

Елена Владимировна Косилова

*Философский факультет Московского государственного
университета, Москва*

ИСТИНА В МАТЕМАТИКЕ: ФИКЦИОНАЛИЗМ И ТРАНСЦЕНДЕНТАЛИЗМ

Аннотация. Везде, где есть истинность, есть место нормативности. Традиционно логика и математика – это область, где истинность определяется наиболее жёстким образом. Правила вывода не допускают вариаций. С реализмом (платонизмом) в математике связано представление, что данные правила не являются результатом конвенции. Они как бы навязаны математикам за счёт своей очевидности – например, таковы правила модус поненс и подстановки, а также правило исключённого третьего. С жёсткостью задания правил связана и истинность математических положений, которые тоже должны быть очевидными или полученными из очевидных с применением вышеупомянутых правил дедуктивного вывода. Однако в последнее время появились течения фикционализма (Х. Филд) и конструктивизма (Д. Блур). Как Блур, так и Филд утверждают, что математические утверждения не абсолютны и даже не истинны, а всего лишь являются результатом конвенции. Они возводятся к истории математики, которая могла бы сложиться иначе. Для них нормы в математике конвенциональны. В статье приводятся соображения за трансцендентализм в философии математики.

Ключевые слова: философия математики, платонизм в философии математики, фикционализм в философии математики, трансцендентализм в философии математики, Х. Филд, Кант, Г. Коэн

Elena V. Kosilova

Moscow State University, Faculty of philosophy, Moscow

TRUTH IN MATHEMATICS: FICTIONALISM AND TRANSCENDENTALISM

Abstract. Wherever there is truth, there is a place for normativity. Traditionally, logic and mathematics is the area where truth is determined in the most rigid way. Rules of inference do not allow variation. The idea that these rules are not the result of convention

is associated with realism (Platonism) in mathematics. These rules seem to be imposed on mathematicians due to their obviousness – for example, these are the rules of modus ponens and substitution, as well as the rule of the excluded middle. The rigidity of setting the rules is also associated with the truth of mathematical statements, which should also be obvious or obtained from the obvious using the above-mentioned rules of deductive inference. Recently, however, there have been trends of fictionalism (H. Field) and constructivism (D. Bloor). Both Bloor and Field argue that mathematical statements are not absolute or even true, but merely the result of convention. They are traced back to the history of mathematics, which could have developed differently. For them, the norms in mathematics are conventional. The article provides considerations for transcendentalism in the philosophy of mathematics.

Keywords: philosophy of mathematics, Platonism in the philosophy of mathematics, fictionalism in the philosophy of mathematics, transcendentalism in the philosophy of mathematics, H. Field, Kant, G. Cohen.

Везде, где есть место истине и ее поиску, присутствует нормативность. Это нормы, задающие метод поиска истины и то, какой вид она должна иметь. Нет ничего удивительного в том, что в такой науке как математика, с ее ригористичностью, нормы всегда были самые требовательные и жёсткие. Любая теория должна быть основана на аксиомах, все доказательства теорем должны быть проведены по твёрдо установленным правилам вывода. Каждый дедуктивный шаг должен быть прозрачен – он вытекает из аксиом, определений и правил вывода, доказательство может в целом быть необозримым, но в каждом шаге оно несомненно.

Главная норма математики – ее истинность. Но что значит истина? Во все века считалось, что истинность в математике покоится на доказательстве. Доказательство же представляло из себя дедуктивный вывод. Однако во второй половине 20 века (а у ряда мыслителей и раньше) господство доказательства было поставлено под сомнение.

Точнее говоря, под сомнение была поставлена природа математических объектов, идея доказательства пошатнулась вместе с утверждением, что у математических объектов нет объективного существования.

По умолчанию среди математиков считается, что математические объекты существуют. Если математику сказать, что не существует чисел, он вас не поймет. Другими словами, математики в своей работе являются платониками, для них мир математиче-

ских объектов – это особый мир [18]. Однако философы поставили этот особый мир под вопрос.

Дело в том, что математические объекты не являются физическими и не имеют пространственно-временного характера. Они не состоят из материи. А люди-математики – это жильцы физического мира, они имеют и пространственные, и временные – т.е. материальные – характеристики. Стоит вопрос, как материальный человек-математик получает доступ к нематериальному, абстрактному царству математических сущностей? Или, говоря словами П.Бенасеррафа, каково каузальное взаимодействие математиков с абстрактными математическими сущностями? [14]

Раньше этот вопрос решался, как правило, введением понятия интуиции. Об интуиции, или умозрении, говорили многие математики от Платона до Декарта и даже до Геделя и Пуанкаре [9]. В.Я. Перминов [8] выделяет несколько типов интуиции, делая особый акцент на том, что он называет праксеологической интуицией, а также интуицией аподиктической. Он считает, что такая интуиция полностью надёжна, споря в этом, например, с Г. Ханом [11]. Однако мы все равно стоим здесь перед загадкой: откуда берется эта интуиция, как человек обретает возможность соотноситься с нематериальным миром?

Из этого недоумения многие современные философы математики нашли радикальный выход. Они объявили всякую математику фикцией, или, скорее, набором фикций. Фиктивны математические объекты, включая числа и фигуры, фиктивны и правила вывода [13], хотя о последних говорится нечасто, по большей части даже фикционалисты не ставят под сомнение логику.

Согласно одному из ведущих теоретиков фикционализма Х. Филду, поскольку чисел «на самом деле» не существует, нет принципиальной разницы между утверждением « $2*2=4$ » и « $2*2=5$ », разница между ними аналогична разнице между утверждениями «Санта-Клаус живёт на Северном полюсе» и «Санта-Клаус живёт в Тель-Авиве»: оба ложны, поскольку Санта-Клауса нет, но одно соответствует принятому дискурсу (т.е. так сложилось в истории), а второе не соответствует. Критерий истины здесь – история математики [13]. В этот контекст очень хорошо ложатся мысли Д. Блурра о возможности альтернативной математики [1].

Исследователь математического номинализма Otávio Bueno выделяет пять проблем, которые должны быть решены как приверженцами фикционализма, так и платонизма [14]:

1. Эпистемологическая проблема математики
2. Проблема приложений математики
3. Проблема единой семантики
4. Проблема принятия математического дискурса буквально
5. Онтологическая проблема.

1. *Эпистемологическая проблема* заключается в том, что, как сказано выше, математические объекты идеальны, а математики – люди из плоти и крови, существующие в физическом мире. Мозг математика – физический объект. Поэтому у него нет доступа к миру идеального. Здесь надо заметить, что, согласно фикционализму, доступ к дискурсу (из которого складывается история математики) у человека есть, хотя дискурс тоже можно отнести к идеальной предметности. Фикционалисты не верят в то, что платоническое царство математических идей существует, но даже если оно существует, доступа к нему быть не может. Здесь вспоминаются также авторы Дж. Лакофф и Р. Нуньес, которые тоже писали о том, что математика – это продукт мозга (и даже всего тела), а к платоническому царству доступа у человека нет [5]. Таким образом, эпистемологическая проблема – это камень преткновения для платониста. Естественно, фикционалисты объясняют математическое познание через конструкции, которые проводятся математиками для математиков, без обращения к внешнему источнику идей.

2. Однако для фикционалистов камнем преткновения является следующая проблема: *проблема приложений математики*. Она заключается в том, что математика является «необъяснимо эффективной» в физике [2] и других приложениях (например, инженерном деле). Даже У. Куайн, который никак не является сторонником платонизма, признает, что аргумент незаменимости математики – это очень сильный аргумент за то, что в математике есть, так сказать, «своя правда», что она не только выдумка математиков. Также считает и Х. Патнем [19]. Причем в физике, как пишет Вигнер [2], используются математические объекты, которые были введены в оборот давно и без всякой связи с физикой. Уже после того, как математики исследовали их свойства, они начинают играть роль в физических теориях. Согласно Вигнеру, это практически чудо. В этой связи сейчас появилось новое пифагорейство – учение о том, что вселенная носит математический характер [20].

3. *Проблема единой семантики*. Здесь мы видим продолжение рассуждений из пункта 2. Если математика используется в естественной науке, и утверждения естественной науки верны,

то верны также и математические утверждения. У этих двух групп высказываний должна быть единая семантика. Чтобы развести математику и естественную науку, нужно отделить одни предложения от других. Многие считают, что это невозможно, хотя Х. Филд сделал попытку переформулировать теорию Ньютона без математических утверждений [16]. На мой взгляд, это выглядит неубедительно, однако многие математики находят его попытки интересными [14]. На мой взгляд, проблема единой семантики остается камнем преткновения для фикционализма.

4. *Проблема принятия математического дискурса буквально.* В своей работе математики никогда не делают оговорки типа «Если числа существуют», то существует бесконечно много простых чисел». Они принимают буквальное содержание высказываний, для них числа, естественно, существуют. Физики, работая в своей науке, тоже никогда не делают таких условных высказываний, они принимают математический дискурс буквально. Фикционалисты, чтобы объяснить математическую практику, вынуждены делать именно такие оговорки. Это делается в рамках так называемого «если-то-изма» (if-then-ism). Это делает выкладки крайне громоздкими и, как кажется, совершенно не увеличивает их убедительность, т.к. математические высказывания убедительны, так сказать, сами по себе. Платоники здесь имеют явное преимущество. Вообще работающий математик практически всегда платоник или, по-другому говоря, реалист: предложения математики для него реальны. Считать их ложными, а их объекты несуществующими – означает идти против практики и математики, и физики.

5. *Онтологическая проблема.* Как уже стало ясно, здесь мы имеем самое фундаментальное расхождение между платониками и фикционалистами (номиналистами). Платоники вводят понятие математической вселенной, существование которой надо как-то объяснить и описать. В современной философии определенно есть тренд в сторону материализма, с которым связана резкая критика платоновского мира идеальных объектов. Выше говорилось, что если математический мир существует, то неясно, каков к нему эпистемологический доступ. В критике платонизма говорится, что этого мира вообще не может существовать. Существует только физический мир. С этим бы не согласился К. Поппер, который говорит о «третьем мире», мире объективного знания. Но современные материалисты не верят в этот попперовский третий

мир. Особенно здесь слышны голоса социальных и радикальных конструктивистов, которые считают, что математический мир придумывают сами математики. Как мы видим, только «аргумент незаменимости» математики в естественной науке мешает объявить математику фикцией.

Теперь мы можем сформулировать основную проблему философии математики. Хотя Буэно выделяет пять проблем, ясно, что они сводятся к одной: существует ли идеальный мир. Вопрос доступа к этому миру – это обратная сторона того же вопроса. Если автономного математического мира не существует, то проблема доступа снимается сама собой. И тогда вопрос о незаменимости математики решить становится очень трудно.

Если же автономный математический мир существует, то проблема доступа становится загадочной. Приходится вводить понятие интуиции, умозрения, гуссерлевского *Wesensschau*. Математики охотно рассуждают об интуиции [4, 9], но философы не склонны им в этом верить.

Таким образом, мы видим, что аналитические философы математики рассматривают всего два варианта, которые можно обозначить как платонизм и антиплатонизм. В антиплатонизм попадают и фикционализм, и номинализм, и конструктивизм.

Причем оба варианта сталкиваются с серьезными проблемами, практически встают в тупик. Платонизм встает в тупик при попытке объяснить способ существования мира идей и наши способности доступа к этому миру. Антиплатонизм встает в тупик при объяснении незаменимости математики в естественных науках.

Кроме того, антиплатонизм не согласуется с математической практикой. Важная особенность этой практики заключается в том, что математические утверждения носят принудительный характер. Если некоторое предложение математики доказано, оно признается истинным. Для фикционалиста, например, для Х. Филда, не существует феномена математического доказательства. Он, фактически, утверждает, что математические высказывания изначально бывают любыми, но некоторые потом закрепляются в истории математики (так сказать, дарвиновским отбором). Это находится в полном противоречии с общепринятым взглядом в математической практике. Доказательство – это в математике первое и последнее слово. Причем существуют однозначные правила вывода. Кстати, против логики не возражают и фикционалисты, хотя по идее они должны утверждать, что логика тоже про-

извольна, что определенные логические законы просто приняты в дискурсе. Но таких утверждений фикционалисты не делают.

Для нас же математические и логические рассуждения являются истинными либо ложными (реализм семантического значения [18]). Это не касается аксиом – они могут быть любыми – но следование из аксиом должно быть строго доказано.

Здесь нужно еще упомянуть так называемый «полнокровный» платонизм М. Балагера (plenitudinous, full-blooded platonism, [12]). Суть его заключается в том, что все, что непротиворечиво, существует в математической вселенной. То есть математическая вселенная вроде бы есть, но она не оказывает каузального воздействия. Она наполняется всем, чем угодно, лишь бы это было доказано логически. Например, показано, что континуум-гипотеза сочетается с аксиоматикой ZF, а также с этой аксиоматикой сочетается отрицание континуум-гипотезы. Это означает, что в математической вселенной существуют два домена, в одном из которых континуум-гипотеза верна, а в другом неверна. Хотя это и называется платонизмом, но на самом деле это не классический платонизм, а замаскированный конструктивизм. Согласно Балагеру, нам не нужна интуиция для того, чтобы работать в математике. Мы не должны «видеть» какое-то особое царство. Мы просто конструируем какие-то непротиворечивые теории, и оказывается, что они в математической вселенной уже есть. Филд говорил, что изучать математическую вселенную – это все равно что изучать деревню в Непале, с которой нет никакой связи. Балагер отвечает, что полнокровный платонизм допускает в Непале *любую* деревню, лишь бы о ней не было противоречивых утверждений [12]. Существует все то, что мы можем построить. Поэтому по сути этот путь тождественен конструктивизму, только с явно выраженным запретом на противоречия, чего нет, например, в конструктивизме Блура и фикционализме Филда.

Итак, мы видим, что и платонизм, и антиплатонизм сталкиваются с неразрешимыми трудностями. Однако есть третья альтернатива. Это трансцендентализм.

Трансцендентализм, разумеется, идет от Канта. Согласно трансцендентализму, математика – это наука, основанная на наших априорных познавательных способностях. Например, геометрия – это наука о пространстве, а пространство является априорной формой чувственности. Основой изучения собственной априорной способности Кант считает интуицию (созерцание),

но это не та интуиция, о которой пишут математики, например, Пуанкаре или Гёдель. Это не способность заглядывать в отдаленный идеальный мир, а чистое созерцание – т.е. восприятие, направленное на пространство как априори. Арифметика также покоится на созерцании, только теперь это созерцание времени. Математика общезначима и принудительна, поскольку у всех людей априорные способности и способность их созерцания одинаковы. Логическое мышление «размещается» в рассудке, который оперирует своими априорными формулами, основанными на 12 категориях. Таким образом, логика априорна, как и геометрия, и арифметика.

Трансцендентализм Канта решает проблемы, которые, как было сказано выше, стоят перед платонизмом и перед антиплатонизмом.

В отличие от платонизма, трансцендентализм не постулирует отдельного математического царства. Более того, он категорически заявляет, что мир вещей в себе (или, скорее, мир как вещь в себе) непознаваем. В этом смысле математика не является наукой о каком-то отдельном мире. Она чисто конструктивна, недаром радикальный конструктивизм имеет свои идейные корни в философии Канта [6]. В этом трансцендентализм соприкасается с антиплатонизмом.

Однако он не тождественен современному антиплатонизму, например, фикционализму, поскольку математические истины в нем имеют принудительный характер. Априорные способности, как уже говорилось, общие для всех людей. В отличие от фикционализма, трансцендентализм не говорит, что объекты математики – фикции. Они не имеют онтологического характера, но их эпистемический характер несомненен.

Трансцендентализм очень легко и элегантно разрешает проблему незаменимости математики, ее «необъяснимой эффективности» по Вигнеру. Поскольку априорные способности фундируют и математику, и физику, нет ничего удивительного в том, что математика и физика находятся в гармонии между собой. Они являются продуктом человеческого познания, которое основано на априорных способностях, например, на априорной форме чувственности – пространстве. По Канту, только так и должно быть, математика должна входить в физику по самому смыслу априоризма.

Таким образом, трансцендентализм не упирается в онтологический тупик, как упираются в него платонизм и фикционализм.

Однако, безусловно, следует сказать о том, что в наше время доктрина Канта не может быть принята целиком. У трансцендентализма в его исходной кантианской версии есть свои непреодолимые затруднения. Надо сохранить дух Канта, но не букву его учения.

Во-первых, и это самое главное, современная нам математика уже не может быть названа основанной на созерцании. Часто в упрек Канту приводится тот факт, что он не предвидел развития неевклидовых геометрий. Это правда, поскольку он говорил о созерцании, а не о логике. Неевклидовы геометрии не основаны на созерцании априорного пространства, но это не мешает им развиваться. В 20-21 веках многие математики выступали против интуиции (т.е. против созерцания), достаточно назвать известную статью Х. Хана [11]. Наша априорная интуиция, т.е. созерцание евклидова пространства, приводит к различным ошибкам – обычно называют функцию Вейерштрасса, которая в любой точке непрерывна, но не имеет производных, в то время как интуиция говорит нам, что всякая непрерывная функция должна иметь производную, потому что всякая кривая должна иметь касательную.

Весьма трудным в философии математики Канта оказывается мышление о бесконечности – как бесконечности «вглубь», в смысле операций с бесконечно малыми величинами, так и бесконечности «вширь», т.е. возрастающей бесконечности. У Канта математика, помимо того, что основана на созерцании, еще и является продуктом чувственности и рассудка. Однако чувственность и рассудок не могут выходить за пределы возможного опыта. Они, собственно, являются условиями возможности опыта. Но бесконечность ни в каком виде не может быть дана в опыте. Здесь надо упомянуть Г. Когена, который, отталкиваясь от Канта, предлагает иную картину чистого математического мышления [10]. Согласно Когену, мы мыслим бесконечно малыми, и, хотя это мышление выходит за пределы опыта, в этом нет ничего страшного – оно продолжает оставаться убедительным. Именно благодаря такому мышлению природа воспринимается, как это выражал Кант в разделе об антиципациях восприятия, «интенсивно», т.е., говорит Коген, без скачков.

Еще о проблемах кантовского априоризма. Его таблица категорий была убедительна для ученого 18 века, поскольку базировалась на тогдашней логике. Сейчас у нас уже ничего не осталось от той логики, у нас совсем другие логические теории – логика

высказываний, логика предикатов первого и второго порядков и т.п. Логические категории современного мыслителя – это связки и кванторы. Поэтому теория рассудка Канта также должна быть усовершенствована. Для этого подходят логические системы Фреге или Рассела. Упомянутый выше Г. Коген также указывал на это обстоятельство. Он указывал и на то, что чистое мышление обходится без созерцания, потому что созерцание делает его уже менее «чистым», оно целиком находится в логической стихии. Он пишет: «Ничто и ни с какой стороны не может быть дано чистому мышлению; из-за этого, как и из-за любой вообще формы чистой данности, понятие чистого мышления ослабляется» [15, S.192]. Другими словами, чистое мышление – это игра разума, основанная только на логике.

Следует сказать об эволюционной эпистемологии К. Лоренца [7]. Согласно его учению, то, что является априорным для индивида, является апостериорным для вида. Возьмём для примера евклидову геометрию. Она постулирует, что у пространства три измерения. Это так потому, что в трёх измерениях происходят процессы, релевантные для выживания. В трёх измерениях растут деревья, живут животные, текут реки и так далее. Все это важно для выживания. Можем ли мы сделать отсюда вывод, что мир «на самом деле» трехмерен? Нет, он может быть четырех- или одиннадцатимерен, но мы можем сделать вывод, что в дополнительных измерениях ничего важного для выживания не случается. Наше априорное пространство трехмерно, поскольку так сложилось в ходе эволюции.

Аналогично обстоит дело со временем. Канта улучшают в том смысле, что психологическое время не тождественно объективному времени. При обсуждении данной темы, разумеется, необходимо сослаться на Гуссерля. Он говорит, что объективное время мира так же конституируется сознанием, как и субъективное время [3]. Более того, это конституирование связано с intersubjectивным модусом бытия, с бытием-с-другими [17]. Кроме того, необходима некая «вневременная точка» – полюс трансцендентального Эго. Гуссерль вводит понятие горизонта, т.е. отрезка времени, который воспринимается как единое настоящее. Однако подробно эти темы рассматривать в данной статье нет возможности.

Еще одно веское возражение Канту заключается в том, что априори понимается по-разному в разные эпохи. На это также указывает Г. Коген, а также современный социальный конструкти-

визм. Например, в античности числа рассматривались не так, как рассматриваются сейчас. Отношение к бесконечности также различается у античных математиков и мыслителей и в Новое время. Не существует чистого опыта, свободного от априорных установок, но эти априорные установки могут различаться у разных людей даже в одну эпоху и точно различаются у людей в разные эпохи. Это существенная поправка к априоризму Канта.

Что мы теперь можем сказать о нормативности в математике? Мы видели, что в антиплатонистических концепциях в философии математики нормативность доказательства снимается. В ход идут нормы дискурса. В дискурсе, конечно, существует своя нормативность, но она намного менее строга, чем это принято в классической математике. В то же время нормы строгости доказательства в обычной, не-фикционалистской математике сегодня строги как никогда [8, 9]. Однако ослабленные нормы истинности в фикционалистской философии математики входят в противоречие с тем, что математика эффективна в естественных науках (аргумент незаменимости). Она не могла бы быть другой, она обладает принудительной силой. В трансцендентализме ее принудительность связана с тем, что математика зависит от наших познавательных способностей. Однако, в отличие от того, что говорил Кант, она основана не на созерцании. Современная математика основана на логических способностях рассудка и на рассуждении разума. Логика «защита» в наш рассудок, хотя это и не та логика, о которой говорит Кант, а современная логика высказываний Фреге и логика предикатов Рассела. Нормы логики жесткие, они не допускают даже геометрической интуиции. Г. Коген писал, что чистое мышление не основывается ни на чем, кроме самого себя (т.е. своих норм). Поэтому мы можем сказать, что не следует поспешно отказываться от нормативности математики, как это делают фикционалисты.

Литература

1. *Блур Д.* Возможна ли альтернативная математика? / Пер. с англ. Е.Напреенко // Социология власти, № 6-7 (1). 2012. Сс. 150-177.
2. *Визнер Е.* Непостижимая эффективность математики в естественных науках // Успехи физических наук. Т. 94. 1968. Вып. 3. С. 535-546.
3. *Гуссерль Э.* Феноменология внутреннего сознания времени / Пер В.И. Молчанова. М.: Логос. 1994. 102 с.
4. *Дьедонне Ж.* Абстракция и математическая интуиция / Пер. с франц. // Математики о математике. М.: Знание. 1982.

5. *Лакофф Дж, Нуньес Р.* Откуда взялась математика: как разум во плоти создает математику. В: Спиридонов В.Ф, Фаликман М.В. Горизонты когнитивной психологии. Хрестоматия. М., 2012. С. 29-48.
6. *Лекторский В.А.* Кант, радикальный конструктивизм и конструктивный реализм в эпистемологии. Вопросы философии, 2005, № 8. С. 11–21.
7. *Лоренц К.* Кантовская доктрина априори в свете современной биологии. // Эволюционная эпистемология. Антология. / Ред., сост. Е.Н.Князева. М.: Центр гуманитарных инициатив, 2012. 704 с. С. 43-74.
8. *Перминов В.Я.* Развитие представлений о надежности математического доказательства. М., 1986
9. *Пуанкаре А.* Интуиция и логика в математике // Пуанкаре А. О науке / Пер.с. фр. Под ред. Л.С. Понтрягина. М.: Наука. 1989. 736 с. С. 205-218.
10. *Сокулер З.А.* Герман Коген – забытый философ науки. Вестник РУДН. 2021 [в печати]
11. *Хан Г.* Кризис интуиции. В: Математики о математике. М.: Знание. 1972. 48 с. Сс. 25-42.
12. *Balaguer M.* A Platonist Epistemology, Synthese, 103 (3), 1995, pp. 303-325
13. *Balaguer M.* Fictionalism in the Philosophy of Mathematics, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2018 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <<https://plato.stanford.edu/archives/fall2018/entries/fictionalism-mathematics/>>. Блуп, 2012
14. *Bueno O.* Nominalism in the Philosophy of Mathematics, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Fall 2020 Edition), Edward N. Zalta (ed.), forthcoming URL = <<https://plato.stanford.edu/archives/fall2020/entries/nominalism-mathematics/>>.
15. *Cohen H.* Logik der reinen Erkenntnis. Dritte Aufl. Berlin, 1922. 520 S.
16. *Field H.* Science without numbers. A defense of Nominalism. Oxford, 1980. 144 p.
17. *Husserl E.* Späte Texte über Zeitkonstitution (1929–1934). Die C-Manuskripte. Herausgegeben von D. Lohmar. Dordrecht: Springer, 2006. 455 p.
18. *Linnebo Ø.* Platonism in the Philosophy of Mathematics, The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2018 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <<https://plato.stanford.edu/archives/spr2018/entries/platonism-mathematics/>>. (дата обращения: 04.03.2021).
19. *Putnam H.* Indispensability Arguments in the Philosophy of Mathematics, in H. Putnam, Philosophy in an Age of Science: Physics, Mathematics and Skepticism, Cambridge, MA: Harvard University Press. 2012. 672 p.
20. *Tegmark M.* The Mathematical Universe. Foundations of Physics, 2008, Vol. 38, pp. 101-150.