная восприимчивость слоев A по абсолютной величине равны $|\epsilon_A|=9$, $|\mu_A|=1$ и принимают отрицательные значения в области $k < 1500$. Слои B характеризовались постоянным коэффициентом преломления $n_{j,k} = n_B = 1.5$ во всей области частот. Для указанных параметров на рис. 2 представлены фрагменты спектральных зависимостей коэффициентов пропускания T и параметра r систем m -боначчи, соответствующих $m=2, 3, 4$.

Области паттерных образований выделены пунктирными линиями. Из рис. 2 видно, что левая

часть спектральных зависимостей, когда $k \leq 1500$, оказывается крайне чувствительной к проявлению эффекта фазовой компенсации, связанному с наличием слоев из метаматериала. С увеличением m , приводящим к выравниванию количества слоев A и B , из-за фазовой компенсации исчезает часть резонансных пиков и спектр становится близким к спектру периодических систем. Область $k > 1500$ соответствует классическому случаю многослойных структур с диэлектрическими слоями. В этой области анализируемые системы характеризуются наличием специфических паттерных образований, по которым можно произвести идентификацию их структуры. При этом коэффициент взаимной корреляции по форме между паттернами из одного частотного интервала, регистрируемыми в спектральных зависимостях структур семейства m -боначчи с $m=3$ и $m=4$ (рис. 2, д, е), достигает значения $K=0.9$. Для систем с $m \geq 5$ рассчитанные для аналогичных областей коэффициенты K близки к единице.

Дополнительные исследования устойчивости паттерных образований в спектрах пропускания многослойных структур m -боначчи к изменению их геометрической конфигурации, проводились с использованием моделей аппроксимантов первого типа [8, 9]. Рассмотрим особенности этой модели, считая, что $m=2$. Выполненные расчеты указывают на то, что определяющим параметром, влияющим на структуру спектров аппроксимантов, является уровень генерации l . Это иллюстрирует рис. 3, где приведены паттерные образования в оптических характеристиках систем, сформированных с использованием формулы (1). Параметр p выбирался таким образом, чтобы число слоев J в рассматриваемых КМС было примерно одинаковым.

Ход графиков на рис. 3 демонстрирует проявление сходных по своей структуре устойчивых паттернов в области как с положительными, так и с отрицательными коэффициентами преломления для $l > 4$. При этом коэффициенты взаимной корреляции по форме фиксируемых паттерных образований из одного интервала последовательно сформированных аппроксимантов увеличиваются с ростом l от $K=0.65$ до $K=0.97$.

Расчеты, выполненные для систем с $m > 2$, позволяют распространить сделанные выше выводы на аппроксиманты других видов. Это следует из общего подхода геометрического построения таких систем. Таким образом, появляется возможность описания с единых позиций свойств широкого класса систем m -боначчи и их аппроксимантов.

Заключение

Показано, что детерминированные изменения структуры КМС и параметров ее слоев могут существенным образом повлиять на ее фрактальные свойства. Тем самым появляется возможность достаточно простыми средствами оказывать целенаправ-

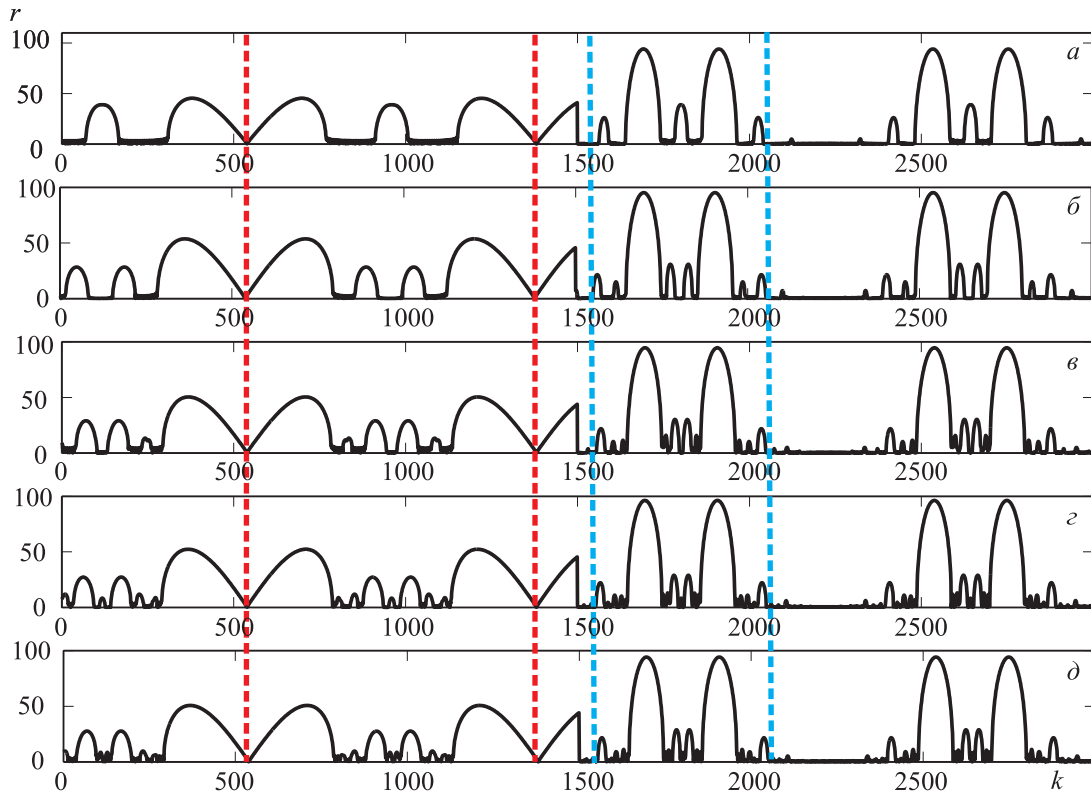


Рис. 3. Графическое сравнение спектров аппроксимантов $A_5 = \{S_5\}^{29}$ ($J=232$) (а), $A_6 = \{S_6\}^{18}$ ($J=234$) (б), $A_7 = \{S_7\}^{11}$ ($J=231$) (в), $A_8 = \{S_8\}^7$ ($J=238$) (г) и системы Фибоначчи ($J=233$) (д). Пунктирными линиями выделены зоны расположения паттерных образований

ленное влияние на характеристики КМС, адаптируя их к решению конкретной задачи.

Так, наличие в многослойных системах слоев из метаматериала может оказывать заметное влияние на проявление самоподобных свойств в оптических характеристиках структур m -боначчи и их аппроксимантов, а в некоторых случаях — под влиянием эффекта фазовой компенсации полностью их подавлять. Этот факт следует учитывать при фиксации фрактальных паттернов в спектральных характеристиках рассматриваемых систем с целью их идентификации и выявления дефектов структуры. В то же время корреляционный анализ указывает на определенную устойчивость формы регистрируемых паттернов в системах m -боначчи и их аппроксимантах.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-32-00386 мол_а.

Список литературы

1. Марголин В.И., Аммон Л.Ю., Бабичев Д.А. и др. // Изв. Акад. инженерных наук им. А.М. Прохорова. 2015. № 1. С. 7.
2. Короленко П.В., Поздеева Е.В., Саенко О.В. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2004. № 5. С. 17.
3. Боголюбов А.Н., Петухов А.А., Шапкина Н.Е. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон. 2011. № 2. С. 20. (Bogolyubov A.N., Petukhov A.A., Shapkina N.E. // Moscow University Phys. Bull. 2011. 66, N 2. P. 122.)
4. Korolenko P.V., Mishin A.Y., Ryzhikova Yu.V. // *Optik — Intern. J. for Light and Electron Optics*. 2013. 124(19). P. 3946.
5. Короленко П.В., Мишин А.Ю., Рыжикова Ю.В. // Оптический журнал. 2012. 79, № 12. С. 11. (Korolenko P.V., Mishin A.Yu., Ryzhikova Yu.V. // *J. of Optical Technology*. 2012. 79, N 12. P. 754.)
6. Пирожков А.С., Рагозин Е.Н. // Успехи физ. наук. 2015. 185, № 11. С. 1203. (Pirozhkov A.S., Ragozin E.N. // *Phys. Usp.* 2015. 58, N 11. P. 1203.)
7. Albuquerque E.L., Cottam M.G. // *Physics Reports*. 2003. 376. P. 225.
8. Korolenko P.V., Logachev P.A., Ryzhikova Yu.V. // *Physics of Wave Phenomena*. 2015. 23, N 1. P. 46.
9. Короленко П.В., Мишин А.Ю., Рыжиков С.Б., Рыжикова Ю.В. // Электромагнитные волны и электронные системы. 2015. 20, № 3. С. 17.
10. Веселаго В.Г. // Успехи физ. наук. 2003. 173, № 3. С. 790. (Veselago V.G. // *Phys. Usp.* 2003. 46. P. 764.)
11. Боголюбов А.Н., Мухартова Ю.В., Гао Ц. // Математическое моделирование. 2013. 25, № 2. С. 65. (Bogolyubov A.N., Mukhartova Yu.V., Gao Ts. // *Mathematical models and computer simulations*. 2013. 5, N 5. P. 416.)
12. Белокопытов Г.В., Журавлев А.В., Терехов Ю.Е. // Вестн. Моск. ун-та. Физ. Астрон.. 2012. № 3. С. 17. (Belokopytov G.V., Zhuravlev A.V., Terekhov Yu.E. // *Moscow University Phys. Bull.* 2012. 67. N 3. P. 255.)
13. Мучник А.А., Притыкин Ю.Л., Семенов А.Л. // Усп. матем. наук. 2009. 64, № 5. С. 21. (Muchnik A.A., Pritykin Y.L., Semenov A.L. // *Russian Mathematical Surveys*. 2009. 64, N 5. P. 805.)
14. Furlan W.D., Ferrando V., Monsoriu Ju.A. // *Proc. of SPIE*. 2015. 9450. P. 945014-1-6.

15. Monsoriu J.A., Depine R.A., Martinez-Ricci S.E. et al. // *Optics Letters*. 2009. **34**, N 20. P. 3172.
16. Maksimovic M., Jaksic Z. // *Acta Phys. Pol. A*. 2007. **112**, N 5. P. 1049.
17. Daninthe H., Foteinopoulou S., Soukoulis C.M. // *Photon. Nanostruct. Fundam. Appl.* 2006. **4**(3). P. 123.
18. Rao V.S.C.M., Gupta S.D. // *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.* 2004. **6**. P. 756.
19. Born M., Wolf E. Principles of optics. N. Y.: Cambridge University Press, 2001.
20. Korolenko P.V., Ryzhikov S.B., Ryzhikova Yu.V. // *Physics of Wave Phenomena*. 2013. **21**, N 4. P. 256.
21. Davydova M.G., Korolenko P.V., Ryzhikov S.B., Ryzhikova Yu.V. // *Physics of Wave Phenomena*. 2016. **24**, N 1. P. 17.

The stability of the fractal properties of quasi-periodic multilayered structures

M. G. Davydova^{1,a}, P. V. Korolenko^{1,2,b}, Yu. V. Ryzhikova^{1,c}

¹Department of Optics, Spectroscopy, and Physics of Nanosystems, Faculty of Physics, Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia.

²Lebedev Physics Institute, Russian Academy of Sciences. Moscow 119991, Russia.

E-mail: ^am_davydova@inbox.ru, ^bpvkorolenko@rambler.ru, ^cryzhikova.ju@physics.msu.ru.

The stability of fractal characteristics has been analyzed in the optical spectra of quasi-periodic multilayered systems with the deterministic changes therein. The transformation of the summation principle of their construction, the transition to the approximant model, and the preparation of metamaterial-based layers have been shown to exert a strong influence on the scaling of the parameters in multilayered systems.

Keywords: quasi-periodic multilayered structures, fractal patterns, scaling, approximants, metamaterials.

PACS: 68.65.Ac; 42.25.Hz.

Received 4 March 2016.

English version: *Moscow University Physics Bulletin*. 2016. **71**, No. 4. Pp. 395–399.

Сведения об авторах

1. Давыдова Мария Геннадьевна — студентка; тел.: (495) 939-57-40, e-mail: m_davydova@inbox.ru.
2. Короленко Павел Васильевич — доктор физ.-мат. наук, профессор; тел.: (495) 939-57-40, e-mail: pvkorolenko@rambler.ru.
3. Рыжикова Юлия Владимировна — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник; тел.: (495) 939-57-40, e-mail: ryzhikova.ju@physics.msu.ru.