МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Захарян Юрий Норикович

Нули функционалов, неподвижные точки и совпадения отображений топологических пространств

Специальность 01.01.04 —
«Геометрия и топология»

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2021

Работа выполнена на кафедре общей топологии и геометрии Механико-математического факультета ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова».

Научные руководители: **Фоменко Татьяна Николаевна,**
доктор физико-математических наук, доцент

Садовничий Юрий Викторович,
доктор физико-математических наук, доцент

Официальные оппоненты: **Геворкян Павел Самвелович,**
доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Московский педагогический государственный университет», заведующий кафедрой математического анализа

Обуховский Валерий Владимирович,
доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВО «Воронежский государственный педагогический университет», заведующий кафедр ой высшей математики

Семенов Павел Владимирович,
доктор физико-математических наук, профессор, факультет математики НИУ «Высшая школа экономики», профессор

Защита диссертации состоится 15 октября 2021 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета МГУ.01.17 Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

E-mail: VGChdissovet@yandex.ru

С диссертацией, а так же со сведениями о регистрации участия в удаленном интерактивном режиме в защите можно ознакомиться на сайте ИАС «ИСТИНА»: https://istina.msu.ru/dissertations/378944245

Автореферат разослан 15 сентября 2021 года.

Заместитель председателя диссертационного
совета МГУ.01.17 ФГБОУ ВО МГУ
доктор физ.-мат. наук, профессор
Иванов Александр Олегович

Общая характеристика работы

Актуальность темы и степень ее разработанности

Диссертация посвящена развитию аппроксимационного метода поиска нулей функционалов и его применению в теории неподвижных точек и совпадений отображений метрических и калибровочных пространств.

Основная задача теории неподвижных точек в общем случае состоит в отыскании условий на множество X и многозначное отображение $T : X \to 2^X$, гарантирующих существование такой точки $\xi \in X$, что $\xi \in T(\xi)$.

Классическим результатом теории неподвижных точек являтся так называемый принцип сжимающих отображений. Он был сформулирован и доказан С. Банахом (S. Banach)[1] в 1922-ом году для случая однозначных отображений полных нормированных пространств и Р. Качиополи (R. Caccioppoli)[2] в 1930-ом году для случая однозначных отображений полных метрических пространств. Также в работе [2] была доказана единственность неподвижной точки. Понятие сжимающего отображения и принцип сжимающих отображений были распространены на многозначный случай С. Б. Надлером (S. B. Nadler) в работах [3–4]. Эти теоремы имеют важные приложения в теории дифференциальных уравнений и включений. Существует множество обобщений теорем Банаха-Качиополи и Надлера. Примером обобщения теоремы Банаха-Качиополи является теорема Т. Замфиреску[5] (T. Zamfirescu), в которой условие сжатия заменено на более слабое условие, которое не требует, вообще говоря, даже непрерывности отображения. Существует также многозначный вариант теоремы Замфиреску, доказанный в 2010-ом году в работе [6].

Обобщением задачи о существовании неподвижной точки является задача существования точки совпадения пары многозначных отображений $T, S : X \to 2^Y$ из множества X в множество Y, то есть такой точки $\xi \in X$, для которой $T(\xi) \cap S(\xi) \neq \varnothing$. Действительно, если $X = Y$, то неподвижная точка $\xi \in X$ отображения T — суть точка совпадения T и тождественного отобра-

[1] Banach S. Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. Fundamenta Mathematicae. 1922. V. 3. N. 1. pp. 133–181.

[2] Caccioppoli R. Una teorema generale sull'esistenza di elementi uniti in una trasformazione funzionale // Della Accademia Nazionale Dei Lincei Rendiconti. Serie 6. 1932. V. 11. pp. 794–799.

[3] Nadler S. B. Multi-valued contraction mappings // Notices of the American Mathematical Society. 1967. V. 14. p. 930.

[4] Nadler S. B. Multi-valued contraction mappings // Pacific Journal of Mathematics. 1969. V. 30. pp. 475–488.

[5] Zamfirescu T. Fix point theorems in metric spaces // Archiv der Mathematik. 1972. V. 23. pp. 292–298.

[6] Neammanee K., Kaevkhao A. Fixed point theorems of multi-valued Zamfirescu mappings // Journal of Mathematics Research. 2010. V. 2. N. 2. pp. 150–156.

жения на X.

В диссертации рассматривается задача существования точки совпадения для так называемой пары типа Замфиреску многозначных отображений.

Кроме теорем о существовании неподвижной точки (точки совпадения) значительный интерес представляют методы и алгоритмы приближения к множеству неподвижных точек (точек совпадения). Так, для сжимающих многозначных отображений для любой точки $x_0 \in X$ можно построить последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in T(x_{n-1})$, $n \in \mathbb{N}$, которая сходится к неподвижной точке. В работах Т. Н. Фоменко[6–7] предложены алгоритмы приближений к: полному прообразу замкнутого подпространства Y_0 при отображении из метрического пространства X в метрическое пространство Y; множеству точек совпадения конечного набора отображений из X в Y; множеству общих неподвижных точек конечного набора отображений X в себя. В частности, в работах [6–7] были обобщены теоремы 1,2 работы А. В. Арутюнова[8]. Позднее, Т.Н. Фоменко в работе[9] предложила решение более общей задачи. Было введено понятие (α, β)-поискового функционала и был представлен алгоритм приближения к множеству нулей такого функционала. Позднее в работе [10] были предложены локальный и глобальный версии принципа поиска нулей функционалов. Принцип поиска нашел применение в теории неподвижных точек и совпадений. К примеру, для отображения T метрического пространства X в себя строится некоторый функционал, существования нуля которого гарантирует существование неподвижной точки отображения T. Важно, что условия на функционал, достаточные для существования нуля, не требуют непрерывности отображения T и даже полноты пространства X.

В диссертации показано, что результат о совпадении для пары типа Замфиреску многозначных отображений может быть получен из принципа поиска нулей функционалов.

Особый интерес представляет более общая задача о сохранении суще-

[6]Фоменко Т. Н. О приближении к точкам совпадения и общим неподвижным точкам набора отображений метрических пространств // Математические заметки. 2009. Т. 86. № 1. с. 110–125.

[7]Фоменко Т. Н. К задаче каскадного поиска множества совпадений набора многозначных отображений // Математические заметки. 2009. Т. 86. № 2. с. 304–309.

[8]Арутюнов А. В. Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Доклады академии наук. 2007. Т. 416. № 2. с. 151–155.

[9]Fomenko T. N. Cascade search principle and its applications to the coincidence problem of n one-valued or multi-valued mappings // Topology and its Applications. 2010. V. 157. N. 4. pp. 760–773.

[10]Фоменко Т. Н. Каскадный поиск прообразов и совпадений: глобальная и локальная версии // Математические заметки. 2013. Т. 93. № 1. с. 127–143.

ствования неподвижной точки при изменении параметра у параметрического семейства отображений. В однозначном случае данный вопрос изучался рядом авторов [11–15]. В данных работах, как правило, речь идет о гомотопиях. В многозначном случае данный вопрос был изучен в работе [16] А. Гранасом (A. Granas) и М. Фригон (M. Frigon). Авторы ввели понятие λ-сжимающего семейства $\{T_t\}_{t\in[0;1]}$ и показали, что при определенных условиях существование неподвижной точки отображения T_0 гарантирует существование неподвижной точки отображения T_1. Областью применения данных результатов являются задачи о продолжении решений дифференциальных уравнений и включений.

В диссертации также рассматривается задача о сохранении существования нулей у семейства многозначных поисковых функционалов при изменении числового параметра и соответствующие приложения к теории неподвижных точек и совпадений. В частности, рассматривается задача о сохранении существования точки совпадения для параметрического семейства пар типа Замфиреску многозначных отображений. Значительным отличием результатов, например, от теоремы Гранаса-Фригон является то, что рассматриваемые семейства многозначных отображений не обязаны быть гомотопиями. Более того, непрерывность, вообще говоря, не требуется ни по параметру, ни по аргументу.

Естественным обобщением метрического пространства является калибровочное пространство, топология которого задается разделяющим семейством псевдометрик. Ряд метрических результатов о неподвижных точках имеют аналоги в случае калибровочных пространств. Так, теорема Банаха-

[11] Chiş A., Precup R. Continuation theory for general contractions in gauge space // Fixed Point Theory and Applications. 2004. N. 4. pp. 173–185.

[12] Frigon M., Granas A., Guennoun Z. E. A. Alternative non linéare pour les applications contractantes // Annales mathématiques du Québec. 1995. V. 19. N. 1. pp. 65–68.

[13] Granas A. Continuation methods for contractive maps // Topological Methods in Nonlinear Analysis. 1994. V. 3. pp. 375–379.

[14] Nussbaum R. The fixed point index and asymptotic fixed point theorems for k-set contractions. Ph. D. Thesis. University of Chicago. 1969.

[15] Precup R. Discrete continuation method for boundary value problems on bounded sets in Banach spaces // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2000. V. 113. N. 1–2 pp. 267–281.

[16] Frigon M., Granas A. Résultats du type de Leray-Schauder pour des contractions multivoques // Topological Methods in Nonlinear Analysis. 1994. V. 4. pp. 197–208.

Качиополи обобщена в работах [17–19]; теоремы Надлера и Гранаса-Фригон были обобщены в работе [20]. Эти результаты применимы для проблем существования и продолжения решений бесконечных систем дифференциальных уравнений и включений. В диссертации рассматривается распространение принципа поиска нулей функционалов на случай калибровочных пространств. Данная часть диссертации на защиту не выносится.

Цели и задачи диссертации

Основной целью диссертации является решение следующих задач.

1. Изучить задачу о совпадении пары многозначных отображений, обобщающую многозначный вариант теоремы Замфиреску.

2. Исследовать связь задачи о совпадении для пары типа Замфиреску многозначных отображений с принципом поиска нулей функционалов.

3. Ввести обобщение понятия многозначного (α, β)-поискового функционала на случай, когда областью определения является не все пространство, а некоторое его подмножество.

4. Получить результат о существовании нуля для многозначного (α, β)-поискового на подмножестве функционала.

5. Исследовать вопрос о сохранении существования нулей при изменении параметра у параметрического семейства многозначных поисковых функционалов.

6. Применить полученные результаты к метрическим задачам для многозначных отображений о сохранении существования прообразов замкнутого подпространства, точек совпадения конечного набора отображений, общих неподвижных точек набора отображений, точек совпадения для семейства пар типа Замфиреску многозначных отображений.

---

[17] Knill R. J. Fixed points of uniform contractions // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1965. V. 12. pp. 449–455.

[18] Cain G. L. Jr., Nashed M. Z. Fixed points and stability for a sum of two operators in locally convex spaces // Pacific Journal of Mathematics. 1971. V. 39. N. 3. pp. 581–592.

[19] Tarafdar E. An approach to fixed-point theorems on uniform spaces // Transactions of the American Mathematical Society. 1974. V. 191. pp. 209–225.

[20] Frigon M. Fixed point results for multivalued contractions on gauge spaces // Set Valued Mappings with Applications in Nonlinear Analysis. Series in mathematical analysis and applications. London: Taylor and Francis. 2002. V. 4. pp. 175–181.

Дополнительной задачей диссертации является исследование возможности распространения результатов, связанных с принципом поиска нулей функционалов, на случай калибровочных пространств.

Объект и предмет исследования

Диссертация посвящена развитию аппроксимационного метода поиска нулей функционалов и его применению в теории неподвижных точек и совпадений отображений метрических и калибровочных пространств.

Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми. Основные результаты состоят в следующем.

1. Введено понятие пары типа Замфиреску многозначных отображений. Получена теорема о существовании точки совпадения для пары типа Замфиреску. Показано, что полученная теорема обобщает многозначный вариант теоремы Замфиреску.

2. Показано, что теорема о существовании точки совпадения для пары типа Замфиреску многозначных отображений является следствием принципа поиска нулей функционалов.

3. Введено понятие многозначного функционала, являющегося (α, β)-поисковым на подмножестве метрического пространства. Получена соответствующая модификация локальной версии принципа поиска нулей для такого функционала.

4. Введено понятие θ-непрерывного семейства многозначных функционалов. Доказана теорема о сохранении существовании нулей для такого семейства поисковых функционалов.

5. Получена теорема о сохранении существования прообразов замкнутого подпространства для параметрического семейства многозначных отображений метрических пространств.

6. Доказана теорема о сохранении существования точек совпадения для параметрического семейства конечных наборов многозначных отображений метрических пространств. В качестве следствия получено утверждение о сохранении существования общих неподвижных точек для

параметрического семейства конечных наборов многозначных отображений метрического пространства в себя.

7. Доказана теорема о сохранении существования точек совпадения для параметрического семейства пар типа Замфиреску многозначных отображений.

Дополнительно изучены следующие задачи для случая калибровочных пространств.

1. Введено понятие однозначной (α, β)-поисковой вектор-функции. Доказана теорема о существовании нуля для такой вектор-функции.

2. Введены понятия многозначной (α, β)-поисковой вектор-функции и многозначной почти (α, β)-поисковой вектор-функции. В метрическом случае эти понятия совпадают. Однако в калибровочном пространстве это не так даже для однозначных вектор-функций. Приведен пример почти (α, β)-поисковой вектор-функции, не являющейся (α, β)-поисковой. Получены глобальная и локальная теоремы о существовании нуля многозначных почти поисковых вектор-функций.

3. Введено понятие многозначной вектор-функции, являющейся почти (α, β)-поисковой на подмножестве. Получена локальная теорема о существования нуля у такой вектор-функции.

4. Введено понятие θ-непрерывного семейства многозначных вектор-функций. Получена теорема о сохранении существовании нулей для такого семейства почти поисковых вектор-функций.

5. В качестве следствий получены: теорема о существовании точки совпадения конечного набора многозначных отображений калибровочных пространств; теорема о существовании общей неподвижной точки конечного набора многозначных отображений калибровочного пространства в себя; теорема о сохранении существования точек совпадения у параметрического семейства конечных наборов многозначных отображений калибровочных пространств; теорема о сохранении существования общих неподвижных точек у параметрического семейства конечных

наборов многозначных отображений калибровочного пространства в себя.

Теоретическая и практическая значимость

Характер диссертации является теоретическим. Результаты диссертации представляют интерес для специалистов по теории неподвижных точек и совпадений отображений метрических и калибровочных пространств.

Методы исследования

В диссертации используются методы общей топологии, теории метрических и калибровочных пространств, теории упорядоченных множеств.

Положения, выносимые на защиту

Следующие результаты и понятия являются основными и выносятся на защиту.

1. Понятие пары типа Замфиреску многозначных отображений, теорема о существовании точки совпадения для пары типа Замфиреску.

2. Понятие многозначного функционала, являющегося (α, β)-поисковым на подмножестве метрического пространства. Локальная версия принципа поиска нулей для такого функционала.

3. Понятие θ-непрерывного семейства многозначных функционалов. Теорема о сохранении существовании нулей у θ-непрерывного семейства многозначных поисковых функционалов.

4. Теорема о сохранении существования прообразов замкнутого подпространства для параметрического семейства многозначных отображений метрических пространств.

5. Теорема о сохранении существования точек совпадения для параметрического семейства конечных наборов многозначных отображений метрических пространств. Теорема о сохранении существования общих неподвижных точек для параметрического семейства конечных наборов многозначных отображений метрического пространства в себя.

6. Теорема о сохранении существования точек совпадения для параметрического семейства пар типа Замфиреску многозначных отображений.

Степень достоверности и апробация результатов

Результаты диссертации обоснованы при помощь строгих математических доказательств и докладывались на следующих международных конференциях и семинарах.

Международные конференции:

1. IV-ая международная молодежная научная школа «Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы», посвященная 90-летию со дня рождения профессора Ю. Г. Борисовича, Воронеж, 9–11 ноября 2020;

2. международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2020», Москва, 10–27 ноября 2020;

3. международный молодежный научный форум «Ломоносов-2021», Москва, 12–23 апреля 2021.

Научно-исследовательские семинары механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова:

1. научно-исследовательский семинар имени П. С. Александрова, кафедра общей топологии и геометрии, 8 октября 2020;

2. научно-исследовательский семинар «Современные геометрические методы», кафедра дифференциальной геометрии и приложений, 3 марта 2021;

3. научно-исследовательский семинар имени П. С. Александрова, кафедра общей топологии и геометрии, 4 марта 2021;

4. научно-исследовательский семинар «Алгебраическая топология и ее приложения» им. М. М. Постникова, кафедра высшей геометрии и топологии, 25 мая 2021;

5. научно-исследовательский семинар «Бесконечномерный анализ и математическая физика», кафедра теории функции и функционального анализа, 31 мая 2021.

Основные результаты диссертации изложены в 7 публикациях: 4 научных статьи в журналах Scopus и RSCI, 1 исправление к статье в журнале Scopus и RSCI, 2 статьи в материалах международных конференций. Список публикаций с их подробным описанием приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав и заключения. Полный объем диссертации составляет 107 страниц. Список литературы включает в себя 66 наименований. Результаты, выносимые на защиту, изложены в главах 1 и 2. Дополнительные исследования и результаты, которые не выносятся на защиту, изложены в третьей главе.

Содерждание работы

Во **введении** приводится обзор литературы, даются постановки задач и формулируются результаты работы.

В **первой главе** приводятся основные определения и формулировки, связанные с принципом поиска нулей функционалов и принципом сжимающих отображений. Вводится понятие пары типа Замфиреску многозначных отображений рассматривается задача существования точки совпадения для такой пары. Также изучена связь данной задачи с принципом поиска нулей функционалов.

Рассмотрим некоторые обозначения. Для метрического пространства (X, d) обозначим через $\mathrm{CB}(X)$ — семейство всех непустых замкнутых ограниченных подмножеств в X. Рассмотрим следующие обозначения:

$$d(x, X_0) := \inf_{x' \in X_0} d(x, x')$$

— расстояние от точки $x \in X$ до подмножества $X_0 \in \mathrm{CB}(X)$;

$$d(X_0, X_1) := \inf_{x \in X_0,\ x' \in X_1} d(x, x')$$

— расстояние между подмножествами $X_0, X_1 \in \mathrm{CB}(X)$;

$$D(X_0, X_1) := \max\{\sup_{x \in X_0} d(x, X_1),\ \sup_{x' \in X_1} d(x', X_0)\}$$

— расстояние Хаусдорфа между подмножествами $X_0, X_1 \in \mathrm{CB}(X)$.

Основным понятием, которое вводится в данной главе, является понятие пары типа Замфиреску многозначных отображений.

Определение 1. Пусть (X, r), (Y, d) — метрические пространства. Пару многозначных отображений $T, S : X \to \mathrm{CB}(Y)$ будем называть *парой типа Замфиреску*, если $T(X) \subset S(X)$ и существуют такие числа $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, $0 \le a_1 < 1$, $0 \le a_2, a_3 < \frac{1}{2}$, что для любых $x, x' \in X$ выполнено хотя бы одно из следующих условий:

$$
\begin{aligned}
&(fz1) \quad D(T(x), T(x')) \le a_1 d(S(x), S(x'));\\
&(fz2) \quad D(T(x), T(x')) \le a_2[d(S(x), T(x)) + d(S(x'), T(x'))];\\
&(fz3) \quad D(T(x), T(x')) \le a_3[d(S(x), T(x')) + d(S(x'), T(x))].
\end{aligned}
$$

Отметим, что если в определении 1 положить $X = Y$, $S = Id_X$, то отображение T является многозначным отображением типа Замфиреску[5].

Основным результатом главы является следующая теорема 1.

Теорема 1. *Пусть (X, r), (Y, d) — полные метрические пространства, $T, S : X \to \mathrm{CB}(Y)$ — пара типа Замфиреску многозначных отображений. Пусть график $\mathrm{Graph}(S)$ отображения S замкнут и для некоторого $\gamma \ge 1$ и любых $x, x' \in X$ верно, что $r(x, x') \le \gamma d(S(x), S(x'))$.*

Тогда существует точка совпадения отображений T и S.

Кроме того, для каждой начальной точки $(x_0, y_0) \in \mathrm{Graph}(T)$ существует последовательность $\{(x_n, y_n)\} \subset \mathrm{Graph}(T)$, сходящаяся к некоторой точке $(\xi, \eta) \in \mathrm{Graph}(T) \cap \mathrm{Graph}(S)$. То есть ξ — точка совпадения отображений T и S, η — соответствующее общее значение.

В первой главе также показано, что теорема 1 следует из многозначной версии принципа поиска нулей функционалов, приведенной в [10].

Основные понятия и результаты данной главы анонсированы в [21–22] и опубликованы с доказательствами в [23].

[21] Захарян Ю. Н., Фоменко Т. Н. Сохранение нулей у семейства многозначных функционалов и приложения к теории неподвижных точек и совпадений // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 493. № 1. с. 13–17.

[22] Захарян Ю. Н., Фоменко Т. Н. Исправление к статье: Сохранение нулей у семейства многозначных функционалов и приложения к теории неподвижных точек и совпадений // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2021. Т. 496. № 1. с. 79.

[23] Захарян Ю. Н., Фоменко Т. Н. О точках совпадения пары многозначных отображений типа Замфиреску // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2020. № 6. с. 26–33.

Вторая глава посвящена вопросу сохранения существования нулей поисковых функционалов и приложениям к теории неподвижных точек и совпадений.

Вводится следующая модификация понятия многозначного (α, β)-поискового функционала[10].

Определение 2. Пусть (X, d) — метрическое пространство, $X_0 \subset X$ и заданы $\alpha, \beta \in [0; +\infty)$, $\beta < \alpha$. Многозначный функционал $\Phi : X_0 \rightrightarrows [0; +\infty)$ называется (α, β)-*поисковым на* X_0, если для каждой точки $x \in X_0$ и любых таких $R > 0$, $c \in \Phi(x)$, что $\overline{B}(x, R) \subset X_0$, $c \leq (\alpha - \beta)R$, существуют такая точка $x' \in X_0$ и такое значение $c' \in \Phi(x')$, что $d(x, x') \leq \frac{1}{\alpha}c$ и $c' \leq \frac{\beta}{\alpha}c$.

Если (X, d) — метрическое пространство. Будем говорить, что график $\mathrm{Graph}(\Phi)$ многозначного функционала $\Phi : X \rightrightarrows [0; +\infty)$ является $\{0\}$-полным[9], если для любой фундаментальной последовательности $\{(x_n, c_n)\} \subset \mathrm{Graph}(\Phi)$ такой, что $c_n \to 0$, существует точка $\xi \in X$ такая, что $x_n \to \xi$ и $0 \in \Phi(\xi)$.

Доказана следующая модификация локальной версии принципа поиска нулей многозначных функционалов[10].

Теорема 2. *Пусть* (X, d) *— метрическое пространство,* $X_0 \subset X$, *и* $\Phi : X_0 \rightrightarrows [0; +\infty)$ *— многозначный* (α, β)*-поисковый на* X_0 *функционал,* $\alpha, \beta \in [0, +\infty)$, $\beta < \alpha$, *с* $\{0\}$*-полным графиком. Пусть заданы* $x_0 \in X_0$, $c_0 \in \Phi(x_0)$ *и* $R > 0$ *такие, что*

1. $\overline{B}(x_0, R) \subset X_0$.

2. $c_0 \leq (\alpha - \beta)R$.

Тогда существует $\xi \in \overline{B}(x_0, R)$ *— нуль функционала* Φ.

Вводится следующее новое понятие θ-непрерывного семейства многозначных функционалов.

Определение 3. Пусть (X, d) — метрическое пространство. Пусть $\theta : [0; 1] \to \mathbb{R}$ — непрерывная возрастающая функция. Однопараметрическое семейство многозначных функционалов $\Phi = \{\Phi_t : X \rightrightarrows [0; +\infty)\}_{t \in [0;1]}$ будем называть θ-*непрерывным*, если для каждого $x \in X$, любых $t, t' \in [0; 1]$ и любого $c \in \Phi_t(x)$ существует такое значение $c' \in \Phi_{t'}(x)$, что $|c - c'| \leq |\theta(t) - \theta(t')|$.

Для любого подмножества $X_0 \subset X$, и семейства многозначных функционалов $\Phi = \{\Phi_t : X \rightrightarrows [0;+\infty)\}_{t\in[0;1]}$ введем следующее обозначение:

$$M_{X_0}(\Phi) := \{(t,x) \in [0;1] \times X_0 \mid 0 \in \Phi_t(x)\}.$$

В случае, если $X_0 = \overline{U}$ для некоторого открытого подмножества U и графики функционалов Φ_t являются $\{0\}$-полными для всех $t \in [0;1]$, то показано, что достаточным условием замкнутости множества $M_U(\Phi)$ является отсутствие нулей функционалов Φ_t, $t \in [0;1]$, на границе ∂U.

Основным результатом данной главы является следующая теорема 3.

Теорема 3. *Пусть (X,d) — метрическое пространство, $U \subset X$ — некоторое открытое подмножество в X, $\theta : [0;1] \to \mathbb{R}$ — непрерывная возрастающая функция, $\alpha, \beta \in [0;+\infty)$, $\beta < \alpha$. Пусть задано однопараметрическое θ-непрерывное семейство $\Phi = \{\Phi_t : \overline{U} \rightrightarrows [0;+\infty)\}_{t\in[0;1]}$ многозначных (α,β)-поисковых на $\overline{U}$ функционалов с $\{0\}$-полными графиками. Пусть также множество $M = M_U(\Phi)$ — замкнуто. Тогда, если существует элемент вида $(0,x_0) \in M$, то существует и элемент $(1,x_1) \in M$. Иными словами, если в U существует нуль функционала Φ_0, то в U существует нуль функционала Φ_1.*

Отметим, что достаточное условие замкнутости множества $M_U(\Phi)$ и утверждение теоремы 3 остаются справедливыми, если в условии θ-непрерывности требовать существование $c' \in \Phi_{t'}(x)$ не для любых $c \in \Phi_t(x)$, а лишь для случая $c = 0$. Это позволяет не требовать непрерывности по параметру t.

В качестве одного из приложений теоремы 3 доказано утверждение о сохранении существования прообразов замкнутого подпространства Y_0 для семейства многозначных отображений из метрического пространства X в метрическое пространство Y.

Пусть (X,r), (Y,d) — метрические пространства, $Y_0 \subset Y$ — замкнутое подпространство в Y. Через $C(Y)$ обозначим семейство замкнутых непустых подмножеств Y. График многозначного отображения $T : X \to \mathrm{C}(Y)$ будем называть Y_0-полным, если любая фундаментальная последовательность $\{(x_n,y_n)\} \subset \mathrm{Graph}(T)$, где $d(y_n,Y_0) \to 0$, сходится к некоторому элементу $(\xi,\eta) \in \mathrm{Graph}(T)$, где $\eta \in Y_0$.

Верна следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть (X,r), (Y,d) — метрические пространства, $Y_0 \subset Y$ — замкнутое подпространство в Y, $U \subset X$ — открытое подмножество X. Пусть $T = \{T_t : \overline{U} \to \mathrm{C}(Y)\}_{t\in[0;1]}$ — однопараметрическое семейство многозначных отображений. Пусть для некоторых чисел $\alpha, \beta \in [0;+\infty)$, $\beta < \alpha$, и непрерывной возрастающей функции $\theta : [0;1] \to \mathbb{R}$ выполнены следующие условия:*

1. *Для любого $t \in [0;1]$ график $\mathrm{Graph}(T_t)$ является Y_0-полным.*
2. *Для любого $t \in [0;1]$, каждого $x \in \overline{U}$ и любых таких $R > 0$, $y \in T_t(x)$, что $\overline{B}(x,R) \subset \overline{U}$ и $d(y,Y_0) \le (\alpha-\beta)R$, существуют такая точка $x' \in \overline{U}$ и такое значение, что $y' \in T_t(x')$, что $r(x,x') \le \frac{1}{\alpha}d(y,Y_0)$ и $d(y',Y_0) \le \frac{\beta}{\alpha}d(y,Y_0)$.*
3. *Для каждых $t,t' \in [0;1]$ и любого $x \in \overline{U}$ верно неравенство*
$$D(T_t(x),T_{t'}(x)) \le |\theta(t')-\theta(t)|.$$
4. *Для любого $t \in [0;1]$ на границе множества U нет прообразов подпространства Y_0, то есть $T_t^{-1}(Y_0) \cap \partial U = \varnothing$.*

Тогда если $T_0^{-1}(Y_0) \ne \varnothing$, то $T_1^{-1}(Y_0) \ne \varnothing$.

В качестве следствия получена теорема о сохранении существования точек совпадения для семейства конечного набора из m отображений, $m \ge 2$. Из этой теоремы, в частности, вытекает следующее утвреждение о сохранении существования точек совпадения для параметрического семейства пар многозначных отображений, одно из которых является α-накрывающим, а второе является β-липшицевым при любом значении параметра $t \in [0;1]$.

Теорема 5. *Пусть (X,r), (Y,d) — метрические пространства, $U \subset X$ — открытое подмножество X. Пусть $T = \{T_t : \overline{U} \to \mathrm{C}(Y)\}_{t\in[0;1]}$ и $S = \{S_t : \overline{U} \to \mathrm{C}(Y)\}_{t\in[0;1]}$ — два однопараметрических семейства многозначных отображений. Пусть для некоторых чисел $\alpha, \beta \in [0;+\infty)$, $0 < \beta < \alpha$, и непрерывной возрастающей функции $\theta : [0;1] \to \mathbb{R}$ выполнены следующие условия:*

1. *Для любого* $t \in [0;1]$ *либо* $\mathrm{Graph}(T_t)$, *либо* $\mathrm{Graph}(S_t)$ *полон, и* $\mathrm{Graph}(T_t)$ *замкнут.*

2. *Для любого* $t \in [0;1]$ *отображение* T_t *—* α*-накрывающее, т.е. для любой точки* $x \in X$ *и* $R > 0$ *выполнено* $\bigcup\limits_{y \in T(x)} \overline{B}(y, \alpha R) \subset T(\overline{B}(x, R))$.

3. *Для любого* $t \in [0;1]$ *отображение* S_t *—* β*-липшицево, т.е. для любых точек* $x, x' \in X$ *верно* $D(T(x), T(x')) \le \beta r(x, x')$.

4. *Пусть, кроме того, для каждых* $t, t' \in [0;1]$ *и любого* $x \in \overline{U}$ *верно неравенство*

$$D(T_t(x), T_{t'}(x)) + D(S_t(x), S_{t'}(x)) \le |\theta(t') - \theta(t)|.$$

5. *Для любого* $t \in [0;1]$ *на границе множества* U *нет точек совпадения отображений* T_t *и* S_t*, то есть* $\mathrm{Coin}(T_t, S_t) \cap \partial U = \varnothing$.

Тогда если $\mathrm{Coin}(T_0, S_0) \ne \varnothing$*, то* $\mathrm{Coin}(T_1, S_1) \ne \varnothing$.

Еще одним применением теоремы 3 является следующая теорема о сохранении существования точек совпадения для семейства конечных наборов многозначных отображений.

Теорема 6. *Пусть* (X, r), (Y, d) *— метрические пространства,* $U \subset X$ *— открытое подмножество* X*. Пусть заданы однопараметрические семейства многозначных отображений*

$$S = \{S_t \mid S_t : X \to \mathrm{CB}(Y)\}_{t \in [0;1]},\ T^k = \{T_t^k \mid T_t^k : \overline{U} \to \mathrm{CB}(Y)\}_{t \in [0;1]},\ 1 \le k \le m.$$

Пусть для некоторых $\alpha, \beta \in [0; +\infty)$, $\beta < \alpha$, $\gamma \ge 1$, $1 < q < \frac{\alpha\gamma}{\beta}$ *непрерывной возрастающей функции* $\theta : [0;1] \to \mathbb{R}$ *выполнены следующие условия:*

1. *Для любого* $t \in [0;1]$ *график* $\mathrm{Graph}\left(S_t\Big|_{\overline{U}}\right) = \{(x, y) \in \overline{U} \times Y \mid y \in S_t(x)\}$ *полон и* $T_t^m(\overline{U}) \subset S_t(X)$.

2. *Для любого* $t \in [0;1]$ *и любой фундаментальной последовательности* $\{x_n\} \subset \overline{U}$ *всякая последовательность* $\{y_n\}$*, где* $y_n \in S_t(x_n)$*, является фундаментальной.*

3. *Для любого $t \in [0;1]$ и любых $x', x'' \in \overline{U}$ верно*

$$\max_{1\le k\le m}\{D(T_t^k(x'), T_t^k(x''))\} \le \frac{\beta}{\alpha\gamma q} d(S_t(x'), S_t(x'')).$$

4. *Для любых $t \in [0;1]$, $x \in \overline{U}$, $y^0 \in S_t(x)$ и любого $1 \le k \le m-1$:*

$$D(\{y^0\}, T_t^k(x)) \le \gamma d(y^0, T_t^m(x)),\ 1 \le k \le m-1.$$

5. *Для любых $t \in [0;1]$ и любых $x', x'' \in X$ верно*

$$r(x', x'') \le \frac{1}{\alpha} d(S_t(x'), S_t(x'')).$$

6. *Для любого $x \in \overline{U}$ и любых $t, t' \in [0;1]$ верно*

$$\max_{1\le k\le m}\{D(T_t^k(x), T_{t'}^k(x))\} + D(S_t(x), S_{t'}(x)) \le |\theta(t') - \theta(t)|.$$

7. *Для любого $t \in [0;1]$ на границе множества U нет точек совпадения отображений S_t, $T_t^1, \dots, T_t^m$, т.е.* $\mathrm{Coin}(S_t, T_t^1, \dots, T_t^m) \cap \partial U = \varnothing$.

Тогда если $\mathrm{Coin}(S_0, T_0^1, \dots, T_0^m) \ne \varnothing$, *то* $\mathrm{Coin}(S_1, T_1^1, \dots, T_1^m) \ne \varnothing$.

Положим $Y = X$ — полное пространство, $S_t = \mathrm{Id}_X$ для любого $t \in [0;1]$, $\alpha, \beta \in [0; +\infty)$, $\beta < \alpha \le 1$. Получим утверждение о сохранении существования общих неподвижных точек семейства наборов многозначных отображений.

Для формулировки следующей теоремы нам понадобится следующая модификация определения 1.

Определение 4. Пусть (X, r), (Y, d) — метрические пространства, $X_0 \subset X$ — некоторое подмножество. Пару многозначных отображений (T, S) $T : X_0 \to \mathrm{CB}(Y)$, $S : X \to \mathrm{CB}(Y)$, будем называть *парой типа Замфиреску на* X_0, если $T(X_0) \subset S(X)$ и существуют такие числа $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, $0 \le a_1 < 1$, $0 \le a_2, a_3 < \frac{1}{2}$, что для любых $x, x' \in X_0$ выполнено хотя бы одно из следующих условий:

$$
\begin{aligned}
&(fz1) \quad D(T(x), T(x')) \le a_1 d(S(x), S(x'));\\
&(fz2) \quad D(T(x), T(x')) \le a_2[d(S(x), T(x)) + d(S(x'), T(x'))];\\
&(fz3) \quad D(T(x), T(x')) \le a_3[d(S(x), T(x')) + d(S(x'), T(x))].
\end{aligned}
$$

Заключительным результатом второй главы является следующая теорема о сохранении существования точек совпадения для семейства пар типа Замфиреску многозначных отображений.

Теорема 7. *Пусть (X, r), (Y, d) — метрические пространства, $U \subset X$ — открытое подмножество X. Пусть заданы однопараметрические семейства многозначных отображений*

$$S = \{S_t \mid S_t : X \to \mathrm{CB}(Y)\}_{t\in[0;1]}, \ T = \{T_t \mid T_t : \overline{U} \to \mathrm{CB}(Y)\}_{t\in[0;1]}.$$

Пусть для некоторых $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, $0 \le a_1 < 1$, $0 \le a_2, a_3 < \frac{1}{2}$, некоторого $\gamma > 1$, и непрерывной возрастающей функции $\theta : [0;1] \to \mathbb{R}$ выполнены следующие условия:

1. *Для любого $t \in [0;1]$ график $\mathrm{Graph}\left(S_t\Big|_{\overline{U}}\right) = \{(x, y) \in \overline{U} \times Y \mid y \in S_t(x)\}$ полон.*

2. *Для любого $t \in [0;1]$ и любой фундаментальной последовательности $\{x_n\} \subset \overline{U}$ всякая последовательность $\{y_n\}$, где $y_n \in S_t(x_n)$, является фундаментальной.*

3. *Для любого $t \in [0;1]$ пара отображений (T_t, S_t) является парой типа Замфиреску на $\overline{U}$.*

4. *Для любых $t \in [0;1]$ и любых $x', x'' \in X$ верно*

$$r(x', x'') \le \gamma d(S_t(x'), S_t(x'')).$$

5. *Для любого $x \in \overline{U}$ и любых $t, t' \in [0;1]$ верно*

$$D(T_t(x), T_{t'}(x)) + D(S_t(x), S_{t'}(x)) \le |\theta(t') - \theta(t)|\,.$$

6. *Для любого* $t \in [0; 1]$ *на границе множества* U *нет точек совпадения отображений* T_t *и* S_t, *т.е.* $\mathrm{Coin}(S_t, T_t) \cap \partial U = \varnothing$.

Тогда если $\mathrm{Coin}(S_0, T_0) \neq \varnothing$, *то* $\mathrm{Coin}(S_1, T_1) \neq \varnothing$.

Отметим, что теоремы 6 и 7 являются обобщениями теоремы Гранаса-Фригон.

Основные результаты данной главы анонсированы в [21–22] и опубликованы с доказательствами в [24–25].

В **третьей главе** исследуется проблема поиска нулей функционалов на калибровочных пространствах.

Калибровочным пространством (в англ. литературе «gauge space[26]») называется такая пара $(X, \mathcal{D})$, где X — непустое множество, $\mathcal{D} = \{d_i : X \times X \to [0; +\infty)\}_{i \in I}$ — разделяющее семейство псевдометрик[26]. Топология на X задается предбазой

$$\mathcal{S} := \{B_i(x, R) \mid i \in I, x \in X, R > 0\},$$

где $B_i(x, R) := \{x' \in X \mid d_i(x, x') < R\}$ — открытый шар относительно псевдометрики d_i.

В случае калибровочного пространства оказывается удобным вместо семейства псевдометрик рассматривать их прямое произведение. Пусть I — непустое множество индексов. Рассмотрим произведение $\mathcal{L} := \mathbb{R}^I$ заданное, в тихоновской топологии. Тогда $\mathcal{L}$ — топологическое векторное пространство, линейные операции которого задаются покомпонентно. Рассмотрим на $\mathcal{L}$ покомпонентную операцию умножения, то есть для любых векторов $c, c' \in \mathcal{L}$ пусть

$$c \cdot c' = (c_i \cdot (c')_i)_{i \in I}.$$

Тогда $\mathcal{L}$ — коммутативная алгебра с вектор-единицей $1 = (1)_{i \in I}$. Отметим, что операция умножения является непрерывной, как отображение $\mathcal{L} \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}$.

Пусть $\mathcal{C} = [0; +\infty)^I$. Тогда $\mathcal{C}$ — замкнуто в $\mathcal{L}$. Также $\mathcal{C}$ — собственный конус в $\mathcal{L}$, то есть множество, удовлетворяющее следующим условиям:

---

[24] Захарян Ю. Н., Фоменко Т. Н. Сохранение существования нулей у семейства многозначных функционалов и некоторые следствия // Математические заметки. 2020. Т. 108. № 6. с. 837–850.

[25] Захарян Ю. Н., Фоменко Т. Н. О сохранении совпадений у однопараметрического семейства пар многозначных отображений типа Замфиреску // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2021. № 1. с. 28–34.

[26] Dugundji J. Topology. Boston: Allyn and Bacon, 1966. — 447 pp.

1. $\mathcal{C} \neq \varnothing$ и $\mathcal{C} \neq \{0\}$.

2. $b_1 c + b_2 c' \in \mathcal{C}$ для любых чисел $b_1, b_2 \geq 0$ и всех векторов $c, c' \in \mathcal{C}$.

3. $\mathcal{C} \cap (-\mathcal{C}) = \{0\}$.

Кроме того, $\mathcal{C}$ замкнуто относительно операции умножения, то есть $c \cdot c' \in \mathcal{C}$ для любых векторов $c, c' \in \mathcal{C}$. Для любого вектора $c \in \mathcal{L}$ будем обозначать $|c| := \sup\{c, -c\} = (|c_i|)_{i \in I} \in \mathcal{C}$.

Пусть $\mathcal{D} = \{d_i\}_{i \in I}$ — разделяющее семейство псевдометрик. Пусть $d : X \times X \to \mathcal{C}$ — отображение, задаваемое равенством

$$d(x, y) := (d_i(x, y))_{i \in I}.$$

Тогда d — коническая метрика[27] на X.

Рассмотрим снова обозначения $B(x, R) := \{x' \in X \mid d(x, x') \ll R\}$, $\overline{B}(x, R) := \{x' \in X \mid d(x, x') \leq R\}$, $d(x, X_0) := (d_i(x, X_0))_{i \in I}$, $d(X_1, X_2) := (d_i(X_1, X_2))_{i \in I}$ и $D(X_1, X_2) := (D_i(X_1, X_2))_{i \in I}$.

В данной главе приводятся необходимые для дальнейшего свойства введеных операций, частичных порядков и конической метрики.

Для однозначных вектор-функций вводятся следующие определения.

Определение 5. Пусть $(X, \mathcal{D})$ – калибровочное пространство и заданы $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$, $\beta \ll \alpha$. Вектор-функция $\varphi : X \to \mathcal{C}$ называется (α, β)-*поисковой*, если для каждой точки $x \in X$ существует точка $x' \in X$ такая, что $d(x, x') \leq \alpha^{-1} \cdot \varphi(x)$ и $\varphi(x') \leq \beta \cdot \alpha^{-1} \cdot \varphi(x)$.

Определение 6. Пусть $(X, \mathcal{D})$ – калибровочное пространство. Точка $\xi \in X$ называется *нулем* вектор-функции $\varphi : X \to \mathcal{C}$, если $\varphi(\xi) = 0$.

Определение 7. Пусть $(X, \mathcal{D})$ – калибровочное пространство. Будем говорить, что график $\mathrm{Graph}(\varphi)$ вектор-функции $\varphi : X \to \mathcal{C}$ является *секвенциально* $\{0\}$-*полным*, если для любой фундаментальной последовательности $\{(x_n, \varphi(x_n))\} \subset \mathrm{Graph}(\varphi)$ такой, что $\varphi(x_n) \to 0$, существует точка $\xi \in X$ такая, что $x_n \to \xi$ и ξ – нуль вектор-функции φ.

Доказана следующая теорема.

[27] Huang L. G., Zhang X. Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2007. V. 332. pp. 1468–1476.

Теорема 8. *Пусть* $(X, \mathcal{D})$ *– калибровочное пространство,* $\varphi : X \to \mathcal{C}$ *–* (α, β)*-поисковая вектор-функция,* $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$*,* $\beta \ll \alpha$*, с секвенциально* $\{0\}$*-полным графиком. Тогда для любой точки* x_0 *существует последовательность* $\{x_n\} \subset X$*, сходящаяся к некоторой точке* ξ*, такой,* ξ *– нуль вектор-функции* φ *и* $d(x_0, \xi) \le (\alpha - \beta)^{-1} \cdot \varphi(x_0)$.

Для многозначных вектор-функций вводятся следующие два определения.

Определение 8. Пусть $(X, \mathcal{D})$ — калибровочное пространство и заданы $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$, $\beta \ll \alpha$. Многозначная вектор-функция $\Phi : X \rightrightarrows \mathcal{C}$ называется (α, β)*-поисковой*, если для каждой точки $x \in X$ и любого значения $c \in \Phi(x)$ существуют точка $x' \in X$ и значение $c' \in \Phi(x')$ такие, что $d(x, x') \le \alpha^{-1} \cdot c$ и $c' \le \beta \cdot \alpha^{-1} \cdot c$.

Определение 9. Пусть $(X, \mathcal{D})$ — калибровочное пространство и заданы $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$, $\beta \ll \alpha$. Многозначная вектор-функция $\Phi : X \rightrightarrows \mathcal{C}$ называется *почти* (α, β)*-поисковой*, если для каждого $\varepsilon \gg 0$, каждой точки $x \in X$ и любого значения $c \in \Phi(x)$ существуют точка $x' \in X$ и значение $c' \in \Phi(x')$ такие, что $d(x, x') \le \alpha^{-1} \cdot c$ и $c' \le \beta \cdot \alpha^{-1} \cdot c + \varepsilon$.

Из определений 8 и 9 непосредственно следует, что если Φ — (α, β)-поисковая вектор-функция, то она почти (α, β)-поисковая. В метрическом случае показано, что если Φ — многозначный почти (α, β)-поисковый функционал, то он (α, β')-поисковый для всех $\beta' \in [0; +\infty)$, $\beta < \beta' < \alpha$. В случае калибровочного пространства это, вообще говоря, не так даже для однозначной вектор-функции.

Рассмотрим следующий контрпример.

Пример 1. Пусть $I = (0; +\infty)$ и $X_0 = (0; +\infty)^I$. Пусть $\xi \in [0; +\infty)^I$, $\xi = (\xi_i)_{i \in I}$,

$$\xi_i = \begin{cases} 0, & i = \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2}, & i = 2, \\ 1, & i \ne \frac{1}{2}, i \ne 2. \end{cases}$$

Пусть $X = X_0 \cup \{\xi\}$. Для каждого $i \in I$, пусть $d_i : X \to [0; +\infty)$ — отображение, задаваемое равенством $d_i(x, x') = |x_i - x'_i|$. Тогда $\mathcal{D} := \{d_i\}_{i \in I}$ —

разделяющее семейство псевдометрик, что означает, что $(X, \mathcal{D})$ — калибровочное пространство.

Рассмотрим однозначную вектор-функцию. Пусть $\varphi : X \to [0;+\infty)^I$ — отображение, задаваемое соотношением:

$$\varphi(x) = \{\varphi_i(x)\}_{i\in I},\ \varphi_i(x) = \begin{cases} \min\left\{x_i, x_{\frac{1}{i}}\right\}, & x \in X_0, \\ 0, & x = \xi,\ i = 2, \\ 1, & x = \xi,\ i \neq 2. \end{cases}$$

φ — почти $\left(1, \left\{\frac{1}{2}\right\}_{i\in I}\right)$ — поисковая вектор-функция, не являющаяся (α, β)-поисковой вектор-функцией для любых $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$, $\beta \ll \alpha$.

Как выясняется, определение 9 оказывается более удобным, чем определение 8.

Определение 10. Пусть $(X, \mathcal{D})$ – калибровочное пространство. Точка $\xi \in X$ называется *нулем* многозначной вектор-функции $\Phi : X \rightrightarrows \mathcal{C}$, если $0 \in \Phi(\xi)$.

Определение 11. Пусть $(X, \mathcal{D})$ — калибровочное пространство. Будем говорить, что график $\mathrm{Graph}(\Phi)$ многозначной вектор-функции $\Phi : X \rightrightarrows \mathcal{C}$ является *секвенциально* $\{0\}$*-полным*, если для любой фундаментальной последовательности $\{(x_n, c_n)\} \subset \mathrm{Graph}(\Phi)$ такой, что $c_n \to 0$, существует точка $\xi \in X$ такая, что $x_n \to \xi$ и ξ — нуль вектор-функции Φ.

Для многозначных почти (α, β)-поисковых вектор-функций доказаны следующие глобальная и локальная версии принципа поиска нулей.

Теорема 9. *Пусть $(X, \mathcal{D})$ — калибровочное пространство, $\Phi : X \rightrightarrows \mathcal{C}$ — многозначная почти (α, β)-поисковая вектор-функция, $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$, с секвенциально $\{0\}$-полным графиком. Тогда для любой пары $(x_0, c_0) \in \mathrm{Graph}(\Phi)$ и каждого $\delta \gg 0$ существует последовательность $\{x_n\} \subset X$, сходящаяся к некоторой точке ξ, такой, что ξ — нуль вектор-функции Φ и $d(x_0, \xi) \leq (\alpha - \beta)^{-1} \cdot c_0 + \delta$.*

Теорема 10. *Пусть $(X, \mathcal{D})$ — калибровочное пространство, $\Phi : X \rightrightarrows \mathcal{C}$ — многозначная (α, β)-поисковая вектор-функция, $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$, $\beta \ll \alpha$, с секвенциально $\{0\}$-полным графиком. Тогда для любой пары $(x_0, c_0) \in \mathrm{Graph}(\Phi)$*

такой, что $c_0 \ll (\alpha - \beta) \cdot R$, $R \gg 0$, *существует* $\xi \in \overline{B}(x_0, R)$ *— нуль вектор-функции* Φ.

В третьей главе для калибровочных пространства также рассмотрена задача о сохранении существования нулей для семейства многозначных вектор-функций. По аналогии с метрическим случаем дано понятие многозначной почти поисковой на подмножестве вектор-функции и доказана модификация теоремы 10.

Определение 12. Пусть $(X, \mathcal{D})$ — калибровочное пространство, $X_0 \subset X$ и заданы $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$, $\beta \ll \alpha$. Многозначная вектор-функция $\Phi : X_0 \rightrightarrows \mathcal{C}$ называется *почти* (α, β)*-поисковой на* X_0, если для каждой точки $x \in X_0$, каждого значения $c \in \Phi(x)$, каждых $\varepsilon \gg 0$ и $R \gg 0$ таких, что $\overline{B}(x, R) \subset X_0$, $c \leq (\alpha - \beta) \cdot R$, существуют такая точка $x' \in X_0$ и такое значение $c' \in \Phi(x')$, что $d(x, x') \leq \alpha^{-1} \cdot c$ и $c' \leq \beta \cdot \alpha^{-1} \cdot c + \varepsilon$.

Теорема 11. *Пусть* $(X, \mathcal{D})$ *— калибровочное пространство,* $X_0 \subset X$*, и* $\Phi : X_0 \rightrightarrows \mathcal{C}$ *— многозначная почти* (α, β)*-поисковая на* X_0 *вектор-функция,* $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$*,* $\beta \ll \alpha$*, с секвенциально* $\{0\}$*-полным графиком. Пусть заданы* $x_0 \in X_0$*,* $c_0 \in \Phi(x_0)$ *и* $R \gg 0$ *такие, что*

1. $\overline{B}(x_0, R) \subset X_0$.
2. $c_0 \ll (\alpha - \beta) \cdot R$.

Тогда существует $\xi \in \overline{B}(x_0, R)$ *— нуль вектор-функции* Φ.

Для любого подмножества $X_0 \subset X$, и семейства многозначных вектор-функций $\Phi = \{\Phi_t : X \rightrightarrows \mathcal{C}\}_{t \in [0;1]}$ введем следующее обозначение:

$$M_{X_0}(\Phi) := \{(t, x) \in [0; 1] \times X_0 \mid 0 \in \Phi_t(x)\}.$$

Вектор-функцию $\theta : [0; 1] \to \mathcal{L}$ будем называть *строго изотонной*, если для любых $t, t' \in [0; 1]$ верно $t < t' \;\Rightarrow\; \theta(t) \ll \theta(t')$.

Определение 13. Пусть $(X, \mathcal{D})$ — калибровочное пространство. Пусть $\theta : [0; 1] \to \mathcal{L}$ — непрерывная строго изотонная вектор-функция. Однопараметрическое семейство многозначных вектор-функций $\Phi = \{\Phi_t : X \rightrightarrows \mathcal{C}\}_{t \in [0;1]}$ будем называть θ*-непрерывным на* $M_X(\Phi)$, если для каждой пары $(t, x) \in M_X(\Phi)$ и любого $t' \in [0; 1]$ существует $c' \in \Phi_{t'}(x)$ такое, что $c' \leq |\theta(t) - \theta(t')|$.

Как и в метрическом случае, справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. *Пусть* $(X, \mathcal{D})$ *— калибровочное пространство,* $U \subset X$ *— некоторое открытое подмножество в* X*,* $\theta : [0;1] \to \mathcal{L}$ *— непрерывная строго изотонная вектор-функция. Пусть задано однопараметрическое* θ*-непрерывное на* $M_{\overline{U}}(\Phi)$ *семейство* $\Phi = \{\Phi_t : \overline{U} \rightrightarrows \mathcal{C}\}_{t \in [0;1]}$ *многозначных вектор-функций с секвенциально* $\{0\}$*-полными графиками. Тогда если* $M_{\partial U}(\Phi) = \varnothing$*, то множество* $M_U(\Phi)$ *секвенциально замкнуто.*

Доказана следующая теорема о сохранении существования нулей для семейства многозначных почти поисковых вектор-функций.

Теорема 12. *Пусть* $(X, \mathcal{D})$ *— калибровочное пространство,* $U \subset X$ *— некоторое открытое подмножество в* X*,* $\theta : [0;1] \to \mathcal{L}$ *— непрерывная строго изотонная вектор-функция,* $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$*,* $\beta \ll \alpha$*. Пусть задано однопараметрическое* θ*-непрерывное на* $M_{\overline{U}}(\Phi)$ *семейство* $\Phi = \{\Phi_t : \overline{U} \rightrightarrows \mathcal{C}\}_{t \in [0;1]}$ *многозначных почти* (α, β)*-поисковых на* $\overline{U}$ *вектор-функций с секвенциально* $\{0\}$*-полными графиками. Пусть также множество* $M = M_U(\Phi)$ *— секвенциально замкнуто. Тогда, если существует элемент вида* $(0, x_0) \in M$*, то существует и элемент* $(1, x_1) \in M$*.*

Отметим, что в теореме 12 вместо замыкания $\overline{U}$ открытого подмножества U можно рассматривать произвольное подмножество X_0. Приведем соответствующую формулировку.

Теорема 13. *Пусть* $(X, \mathcal{D})$ *— калибровочное пространство,* $X_0 \subset X$ *— некоторое подмножество в* X*,* $\theta : [0;1] \to \mathcal{L}$ *— непрерывная строго изотонная вектор-функция,* $\alpha, \beta \in \mathcal{C}$*,* $\beta \ll \alpha$*. Пусть задано однопараметрическое* θ*-непрерывное на* $M_{X_0}(\Phi)$ *семейство* $\Phi = \{\Phi_t : X_0 \rightrightarrows \mathcal{C}\}_{t \in [0;1]}$ *многозначных почти* (α, β)*-поисковых на* X_0 *вектор-функций с секвенциально* $\{0\}$*-полными графиками. Пусть также для любой пары* $(t, x) \in M_{X_0}(\Phi)$*,* $t < 1$ *существует* $t' \in (t, 1]$ *такая, что*

$$\overline{B}(x, 2(\alpha - \beta)^{-1} \cdot [\theta(t') - \theta(t)]) \subset X_0.$$

Тогда, если существует элемент вида $(0, x_0) \in M_{X_0}(\Phi)$*, то существует и элемент* $(1, x_1) \in M_{X_0}(\Phi)$*.*

В конце данной главы приведены теорема о существовании точки совпадения для конечного набора многозначных отображений калибровочных пространств и теорема о сохранении существования точек совпадения для семейства конечных наборов многозначных отображений калибровочных пространств.

Для произвольного семейства числовых псевдометрик $\mathcal{D} = \{d_i\}_{i \in I}$ рассмотрим семейство числовых псевдометрик

$$\mathcal{D}_+ := \{\max\{d_{i_1}, \ldots, d_{i_m}\} \mid i_1 \ldots i_m \in I,\ m \in \mathbb{N}\}.$$

Доказаны следующие теоремы

Теорема 14. *Пусть $(X, \mathcal{R})$, $(Y, \mathcal{D})$ — калибровочные пространства и $\mathcal{D} = \mathcal{D}^+$. Пусть для некоторых $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{C}$, $\beta \ll \alpha$, $\gamma \geq 1$, многозначные отображения $S : X \to \mathrm{C}(Y)$, $T^k : X \to \mathrm{C}(Y)$, $1 \leq k \leq m$, удовлетворяют следующим условиям:*

1. *График отображения S секвенциально полный. Кроме того, для любой фундаментальной последовательности $\{x_n\} \subset X$, любая последовательность $\{y_n\} \subset Y$, $y_n \in S(x_n)$, также фундаментальная.*

2. *$T^m(X) \subset S(X)$.*

3. *Для любых $x, x' \in X$,*

$$D(T^m(x), T^m(x')) \leq \gamma^{-1} \cdot \beta \cdot \alpha^{-1} \cdot d(S(x), S(x')).$$

4. *Для всех $x \in X$, каждого $y^0 \in S(x)$ и каждого k, $1 \leq k \leq m-1$,*

$$d(y^0, T^k(x)) \leq \gamma \cdot d(y^0, T^m(x)).$$

5. *Для любых $x, x' \in X$,*

$$r(x, x') \leq \alpha^{-1} \cdot d(S(x), S(x')).$$

6. *Для всех k, $1 \leq k \leq m$, каждого $\varepsilon \in \mathcal{C}$, $\varepsilon \gg 0$, каждых $x \in X$ и*

$y^0 \in S(x)$, существует $y^k \in T^k(x)$ такое, что

$$d(y^0, y^k) \leq d(y^0, T^k(x)) + \varepsilon.$$

Тогда существует точка совпадения $\xi \in \mathrm{Coin}(S, T^1, \ldots, T^m)$.

Теорема 15. *Пусть $(X, \mathcal{R})$, $(Y, \mathcal{D})$ — калибровочные пространства, $\mathcal{D} = \mathcal{D}^+$ и $U \subset X$ — открытое подмножество. Пусть для некоторых $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{C}$, $\beta \ll \alpha$, $\gamma \geq 1$, и некоторой непрерывной строго изотонной вектор-функции $\theta : [0;1] \to \mathcal{C}$, семейства $S = \{S_t : X \to \mathrm{C}(Y)\}_{t \in [0;1]}$, $T^k = \{T_t^k : \overline{U} \to \mathrm{C}(Y)\}_{t \in [0;1]}$, $1 \leq k \leq m$, удовлетворяют следующим условиям:*

1. *Для каждого $t \in [0;1]$, график $S_t|_{\overline{U}}$ секвенциально полон. Кроме того, для каждой фундаментальной последовательности $\{x_n\} \subset \overline{U}$ последовательность $\{y_n\} \subset Y$, $y_n \in S_t(x_n)$, $\{y_n\}$ также фундаментальная.*

2. *$T_t^m(\overline{U}) \subset S_t(X)$, для любого $t \in [0;1]$.*

3. *Для любого $t \in [0;1]$ и всех $x, x' \in \overline{U}$,*

$$D(T_t^m(x), T_t^m(x')) \leq \beta \cdot \alpha^{-1} \cdot \gamma^{-1} \cdot d(S_t(x), S_t(x')).$$

4. *Для любого $t \in [0;1]$, любых k, $1 \leq k \leq m-1$, каждых $x \in \overline{U}$ и $y^0 \in S_t(x)$*

$$d(y^0, T_t^k(x)) \leq \gamma \cdot d(y^0, T_t^m(x)).$$

5. *Для любого $t \in [0;1]$ и всех $x, x' \in X$,*

$$r(x, x') \leq \alpha^{-1} \cdot d(S_t(x), S_t(x')).$$

6. *Для любого $t \in [0;1]$, любого k, $1 \leq k \leq m$, каждого $\varepsilon \in \mathcal{C}$, $\varepsilon \gg 0$, каждых $x \in \overline{U}$ и $y^0 \in S_t(x)$, существует $y^k \in T_t^k(x)$ такая, что*

$$d(y^0, y^k) \leq d(y^0, T_t^k(x)) + \varepsilon.$$

7. *Для любых $t, t' \in [0;1]$, каждого $\varepsilon \in \mathcal{C}$, $\varepsilon \gg 0$, каждых $x \in \overline{U}$ и*

$y \in S_t(x)$, существует $y' \in S_{t'}(x)$ такая, что

$$d(y, y') \leq d(y, S_{t'}(x)) + \varepsilon.$$

8. Для любых $t, t' \in [0; 1]$ и каждого $x \in \mathrm{Coin}(S_t, T_t^1, \ldots, T_t^m)$,

$$D(T_t^m(x), T_{t'}^m(x)) + D(S_t(x), S_{t'}(x)) \leq |\theta(t') - \theta(t)|.$$

9. Для любого $t \in [0; 1]$, $\mathrm{Coin}(S_t, T_t^1, \ldots, T_t^m) \cap \partial U = \varnothing$.

Тогда если $\mathrm{Coin}(S_0, T_0^1, \ldots, T_0^m) \neq \varnothing$, то $\mathrm{Coin}(S_1, T_1^1, \ldots, T_1^m) \neq \varnothing$.

Отметим, что теорема 14 обобщает некоторые результаты работ [19–20]. В теореме 15 замыкание открытого множества $U \subset X$ может быть заменено на произвольное подмножество $X_0 \subset X$. В этом случае, условие 9 необходимо заменить на *Для любого $t \in [0; 1)$ и каждого $x \in \mathrm{Coin}(S_t, T_t^1, \ldots, T_t^m)$, существует $t' \in (t, 1]$ такое, что*

$$\overline{B}(x, 2(\alpha - \beta)^{-1} \cdot (\theta(t') - \theta(t))) \subset X_0.$$

Это ослабление позволяет получить обобщение некоторых результатов из [20].

Заключение

В диссертации поставлены и решены актуальные задачи. Получены следующие основные результаты. Доказана теорема о существовании точки совпадения для пары типа Замфиреску многозначных отображений, показана ее связь с принципом поиска нулей функционалов. Доказана модификация локальной версии принципа поиска нулей многозначных функционалов для случая, когда функционал является (α, β)-поисковым не на всем пространстве, а на некотором его подмножестве.

Получены достаточные условия, гарантирующие сохранение существования нулей многозначных функционалов при изменении параметра для параметрического семейства многозначных (α, β)-поисковых функционалов.

Полученные результаты применены для следующих задач: о сохранении существования прообразов замкнутого подпространства для семейства многозначных отображений метрических пространств; о сохранении существования точек совпадения для семейства наборов многозначных отображений метрических пространств; о сохранении сущестования общих неподвижных точек для семейства наборов многозначных отображений метрических пространств в себя; о сохранении существования точек совпадения для семейства пар типа Замфиреску многозначных отображений.

Дополнительно результаты, связанные с принципом поиска нулей функционалов, распространены на случай калибровочных пространств. Получены аналоги соответствующих метрических теорем и описаны некоторые различия в понятиях и подходах.

Благодарности

Автор выражает искреннюю благодарность своим научным руководителям: доктору физико-математических наук, профессору Татьяне Николаевне Фоменко за постановки задач и их плодотворное обсуждение, конструктивные замечания и постоянное внимание к работе, а также доктору физико-математических наук, профессору Садовничему Юрию Викторовичу за консультации и поддержку по различным смежным вопросам.

Автор благодарит коллектив кафедры Общей топологии и геометрии за творческую и доброжелательную атмосферу.

Автор выражает благодарность преподавателю Киевского политехнического института доктору физико-математических наук, профессору Богданскому Юрию Викторовичу, который пробудил интерес к занятию фундаментальной математикой и привил математическую культуру.

Автор благодарен своим близким за постоянную поддержку.

Работы автора по теме диссертации

Научные статьи, опубликованные в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 01.01.04 — «Геометрия и топология» и входящих в базы цитирования Scopus, Web of Science и RSCI

1. Захарян Ю. Н., Фоменко Т. Н. О точках совпадения пары многозначных отображений типа Замфиреску // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2020. — № 6. — с. 26–33.

   Англ. пер.: Zakharyan Yu. N., Fomenko T. N. On Coincidence Points for a Zamfirescu Type Pair of Multi-Valued Mappings // Moscow University Mathematics Bulletin. — 2020. — V. 75. — N. 6. — P. 253–260. **Scopus, RSCI**. Импакт-фактор SJR 0,314.

Автору диссертации принадлежат предложения 1, 2 и 3.

2. Захарян Ю. Н., Фоменко Т. Н. Сохранение существования нулей у семейства многозначных функционалов и некоторые следствия // Математические заметки. — 2020. — Т. 108. — № 6. — с. 837–850.

   Англ. пер.: Zakharyan Yu. N., Fomenko T. N. Preservation of the Existence of Zeros in a Family of Set-Valued Functionals and Some Consequences // Mathematical Notes. — 2020. — V. 108. — N. 6. — P. 802–813. **Scopus, RSCI**. Импакт-фактор SJR 0,723.

   Автору диссертации принадлежат определение 5, теоремы 4 и 6, предложения 1 и 2.

3. Захарян Ю. Н., Фоменко Т. Н. Сохранение нулей у семейства многозначных функционалов и приложения к теории неподвижных точек и совпадений // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. — 2020. — Т. 493. — № 1. — с. 13–17.

   Англ. пер.: Fomenko T. N., Zakharyan Yu. N. Zero Preservation for a Family of Multivalued Functionals, and Applications to the Theory of Fixed Points and Coincidences // Doklady Mathematics. — 2020. — V. 102. — N. 1. — P. 272–275. **Scopus, RSCI**. Импакт-фактор SJR 0,765.

   Автору диссертации принадлежат теоремы 1, 3 и 6.

4. Захарян Ю. Н., Фоменко Т. Н. Исправление к статье: Сохранение нулей у семейства многозначных функционалов и приложения к теории неподвижных точек и совпадений // Доклады Российской академии наук. — 2021. — Т. 496. — № 1. — с. 79.

   Англ. пер.: Fomenko T. N., Zakharyan Yu. N. Erratum to: Zero Preservation for a Family of Multivalued Functionals, and Applications to the Theory of Fixed Points and Coincidences // Doklady Mathematics. — 2021. — V. 103. — N. 1. — P. 66. **Scopus, RSCI**. Импакт-фактор SJR 0,765.

5. Захарян Ю. Н., Фоменко Т. Н. О сохранении совпадений у однопараметрического семейства пар многозначных отображений типа Замфиреску // Серия 1: Математика. Механика. — 2021. — № 1. — с. 28–34.

Англ. пер.: Zakharyan Yu. N., Fomenko T. N. Coincidence Preservation for a One-Parameter Family of Pairs of Zamfirescu-Type Multi-Valued Mappings // Moscow University Mathematics Bulletin. — 2021. — V. 76. — N. 1. — P. 28–34. **Scopus, RSCI**. Импакт-фактор SJR 0,314.

Автору диссертации принадлежит теорема 6.

Другие публикации

1. Захарян Ю. Н. Сохранение нулей семейства поисковых функционалов // Некоторые вопросы анализа, алгебры, геометрии и математического образования: материалы международной молодежной научной школы «Актуальные направления математического анализа и смежные вопросы» — Воронеж, 9–11 ноября 2020. — Сер. 10. — Т. 1. — С. 73–74. **RSCI**.

2. Захарян Ю. Н. О существовании совпадения пары многозначных отображений типа Замфиреску [Электронный ресурс] // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2020». — Москва, 10–27 ноября 2020. — https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2020_2/data/19355/118413_uid240193_report.pdf (дата обращения 12.05.2021).

3. Захарян Ю. Н. Связь калибровочных пространств с коническими метриками [Электронный ресурс] // Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ-2021». — Москва, 12–23 апреля 2021. — https://lomonosov-msu.ru/archive/Lomonosov_2021/data/22108/130603_uid240193_report.pdf (дата обращения 12.05.2021).

Статьи, принятые к печати

1. Zakharyan Yu. N. Search for vector-function zeros in gauge spaces // Journal of Nonlinear and Convex Analysis (положительная рецензия 03.02.2021, принята к печати 22.04.2021, ожидаемый год публикации 2022)