

Academy of Sciences of the USSR
P.P. Shirshov Institute of Oceanology

A.A. GORUNOV; O.D. RUMIANTSEVA

FUNCTIONAL—MATRIX FORMALISM IN THE INVERSE SCATTERING
PROBLEMS OF SCALAR ACOUSTICS

MOSCOW
1991

(3) ЗДК
П 414

Академия наук СССР
Институт океанологии им. П.П. Ширшова

А.А. ГОРЮНОВ, О.Д. РУМЯНЦЕВА

ФУНКЦИОНАЛЬНО—МАТРИЧНЫЙ ФОРМАЛИЗМ
В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ РАССЕЯНИЯ
СКАЛЯРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ

НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА
им. Горького
МГУ

24

Москва

1991

ВВЕДЕНИЕ.....	2
ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ СКАЛЯРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ В РАМКАХ ТРАДИЦИОННОГО ПОДХОДА.....	6
1.1. Альтернативные формы записи уравнения рассеяния.....	6
1.2. Пространственно-спектральное представление и оператор рассеяния.....	15
1.3. Обратная задача рассеяния в борновском приближении.....	19
ГЛАВА 2. ФУНКЦИОНАЛЬНО-МАТРИЧНЫЙ ФОРМАЛИЗМ.....	24
2.1. Основные соотношения $\Phi M \Phi$	24
2.2. Уравнения рассеяния скалярной волны на возмущениях ρ , χ и возмущениях ρ , c фоновой среды.....	33
2.3. Пространственно-спектральные представления $\Phi M \Phi$	38
ГЛАВА 3. ПРИЛОЖЕНИЕ $\Phi M \Phi$ К ОБРАТНЫМ ЗАДАЧАМ РАССЕЯНИЯ СКАЛЯРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ.....	44
3.1. Особенности и преимущества $\Phi M \Phi$ применительно к обратным задачам дифракции в акустике.....	44
3.2. $\Phi M \Phi$ и задача волновой томографии (борновское приближение).....	48
ПРИЛОЖЕНИЕ.....	55
ЛИТЕРАТУРА.....	61

УДК 620.179.16

Предложена новая методика решения обратных задач акустического рассеяния. - задач определения характеристик рассеивателя на основании измерения рассеянного им поля. Эта методика базируется на обнаруженной симметрии уравнений рассеяния относительно взаимной замены акустических полей (поля давления и поля колебательной скорости) с одновременной взаимной заменой характеристик среды (сжимаемости и плотности). Разработанная методика существенно упрощает процедуру реконструкции рассеивателя по сравнению с ранее известными способами.

Применительно к задачам дифракционной томографии предлагаемый метод позволяет предельно упростить алгоритм дистанционного определения типа рассеивателя, процедуру сепарации неоднородностей плотности среды $\rho(\vec{r})$, неоднородности локального значения фазовой скорости звука в среде $c(\vec{r})$, локального значения сжимаемости среды $\kappa(\vec{r})$. Показано, что данная задача допускает чисто инженерное решение: существуют варианты конструкций приемно-облучающих апертур, регистрирующих поля, рассеянные неоднородностью лишь определенного типа.

В статье содержатся также конкретные рекомендации по конструированию томографических систем, содержащих векторные приемники (датчики акустической колебательной скорости). Использование этих приемников весьма перспективно в медицинской интроскопии, в задачах неразрушающего контроля и дефектоскопии, в гидро и сейсмоакустики.

Предложенная методика обеспечивает также значительное упрощение численных расчетов акустических полей в неоднородных средах, то есть решения прямых задач рассеяния, особенно в средах с резкими, скачкообразными изменениями свойств, носящими характер разрывов, границ.

The new approach to acoustic inverse scattering hardly simplifies the problem of identification and classification of scatterers. Quantitative computer reconstruction of scatterer also strongly simplifies. This access provides the optimisation of real acoustic tomography experience. This method vigorously simplifies the quantitative resolving of direct scattering problems in unhomogeneous media too.

The method is based upon found symmetry of scattering equations: if pressure and acoustic velocity fields are exchanged with simultaneous exchanging functions, describing compressibility and density of media, then scattering equations remain unchanged.

Ответственный редактор А. Г. Воронович

© Институт океанологии им. П. П. Ширшова АН СССР
ISBN 5-201-12638-5

ВВЕДЕНИЕ

Функционально-матричный формализм (ФМФ) как таковой известен давно, применительно к задачам рассеяния электромагнитных волн - в первую очередь. Суть его, чрезвычайно простая, может быть изложена в одном абзаце.

Она состоит в идее решать ту или иную совокупность дифференциальных уравнений, описывающих физическое явление, именно как систему исходных различных уравнений, не редуцируя ее к меньшему числу уравнений более высокого, как правило, порядка.

Применительно к уравнениям скалярной линейной акустики ФМФ состоит в решении системы из двух линейризованных уравнений первого порядка - уравнения непрерывности и уравнения движения - без сведения этой совокупности к волновому уравнению (или уравнению Гельмгольца) - единственному уравнению второго порядка.

Очевидно, что однозначного ответа на вопрос, какой из подходов продуктивнее - ФМФ или традиционный метод, связанный с решением волнового уравнения, - дать невозможно. В одних конкретных случаях предпочтительнее решать одно уравнение, но достаточно сложное, в других - систему из двух уравнений, зато более простых. Так, например, в электродинамике уравнения Максвелла вводятся в процессе обучения как совокупность отдельных дифференциальных уравнений первого порядка, то есть изложение электродинамики на первом этапе осуществляется в терминах ФМФ; вопросы же, связанные с распространением и рассеянием электромагнитных волн излагаются, на втором этапе, в традиционном ключе - на базе волнового уравнения.

Однако все линейные волновые процессы можно описать исчерпывающим образом, вовсе не прибегая к услугам волнового уравнения и, более того, не догадываясь даже о его существовании. Этот подход последовательно развивался и был развит Л.Б.Фелсеном (Leopold B.Felsen), профессором Электрофизического Политехнического института (Бруклин, США), и Н.Маркувицем (Nathan Marcuvitz), профессором прикладной физики в Нью-Йоркском университете [1]. Ими же были получены также основные выражения для матричной функции Грина применительно к задачам распространения и рассеяния акустических волн.

Практически же использование ФМФ для решения реальных задач акустики имеет сравнительно короткую историю. Впервые, видимо, этот формализм начал интенсивно применяться В.Б.Сурневым (Институт геофизики Уральского научного центра АН СССР).

В.Б.Сурневым были получены новые интегральные уравнения, описывающие рассеяние сейсмических волн локализованной неоднородностью [2], что позволило осуществить численное решение ряда прямых и обратных задач сейсмики, - результат, едва ли достижимый в рамках традиционного подхода.

В настоящей брошюре изложен вариант ФМФ, разработанный применительно к задачам распространения и рассеяния скалярной линейной акустики. Новизна предлагаемого варианта ФМФ состоит в значительном упрощении формализма, полученного и описанного Фелсеном и Маркувицем, - упрощении, которого удалось достичь без существенной утраты общности найденных соотношений. Суть отличия заключается в доказательстве правомерности замены аффинорного блока в интегрально-матричной функции Грина обычным скалярным элементом. Такое упрощение породило простой алгоритм оперирова-

ния с ФМФ-уравнениями, привело к физически наглядному механизму получения всех основных ФМФ-выражений линейной скалярной акустики.

Вторая отличительная особенность предлагаемого материала состоит в том, что разработанный вариант ФМФ вводится с существенным акцентом на потенциальные приложения его для решения обратных задач акустического рассеяния, - аспект, практически никак не затронутый в указанном фундаментальном труде Фелсена и Маркувица, но, безусловно, чрезвычайно перспективный в силу бурного развития обратных задач в целом и томографических направлений, в частности.

Брошюра состоит из трех маленьких глав и приложения. Она построена следующим образом.

В первой главе кратко изложены основы традиционного подхода к волновым задачам скалярной акустики, прямым и обратным. Подробно рассмотрена обратная задача рассеяния в борновском приближении (задача волновой акустической томографии), проблема идентификации типа рассеивателя в томографическом эксперименте.

Вторая глава посвящена ФМФ как таковому. В ней представлены основные альтернативные формы записи уравнений рассеяния скалярной линейной акустики на языке ФМФ. Подробно описаны пути перехода от ФМФ к традиционному способу описания процесса рассеяния, демонстрируется эквивалентность уравнений, полученных в рамках различных подходов, в том числе с помощью операторов рассеяния.

В третьей главе обсуждаются возможности и перспективы использования ФМФ применительно к решению обратных задач рассеяния, в частности, при решении задач понациональной идентификации типа рассеяния. Обсуждаются новые практические возможности, воз-

никающие при использовании ОМФ применительно к задачам акустической интроскопии. Подробно рассмотрена задача рассеяния в борновском приближении (однократное рассеяние; задача акустической волновой томографии) на языке ОМФ; приводятся не совсем очевидные (с точки зрения традиционного подхода) практические рекомендации, которые могут оказаться полезными при организации интроскопических экспериментов.

И, наконец, в приложение вынесены вопросы, связанные с обоснованием предлагаемого варианта ОМФ; указана область его применимости, а также особенность, отличающая разработанный ОМФ от "стандартного" функционально-матричного формализма Фелсена и Маркувица.

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ СКАЛЯРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ В РАМКАХ ТРАДИЦИОННОГО ПОДХОДА

1.1. Альтернативные формы записи уравнения рассеяния

Акустическое давление $p(\vec{r}, t)$ и вектор колебательной скорости частиц среды $\vec{v}(\vec{r}, t)$ - функции, описывающие звуковое поле, - связаны двояко: уравнением непрерывности и уравнением движения. Эти уравнения в приближении линейной акустики имеют, как известно, вид [3,4]:

$$\begin{cases} x(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial t} p(\vec{r}, t) + \nabla \vec{v}(\vec{r}, t) = s_0(\vec{r}, t) \\ \nabla p(\vec{r}, t) + \rho(\vec{r}) \frac{\partial}{\partial t} \vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{f}_0(\vec{r}, t). \end{cases} \quad (1.1)$$

Здесь $x(\vec{r})$ и $\rho(\vec{r})$ - локальные значения сжимаемости и плотности среды, $s_0(\vec{r}, t)$ - плотность скалярного источника частиц, $\vec{f}_0(\vec{r}, t)$ - плотность объемных сил.

Предполагая временную зависимость пропорциональной $\exp(-i \omega_0 t)$, перейдем от (1.1) к монохроматической задаче, сохраняя для простоты те же обозначения p , $\vec{v}$, s_0 , $\vec{f}_0$ для спектральных амплитуд:

$$\begin{cases} -i \omega_0 x(\vec{r}) p(\vec{r}, \omega_0) + \nabla \vec{v}(\vec{r}, \omega_0) = s_0(\vec{r}, \omega_0) \\ \nabla p(\vec{r}, \omega_0) - i \omega_0 \rho(\vec{r}) \vec{v}(\vec{r}, \omega_0) = \vec{f}_0(\vec{r}, \omega_0). \end{cases} \quad (1.2)$$

Система (1.2) обладает замечательным свойством, состоящим в том, что вектор колебательной скорости $\vec{v}$ несложно исключить, редуцируя (1.2) к единственному уравнению относительно скалярной функции $p(\vec{r}, t)$. Действительно, применяя ∇ ко второму уравнению, получаем:

$$\nabla \vec{v}(\vec{r}, \omega_0) = \frac{\Delta p(\vec{r}, \omega_0) - \nabla \bar{f}_0(\vec{r}, \omega_0)}{i \omega_0 \rho(\vec{r})} - \frac{\nabla p(\vec{r}, \omega_0) - \bar{f}_0(\vec{r}, \omega_0)}{i \omega_0 \rho^2(\vec{r})} \nabla \rho(\vec{r})$$

и, подставляя найденное выражение в первое уравнение, приходим к равенству:

$$\begin{aligned} \Delta p(\vec{r}, \omega_0) + \omega_0^2 \chi(\vec{r}) \rho(\vec{r}) p(\vec{r}, \omega_0) = \\ = \frac{\nabla p(\vec{r}, \omega_0) \nabla \rho(\vec{r})}{\rho(\vec{r})} + s_0(\vec{r}, \omega_0) + \nabla \bar{f}_0(\vec{r}, \omega_0). \end{aligned} \quad (1.3)$$

при выводе (1.3) предполагалось, что источники зондирующего поля $\bar{f}_0(\vec{r}, \omega_0)$ удалены от области локализации неоднородности, и, в силу этого, произведение $\bar{f}_0(\vec{r}, \omega_0) \nabla \rho(\vec{r}) = 0$ всюду, так как носители функций $\bar{f}_0$ и $\nabla \rho$ не перекрываются.

Обозначив, как обычно, $k^2(\vec{r}, \omega_0) = \omega_0^2 \chi(\vec{r}) \rho(\vec{r}) = \omega_0^2 / c^2(\vec{r})$ (см., например, [5]) и $F_0 = s_0(\vec{r}, \omega_0) + \nabla \bar{f}_0(\vec{r}, \omega_0)$, приходим к уравнению для спектральной амплитуды акустического давления в неоднородной среде:

$$\begin{aligned} \Delta p(\vec{r}, \omega_0) + k^2(\vec{r}, \omega_0) p(\vec{r}, \omega_0) = \\ = \frac{\nabla p(\vec{r}, \omega_0) \nabla \rho(\vec{r})}{\rho(\vec{r})} + F_0(\vec{r}, \omega_0). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Уравнение (1.4) является отправным пунктом при постановке прямых и обратных задач рассеяния скалярной акустики. При этом для придания (1.4) большей наглядности в левой части равенства можно выделить гельмгольциан поля акустического давления, представляя волновое число $k^2(\vec{r}, \omega_0) = \omega_0^2 / c^2(\vec{r})$, зависящее от пространственных координат, в виде суммы фонового значения $k_0^2 = \omega_0^2 / c_0^2$ и его возмущения $k^2(\vec{r}, \omega_0) - k_0^2$:

$$\begin{aligned} \Delta p(\vec{r}, \omega_0) + k_0^2 p(\vec{r}, \omega_0) = \\ = (k_0^2 - k^2(\vec{r}, \omega_0)) p(\vec{r}, \omega_0) + \frac{\nabla p(\vec{r}, \omega_0) \nabla \rho(\vec{r})}{\rho(\vec{r})} + F_0(\vec{r}, \omega_0). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Правая часть (1.5) также представляет собой сумму: сумму источников полного поля; $F_0(\vec{r}, \omega_0)$ является источником первичного, лоцирующего поля (сторонним источником), а $(k_0^2 - k^2(\vec{r}, \omega_0)) p(\vec{r}, \omega_0)$ и $(\nabla p(\vec{r}, \omega_0) \nabla \rho(\vec{r})) / \rho(\vec{r})$ - источниками рассеянного поля, возникшими в среде в результате взаимодействия $p(\vec{r}, \omega_0)$ с пространственно распределенными неоднородностями $c(\vec{r})$ и $\rho(\vec{r})$ соответственно.

Применяя к (1.5) оператор, обратный гельмгольциану, переходим к интегральной форме записи (1.5) - уравнению Липпмана-Швингера:

$$\begin{aligned} p(\vec{r}, \omega_0) = \int G(\vec{r} - \vec{r}') (k_0^2 - k^2(\vec{r}', \omega_0)) p(\vec{r}', \omega_0) d\vec{r}' + \\ + \int G(\vec{r} - \vec{r}') \frac{\nabla p(\vec{r}', \omega_0) \nabla \rho(\vec{r}')}{\rho(\vec{r}')} d\vec{r}' + p_0(\vec{r}, \omega_0). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь $G(\bar{r}-\bar{r}')$ - функция Грина уравнения Гельмгольца, имеющая вид

$$\frac{ik_0|x-x'|}{2ik_0} - \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_0|\bar{r}-\bar{r}'|) - \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik_0|\bar{r}-\bar{r}'|}}{|\bar{r}-\bar{r}'|} \quad (1.7)$$

в пространствах R_1 , R_2 и R_3 соответственно, а $p_0(\bar{r}, \omega_0)$ представляет собой первичное лоцирующее поле

$$p_0(\bar{r}, \omega_0) = \int G(\bar{r}-\bar{r}') F_0(\bar{r}', \omega_0) d\bar{r}'$$

(Интегральный оператор

$$\int d\bar{r}' G(\bar{r}-\bar{r}')$$

является обратным дифференциальному оператору $\Delta + k_0^2$. Решение уравнения $(\Delta + k_0^2) p_0 = F_0$ существует, единственно и представимо в вышеуказанном виде при условии, что свертка F_0 и G существует: см., например, [6].)

Основная неприятность, связанная с (1.6), состоит в том, что рассеивающие неоднородности $c(\bar{r})$ и $\rho(\bar{r})$ входят в (1.6) не самым простым образом. Это относится в первую очередь к $(\nabla p(\bar{r}, \omega_0) \nabla p(\bar{r})) / \rho(\bar{r})$ - источнику поля, рассеянного неоднородностью плотности, члену, зависящему не только от самих значений функции $\rho(\bar{r})$, но и содержащему ее пространственные производные. Эта трудность обсуждалась в ряде работ; разработан ряд способов борьбы с ней (см. [7, 8], а также библиографию в [8]). Наиболее эффективным способом преобразования (1.6), упрощающим манипуляцию с уравнением (1.6) (но не снимающим проблему как

таковую), следует, видимо, признать подстановку Бергманна [9]:

$$q(\bar{r}, \omega_0) = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho(\bar{r})}} p(\bar{r}, \omega_0). \quad (1.8)$$

Подставляя (1.8) в (1.5), получаем вариант записи (1.6):

$$q(\bar{r}, \omega_0) = \int G(\bar{r}-\bar{r}') n(\bar{r}', \omega_0) q(\bar{r}', \omega_0) d\bar{r}' + q_0(\bar{r}, \omega_0), \quad (1.9)$$

в котором

$$n(\bar{r}, \omega_0) = (k_0^2 - k^2(\bar{r}, \omega_0)) + \sqrt{\frac{\rho(\bar{r})}{\rho_0}} \Delta \left(\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho(\bar{r})}} \right). \quad (1.10)$$

Из выражений (1.9)-(1.10) следует, что уравнение (1.6), описывающее рассеяние акустического поля давления на неоднородности показателя преломления $\omega_0^2 n_c(\bar{r}) = k_0^2 - k^2(\bar{r}, \omega_0)$ и неоднородности плотности среды $\rho(\bar{r})$, может быть сведено к уравнению Липпмана-Швингера рефракционного типа (1.9) с некоторым фиктивным рефракционным индексом $n(\bar{r}, \omega_0) = \omega_0^2 n_c(\bar{r}) + n_\rho(\bar{r})$.

Это обстоятельство резко упрощает решение прямой задачи рассеяния, то есть задачи вычисления рассеянного поля $p(\bar{r}, \omega_0) - p_0(\bar{r}, \omega_0)$ при известных неоднородностях и заданном виде облучающего поля.

Уравнение (1.9) можно изобразить символически:

$$q = G n q + q_0, \quad (1.11)$$

где G - интегральный оператор с функцией Грина (1.7) в качестве ядра, n - оператор умножения на функцию (1.10), а q и q_0 - функции, описывающие поля в соответствии с (1.8).

В этом случае q выражается с помощью резольвенты уравнения (1.9) - уравнения Фредгольма II рода относительно q :

$$q = \left(E - G n \right)^{-1} q_0. \quad (1.12)$$

Другой вариант: уравнение (1.11) можно разложить по итерированным ядрам, развернув его в известный ряд Борна-Неймана.

Действительно, подставив вместо q в правой части (1.11) его выражение (всю правую часть (1.11)), получаем в результате первой итерации:

$$q = G n G n q + G n q_0 + q_0.$$

Повторяя M -кратно данную процедуру, приходим к равенству:

$$q = q_0 + \sum_{n=1}^M \left(G n \right)^n q_0 + \left(G n \right)^{M+1} q$$

и в пределе, при $\| G n \| < 1$, получаем ряд Борна-Неймана:

$$q = q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(G n \right)^n q_0. \quad (1.13)$$

Значительно сложнее обстоит дело с решением обратной задачи применительно к уравнению (1.6) (либо (1.8)-(1.10)). При этом

под обратной задачей понимается задача определения $s(\bar{r})$ и $\rho(\bar{r})$, локализованных в некоторой области $\mathcal{X}$, на основе дистанционного зондирования. (Вне области $\mathcal{X}$ функции $s(\bar{r})$ и $\rho(\bar{r})$ принимают фоновые значения $s(\bar{r}) = s_0$, $\rho(\bar{r}) = \rho_0$.) Иными словами, область $\mathcal{X}$ облучается удаленными от нее источниками, рассеянное же поле регистрируется также на удалении от области $\mathcal{X}$, в некоторой области $\mathcal{Y}$, не имеющей с $\mathcal{X}$ общих точек.

Таким образом, применительно к обратной задаче уравнение (1.9) может быть записано дважды:

$$\begin{cases} q(\bar{y}, \omega_0) = \int G(\bar{y}-\bar{r}') n(\bar{r}', \omega_0) q(\bar{r}', \omega_0) d\bar{r}' + q_0(\bar{y}, \omega_0) \\ q(\bar{r}, \omega_0) = \int G(\bar{r}-\bar{r}') n(\bar{r}', \omega_0) q(\bar{r}', \omega_0) d\bar{r}' + q_0(\bar{r}, \omega_0). \end{cases} \quad (1.14)$$

Здесь $\bar{r}$ и $\bar{r}' \in \mathcal{X}$, $\bar{y} \in \mathcal{Y}$; то есть первое уравнение системы (1.14) связывает результат наблюдения $q(\bar{y}, \omega_0)$ с источниками $n(\bar{r}', \omega_0) q(\bar{r}', \omega_0)$, расположенными в недоступной для непосредственных измерений области $\mathcal{X}$, второе уравнение представляет собой связь, накладываемую уравнением Липпмана-Швингера на поведение $q(\bar{r}, \omega_0)$ внутри лоцируемого объекта.

Итерационные процедуры решения (1.14), приводящие к нахождению $n(\bar{r}, \omega_0)$ и попутно, с необходимостью, $q(\bar{r}, \omega_0)$, подробно изложены в [10-15]. (Вопросы, связанные с проблемой единственности получаемых решений освещены в [15-16].) Важным при этом является тот факт, что определением $n(\bar{r}, \omega_0)$ решение обратной задачи не заканчивается. Следующая процедурная сложность состоит в реконструкции, собственно, $s(\bar{r})$ и $\rho(\bar{r})$ из

уравнения

$$n(\bar{r}, \omega_0) = \omega_0^2 n_c(\bar{r}) + n_p(\bar{r}) =$$

$$= \omega_0^2 \left(\frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c^2(\bar{r})} \right) + \sqrt{\frac{\rho(\bar{r})}{\rho_0}} \Delta \left(\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho(\bar{r})}} \right). \quad (1.15)$$

Эта реконструкция осуществляется в два этапа. На первом этапе из $n(\bar{r}, \omega_0)$ выделяются вклады $n_c(\bar{r})$ и $n_p(\bar{r})$. После сепарации их, на втором этапе, задача сводится к определению $c(\bar{r})$ и $\rho(\bar{r})$ из двух уравнений:

$$n_c(\bar{r}) = \frac{c^2(\bar{r}) - c_0^2}{c_0^2 c^2(\bar{r})}, \quad n_p(\bar{r}) = \sqrt{\frac{\rho(\bar{r})}{\rho_0}} \Delta \left(\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho(\bar{r})}} \right). \quad (1.16)$$

Выделить вклады $n_c(\bar{r})$ и $n_p(\bar{r})$ из $n(\bar{r}, \omega_0)$ несложно благодаря известной частотной зависимости $n(\bar{r}, \omega_0)$ [15-19]. Действительно, лоцируя объект хотя бы на двух различных частотах ω_0 , ω_1 и решая для каждой из них систему (1.14), приходим к новым, вспомогательным уравнениям с неизвестными $n_c(\bar{r})$ и $n_p(\bar{r})$:

$$\begin{cases} n(\bar{r}, \omega_0) = \omega_0^2 n_c(\bar{r}) + n_p(\bar{r}) \\ n(\bar{r}, \omega_1) = \omega_1^2 n_c(\bar{r}) + n_p(\bar{r}) \end{cases} \quad (1.17)$$

Из (1.17) следует, что

$$n_c(\bar{r}) = \frac{n(\bar{r}, \omega_0) - n(\bar{r}, \omega_1)}{\omega_0^2 - \omega_1^2}$$

$$n_p(\bar{r}) = \frac{\omega_0^2 n(\bar{r}, \omega_1) - \omega_1^2 n(\bar{r}, \omega_0)}{\omega_0^2 - \omega_1^2}.$$

Наконец, окончательно получаем из (1.16) (см. [15]):

$$c(\bar{r}) = \frac{c_0}{\sqrt{1 - n_c(\bar{r}) c_0^2}} \quad (1.18)$$

$$\rho(\bar{r}) = \frac{\rho_0}{\left(\left(E - L n_p(\bar{r}) \right)^{-1} L n_p(\bar{r}) + 1 \right)^2}. \quad (1.19)$$

Здесь E - единичный оператор, а L - интегральный оператор, обратный лапласиану (ньютонов потенциал), имеющий, например, в R_3 вид

$$L(\cdot) = \int \frac{d\bar{r}'}{|\bar{r} - \bar{r}'|} (\cdot)$$

Таким образом, решение обратной задачи рассеяния в рамках традиционного подхода связано с рядом трудностей.

Первая состоит в многоступенчатости процедуры реконструкции рассеивателя, выполняемой по схеме

$$n(\bar{r}, \omega) \rightarrow \{ n_c(\bar{r}), n_p(\bar{r}) \} \rightarrow \{ c(\bar{r}), \rho(\bar{r}) \}.$$

Вторая неприятность заключается в необходимости обработки данных минимум на двух частотах с целью сепарации $n_c(\bar{r})$ и $n_p(\bar{r})$, что приводит к усложнению процедуры измерения рассеянного поля (получению как $p(\bar{r}, \omega_0)$, так и $p(\bar{r}, \omega_1)$) и, кроме

того, к двукратному решению системы (1.14): для ω_0 и ω_1 .

Третья трудность связана с определением $\rho(\vec{r})$ по формуле (1.19). Она состоит в том, что вычислительные затраты, требуемые для реконструкции $\rho(\vec{r})$ по $p_r(\vec{r})$, вполне сравнимы с первым этапом решения обратной задачи рассеяния, состоящим в определении $n(\vec{r}, \omega_0)$ из (1.14).

И, наконец, если исконая неоднородность плотности $\rho(\vec{r})$ кусочно-непрерывна, то фиктивный рефракционный индекс $n(\vec{r}, \omega_0)$ в (1.14) превращается за счет оператора Δ в обобщенную функцию (двойной слой). а $q(\vec{r}, \omega_0)$ (характеристика не совпадающая с полем внутри рассеивающей неоднородности - см. (1.8)) становится на тех же многообразиях разрывной. Это обстоятельство рождает ряд крайне неприятных проблем, возникающих при организации вычислительных процедур. Учитывая, что кусочно-непрерывные рассеиватели являются в прикладных задачах скорее обыденностью, чем исключением, следует признать, что традиционная методика идентификации типа рассеивателя представляет (в отличие от ФМО-подхода) интерес во многом академический.

1.2. Пространственно-спектральное представление и оператор рассеяния

Соотношения, приведенные выше, связывают $s(\vec{r})$ и $\rho(\vec{r})$ - функции, описывающие рассеивающую неоднородность, - со спектральной амплитудой поля давления $p(\vec{r}, \omega_0)$. В ряде случаев, однако, бывает полезна и другая форма записи уравнений рассеяния, связывающая пространственный спектр поля давления с прост-

ранственным спектром функций, описывающих рассеивающее включение.

Введем Фурье-преобразования:

$$\begin{cases} \varphi(\vec{r}, t) = \int \varphi(\vec{k}, \omega) e^{-i\omega t + i\vec{k}\vec{r}} d\vec{k} d\omega \\ \varphi(\vec{k}, \omega) = \int \varphi(\vec{r}, t) e^{i\omega t - i\vec{k}\vec{r}} d\vec{r} dt \end{cases} \quad (1.20)$$

опуская для простоты нормировочный множитель Фурье-преобразования и обозначая спектр тем же символом, что и оригинал. (Нормировочный множитель Фурье-преобразования $\tilde{\varphi} \tilde{\varphi}^{-1}$ равен $(2\pi)^{-N}$, где N - размерность пространства, в котором рассматривается задача. Спектр и оригинал, обозначенные одним и тем же символом, несложно различить по аргументу.)

Так как Фурье-преобразование трансформирует свертку в произведение спектров, то уравнение (1.9) в импульсном пространстве следует записать следующим образом:

$$q(\vec{k}, \omega_0) = \frac{1}{k_0^2 - k^2} \int n(\vec{k} - \vec{k}', \omega_0) q(\vec{k}', \omega_0) d\vec{k}' + q_0(\vec{k}, \omega_0). \quad (1.21)$$

При выводе (1.21) использовалось то соображение, что гелмгольцизм $\Delta + k_0^2$ в импульсном пространстве имеет вид $-k^2 + k_0^2$ и, следовательно, оператор обратный ему равен $1 / (k_0^2 - k^2)$ в пространстве любой размерности. При этом предполагалось, что k_0 обладает сколь угодно малой, однако конечной положительной мнимой частью: $k_0 = k_{01} + i k_{02}$; $k_{02} \geq \epsilon > 0$.

Данное предположение означает наличие в фоновой среде затухания: произвольно малого, но вполне, вместе с тем, определенного (подробнее об этом см., например, [15]).

Уравнение (1.21) эквивалентно (1.9) как по сути, так и с вычислительной точки зрения; свертка $G \otimes nq$ из (1.9) трансформируется в (1.21) в произведение, однако произведение nq из (1.9) превращается в (1.21) в свертку.

Тем не менее, дуальность уравнений (1.9) и (1.21) указывает путь эффективной организации вычислительного алгоритма для полей в задачах рассеяния - алгоритма, использующего быстрое Фурье-преобразование (FFT). Суть его сводится к выражению

$$q(\bar{r}, \omega_0) - q_0(\bar{r}, \omega_0) = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{1}{k_0^2 - k^2} \mathcal{F} (n(\bar{r}, \omega_0) q(\bar{r}, \omega_0)) \right), \quad (1.22)$$

в котором $\mathcal{F}$ означает прямое Фурье-преобразование, а $\mathcal{F}^{-1}$ - обратное.

Преимущество вычислений поля на основании алгоритма (1.22) состоит в том, что FFT массива размерностью m требует $\approx m \ln m$ операций и, следовательно, численная реализация (1.22) сводится к $\approx 2m (\ln m + 1)$ операциям ($2m$ - два умножения, $2m \ln m$ - прямое и обратное FFT). В то же время непосредственное вычисление интегралов в (1.9) или в (1.21) нуждается в выполнении $\approx m^2$ операций. (Идея итерирования интегральных уравнений типа Липпмана-Швингера с использованием "возвратно-поступательных" переходов между пространством оригиналов и импульсным пространством принадлежит, видимо, Р.В.Герхбергу (R.W. archberg) и В.О.Секстону (W.O.Saxton) - [20-22].)

Наряду с вышеприведенным спектральным представлением задач рассеяния широко используется еще одно, так называемое Т-матричное представление, соответствующее описанию задач дифракции в терминах операторов рассеяния (Т-операторов) [23-26].

Уравнение для оператора рассеяния несложно получить, взяв за основу, например, (1.9).

Допустим, что облучение рассеивателя производится плоской волной с единичной амплитудой, то есть, иными словами, $p_0(\bar{r}, \omega_0) = \exp(i\bar{k}_{0x}\bar{r})$, где $|\bar{k}_{0x}| = \omega_0 / c_0$. Умножая (1.9) на функцию $n(\bar{r}, \omega_0)$, получаем:

$$n(\bar{r}, \omega) q(\bar{r}, \omega) = \\ = n(\bar{r}, \omega_0) \int G(\bar{r}-\bar{r}') n(\bar{r}', \omega_0) q(\bar{r}', \omega_0) d\bar{r}' + n(\bar{r}, \omega_0) e^{i\bar{k}_{0x}\bar{r}}. \quad (1.23)$$

Произведение $n(\bar{r}, \omega_0) q(\bar{r}, \omega_0)$ является источником, производящим "поле" $q(\bar{r}, \omega_0)$ при облучении неоднородности плоской волной единичной амплитуды, характеризуемой волновым вектором $\bar{k}_{0x}$. Обозначив это произведение функцией $T(\bar{r}, \bar{k}_{0x})$ (зависимость от ω_0 подразумевается, но опускается для краткости), получим:

$$T(\bar{r}, \bar{k}_{0x}) = n(\bar{r}, \omega_0) \int G(\bar{r}-\bar{r}') T(\bar{r}', \bar{k}_{0x}) d\bar{r}' + n(\bar{r}, \omega_0) e^{i\bar{k}_{0x}\bar{r}}. \quad (1.24)$$

Применяя к (1.24) Фурье-преобразование и переходя, таким образом, к пространственно-спектральному описанию, имеем:

$$T(\bar{k}, \bar{k}_{0x}) = \int \frac{n(\bar{k}-\bar{k}', \omega_0) T(\bar{k}', \bar{k}_{0x})}{k_0^2 - k'^2} d\bar{k}' + n(\bar{k}-\bar{k}_{0x}, \omega_0). \quad (1.25)$$

Фигурирующая в (1.25) функция $T(\bar{k}, \bar{k}_{0x})$ является комплексной амплитудой плоской волны (отвечающей волновому вектору $\bar{k}$)

разложения источника поля, рассеянного неоднородностью при облучении ее плоской волной единичной амплитуды, с волновым вектором $\bar{k}_{ex}$. Тем самым $T(\bar{k}, \bar{k}_{ex})$ устанавливает соответствие "падающая плоская волна $\bar{k}_{ex}$ " + "амплитуда источника рассеянного поля при $\bar{k}$ ", или, иными словами, описывает процесс рассеяния на языке трансформации падающих плоских волн в рассеянные плоские волны, чем и объясняется его наименование: "оператор рассеяния".

Численное решение задач рассеяния на базе уравнения (1.25) также допускает эффективное использование ФФТ [28].

1.3. Обратная задача рассеяния в борновском приближении

В предположении о том, что рассеивающая неоднородность "слаба" (это означает, что в выражении (1.11) $\|Gn\| \ll 1$), ряд Борна-Неймана можно оборвать на первом члене. Система (1.14) при этом приобретает вид:

$$\begin{cases} p(\bar{y}, \omega_0) = \int G(\bar{y}-\bar{r}') n(\bar{r}', \omega_0) \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho(\bar{r}')}} p_0(\bar{r}', \omega_0) d\bar{r}' + p_0(\bar{y}, \omega_0) \\ p(\bar{r}, \omega_0) \approx p_0(\bar{r}, \omega_0) \end{cases} \quad (1.26)$$

Она описывает рассеяние в борновском приближении: приближении однократного рассеяния.

Обозначив $\xi(\bar{r}, \omega_0) = n(\bar{r}, \omega_0) \sqrt{\rho_0/\rho(\bar{r})}$ и предположив также, что наблюдение рассеянного поля происходит в волновой зоне рассеивателя, а облучение - плоской волной единичной амплитуды

$\exp(i\bar{k}_{ex}\bar{r})$ ($|\bar{k}_{ex}| = \omega_0/c_0$), получаем для рассеянного поля:

$$\begin{aligned} p(\bar{y}, \omega_0) - p_0(\bar{y}, \omega_0) &\approx \int \exp\left(-ik_0 \frac{\bar{y}}{|\bar{y}|} \bar{r}'\right) \xi(\bar{r}', \omega_0) \exp(i\bar{k}_{ex}\bar{r}') d\bar{r}' = \\ &= \xi\left(k_0 \frac{\bar{y}}{|\bar{y}|} - \bar{k}_{ex}, \omega_0\right) = \xi(\bar{k}_{sc} - \bar{k}_{ex}, \omega_0). \end{aligned} \quad (1.27)$$

При выводе (1.27) было использовано разложение функции Грина (приближение Фурье):

$$-\frac{e^{ik_0|\bar{y}-\bar{r}|}}{4\pi|\bar{y}-\bar{r}|} \approx -\frac{e^{ik_0R_0}}{4\pi R_0} \exp\left[-ik_0 \frac{\bar{y}}{|\bar{y}|} \bar{r}'\right] \approx e^{-i\bar{k}_{sc}\bar{r}'},$$

в котором R_0 - так называемая дальность, то есть расстояние между началом координат, расположенным внутри рассеивателя, и удаленной от него приемной апертурой $\mathcal{Y}$ (см. Рис.1), а $\bar{k}_{sc} = k_0 \bar{y} / |\bar{y}|$.

$$\begin{aligned} |\bar{y} - \bar{r}'| &\approx |\bar{y}| - \frac{\bar{y}}{|\bar{y}|} \bar{r}' = \\ &= R_0 - \frac{\bar{y}}{|\bar{y}|} \bar{r}' \quad (|\bar{y}| = R_0) \end{aligned}$$

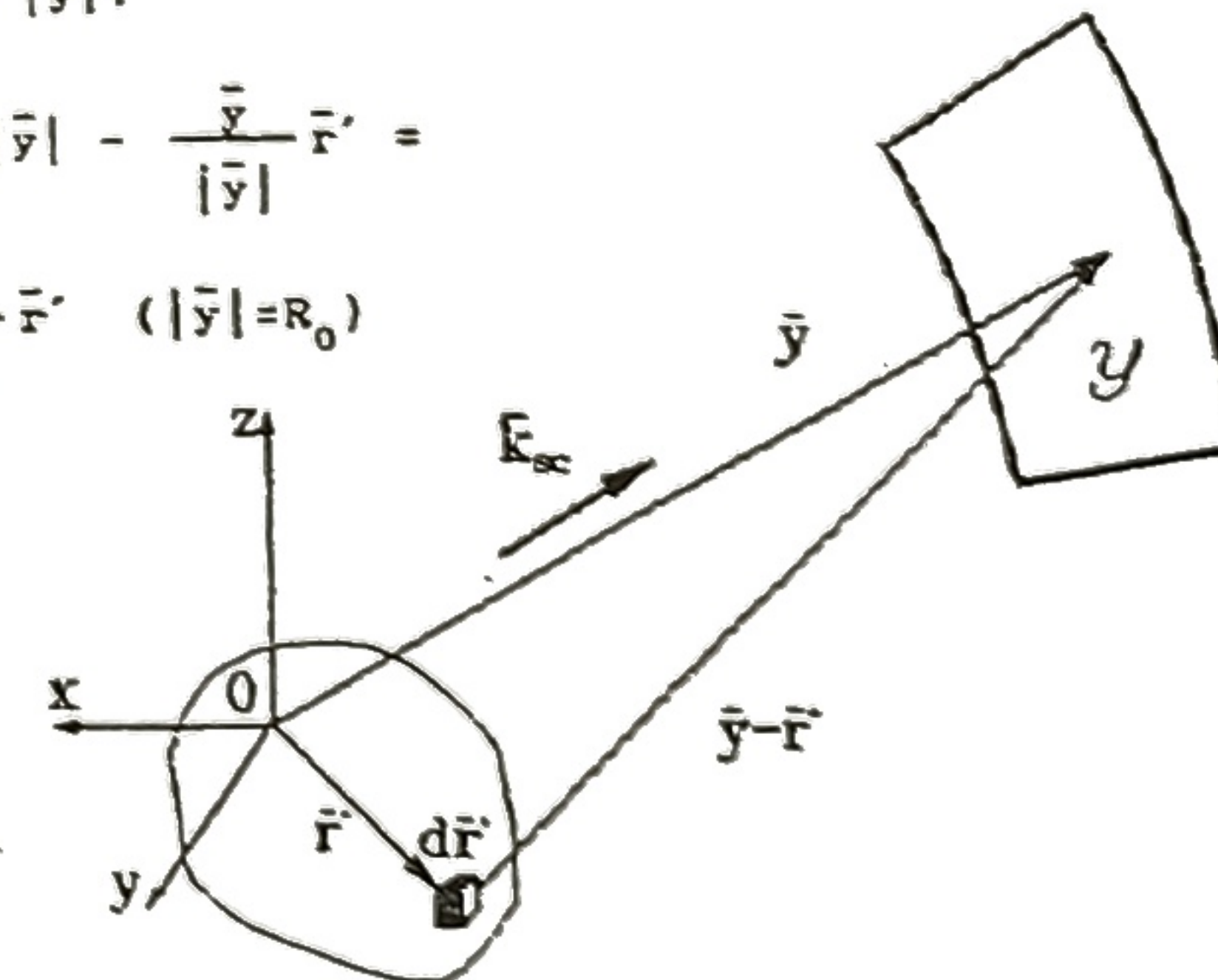


Рис.1

Таким образом, при облучении борновского рассеивателя плоской волной, характеризуемой волновым вектором $\bar{k}_{ex}$, наблюдение

поля в направлении $\bar{y}/|\bar{y}|$ от рассеивателя на частоте ω_0 (что соответствует регистрации плоской волны с волновым вектором $\bar{k}_{sc}$) означает с точностью до постоянного множителя непосредственное измерение $\xi(\bar{k}_{sc} - \bar{k}_{ex}, \omega_0)$ (см. Рис.2).

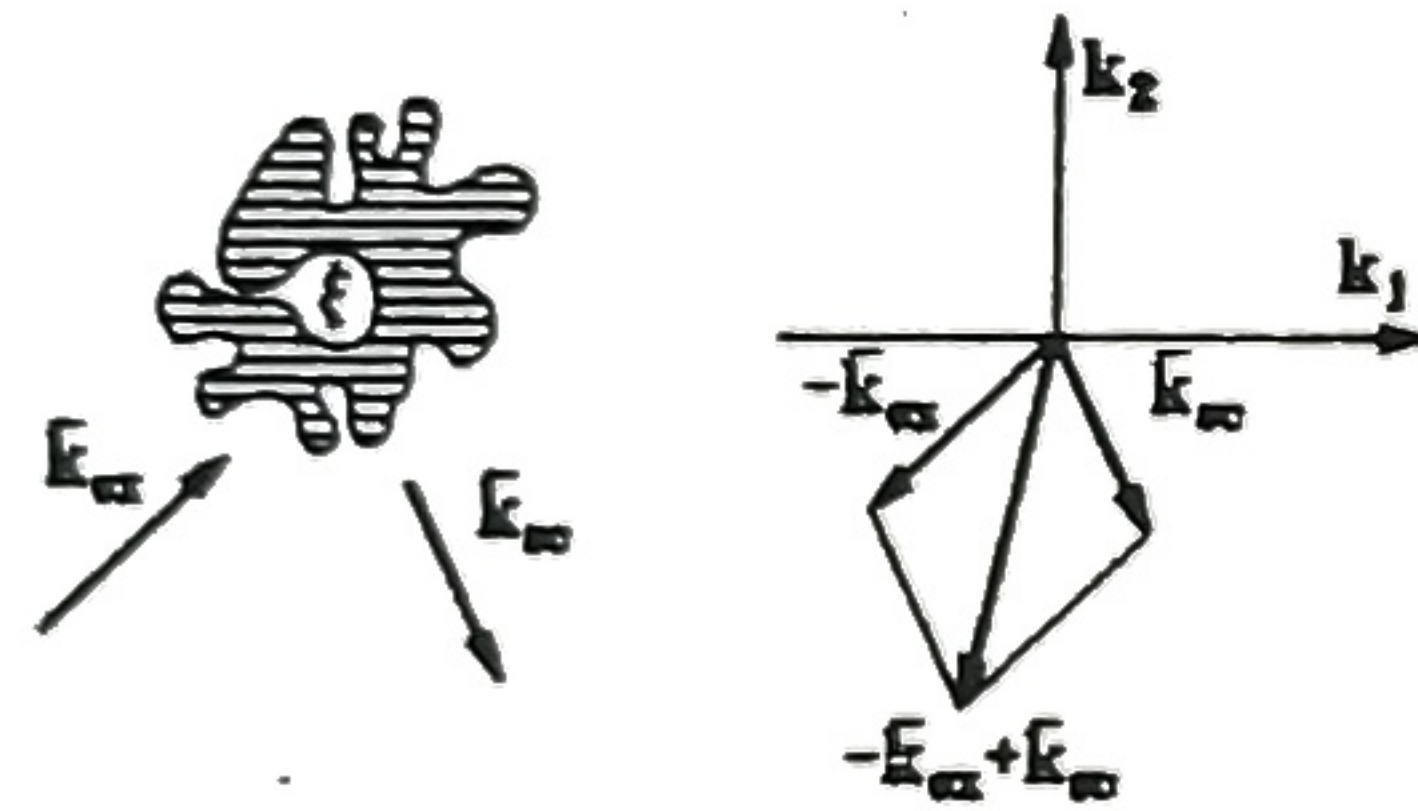


Рис.2

Понятно, что варьируя направления $\bar{k}_{ex}$ и $\bar{k}_{sc}$ (при неизменной частоте облучения $\omega_0 = c_0 |\bar{k}_{ex}| = c_0 |\bar{k}_{sc}|$), производится измерение $\xi(\bar{k}, \omega_0)$ для всех $\bar{k}$, принадлежащих кругу радиуса $2\omega_0/c_0$. Если спектр рассеивателя $\xi(\bar{k}, \omega_0)$ локализован в основном внутри данного круга, то реконструкция $\xi(\bar{r}, \omega_0)$ производится с помощью обратного Фурье-преобразования. Данная процедура, имеющая в литературе устоявшееся название - "дифракционная вычислительная томография", - описана во многих работах (см., например, [28-37]) и бурно развивается в настоящий момент.

Восстановив ξ для двух значений частот, то есть определив $\xi(\bar{r}, \omega_0)$ и $\xi(\bar{r}, \omega_1)$, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \xi(\bar{r}, \omega_0) = \omega_0^2 \mu(\bar{r}) + \nu(\bar{r}) \\ \xi(\bar{r}, \omega_1) = \omega_1^2 \mu(\bar{r}) + \nu(\bar{r}) \end{cases} \quad (1.28)$$

в которой

$$\mu(\bar{r}) = \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho(\bar{r})}} \left(\frac{1}{c_0^2} - \frac{1}{c^2(\bar{r})} \right), \quad \nu(\bar{r}) = \Delta \left(\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho(\bar{r})}} \right). \quad (1.29)$$

Решив (1.28) и произведя выделение вклада $\nu(\bar{r})$, зависящего только от $\rho(\bar{r})$, можно найти $\rho(\bar{r})$. После этого несложно определить и $c(\bar{r})$ из $\mu(\bar{r})$.

Таким образом, обратная задача рассеяния даже в простейшем варианте (линеаризованном, борновском), приводит к многоэтапной процедуре. Причем идентификация типа рассеивателя на первом этапе (сепарация μ и ν неоднородностей) требует использования многочастотного режима зондирования, решения вспомогательных, промежуточных задач, отнюдь не простых.

В заключение следует также обратить внимание на тот факт, что в борновском варианте обратной задачи рассеяния $c(\bar{r})$ невозможно реконструировать, не определив предварительно $\rho(\bar{r})$. Это обстоятельство вытекает непосредственно из (1.29), но ускользает, как правило, от внимания авторов большинства работ, посвященных дифракционной вычислительной томографии. Тем не менее, данный момент существенен в теоретическом плане. И вот почему.

Существует изысканный прием, позволяющий обойти эту сложность, восстановить $c(\bar{r})$, не определяя попутно при этом $\rho(\bar{r})$ (в том случае, разумеется, когда необходимо определить $c(\bar{r})$ и только $c(\bar{r})$). Прием этот был предложен В.А.Буровым, но, к сожалению, отдельно, акцентированно не публиковался, хотя использование именно этого метода подразумевалось, в частности, в работе [19]. Он состоит в том, что при решении задачи следует работать не с величинами $\mu(\bar{r})$, $\nu(\bar{r})$ и полем $\rho(\bar{r}, \omega_0)$ ($\rho_0(\bar{r}, \omega_0)$), а с величинами $n_c(\bar{r})$, $n_p(\bar{r})$ и $q(\bar{r}, \omega_0)$ ($q_0(\bar{r}, \omega_0)$) на базе системы (1.14).

При этом предполагается, что в (1.14) в случае «слабого» рассеяния $q(\vec{r}, \omega_0)$ под интегралом можно заменить на $q_0(\vec{r}, \omega_0)$. Приближение это весьма близко борновскому, в пределе совпадает с ним, но, строго говоря, не адекватно ему.

Действительно, $q_0(\vec{r}, \omega_0) \equiv p_0(\vec{r}, \omega_0)$ всюду, а $q(\vec{r}, \omega_0) = (\rho_0/\rho(\vec{r}))^{0.5} p(\vec{r}, \omega_0)$ при $\vec{r} \in \mathcal{R}$. Отсюда система (1.14) приобретает в этом случае (в отличие от (1.26)) вид:

$$\begin{cases} p(\vec{r}, \omega_0) = \int G(\vec{r}-\vec{r}') n(\vec{r}', \omega_0) p_0(\vec{r}', \omega_0) d\vec{r}' + p_0(\vec{r}, \omega_0) \\ q(\vec{r}, \omega_0) = \sqrt{\rho_0/\rho(\vec{r})} p(\vec{r}, \omega_0) \cong q_0(\vec{r}, \omega_0) = p_0(\vec{r}, \omega_0) \end{cases} \quad (1.30)$$

Ясно, что несмотря на внешнее сходство и смысловую близость в указанном подходе постулируется, фактически, равенство $\sqrt{\rho_0/\rho(\vec{r})} p(\vec{r}, \omega_0) \cong p_0(\vec{r}, \omega_0)$, а не $p(\vec{r}, \omega_0) \cong p_0(\vec{r}, \omega_0)$, как в классическом борновском приближении. В пределе, при $\rho(\vec{r}) \rightarrow \rho_0$, указанное приближение переходит в борновское и именно в этом смысле метод позволяет определить рефракционную неоднородность в борновском приближении уравнения рассеяния без предварительной реконструкции неоднородности плотности, — при заведомом отсутствии таковой.

Тем не менее основная слабость традиционного подхода состоит не в этой некорректности скорее филологического свойства, а в реальных практических трудностях, возникающих в рамках традиционного подхода и кратко упомянутых в пункте 1.1.

ГЛАВА 2. ФУНКЦИОНАЛЬНО-МАТРИЧНЫЙ ФОРМАЛИЗМ

2.1. Основные соотношения ФМФ

Акустическое поле, описываемое вектором

$$\vec{U}_0^T = (p_0(\vec{r}, \omega_0), \vec{v}_0(\vec{r}, \omega_0))$$

(верхний индекс T означает транспонирование: $\vec{U}_0^T$ — вектор-строка, $\vec{U}_0$ — вектор-столбец), подчиняется в однородном пространстве дифференциальному матричному уравнению:

$$\begin{pmatrix} x_0 \frac{\partial}{\partial t} & \nabla \\ \nabla & \rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0(\vec{r}, t) \\ \vec{v}_0(\vec{r}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_0(\vec{r}, t) \\ \vec{f}_0(\vec{r}, t) \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

в котором, как и ранее, x_0 и ρ_0 — сжимаемость и плотность однородной среды, $s_0(\vec{r}, t)$ — плотность скалярного источника частиц, $\vec{f}_0(\vec{r}, t)$ — плотность объемных сил. Первая строка системы (2.1) является уравнением непрерывности, вторая — уравнением движения Эйлера.

Полагая временную зависимость пропорциональной $\exp(-i\omega_0 t)$ и сохраняя те же обозначения $p_0, \vec{v}_0, s_0, \vec{f}_0$ для спектральных амплитуд, приходим к системе:

$$\begin{pmatrix} -i\omega_0 x_0 & \nabla \\ \nabla & -i\omega_0 \rho_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0(\vec{r}, \omega_0) \\ \vec{v}_0(\vec{r}, \omega_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_0(\vec{r}, \omega_0) \\ \vec{f}_0(\vec{r}, \omega_0) \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Система (2.2) записывается в лаконичной форме следующим образом:

$$D \bar{U}_0 = \bar{F}_0. \quad (2.3)$$

Дифференциально-матричный оператор D переводит вектор полей в вектор источников по правилу (2.2). Это выражение является исходным и в рамках ФМФ не редуцируется затем к единственному дифференциальному уравнению второго порядка - уравнению Гельмгольца. (Здесь и далее спектральные амплитуды $p_0, \bar{v}_0, s_0, \bar{f}_0$ называются просто полями и источниками; зависимость их от частоты краткости ради не изображается во многих последующих выражениях, хотя и подразумевается.)

Систему (2.2) можно решить, обратив оператор D и найдя тем самым для (2.2) матричную функцию Грина. Она имеет вид:

$$\mathcal{G}(\cdot) = \int d\bar{r}' \begin{pmatrix} i\omega_0 \rho_0 G(\bar{r}-\bar{r}') & \nabla G(\bar{r}-\bar{r}') \\ \nabla G(\bar{r}-\bar{r}') & i\omega_0 x_0 G(\bar{r}-\bar{r}') \end{pmatrix} (\cdot) \quad (2.4)$$

Здесь $G(\bar{r}-\bar{r}')$ - функция Грина уравнения Гельмгольца.

Убедимся в том, что $\mathcal{G}$ является оператором, обратным к D .

Действительно:

$$\mathcal{G} D \bar{U}_0 = \int d\bar{r}' \begin{pmatrix} i\omega_0 \rho_0 G & \nabla G \\ \nabla G & i\omega_0 x_0 G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i\omega_0 x_0 & \nabla' \\ \nabla' & -i\omega_0 \rho_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0(\bar{r}') \\ \bar{v}_0(\bar{r}') \end{pmatrix} =$$

$$= \int d\bar{r}' \begin{pmatrix} i\omega_0 \rho_0 G(-i\omega_0 x_0) + \nabla G \nabla', & i\omega_0 \rho_0 (G \nabla' - \nabla G) \\ i\omega_0 x_0 (G \nabla' - \nabla G) & , i\omega_0 \rho_0 G(-i\omega_0 x_0) + \nabla G \nabla' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0(\bar{r}') \\ \bar{v}_0(\bar{r}') \end{pmatrix} =$$

$$= \int d\bar{r}' \begin{pmatrix} \omega_0^2 \rho_0 x_0 G + \Delta G & , i\omega_0 \rho_0 \nabla G - i\omega_0 \rho_0 \nabla G \\ -i\omega_0 x_0 \nabla G + i\omega_0 x_0 \nabla G & , \omega_0^2 \rho_0 x_0 G + \Delta G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0(\bar{r}') \\ \bar{v}_0(\bar{r}') \end{pmatrix} =$$

$$= \int d\bar{r}' \begin{pmatrix} \delta(\bar{r}-\bar{r}') & , 0 \\ 0 & , \delta(\bar{r}-\bar{r}') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0(\bar{r}') \\ \bar{v}_0(\bar{r}') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0(\bar{r}) \\ \bar{v}_0(\bar{r}) \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Здесь штрих при операторе ∇' указывает на то, что дифференцирование производится по штрихованному аргументу $\bar{r}'$.

В приведенных преобразованиях использовалось равенство $\nabla G = -\nabla' G$ и теорема Фубини, подразумевающая, вообще говоря, обнуление на бесконечности одной из подынтегральных функций-сомножителей.

Таким образом, из (2.5) следует, что $\mathcal{G}$ является левым обратным к D . Покажем, что он же является и правым обратным:

$$D \mathcal{G} \bar{F}_0 = \begin{pmatrix} -i\omega_0 x_0 & \nabla \\ \nabla & -i\omega_0 \rho_0 \end{pmatrix} \int d\bar{r}' \begin{pmatrix} i\omega_0 \rho_0 G & \nabla G \\ \nabla G & i\omega_0 x_0 G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0(\bar{r}') \\ \bar{f}_0(\bar{r}') \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int d\vec{r}' \begin{pmatrix} -i\omega_0 x_0 i\omega_0 \rho_0 G + \nabla^2 G, & i\omega_0 x_0 (\nabla G - \nabla G) \\ i\omega_0 \rho_0 (\nabla G - \nabla G), & \nabla^2 G - i\omega_0 \rho_0 i\omega_0 x_0 G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0(\vec{r}') \\ \bar{f}_0(\vec{r}') \end{pmatrix} = \\
 &= \int d\vec{r}' \begin{pmatrix} \omega_0^2 x_0 \rho_0 G + \Delta G, & 0 \\ 0, & \omega_0^2 x_0 \rho_0 G + \Delta G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0(\vec{r}') \\ \bar{f}_0(\vec{r}') \end{pmatrix} = \\
 &= \int d\vec{r}' \begin{pmatrix} \delta(\vec{r}-\vec{r}'), & 0 \\ 0, & \delta(\vec{r}-\vec{r}') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0(\vec{r}') \\ \bar{f}_0(\vec{r}') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_0(\vec{r}) \\ \bar{f}_0(\vec{r}) \end{pmatrix}. \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

Тем самым доказано, что $\mathcal{G} = D^{-1}$.

Рассмотрим теперь $\Phi M \Phi$ применительно к волновым задачам линейной акустики в неоднородных средах.

Пусть $x = x(\vec{r})$ и $\rho = \rho(\vec{r})$. В этом случае система (2.2) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
 &\begin{pmatrix} -i\omega_0 x, & \nabla \\ \nabla, & -i\omega_0 \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(\vec{r}, \omega_0) \\ \bar{v}(\vec{r}, \omega_0) \end{pmatrix} = \\
 &\begin{pmatrix} -i\omega_0 x_0 - i\omega_0(x-x_0), & \nabla \\ \nabla, & -i\omega_0 \rho_0 - i\omega_0(\rho-\rho_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p(\vec{r}, \omega_0) \\ \bar{v}(\vec{r}, \omega_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_0(\vec{r}, \omega_0) \\ \bar{f}_0(\vec{r}, \omega_0) \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

ли, выделяя оператор D .

$$\begin{pmatrix} -i\omega_0 x_0, & \nabla \\ \nabla, & -i\omega_0 \rho_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} i\omega_0(x-x_0), & 0 \\ 0, & i\omega_0(\rho-\rho_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ \bar{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_0 \\ \bar{f}_0 \end{pmatrix}.$$

Откуда

$$\begin{pmatrix} -i\omega_0 x_0, & \nabla \\ \nabla, & -i\omega_0 \rho_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ \bar{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\omega_0(x-x_0)p \\ i\omega_0(\rho-\rho_0)\bar{v} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_0 \\ \bar{f}_0 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Применяя к (2.7) слева оператор $\mathcal{G}$ и замечая, что $\mathcal{G}\bar{f}_0$ дает первичное поле $\bar{U}_0^T = (p_0(\vec{r}, \omega_0), \bar{v}_0(\vec{r}, \omega_0))$, получаем уравнения для акустического давления и колебательной скорости, справедливые в любой точке неоднородной среды:

$$\begin{cases} p(\vec{r}) = p_0(\vec{r}) + \int i\omega_0 \rho_0 G(\vec{r}-\vec{r}') i\omega_0 (x(\vec{r}') - x_0) p(\vec{r}') d\vec{r}' + \\ + \int (\nabla G(\vec{r}-\vec{r}')) i\omega_0 (\rho(\vec{r}') - \rho_0) \bar{v}(\vec{r}') d\vec{r}' \\ \bar{v}(\vec{r}) = \bar{v}_0(\vec{r}) + \int (\nabla G(\vec{r}-\vec{r}')) i\omega_0 (x(\vec{r}') - x_0) p(\vec{r}') d\vec{r}' + \\ + \int i\omega_0 x_0 G(\vec{r}-\vec{r}') i\omega_0 (\rho(\vec{r}') - \rho_0) \bar{v}(\vec{r}') d\vec{r}'. \end{cases} \quad (2.8)$$

Уравнения (2.8) являются $\Phi M \Phi$ -аналогом уравнения Липпмана-Швингера. Первое уравнение системы (2.8) несложно получить как в рамках традиционного подхода [23], так и при стандартном $\Phi M \Phi$ описании по Белсену и Маркувицу (см. [1], а также "Приложение" в

данной брошюре). Второе уравнение системы (2.8) менее тривиально и требует модификации аффинного блока в стандартном ФМФ (см. "Приложение").

Введя обозначения, характеризующие неоднородности,

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \epsilon_x(\bar{r}) = x_0 - x(\bar{r}) \\ \epsilon_p &= \epsilon_p(\bar{r}) = p_0 - p(\bar{r}),\end{aligned}$$

перепишем (2.8) в символическом виде

$$\begin{aligned}p &= p_0 + \omega_0^2 p_0 G \epsilon_x p - i \omega_0 (\nabla G) \epsilon_p \bar{v} \\ \bar{v} &= \bar{v}_0 - i \omega_0 (\nabla G) \epsilon_x p + \omega_0^2 x_0 G \epsilon_p \bar{v}.\end{aligned}\quad (2.9)$$

Здесь G и ∇G — интегральные операторы-свертки, а ϵ_x , ϵ_p , p , $\bar{v}$ — функции, на которые они действуют.

В силу того, что для любых двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ справедливо равенство $\text{diag}(\bar{a}) \bar{b} = \text{diag}(\bar{b}) \bar{a}$, систему (2.9) можно представить в ФМФ двойко. Первый вариант,

$$\begin{pmatrix} p \\ \bar{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 \\ \bar{v}_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_0^2 p_0 G & -i \omega_0 \nabla G \\ -i \omega_0 \nabla G & \omega_0^2 x_0 G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x & 0 \\ 0 & \epsilon_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ \bar{v} \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

удобен для вычисления полей; (2.10) при этом является ФМФ-записью системы уравнений Фредгольма II рода, решаемой относительно неизвестного вектора поля $\bar{U}_0^1 = (p(\bar{r}, \omega_0), \bar{v}(\bar{r}, \omega_0))$.

Второй вариант,

$$\begin{pmatrix} p \\ \bar{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 \\ \bar{v}_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_0^2 p_0 G & -i \omega_0 \nabla G \\ -i \omega_0 \nabla G & \omega_0^2 x_0 G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & \bar{v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_p \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

хорошо приспособлен для организации итерационных процедур при решении обратных задач рассеяния. В этом случае при известном (оцененном) поле следует найти (оценить) вектор $\bar{\epsilon}^T = (\epsilon_x, \epsilon_p)$. Выражение (2.11) представляет собой в этом аспекте матричную запись системы уравнений Фредгольма I рода относительно вектора-функции $\bar{\epsilon}^T = (\epsilon_x, \epsilon_p)$.

Введя для лаконичности обозначения $\hat{U} = \text{diag}(\bar{U})$, $\hat{\epsilon} = \text{diag}(\bar{\epsilon})$,

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} \omega_0^2 p_0 G & -i \omega_0 \nabla G \\ -i \omega_0 \nabla G & \omega_0^2 x_0 G \end{pmatrix},$$

развернем (2.10) в ряд Борна-Неймана

$$\bar{U} = \bar{U}_0 + \hat{G} \hat{\epsilon} \bar{U}_0 + \hat{G} \hat{\epsilon} \hat{G} \hat{\epsilon} \bar{U}_0 + \dots + (\hat{G} \hat{\epsilon})^n \bar{U}_0 + \dots \quad (2.12)$$

Очевидно, что все альтернативные формы записи уравнения рассеяния, принятые в традиционной постановке (применительно к уравнению Гельмгольца), имеют ФМФ-аналог и, более того, тот же вид, с заменой G на $\hat{G}$, ϵ — на $\hat{\epsilon}$ и так далее.

Таким образом, ФМФ является обобщением известных уравнений рассеяния и, так как в рамках его поле описывается четырех-вектором $(p, \bar{v})$, а не скаляром (давлением, одним из компонентов вектора колебательной скорости либо потенциалом скорости), все выражения, расписываемые в явном виде, получаются довольно громоздкими. Это, безусловно, недостаток ФМФ, однако недостаток, свойственный большинству обобщающих аппаратов, в принципе.

Однако, несмотря на громоздкость, ФМФ несложен и позволяет без труда получить любой частный, конкретный вариант произвольной задачи рассеяния линейной скалярной акустики.

Несомненным достоинством ФМФ является и тот факт, что характеристики среды ϵ_x и ϵ_p входят в исходные уравнения линейно - утверждение, не являющееся справедливым применительно к традиционному подходу (1.3).

По поводу традиционной формы записи в [7], например, указано, что с помощью замены переменных можно перейти к уравнению, не содержащему градиентов плотности, - как это сделано в [8], - однако в общем случае зависимости плотности от всех трех пространственных координат это уравнение оказывается весьма громоздким. ФМФ предоставляет возможность получить простые уравнения рассеяния на неоднородности плотности, не содержащие пространственных производных $\rho(\vec{r})$, что весьма существенно как при решении прямых задач, так и, тем более, обратных.

В связи с этим в заключение раздела представляется полезным рассмотреть подробно именно этот частный случай, в качестве иллюстрации.

А именно, исходя из системы (2.9) ФМФ-представления, не содержащего пространственных производных характеристик среды, получить традиционную форму записи уравнения для акустического давления, содержащую $\nabla \rho(\vec{r})$. Этот переход наглядно иллюстрирует тот факт, что сложности, связанные с появлением члена $\nabla \rho(\vec{r})$ в уравнении рассеяния, являются продуктом и следствием традиционного подхода, неизбежно редуцирующего систему (2.1) к волновому уравнению.

Предположим, что в однородной безграничной среде, обладающей акустическими характеристиками x_0, ρ_0 , имеется локальное возмущение плотности, описываемое функцией $\epsilon_p = \rho_0 - \rho(\vec{r})$ ($\rho(\vec{r}) = \rho_0$ вне области локализации неоднородности).

Уравнения (2.9) - (2.10) в случае $\epsilon_x = x_0 - x(\vec{r}) = 0$ приобретают вид:

$$\begin{cases} \rho(\vec{r}) = \rho_0(\vec{r}) - i\omega_0 \int (\nabla G(\vec{r}-\vec{r}')) \epsilon_p(\vec{r}') \vec{v}(\vec{r}') d\vec{r}' \\ \vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}_0(\vec{r}) + \omega_0^2 x_0 \int G(\vec{r}-\vec{r}') \epsilon_p(\vec{r}') \vec{v}(\vec{r}') d\vec{r}'. \end{cases} \quad (2.13)$$

От первого уравнения системы (2.13) несложно перейти к традиционному уравнению для ρ , содержащему пространственные производные неоднородности плотности. Действительно,

$$\begin{aligned} & - i\omega_0 \int (\nabla G(\vec{r}-\vec{r}')) \epsilon_p(\vec{r}') \vec{v}(\vec{r}') d\vec{r}' = \\ & = i\omega_0 \int (\nabla' G(\vec{r}-\vec{r}')) \epsilon_p(\vec{r}') \vec{v}(\vec{r}') d\vec{r}' = \\ & = - i\omega_0 \int G(\vec{r}-\vec{r}') \nabla' (\epsilon_p(\vec{r}') \vec{v}(\vec{r}')) d\vec{r}' = \\ & = - i\omega_0 \int G(\vec{r}-\vec{r}') \left((\nabla' \epsilon_p(\vec{r}')) \vec{v}(\vec{r}') + \epsilon_p(\vec{r}') (\nabla' \vec{v}(\vec{r}')) \right) d\vec{r}'. \end{aligned}$$

При этом

$$\begin{aligned} (\nabla' \epsilon_p(\vec{r}')) \vec{v}(\vec{r}') &= - (\nabla' \rho(\vec{r}')) \vec{v}(\vec{r}') = \\ &= - (\nabla' \rho(\vec{r}')) \frac{\nabla' \rho(\vec{r}') - \vec{f}_0(\vec{r}')}{i\omega_0 \rho(\vec{r}')} = - \frac{\nabla' \rho(\vec{r}') \cdot \nabla' \rho(\vec{r}')}{i\omega_0 \rho(\vec{r}')}, \end{aligned}$$

так как $\nabla \rho = i\omega_0 \rho(\vec{r}) \vec{v} = \vec{f}_0$, а носители функций ϵ_p и $\vec{f}_0$ не перек-

рываются: $\bar{f}_0$ создает поле, зондирующее $\epsilon_p = \rho_0 - \rho(\bar{r})$ и, следовательно, источники облучаемого поля отделены от области локализации неоднородности.

Далее,

$$\begin{aligned} \epsilon_p(\bar{r}') \nabla' \cdot \bar{v}(\bar{r}') &= \epsilon_p(\bar{r}') (\epsilon_0(\bar{r}') + i\omega_0 \chi_0 \rho(\bar{r}')) = \\ &= i\omega_0 \chi_0 (\rho_0 - \rho(\bar{r}')) \rho(\bar{r}') \end{aligned}$$

по той же причине: $\epsilon_0(\bar{r})$ и $\epsilon_p(\bar{r})$ не перекрываются носителями. Отсюда

$$\begin{aligned} \rho(\bar{r}) &= \rho_0(\bar{r}) + \int G(\bar{r}-\bar{r}') \frac{\nabla' \rho(\bar{r}') \cdot \nabla' \rho(\bar{r}')}{\rho(\bar{r}')} d\bar{r}' + \\ &+ \omega_0^2 \int G(\bar{r}-\bar{r}') (\rho_0 \chi_0 - \rho(\bar{r}') \chi_0) \rho(\bar{r}') d\bar{r}'. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Второй интеграл в (2.14) описывает рассеяние акустических волн на с-неоднородности, возникшей из-за возмущения плотности среды при неизменной сжимаемости. Действительно, так как $c^2 = 1/(\rho\chi)$, то изменение плотности приводит (при $\chi = \text{const}$) к изменению фазовой скорости звука.

2.2. Уравнения рассеяния скалярной волны на возмущениях ρ , χ и возмущениях ρ , c фоновой среды

В рамках линейной скалярной акустики среда характеризуется, вообще говоря, тремя величинами: $\chi(\bar{r})$, $\rho(\bar{r})$ и $c(\bar{r})$. одна из

которых в силу связи $c^2 = 1/(\rho\chi)$ является "лишней", однозначно определяемой из двух остальных. Традиционный подход, опирающийся на волновое уравнение и уравнение Гельмгольца, оперирует, как правило, с парой ρ , c , что удобно, так как и плотность, и локальное значение скорости распространения монохроматической волны являются физически более зримыми величинами, чем степень сжимаемости среды в данной точке.

В свою очередь МФ, базирующийся на системе (2.2), органично включает в себя характеристики ρ и χ - пару, обеспечивающую высокую степень симметричности уравнений рассеяния, что тоже немаловажно с прагматической точки зрения. Поэтому представляется полезным получить соответствующие уравнения для обоих представлений, что и выполняется ниже.

Пусть в однородной безграничной среде, характеризуемой χ_0 , ρ_0 , имеются локальные возмущения $\epsilon_\chi = \chi_0 - \chi(\bar{r})$ и $\epsilon_\rho = \rho_0 - \rho(\bar{r})$, отделенные от источников зондирующего поля s_0 и $\bar{f}_0$.

Тогда для акустического давления из (2.8) имеем (см. вывод (2.14)):

$$\begin{aligned} \rho(\bar{r}) &= \rho_0(\bar{r}) + \int G(\bar{r}-\bar{r}') \frac{\nabla' \rho(\bar{r}') \cdot \nabla' \rho(\bar{r}')}{\rho(\bar{r}')} d\bar{r}' + \\ &+ \omega_0^2 \int G(\bar{r}-\bar{r}') \epsilon_p(\bar{r}') \chi(\bar{r}') \rho(\bar{r}') d\bar{r}' + \\ &+ \omega_0^2 \int G(\bar{r}-\bar{r}') \rho_0 \epsilon_\chi(\bar{r}') \rho(\bar{r}') d\bar{r}'. \end{aligned} \quad (2.15)$$

В правой части (2.15) имеются два интеграла, описывающих

рассеянное поле на препятствии "рефракционного" типа (в терминах рс-описания). Физический смысл первого из них ясен из пояснений и уравнению (2.14). Второй интеграл

$$\omega_0^2 \int G(\bar{r}-\bar{r}') \rho_0 \epsilon_x(\bar{r}') p(\bar{r}') d\bar{r}'$$

представляет собой поле, рассеянное на неоднородности скорости звука, возникшей исключительно из-за наличия возмущения x в среде. Положив $\rho(\bar{r}) = \rho_0$ всюду, получим из (2.15):

$$p(\bar{r}) = p_0(\bar{r}) + \int G(\bar{r}-\bar{r}') (k_0^2 - k^2(\bar{r}')) p(\bar{r}') d\bar{r}' \quad (2.16)$$

- уравнение рассеяния на препятствии чисто рефракционного типа. В общем же случае (присутствуют неоднородности обоих типов) два интеграла в (2.15) сливаются в один:

$$\begin{aligned} \omega_0^2 \int G(\bar{r}-\bar{r}') (\rho_0 x_0 - \rho(\bar{r}') x(\bar{r}')) p(\bar{r}') d\bar{r}' = \\ = \int G(\bar{r}-\bar{r}') (k_0^2 - k^2(\bar{r}')) p(\bar{r}') d\bar{r}', \end{aligned}$$

который в терминах рс-подхода описывает рассеяние на возмущении скорости звука, имевшей место (с точки зрения рх-подхода) из-за флуктуации как плотности, так и сжимаемости.

Естественно, что в предположении о том, что ρ и x изменяются таким образом, что $c(\bar{r}) = \text{const}$, из (2.15) получаем:

$$p(\bar{r}) = p_0(\bar{r}) + \int G(\bar{r}-\bar{r}') \frac{\nabla' p(\bar{r}') \cdot \nabla' p(\bar{r}')}{\rho(\bar{r}')} d\bar{r}'$$

- уравнение рассеяния для р-задачи (в рс-подходе).

Рассмотрим теперь уравнение рассеяния для $\bar{v}$ при наличии рассеивающих неоднородностей $\rho(\bar{r})$ и $x(\bar{r})$. Из (2.8) имеем:

$$\begin{aligned} \bar{v}(\bar{r}) = \bar{v}_0(\bar{r}) - i\omega_0 \int (\nabla G(\bar{r}-\bar{r}')) \epsilon_x(\bar{r}') p(\bar{r}') d\bar{r}' + \\ + \omega_0^2 x_0 \int G(\bar{r}-\bar{r}') \epsilon_p(\bar{r}') \bar{v}(\bar{r}') d\bar{r}'. \end{aligned}$$

Преобразуем первый интеграл:

$$\begin{aligned} - i\omega_0 \int (\nabla G(\bar{r}-\bar{r}')) \epsilon_x(\bar{r}') p(\bar{r}') d\bar{r}' = \\ = - i\omega_0 \int G(\bar{r}-\bar{r}') \nabla' (\epsilon_x(\bar{r}') p(\bar{r}')) d\bar{r}' = \\ = - i\omega_0 \int G(\bar{r}-\bar{r}') (p(\bar{r}') \nabla' \epsilon_x(\bar{r}') + \epsilon_x(\bar{r}') \nabla' p(\bar{r}')) d\bar{r}'. \quad (2.17) \end{aligned}$$

Далее, так как $\nabla' p(\bar{r}') = i\omega_0 \rho(\bar{r}') \bar{v}(\bar{r}')$ и $p(\bar{r}') = (\nabla' \cdot \bar{v}(\bar{r}')) / (i\omega_0 x(\bar{r}'))$ (в силу отдельности источников зондирующего поля и рассеивающих неоднородностей), и $\nabla' \epsilon_x(\bar{r}') = -\nabla' x(\bar{r}')$, (2.17) приобретает вид:

$$\int G(\vec{r}-\vec{r}') \frac{(\nabla' \cdot \vec{v}(\vec{r}'))(\nabla' x(\vec{r}'))}{x(\vec{r}')} d\vec{r}' + \omega_0^2 \int G(\vec{r}-\vec{r}') \rho(\vec{r}') \epsilon_x(\vec{r}') \vec{v}(\vec{r}') d\vec{r}'.$$

Отсюда получаем окончательно

$$\begin{aligned} \vec{v}(\vec{r}) = & \vec{v}_0(\vec{r}) + \int G(\vec{r}-\vec{r}') \frac{(\nabla' \cdot \vec{v}(\vec{r}'))(\nabla' x(\vec{r}'))}{x(\vec{r}')} d\vec{r}' + \\ & + \omega_0^2 \int G(\vec{r}-\vec{r}') (\rho(\vec{r}') x_0 - \rho(\vec{r}') x(\vec{r}')) \vec{v}(\vec{r}') d\vec{r}' + \\ & + \omega_0^2 \int G(\vec{r}-\vec{r}') (\rho_0 x_0 - \rho(\vec{r}') x_0) \vec{v}(\vec{r}') d\vec{r}'. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Сравнивая (2.18) и (2.15), несложно заметить симметрию. Так, например, (2.18) содержит член с пространственными производными x , причем структура его аналогична соответствующему интегралу, содержащему $\nabla \rho$, в (2.15). Действительно, если x и ρ изменяются так, что $c(\vec{r}) = \text{const}$ всюду, то (2.18) переходит в

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}_0(\vec{r}) + \int G(\vec{r}-\vec{r}') \frac{(\nabla' \cdot \vec{v}(\vec{r}'))(\nabla' x(\vec{r}'))}{x(\vec{r}')} d\vec{r}'$$

В общем же случае, так как $\rho(\vec{r}') x_0 - \rho(\vec{r}') x(\vec{r}') + \rho_0 x_0 - \rho(\vec{r}') x_0 = \rho_0 x_0 - \rho(\vec{r}') x(\vec{r}')$, получим:

$$\vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}_0(\vec{r}) + \int G(\vec{r}-\vec{r}') \frac{(\nabla' \cdot \vec{v}(\vec{r}'))(\nabla' x(\vec{r}'))}{x(\vec{r}')} d\vec{r}' +$$

$$+ \int G(\vec{r}-\vec{r}') (k_0^2 - k^2(\vec{r}')) \vec{v}(\vec{r}') d\vec{r}'. \quad (2.19)$$

Подведем итоги. Уравнения рассеяния, полученные с помощью ФМФ (рх-описание) переходят естественным образом в традиционные (рс-описание).

При этом, очевидно, сложности, возникающие с появлением пространственных производных $\rho(\vec{r})$ [7,8], имеют место лишь при рассмотрении уравнения рассеяния относительно акустического давления. В уравнении для колебательной скорости носителем этих же трудностей становится флуктуация сжимаемости $x(\vec{r})$.

Таким образом, ФМФ указывает естественное направление обхода вышеуказанной неприятности: в случае $x(\vec{r}) = \text{const}$ следует решать (2.19); в случае $\rho(\vec{r}) = \text{const}$ - (2.15). Далее, за пределами рассеивающей области несложно вычислить недостающую характеристику поля в силу связи ρ и $\vec{v}$ в однородной среде: $\rho = i\omega_0 \rho_0 \varphi$, $\vec{v} = \nabla \varphi$ (φ - акустический потенциал (потенциал скорости)).

2.3. Пространственно-спектральные представления ФМФ

Как было показано выше, обращение системы линейных уравнений скалярной линейной акустики приводит к интегрально-матричному оператору, носящему сверточный характер (2.4). Так как Фурье-преобразование трансформирует свертку в произведение спектров, представляется полезным получить ФМФ-представление для

пространственных спектров полей и источников: это значительно упрощает задачу во многих практических ситуациях.

Введем Фурье-преобразования (см. выражения (1.20) и пояснения к ним). Система (2.2) в импульсном пространстве имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -i\omega_0 x_0 & i\bar{k} \\ i\bar{k} & -i\omega_0 \rho_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0(\bar{k}, \omega_0) \\ \bar{v}_0(\bar{k}, \omega_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_0(\bar{k}, \omega_0) \\ \bar{r}_0(\bar{k}, \omega_0) \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

так как

$$\varphi(\bar{r}, \omega_0) = \varphi \int \psi(\bar{k}, \omega_0) e^{i\bar{k}\bar{r}} d\bar{k} = \int i\bar{k} \psi(\bar{k}, \omega_0) e^{i\bar{k}\bar{r}} d\bar{k}.$$

Матрицу в (2.20) несложно обратить:

$$\begin{pmatrix} -i\omega_0 x_0 & i\bar{k} \\ i\bar{k} & -i\omega_0 \rho_0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{i\omega_0 \rho_0}{k_0^2 - k^2} & \frac{i\bar{k}}{k_0^2 - k^2} \\ \frac{i\bar{k}}{k_0^2 - k^2} & \frac{i\omega_0' \rho_0}{k_0^2 - k^2} \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

после чего перейти к записи системы (2.8) в импульсном пространстве:

$$\begin{pmatrix} p(\bar{k}, \omega_0) \\ \bar{v}(\bar{k}, \omega_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0(\bar{k}, \omega_0) \\ \bar{v}_0(\bar{k}, \omega_0) \end{pmatrix} -$$

$$- \frac{i\omega_0}{k_0^2 - k^2} \begin{pmatrix} i\omega_0 \rho_0 & i\bar{k} \\ i\bar{k} & i\omega_0 x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x(\bar{k}-\bar{k}') p(\bar{k}') \\ \epsilon_\rho(\bar{k}-\bar{k}') \bar{v}(\bar{k}') \end{pmatrix} d\bar{k}', \quad (2.22)$$

учитывая, что произведения $\epsilon_x(\bar{r})p(\bar{r})$ и $\epsilon_\rho(\bar{r})\bar{v}(\bar{r})$ трансформируются в $\bar{k}$ -пространстве в свертку.

Получим теперь, аналогично выводу (1.24), выражения для операторов рассеяния в терминах ФНФ.

Умножив первую строку (2.8) на $\epsilon_x(\bar{r})$, вторую — на $\epsilon_\rho(\bar{r})$ и, предполагая, что зондирование рассеивающей неоднородности производилось плоской волной

$$p_0(\bar{r}) = P_0 e^{i\bar{k}_0 \cdot \bar{r}}, \quad \bar{v}_0(\bar{r}) = \bar{V}_0 e^{i\bar{k}_0 \cdot \bar{r}}, \quad (2.23)$$

где $P_0 = \rho_0 c_0 V_0 = V_0 \sqrt{\rho_0 / x_0}$ и $V_0 = |\bar{V}_0|$, приходим к системе:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_x(\bar{r}) p(\bar{r}) \\ \epsilon_\rho(\bar{r}) \bar{v}(\bar{r}) \end{pmatrix} = -i\omega_0 \begin{pmatrix} \epsilon_x(\bar{r}) & 0 \\ 0 & \epsilon_\rho(\bar{r}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\omega_0 \rho_0 G & \nabla G \\ \nabla G & i\omega_0 x_0 G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x(\bar{r}') p(\bar{r}') \\ \epsilon_\rho(\bar{r}') \bar{v}(\bar{r}') \end{pmatrix} d\bar{r}' +$$

$$+ \begin{pmatrix} \epsilon_x(\vec{r}) P_0 \exp(i\vec{k}_{ex}\vec{r}) \\ \epsilon_p(\vec{r}) \bar{V}_0 \exp(i\vec{k}_{ex}\vec{r}) \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Произведения $\epsilon_x(\vec{r}) p(\vec{r})$ и $\epsilon_p(\vec{r}) \bar{v}(\vec{r})$ являются, как видно из (2.24), источниками рассеянного поля - поля, рассеянного неоднородностями $\epsilon_x(\vec{r})$ и $\epsilon_p(\vec{r})$ при облучении их зондирующей плоской волной (2.23). Обозначая эти произведения $T_{px}(\vec{r}, \vec{k}_{ex})$ и $\bar{T}_{vp}(\vec{r}, \vec{k}_{ex})$ соответственно, применим Фурье-преобразование к (2.24). В результате получим:

$$\left\{ \begin{aligned} T_{px}(\vec{k}, \vec{k}_{ex}) &= \omega_0 \int \frac{\epsilon_x(\vec{k}-\vec{k}')}{k_0^2 - k'^2} \left(\rho_0 \omega_0 T_{px}(\vec{k}', \vec{k}_{ex}) + \vec{k}' \bar{T}_{vp}(\vec{k}', \vec{k}_{ex}) \right) d\vec{k}' + \\ &+ P_0 \epsilon_x(\vec{k} - \vec{k}_{ex}) \\ \bar{T}_{vp}(\vec{k}, \vec{k}_{ex}) &= \omega_0 \int \frac{\epsilon_p(\vec{k}-\vec{k}')}{k_0^2 - k'^2} \left(\vec{k}' T_{px}(\vec{k}', \vec{k}_{ex}) + x_0 \omega_0 \bar{T}_{vp}(\vec{k}', \vec{k}_{ex}) \right) d\vec{k}' + \\ &+ \bar{V}_0 \epsilon_p(\vec{k} - \vec{k}_{ex}). \end{aligned} \right. \quad (2.25)$$

Система (2.25) устанавливает связь между операторами рассеяния $T_{px}(\vec{k}, \vec{k}_{ex})$, $\bar{T}_{vp}(\vec{k}, \vec{k}_{ex})$ и пространственными спектрами характеристик неоднородности среды $\epsilon_x(\vec{k})$ и $\epsilon_p(\vec{k})$.

В отличие от (1.23)-(1.25), эту связь в терминах ФМФ можно получить и в ином виде. Действительно, подставив первую строку (2.8) на $\epsilon_p(\vec{r})$, а вторую - на $\epsilon_x(\vec{r})$, приходим к системе, отличной от (2.24):

$$\begin{pmatrix} \epsilon_p(\vec{r}) p(\vec{r}) \\ \epsilon_x(\vec{r}) \bar{v}(\vec{r}) \end{pmatrix} = -i\omega_0 \begin{pmatrix} \epsilon_p(\vec{r}) & 0 \\ 0 & \epsilon_x(\vec{r}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\omega_0 \rho_0 G & \nabla G \\ \nabla G & i\omega_0 x_0 G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_x(\vec{r}') p(\vec{r}') \\ \epsilon_p(\vec{r}') \bar{v}(\vec{r}') \end{pmatrix} d\vec{r}' + \begin{pmatrix} \epsilon_p(\vec{r}) P_0 \exp(i\vec{k}_{ex}\vec{r}) \\ \epsilon_x(\vec{r}) \bar{V}_0 \exp(i\vec{k}_{ex}\vec{r}) \end{pmatrix}.$$

Переходя, аналогично, к спектрам, имеем:

$$\left\{ \begin{aligned} T_{pp}(\vec{k}, \vec{k}_{ex}) &= \omega_0 \int \frac{\epsilon_p(\vec{k}-\vec{k}')}{k_0^2 - k'^2} \left(\rho_0 \omega_0 T_{px}(\vec{k}', \vec{k}_{ex}) + \vec{k}' \bar{T}_{vp}(\vec{k}', \vec{k}_{ex}) \right) d\vec{k}' + \\ &+ P_0 \epsilon_p(\vec{k} - \vec{k}_{ex}) \\ \bar{T}_{vx}(\vec{k}, \vec{k}_{ex}) &= \omega_0 \int \frac{\epsilon_x(\vec{k}-\vec{k}')}{k_0^2 - k'^2} \left(\vec{k}' T_{px}(\vec{k}', \vec{k}_{ex}) + x_0 \omega_0 \bar{T}_{vp}(\vec{k}', \vec{k}_{ex}) \right) d\vec{k}' + \\ &+ \bar{V}_0 \epsilon_x(\vec{k} - \vec{k}_{ex}). \end{aligned} \right. \quad (2.26)$$

Таким образом, на языке ФМФ рассеяние скалярных акустических волн ассоциируется с четырьмя операторами рассеяния $\bar{T}_{vx}$, $\bar{T}_{vp}$, T_{px} и T_{pp} . Физический смысл их очевиден. Так, например,

$\vec{T}_{\vec{v}\rho} = (T_{v_x\rho}, T_{v_y\rho}, T_{v_z\rho})$ является вектором, первый компонент которого, например, $(T_{v_x\rho} = T_{v_x\rho}(\vec{k}, \vec{k}_{0x}))$ представляет собой комплексную амплитуду плоской волны (отвечающей волновому вектору $\vec{k}$) разложения источника рассеянного на ϵ_x поля v_x (поля x -компонента вектора колебательной скорости) при облучении неоднородности плоской волной $\vec{v}_0 \exp(i\vec{k}_{0x}\vec{r})$.

ГЛАВА 3. ПРИЛОЖЕНИЕ ФМФ К ОБРАТНЫМ ЗАДАЧАМ РАССЕЯНИЯ СКАЛЯРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ

3.1. Особенности и преимущества ФМФ применительно к обратным задачам дифракции в акустике

В рамках ФМФ обратная задача рассеяния изначально ставится в предположении о том, что один отсчет рассеянного поля представляется четырехмерным вектором $(\rho, \vec{v}) = (\rho, v_x, v_y, v_z)$. На первый взгляд может показаться, что описание скалярного акустического поля четырехмерным вектором не несет с собой ничего, кроме излишней громоздкости получаемых выражений. Однако это не совсем так. Исходным пунктом ФМФ являются два взаимонезависимых уравнения: первое является записью закона сохранения вещества (уравнение непрерывности), второе - уравнением движения (в форме Эйлера). Второе уравнение, устанавливающее связь между ускорением физически бесконечно малого элемента среды и силовым воздействием на него, - уравнение векторное. Таким образом, описание акустического поля четырехмерным вектором, компоненты которого зависят от времени и пространственных координат, представляется, в сущности, наиболее естественным и последовательным. Более того, применительно к задачам рассеяния вообще и обратным задачам дифракции в частности, распространенное выражение "скалярная акустика" теряет, отчасти, смысл. Действительно, прилагательным "скалярная" акустика обязана тем называемому потенциалу

скоростей $\varphi(\vec{r}, t)$ - единственной скалярной функции, определяющей однозначно как поведение $p(\vec{r}, t)$, так и $\vec{v}(\vec{r}, t)$ по формулам:

$$p(\vec{r}, t) = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \varphi(\vec{r}, t); \quad \vec{v}(\vec{r}, t) = \nabla \varphi(\vec{r}, t). \quad (3.1)$$

Нетрудно убедиться, что $\varphi(\vec{r}, t)$ удовлетворяет исходным уравнениям лишь в областях пространства, свободных от источников и рассеивающих неоднородностей. Переходя, например, в импульсное пространство и представляя $p(\vec{k}, \omega_0) = i\omega_0 \rho_0 \varphi(\vec{k}, \omega_0)$, $\vec{v}(\vec{k}, \omega_0) = i\vec{k} \varphi(\vec{k}, \omega_0)$, из (2.20) получаем:

$$\begin{pmatrix} -i\omega_0 x_0 & i\vec{k} \\ i\vec{k} & -i\omega_0 \rho_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\omega_0 \rho_0 \varphi(\vec{k}, \omega_0) \\ i\vec{k} \varphi(\vec{k}, \omega_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (k_0^2 - k^2) \varphi(\vec{k}, \omega_0) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_0(\vec{k}, \omega_0) \\ \vec{f}_0(\vec{k}, \omega_0) \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Из (3.2) следует, что уравнению непрерывности потенциал скорости удовлетворяет всегда, приводя к волновому уравнению

$$(k_0^2 - k^2) \varphi(\vec{k}, \omega_0) = s_0(\vec{k}, \omega_0) \Leftrightarrow \Delta \varphi(\vec{r}, \omega_0) + k_0^2 \varphi(\vec{r}, \omega_0) = s_0(\vec{r}, \omega_0),$$

а уравнению движения - лишь в однородной среде, лишенной источников и рассеивающих включений (трактуемых как вторичные источники).

Таким образом, при использовании внутренне противоречивого словосочетания "задачи рассеяния скалярной акустики" дань в большей степени отдается традиции, чем здравому смыслу. Однако это противоречие несложно снять, перейдя к рассмотрению любого

одного из четырех скалярных уравнений рассеяния. (Приведенные соображения не исключают, вообще говоря, возможности ввести скалярный потенциал, однозначно определяющий как колебательную скорость частиц среды, так и акустическое давление в неоднородной среде. Понятно, однако, что если линейные задачи распространения акустических волн в неоднородных жидких средах и описываются с помощью единственной скалярной функции, то, очевидно, куда более сложным образом, чем с помощью соотношений (3.1).)

Второй особенностью ФМФ является возможность естественного включения в рассматриваемый круг проблем обратных задач, базирующихся на использовании векторных приемников в качестве приемных элементов. Векторный приемник конструктивно более сложен, чем датчик давления, однако его использование позволяет, в принципе, снизить общее количество элементов приемной антенны. Тем самым ФМФ может оказаться весьма перспективным подходом при разработке дефектоскопов подводных конструкций, а также в задачах интроскопии объектов, погруженных для акустического согласования в жидкую среду.

Третьим характерным моментом, связанным с ФМФ, является резкое упрощение задачи идентификации типа рассеивателя, а именно, проблемы разделения $\epsilon_x(\vec{r})$ и $\epsilon_p(\vec{r})$ - проблемы, возникающей в рамках традиционного подхода вследствие сведения двух уравнений в одно - с двумя неизвестными, тем не менее.

Четвертой особенностью, являющейся, безусловно, преимуществом ФМФ, следует считать простоту определения искоемых характеристик среды $\chi(\vec{r})$, $\rho(\vec{r})$ и $s(\vec{r})$ из функций $\epsilon_x(\vec{r}) = \chi_0 - \chi(\vec{r})$ и $\epsilon_p(\vec{r}) = \rho_0 - \rho(\vec{r})$, фигурирующих в интегральных уравнениях рассеяния. Эта простота является, по существу, прямым следствием

естественности ФМФ. В то же время трудность определения $\rho(\vec{r})$ из уравнения

$$\rho_p(\vec{r}) = \sqrt{\rho(\vec{r})/\rho_0} \Delta \left(\sqrt{\rho_0/\rho(\vec{r})} \right),$$

возникающая в рамках традиционного подхода, представляет собой расплату (вычислительными ресурсами) за "сжатие" задачи в единственное скалярное уравнение (1.5).

В-пятых, ФМФ открывает наиболее естественный подход к обратным задачам рассеяния на рассеивателях, описываемых кусочно-постоянными функциями, и, в частности, на классических граничных рассеивателях I и II рода - акустически идеально мягких и акустически идеально жестких. Действительно, в случае мягкого рассеивателя на его границе обращается в ноль давление, в случае жесткого рассеивателя - нормальный компонент скорости. Эту ситуацию должен, в принципе, симметрично описывать ФМФ, благодаря его дуальной структуре (ρ , $\vec{v}$).

И, наконец, в заключение данного параграфа следует подчеркнуть, что громоздкость ФМФ-выражений является в известном смысле кажущейся. Симметрия задачи (см., например, (2.21)) позволяет применять весьма экономичные алгоритмы при операциях с ФМФ. Практика показала, что при решении двумерных задач рассеяния (поле задается трехмерным вектором (ρ, v_x, v_y) ; матричный оператор состоит из девяти матриц) расчетное поле 128×128 пикселей является доступным для IBM PC AT (при этом используется 1.5 М байт внешней памяти).

3.2. ФМФ и задача волновой томографии (борновское приближение)

Рассмотрим первое уравнение системы (2.8), заменяя ρ и $\vec{v}$ под интегралом на ρ_0 и $\vec{v}_0$ (борновское приближение).

В предположении о том, что падающее поле есть плоская волна

$$\rho_0 = P_0 e^{i\vec{k}_{ex}\vec{r}}, \quad \vec{v}_0 = \vec{V}_0 e^{i\vec{k}_{ex}\vec{r}} \quad (3.3)$$

$$\left\{ P_0 = \rho_0 c_0 V_0, \quad V_0 = |\vec{V}_0|, \quad |\vec{k}_{ex}| = \omega_0 / c_0 \right\},$$

получаем для рассеянного поля следующее выражение:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{r}) - \rho_0(\vec{r}) = & - \frac{\omega_0^2 \rho_0}{4\pi} \int \frac{e^{ik_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \epsilon_x(\vec{r}') P_0 e^{i\vec{k}_{ex}\vec{r}'} d\vec{r}' + \\ & + \frac{i\omega_0}{4\pi} \int \frac{e^{ik_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \left(ik_0 - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \epsilon_p(\vec{r}') \vec{V}_0 e^{i\vec{k}_{ex}\vec{r}'} d\vec{r}'. \end{aligned}$$

Далее, предполагая, что выполняются условия

$$|ik_0| \gg \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}, \quad \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|},$$

переходим к приближению дальней зоны (см. рис. I и пояснения к нему), опуская при этом постоянный множитель, который в R_3 , например, имеет вид $\left(- \exp(i k_0 R_0) / (4 \pi R_0) \right)$:

$$p(\vec{r}, \omega_0) - p_0(\vec{r}, \omega_0) \approx \omega_0^2 \rho_0 P_0 \epsilon_x (\vec{k}_{sc} - \vec{k}_{ex}) + \\ + \frac{\omega_0^2}{c_0} V_0 \epsilon_p (\vec{k}_{sc} - \vec{k}_{ex}) (\vec{n}_{sc} \cdot \vec{n}_{ex}), \\ \left(\vec{n}_{sc} = \frac{\vec{k}_{sc}}{k_0}, \vec{n}_{ex} = \frac{\vec{k}_{ex}}{k_0}, \vec{V}_0 = V_0 \vec{n}_{ex} \right),$$

или, используя связь (3.3), приходим к выражению:

$$p(\vec{r}, \omega_0) - p_0(\vec{r}, \omega_0) \approx \\ \approx \omega_0^2 P_0 \left[\rho_0 \left\{ \epsilon_x (\vec{k}_{sc} - \vec{k}_{ex}) \right\} + \chi_0 \left\{ \epsilon_p (\vec{k}_{sc} - \vec{k}_{ex}) \right\} (\vec{n}_{sc} \cdot \vec{n}_{ex}) \right]. \quad (3.4)$$

Произведя аналогичную операцию со вторым уравнением системы (2.8), получим:

$$\vec{v}(\vec{r}, \omega_0) - \vec{v}_0(\vec{r}, \omega_0) \approx \\ \approx \omega_0^2 V_0 \left[\rho_0 \left\{ \epsilon_x (\vec{k}_{sc} - \vec{k}_{ex}) \right\} \vec{n}_{sc} + \chi_0 \left\{ \epsilon_p (\vec{k}_{sc} - \vec{k}_{ex}) \right\} \vec{n}_{ex} \right]. \quad (3.5)$$

На базе системы (3.4)-(3.5) невозможно идентифицировать тип рассеивателя, варьируя частоту лоцирующего поля: неоднородности обоих типов - ϵ_x и ϵ_p - создают источники вторичного поля, квадратично зависящие от частоты. Однако определение типа рассеивателя может быть произведено в данном случае за счет различной угловой зависимости рассеянного поля. Из выражения (3.4) следует, что диаграмма направленности поля давления, дифрагированного

на ρ -неоднородности, имеет дипольный характер за счет сомножителя $(\vec{n}_{sc} \cdot \vec{n}_{ex})$, в то время как рассеяние на неоднородности сжимаемости среды равномерно по всем направлениям (результат, несложно получаемый, кстати, и в рамках традиционного подхода к задаче акустического рассеяния - см., например, [23], стр. 376-380). Из этого факта следует весьма важный с прикладной точки зрения вывод: в направлении, перпендикулярном направлению распространения зондирующей волны, регистрируется поле, дифрагированное исключительно χ -неоднородностью, так как $\vec{n}_{sc} \cdot \vec{n}_{ex} = 0$. То есть, дефектоскопическая установка, содержащая приемную и излучающую апертуры, расположенные под прямым углом друг к другу, будет регистрировать только дефекты, связанные с флуктуацией сжимаемости среды, но не с флуктуацией плотности. (Этот результат впервые получил Norton Stephen J. [38], базируясь на классической форме записи уравнения рассеяния скалярной акустики.)

Выражение (3.5) показывает, что если вектор колебательной скорости разложить по направлениям зондирования и визирования (см. рис. 3), то один компонент этого вектора будет определяться только рассеянием на дефекте ρ -типа, в то время как другой - только χ -типа. При этом, естественно, предполагается, что векторы $\vec{n}_{ex}$ и $\vec{n}_{sc}$ не коллинеарны. В противном случае, если $\vec{n}_{sc} \cdot \vec{n}_{ex} = \pm 1$, указанный метод идентификации не применим. С прикладной точки зрения этот факт означает, что лоцирование только на просвет, либо только на отражение является наиболее неудачным вариантом организации интроскопического эксперимента в свете предстоящей классификации рассеивателей предложенным способом.

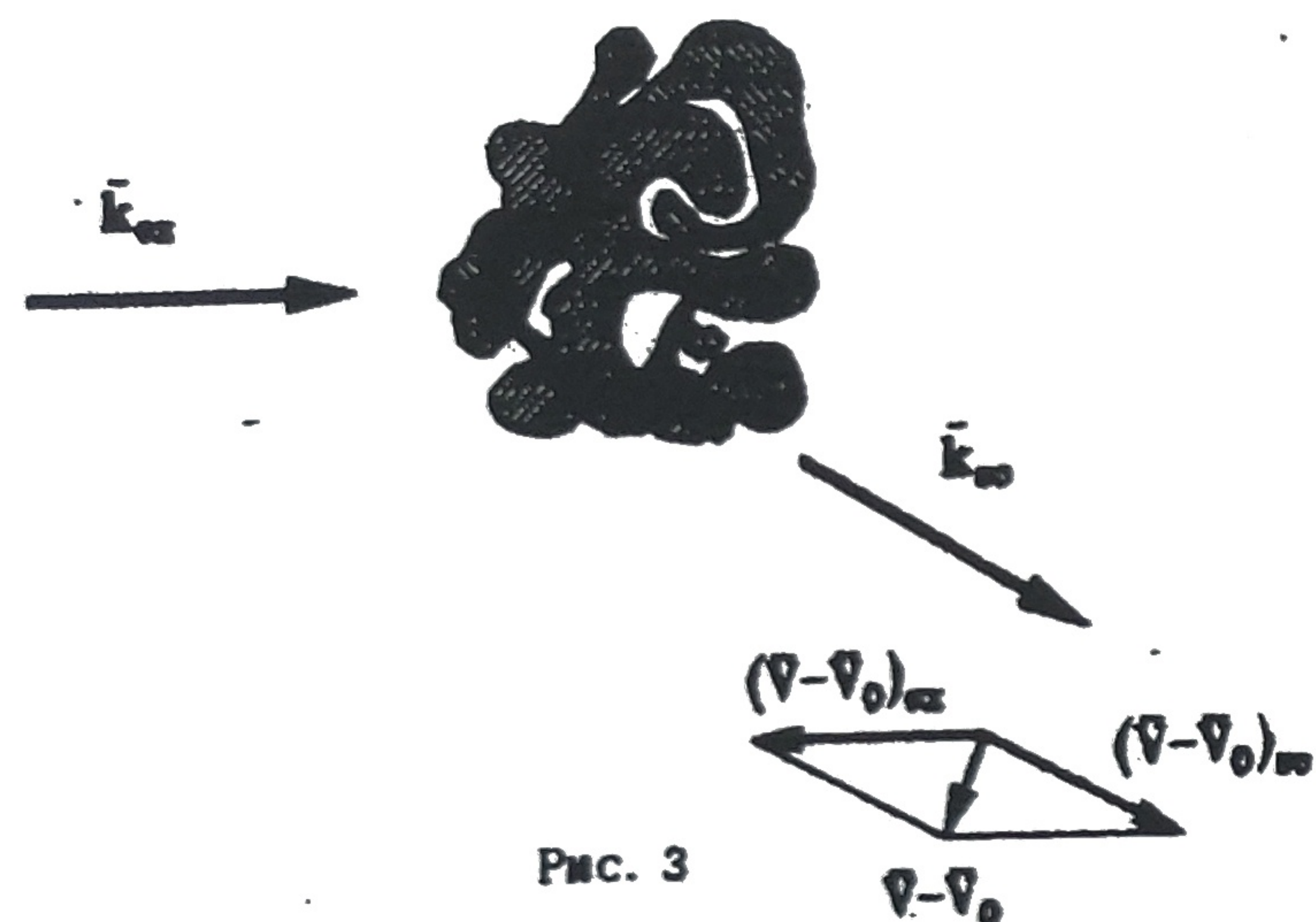


Рис. 3

Рассеянное поле разложено по направлениям $\bar{n}_{ex}$ и $\bar{n}_{ec}$. В пространстве R_2 , например:

$$\bar{v} - \bar{v}_0 = (\bar{v} - \bar{v}_0)_{ex} + (\bar{v} - \bar{v}_0)_{ec} = \frac{(\bar{n}_{ec}^\perp \cdot (\bar{v} - \bar{v}_0))}{(\bar{n}_{ex} \cdot \bar{n}_{ec}^\perp)} \bar{n}_{ex} + \frac{(\bar{n}_{ex}^\perp \cdot (\bar{v} - \bar{v}_0))}{(\bar{n}_{ex}^\perp \cdot \bar{n}_{ec})} \bar{n}_{ec},$$

где $\bar{n}_{ex}^\perp$ и $\bar{n}_{ec}^\perp$ — единичные векторы, ортогональные векторам $\bar{n}_{ex}$ и $\bar{n}_{ec}$ соответственно. В пространстве R_2 они определяются с точностью до знака. Например, для $\bar{n}_{ex}^\perp$ получаем, что

$$\bar{n}_{ex}^\perp = \pm \begin{pmatrix} -n_{ex2} \\ n_{ex1} \end{pmatrix}, \text{ если } \bar{n}_{ex} = \begin{pmatrix} n_{ex1} \\ n_{ex2} \end{pmatrix}.$$

Из уравнения (3.5) следует еще один интересный результат: вектор рассеянного поля колебательной скорости $\bar{v} - \bar{v}_0$ всегда лежит в плоскости, задаваемой векторами $\bar{n}_{ex}$ и $\bar{n}_{ec}$. Таким образом, задача волновой вычислительной томографии псевдочетырехмерна, то есть поле в любом конкретном локационном эксперименте (при фиксированных $\bar{n}_{ex}$ и $\bar{n}_{ec}$) описывается трехмерным вектором

(p, v_x, v_y) в указанной плоскости. Этот своеобразный аналог закона Снеллиуса имеет большое практическое значение, так как следствием его является утверждение о том, что любая томографическая установка может содержать лишь двумерные векторные приемники в силу равенства $[\bar{n}_{ex} \times \bar{n}_{ec}] \cdot (\bar{v} - \bar{v}_0) = 0$.

И, наконец, система (3.4)–(3.5) дает основания для еще одного способа сепарации вкладов ϵ_x и ϵ_p . Этот способ состоит в вариации характеристик фоновой среды x_0 и ρ_0 . (Реально в роли фоновых сред могут выступать различные жидкости, применяемые для акустического согласования приемно-передающих апертур и лоцируемого объекта, — водные или спиртовые растворы, например.) При этом $\epsilon_x(\bar{r}) = x_0 - x(\bar{r})$ и $\epsilon_p(\bar{r}) = \rho_0 - \rho(\bar{r})$ при варьировании x_0 и ρ_0 будут различаться лишь постоянной составляющей. Так, например, для $\epsilon_x(\bar{r})$ можно записать:

$$\int \epsilon_x(\bar{r}) e^{-i\bar{k}\bar{r}} d\bar{r} = \int x_0 e^{-i\bar{k}\bar{r}} d\bar{r} - \int x(\bar{r}) e^{-i\bar{k}\bar{r}} d\bar{r} = x_0 (2\pi)^3 \delta(\bar{k}) - \int x(\bar{r}) e^{-i\bar{k}\bar{r}} d\bar{r}. \quad (3.6)$$

(Множитель $(2\pi)^3$ при $\delta(\bar{k})$ соответствуют пространству R_3 .)

Откуда следует, что в импульсном пространстве справедливы равенства

$$\epsilon_x(\bar{k}) \Big|_{x_0 = x_{01}} = \epsilon_x(\bar{k}) \Big|_{x_0 = x_{02}},$$

$$\epsilon_p(\bar{k}) \Big|_{\rho_0 = \rho_{01}} = \epsilon_p(\bar{k}) \Big|_{\rho_0 = \rho_{02}} \quad (\bar{k} \neq 0).$$

Нулевые гармоники $\epsilon_x(0)$ и $\epsilon_p(0)$ также известны по условию задачи, в силу того, что выбор x_{01} , x_{02} , p_{01} и p_{02} осуществляется экспериментатором. Поэтому уравнения (3.4)-(3.5) могут быть использованы для идентификации типа рассеивателя.

Например, из (3.4) получаем систему (все постоянные множители приводятся для пространства R_3):

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(p(\bar{r}, \omega_0) - p_0(\bar{r}, \omega_0) \right)_{x_{01}, p_{01}} = - \frac{e^{ik_0 R_0}}{4\pi R_0} p_0 \omega_0^2 \cdot \\ & \cdot \left[p_{01} \left((2\pi)^3 x_{01} \delta(\bar{k}_{sc} - \bar{k}_{ex}) - x(\bar{k}_{sc} - \bar{k}_{ex}) \right) + \right. \\ & \left. + x_{01}(\bar{n}_{ex} \cdot \bar{n}_{sc}) \left((2\pi)^3 p_{01} \delta(\bar{k}_{sc} - \bar{k}_{ex}) - p(\bar{k}_{sc} - \bar{k}_{ex}) \right) \right]; \\ & \left(p(\bar{r}, \omega_0) - p_0(\bar{r}, \omega_0) \right)_{x_{02}, p_{02}} = - \frac{e^{ik_0 R_0}}{4\pi R_0} p_0 \omega_0^2 \cdot \\ & \cdot \left[p_{02} \left((2\pi)^3 x_{02} \delta(\bar{k}_{sc} - \bar{k}_{ex}) - x(\bar{k}_{sc} - \bar{k}_{ex}) \right) + \right. \\ & \left. + x_{02}(\bar{n}_{ex} \cdot \bar{n}_{sc}) \left((2\pi)^3 p_{02} \delta(\bar{k}_{sc} - \bar{k}_{ex}) - p(\bar{k}_{sc} - \bar{k}_{ex}) \right) \right], \end{aligned} \right.$$

которая разрешима при $x_{01}p_{02} \neq x_{02}p_{01}$. Последнее условие эквивалентно требованию $p_{01}c_{01} \neq p_{02}c_{02}$, то есть фоновые среды должны обладать различными волновыми сопротивлениями. При этом решение системы имеет вид:

$$\left\{ \begin{aligned} & x(\bar{k}_{sc} - \bar{k}_{ex}) = \frac{1}{-x_{01}p_{02} + x_{02}p_{01}} \left[(2\pi)^3 x_{01}x_{02} \delta(\bar{k}_{sc} - \bar{k}_{ex}) \cdot \right. \\ & \cdot (p_{01} - p_{02})(1 + (\bar{n}_{ex} \bar{n}_{sc})) + \frac{4\pi R_0 e^{-ik_0 R_0}}{p_0 \omega_0^2} \cdot \\ & \cdot \left\{ x_{02} \left(p(\bar{r}, \omega_0) - p_0(\bar{r}, \omega_0) \right)_{x_{01}, p_{01}} - x_{01} \left(p(\bar{r}, \omega_0) - p_0(\bar{r}, \omega_0) \right)_{x_{02}, p_{02}} \right\}; \\ & p(\bar{k}_{sc} - \bar{k}_{ex}) = \frac{1}{(\bar{n}_{ex} \bar{n}_{sc})(x_{01}p_{02} - x_{02}p_{01})} \left[(2\pi)^3 p_{01}p_{02} \delta(\bar{k}_{sc} - \bar{k}_{ex}) \cdot \right. \\ & \cdot (x_{01} - x_{02})(1 + (\bar{n}_{ex} \bar{n}_{sc})) + \frac{4\pi R_0 e^{-ik_0 R_0}}{p_0 \omega_0^2} \cdot \\ & \cdot \left\{ p_{02} \left(p(\bar{r}, \omega_0) - p_0(\bar{r}, \omega_0) \right)_{x_{01}, p_{01}} - p_{01} \left(p(\bar{r}, \omega_0) - p_0(\bar{r}, \omega_0) \right)_{x_{02}, p_{02}} \right\}. \end{aligned} \right.$$

Таким образом, применительно к обратным задачам рассеяния линейной скалярной акустики ФМФ является не только удобным математическим аппаратом, но и инструментом, позволяющим получать важные, с точки зрения практики, результаты, не всегда очевидные в рамках традиционного подхода.

ПРИЛОЖЕНИЕ

По Фелсену и Маркувицу, исходные соотношения ФМО строятся следующим образом [1].

В покомпонентной записи система (2.1) имеет вид:

$$D\bar{U}_0 = \begin{pmatrix} -i\omega_0 x_0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & -i\omega_0 \rho_0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & 0 & -i\omega_0 \rho_0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & -i\omega_0 \rho_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ v_{0x} \\ v_{0y} \\ v_{0z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_0 \\ f_{0x} \\ f_{0y} \\ f_{0z} \end{pmatrix} \quad (\text{П.1})$$

Поиск оператора, обратного D, в виде

$$d\bar{r}' \begin{pmatrix} G_{11}(\bar{r}-\bar{r}') & G_{12}(\bar{r}-\bar{r}') & G_{13}(\bar{r}-\bar{r}') & G_{14}(\bar{r}-\bar{r}') \\ G_{21}(\bar{r}-\bar{r}') & G_{22}(\bar{r}-\bar{r}') & G_{23}(\bar{r}-\bar{r}') & G_{24}(\bar{r}-\bar{r}') \\ G_{31}(\bar{r}-\bar{r}') & G_{32}(\bar{r}-\bar{r}') & G_{33}(\bar{r}-\bar{r}') & G_{34}(\bar{r}-\bar{r}') \\ G_{41}(\bar{r}-\bar{r}') & G_{42}(\bar{r}-\bar{r}') & G_{43}(\bar{r}-\bar{r}') & G_{44}(\bar{r}-\bar{r}') \end{pmatrix} \quad (\cdot) \quad (\text{П.2})$$

приводит к четырем системам дифференциальных уравнений, состоящих из четырех уравнений каждая, с четырьмя неизвестными: G_{11} , G_{12} , G_{13} , G_{14} (или G_{1j} , G_{2j} , G_{3j} , G_{4j}). Так, например, для G_{11} , G_{21} , G_{31} , G_{41} указанная система выглядит следующим

образом:

$$\begin{cases} -i\omega_0 x_0 G_{11}(\bar{r}-\bar{r}') + \frac{\partial}{\partial x} G_{21}(\bar{r}-\bar{r}') + \frac{\partial}{\partial y} G_{31}(\bar{r}-\bar{r}') + \frac{\partial}{\partial z} G_{41}(\bar{r}-\bar{r}') = \delta(\bar{r}-\bar{r}') \\ -i\omega_0 \rho_0 G_{21}(\bar{r}-\bar{r}') + \frac{\partial}{\partial x} G_{11}(\bar{r}-\bar{r}') = 0 \\ -i\omega_0 \rho_0 G_{31}(\bar{r}-\bar{r}') + \frac{\partial}{\partial y} G_{11}(\bar{r}-\bar{r}') = 0 \\ -i\omega_0 \rho_0 G_{41}(\bar{r}-\bar{r}') + \frac{\partial}{\partial z} G_{11}(\bar{r}-\bar{r}') = 0 \end{cases}$$

Решая эти системы, несложно получить подынтегральную матрицу в (П.2):

$$\begin{pmatrix} i\omega_0 \rho_0 G & \frac{\partial}{\partial x} G & \frac{\partial}{\partial y} G & \frac{\partial}{\partial z} G \\ \frac{\partial}{\partial x} G & \frac{1}{i\omega_0 \rho_0} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - \delta \right) & \frac{1}{i\omega_0 \rho_0} \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} & \frac{1}{i\omega_0 \rho_0} \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} G & \frac{1}{i\omega_0 \rho_0} \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial x} & \frac{1}{i\omega_0 \rho_0} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} - \delta \right) & \frac{1}{i\omega_0 \rho_0} \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} G & \frac{1}{i\omega_0 \rho_0} \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial x} & \frac{1}{i\omega_0 \rho_0} \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial y} & \frac{1}{i\omega_0 \rho_0} \left(\frac{\partial^2 G}{\partial z^2} - \delta \right) \end{pmatrix} \quad (\text{П.3})$$

Здесь, как и ранее, $G = G(\bar{r}-\bar{r}')$ - функция Грина уравнения Гельмгольца.

Функция $G_{11} = i\omega_0 \rho_0 G$ называется скалярной функцией Грина системы (П.1), наборы G_{12} , G_{13} , G_{14} и G_{21} , G_{31} , G_{41} носят название векторных функций Грина системы (П.1), а нижний правый блок размером 3×3 , содержащий члены G_{22} , G_{23} , G_{24} ; G_{32} , G_{33} , G_{34} ;

G_{42}, G_{43}, G_{44} , называется аффинорной функцией Грина системы (П.1).

Уравнение для давления на базе (П.1)-(П.3) получается тривиально и выглядит точно так же, как и в разделе 2.1:

$$p_0(\bar{r}, \omega_0) = i\omega_0 \rho_0 \int G(\bar{r}-\bar{r}') s_0(\bar{r}') d\bar{r}' + \int (\nabla G(\bar{r}-\bar{r}')) \cdot \bar{f}_0(\bar{r}') d\bar{r}'.$$

Сложнее обстоит дело с уравнением для $\bar{v}_0$:

$$\begin{aligned} \bar{v}_0(\bar{r}) = & \int (\nabla G(\bar{r}-\bar{r}')) \cdot s_0(\bar{r}') d\bar{r}' - \frac{1}{i\omega_0 \rho_0} \bar{f}_0(\bar{r}) + \\ & + \frac{1}{i\omega_0 \rho_0} \int (\bar{f}_0(\bar{r}') \cdot \nabla) (\nabla G(\bar{r}-\bar{r}')) d\bar{r}'. \end{aligned} \quad (П.4)$$

Конкретнее, для x -компонента вектора колебательной скорости, имеем, например:

$$\begin{aligned} v_{0x}(\bar{r}) = & \int \frac{\partial}{\partial x} G(\bar{r}-\bar{r}') s_0(\bar{r}') d\bar{r}' - \frac{1}{i\omega_0 \rho_0} f_{0x}(\bar{r}) + \\ & + \frac{1}{i\omega_0 \rho_0} \int \left(f_{0x}(\bar{r}') \frac{\partial}{\partial x} + f_{0y}(\bar{r}') \frac{\partial}{\partial y} + f_{0z}(\bar{r}') \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial x} G(\bar{r}-\bar{r}') d\bar{r}'. \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что два крайних слагаемых, расположенных справа от знака равенства в (П.4), имеют куда более неприятный вид, чем единственный член $i\omega_0 \rho_0 G$ в (2.4).

Однако, как удалось показать, сумма этих двух слагаемых равна $i\omega_0 \rho_0 G$ в предположении о том, что $\text{rot } \bar{f}_0 = 0$. Если применить операцию rot к уравнению движения Эйлера в системе (1.1) для $\rho(\bar{r}) = \text{const}$, то получим, что требование $\text{rot } \bar{f}_0 = 0$

эквивалентно в однородной идеальной среде требованию $\text{rot } \bar{v}_0 = 0$, то есть, во-первых, исключаются вихревые движения (но это область нелинейной акустики, которая не рассматривается в рамках данной работы), а во-вторых, исключаются поперечные волны (возможные, как известно, лишь в твердых упругих средах и описываемые иным аппаратом - аппаратом векторной акустики). Поэтому условие $\text{rot } \bar{v}_0 = 0$ ($\text{rot } \bar{f}_0 = 0$), предполагающее потенциальность поля акустической скорости, не снижает, вообще говоря, общности результатов, полученных в рамках линейной скалярной акустики.

Действительно, выделив, например, в верхней строке аффинорного блока члены, содержащие частные производные G , рассмотрим следующую вспомогательную функцию $J = J(\bar{r})$:

$$\begin{aligned} J = & \int \frac{\partial^2 G(\bar{r}-\bar{r}')}{\partial x^2} f_{0x}(\bar{r}') d\bar{r}' + \int \frac{\partial^2 G(\bar{r}-\bar{r}')}{\partial x \partial y} f_{0y}(\bar{r}') d\bar{r}' + \\ & + \int \frac{\partial^2 G(\bar{r}-\bar{r}')}{\partial x \partial z} f_{0z}(\bar{r}') d\bar{r}' = \end{aligned} \quad (П.5)$$

$$= \int G(\bar{r}-\bar{r}') \left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} f_{0x}(\bar{r}') + \frac{\partial^2}{\partial x' \partial y'} f_{0y}(\bar{r}') + \frac{\partial^2}{\partial x' \partial z'} f_{0z}(\bar{r}') \right) d\bar{r}'.$$

При выводе (П.5) использовался как факт финитности функции $\bar{f}_0(\bar{r})$, дающий возможность дважды применить теорему Губини, так и соотношение

$$\frac{\partial^2 G(\bar{r}-\bar{r}')}{\partial r_i \partial r_j} = \frac{\partial^2 G(\bar{r}-\bar{r}')}{\partial r'_i \partial r'_j},$$

являющееся следствием соотношения

$$\frac{\partial G(\vec{r}-\vec{r}')}{\partial r'_i} = - \frac{\partial G(\vec{r}-\vec{r}')}{\partial r_i}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} J &= \int G(\vec{r}-\vec{r}') \cdot \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial}{\partial x'} f_{0x}(\vec{r}') + \frac{\partial}{\partial y'} f_{0y}(\vec{r}') + \frac{\partial}{\partial z'} f_{0z}(\vec{r}') \right) d\vec{r}' = \\ &= \int G(\vec{r}-\vec{r}') \cdot \left\{ \text{grad} \left(\text{div} \vec{f}_0(\vec{r}') \right) \right\}_{x'} d\vec{r}'. \end{aligned}$$

Здесь индекс x' означает первый компонент вектора, заключенного в скобки.

Поскольку $\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A}$, то в предположении $\text{rot } \vec{f}_0 = 0$ получаем, что $\left(\text{grad div } \vec{f}_0 \right)_{x'} = \Delta' f_{0x}$;

$$\begin{aligned} J &= \int G(\vec{r}-\vec{r}') \Delta' (f_{0x}(\vec{r}')) d\vec{r}' = \int f_{0x}(\vec{r}') \Delta' G(\vec{r}-\vec{r}') d\vec{r}' = \\ &= \int f_{0x}(\vec{r}') \Delta G(\vec{r}-\vec{r}') d\vec{r}' = \int f_{0x}(\vec{r}') \left(-k_0^2 G(\vec{r}-\vec{r}') + \delta(\vec{r}-\vec{r}') \right) d\vec{r}' = \\ &= -k_0^2 \int G(\vec{r}-\vec{r}') f_{0x}(\vec{r}') d\vec{r}' + f_{0x}(\vec{r}). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$v_{0x}(\vec{r}) = \int \frac{\partial G(\vec{r}-\vec{r}')}{\partial x} s_0(\vec{r}') d\vec{r}' + \frac{1}{i\omega_0 \rho_0} J - \frac{1}{i\omega_0 \rho_0} f_{0x}(\vec{r}) =$$

$$= \int \frac{\partial G(\vec{r}-\vec{r}')}{\partial x} s_0(\vec{r}') d\vec{r}' + i\omega_0 x_0 \int G(\vec{r}-\vec{r}') f_{0x}(\vec{r}') d\vec{r}', \quad (\text{П. 6})$$

то есть

$$\vec{v}(\vec{r}) = \int \left(\nabla G(\vec{r}-\vec{r}') \right) s_0(\vec{r}') d\vec{r}' + i\omega_0 x_0 \int G(\vec{r}-\vec{r}') \vec{f}_0(\vec{r}') d\vec{r}'$$

$$(k_0^2 = \omega_0^2 \rho_0 x_0). \quad (\text{П. 7})$$

Равенство (П. 7) является обоснованием замены аффинного блока скалярной функцией $i\omega_0 x_0 G(\vec{r}-\vec{r}')$ - замены, существенно упрощающей последующие выкладки. Вместе с тем эта замена и является ключевым звеном, отличающим предлагаемый вариант ОМФ от "стандартного" ОМФ Фелсена и Маркувица.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. - М.: "Наука", 1978 - т. I, т. 2 - 547с., 555с.
2. Сурнев В.Б. О рассеянии упругих волн локализованной неоднородностью. //Известия АН СССР Физика Земли. - 1988. - N 2 - с. 9 - 19.
3. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. - М.: "Мир", 1981. - т. I - 280с.
4. Скучик Е. Основы акустики. - М.: "Мир", 1976. - т. I - с. 406 - 407.
5. Лепендин Л.Ф. Акустика. - М.: "Высшая школа", 1978. - с. 153 - 167.
6. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. - М.: "Наука", 1981. - 580 с.
7. Крылов В.В. Основы теории излучения и рассеяния звука. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. - 117 с.
8. Годин О.А. О волновом уравнении для звукового поля в жидкости со стратификацией плотности. //Доклады АН СССР. - 1984. - т. 276, N 3 - с. 579 - 582.
9. Bergmann P.G. The wave equation in a medium with a variable index of refraction. // JASA. - 1946. - v.17. - - p. 329.
10. Jonson S.A., Tracy M.L. Inverse scattering solutions by a sinc basis, multiple source, moment method. Part I: Theory.// Ultrason. Imag. - 1983. - v.5, N 6. - p. 361- - 375.
11. Jonson S.A., Tracy M.L. Inverse scattering solutions by

- a sinc basis, multiple source, moment method. Part II: Numerical evaluations.// Ultrason. Imag. - 1983. - v.5, N 6. - p. 376 - 392.
12. Jonson S.A., Tracy M.L. Inverse scattering solutions by a sinc basis, multiple source, moment method. Part III: Fast algorithms. // Ultrason. Imag. - 1984. - v.6, N 4. - p. 103 - 106.
13. Coen S., Mei K.K., Angelagos D.J. Inverse scattering technique applied to remote sensing of layered media.// IEEE Trans. Ant. Propagat. - 1981. - v. AP - 29, N 2. - - p. 298 - 306.
14. Rodger A. Newton-Kantorovich algorithm applied to an electromagnetic inverse problem //IEEE Trans. Ant. Propagat. - 1981. - v. AP - 29, N 2. - p. 232 - 238.
15. Горюнов А.А., Сасковец А.В. Обратные задачи рассеяния в акустике. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. - 151 с.
16. Devaney A.J. Nonuniqueness in the inverse scattering problem.//J. Math. Phys. - 1978. - v.19, N 7. - p.1524- - 1531.
17. Jonson S.A., Tracy M.L. Wave equations and inverse solutions for soft tissue. - Acoust. Imag. - 1982. - v.II: Proc. 11th Int. Symp., Monterey, Calif., 4-7 May 1981, - - New-York - London: 1982. - p. 409 - 423.
18. Stephen J. Norton Generation of separate density and compressibility images in tissue // Ultrason. Imag. - - 1983. - v. 5, N 3. - p. 240 - 252.
19. Буров В.А., Горюнов А.А., Сасковец А.В. Обратные задачи акустического рассеяния на неоднородностях плотности

- и показателя преломления среды. - Препринт Физмч. Ф-та МГУ, 1983, N 12/1983, - 4 с.
20. Gerhberg R.W., Saxton W.O. // Optic. - 1972. - N 35. - p. 237.
 21. Saxton W.O. Computer Techniques for Image Processing in Electron Microscopy. - New York:Academic,1978. - 594 p.
 22. Sato T., Norton S.J., Linzer M., Ikeda O., Hiram M. Tomographic image reconstruction from limited projections using iterative revisions in image and transform spaces // Applied Optics. - 1981. - v. 20, N 3, - p.396.
 23. Исакович М.А. Общая акустика - М.: "Наука", 1973. - 496 с.
 24. Gubernatis J.E., Baker G.A. Elastic wave scattering calculations, the Born series and the matrix variational Padé approximant method//Rev. Progr. Quant. Nondestructive Eval. Proc.8th Air Force / Defence Adv. Res. Proj. Agency Symp. Boulder. Colo. 2 - 7 Aug. 1981. - v.1. - New-York, London, 1982. - p. 111 - 118.
 25. Тейлор Дж. Теория рассеяния - М.: "Мир", 1975. - 412 с.
 26. Wolf E. Three-dimensional structure determination of semi-transparent objects from holographic data // Opt. Commun. - 1969. - v.1, N 4. - p. 153 - 156.
 27. Dandliker R., Weiss K. Reconstruction of the three-dimensional refractive index from scattering waves. // Opt. Commun. - 1970. - v.1, N 7 - p.323 - 328.
 28. Lee H., Wade G. Resolution for images from Fresnel or Fraunhofer diffraction using the FFT // IEEE Trans. on Sonic and Ultrason. - 1982. - v.SU-29, N 3. - p. 151.

29. Давренцев М.М., Романов В.Г., Шиватский С.Л. Некорректные задачи математической физики и анализа. - М.: "Наука", 1980. - 322 с.
30. Nahamoo D., Pan S.X., Kak A.C. Synthetic aperture diffraction tomography and its interpolation - free computer implementation //IEEE Trans. on Sonic and Ultrason. - 1984. - v.SU-31, N 4. - p. 218 - 229.
31. Nahamoo D., Kak A.C. Ultrasonic echo imaging with pseudorandom and pulsed sources: a comparative study // Ultrason. Imag. - 1981. - v.3, N 1. - p. 1 - 36.
32. Crawford C.R., Kak A.C. Multipath artifact correction in ultrasonic transmission tomography // Ultrason.Imag. - 1982. - v.4, N 3. - p. 234 - 266.
33. Kak A.C. Slaney M., Larsen L.E. Limitations of imaging with first-order diffraction tomography // IEEE Trans. Microwave theory & Tech.(USA). - 1984. - v.MTT-32, N 8. - p. 860 - 874.
34. Azimi M., Kak A.C. Distortion in diffraction tomography caused by multiple scattering // IEEE Trans. Mod. Imaging. - 1983. - v. MI-2, N 4. - p.176 - 195.
35. Andersen A.H., Kak A.C. Simultaneous algebraic reconstruction technique (SART): A superior implementation of the ART algorithm // Ultrason. Imag. - 1984. - v.6, N 1. - p. 81 - 94.
36. Slaney M., Kak A.C. Diffraction tomography // Proc.SPIE Int.Soc.Opt. Eng., USA, - 1983. - v.413. - p. 2 - 19.
37. Kak A.C., Azimi M., Slaney M. On the estimation of porosity in composites by oblique angle illumination //

Rev. of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation. San Diego, CA, USA, 1 - 6 Aug. 1982. - v.2A. -
- p. 851 - 866.

38. Norton Stephen J. Generation of separate density and compressibility images in tissue // Ultrason. Imag. 1983. v.5. N 3. p.240 - 252.

Авторы считают своим долгом выразить признательность доценту Бурову В.А. за указание на одну досадную ошибку, допущенную нами при критике традиционного подхода к обратной задаче рассеяния. Ошибка была исправлена в последний момент; это безусловно пошло на пользу как нам, так и нашей работе.

А.А. Горюнов, О.Д. Румянцева

**ФУНКЦИОНАЛЬНО-МАТРИЧНЫЙ ФОРМАЛИЗМ В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ
РАССЕЯНИЯ СКАЛЯРНОЙ ЛИНЕЙНОЙ АКУСТИКИ**

А.А.Горонов, О.Д.Румянцева

Ответственный редактор А.Г.Воронович
Рецензенты: В.Ю.Дьяконов, П.П.Пархоменко
Ведущий редактор Л.И.Любомудрова

Подписано к печати 20.05.1991 г.

Формат 60x90¹/16. Бумага офсетная № 1.

Усл.печ.л. 4,375. Уч.изд.л.2,5.

Тираж 100. Зак. № 23.

Цена 30 коп.

Утверждено к печати Ученым советом Института океанологии
им.П.П.Иришова Академии наук СССР

Отпечатано на ротапринтере в Институте океанологии
им.П.П.Иришова Академии наук СССР
Москва, ул.Красикова, дом 23.