

Отзыв официального оппонента

на диссертационную работу Гордиенко Алексея Сергеевича
«(Ко)модульные алгебры и их обобщения», представленную
на соискание учёной степени доктора физико-математических наук
по специальности 01.01.06 - Математическая логика, алгебра и теория чисел

Важным направлением в теории алгебраических структур является изучение их тождеств. При нахождении базиса тождеств конкретной алгебры над полем характеристики 0, как правило, одновременно удаётся вычислить и коразмерности ее тождеств. Коразмерности оказываются полезными, например, в случае, когда требуется доказать наличие или отсутствие тождеств в конкретной алгебре.

В 1980-х годах Ш. Амицур выдвинул гипотезу об асимптотическом поведении коразмерностей полиномиальных тождеств в ассоциативных алгебрах, которая заключалась в существовании целочисленной экспоненты роста и была доказана в 1999 году А.Джамбруно и М.В.Зайцевым. Аналог гипотезы Амицура для конечномерных алгебр Ли был доказан М.В.Зайцевым в 2002 году.

Часто алгебры бывают наделены какой-либо дополнительной структурой, например, градуировкой, действием некоторой (полу)группы или действием алгебры Ли посредством дифференцирований. При изучении тождеств в алгебрах с дополнительной структурой естественно ввести эту дополнительную структуру в сигнатуру полиномиальных тождеств. Такой подход оказывается весьма плодотворным, например, при изучении градуированных алгебр: в 2012 году Э.Альхадефф и О.Давид, используя градуированные тождества, показали, что для всякой алгебры A над алгебраически замкнутым полем, градуированной конечной группой, при условии, что градуировка минимальна и регулярна, порядок градуирующей группы является фиксированным числом и совпадает с экспонентой роста обычных тождеств алгебры A . Кроме того, диссертантом были получены критерии G - и H -простоты алгебр в терминах соответствующих PI-экспонент.

Для алгебр с дополнительной структурой возникает вопрос о справедливости аналогов гипотезы Амицура для соответствующих типов тождеств. В диссертации А.С.Гордиенко этот вопрос изучается самым тщательным образом. Исследования в этом направлении были начаты Э.Альхадеффом, Ф.Бенанти, А.Джамбруно, М.В.Зайцевым, Д.Ла Маттиной, М.Пипитоне и продолжены диссертантом.

Диссертация состоит из введения, девяти глав и заключения. Данную работу можно условно разделить на две тесно связанные между собой части, первая из которых посвящена изучению структуры (ко)модульных алгебр и их обобщений, а во второй части полученные результаты применяются к исследованию асимптотического поведения полиномиальных тождеств.

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, описана степень её разработанности, перечислены цели и задачи диссертации, вводятся объект и предмет исследования, обосновывается научная новизна результатов диссертации, её теоретическая и практическая значимость, перечисляются методы исследования и положения, выносимые на защиту, описывается степень достоверности и апробация результатов диссертации и излагается краткое содержание работы.

Первая глава носит вводный характер, в ней приводится список обозначений и вводятся основные понятия, используемые в диссертации.

Во второй главе исследуется структура ассоциативных H -(ко)модульных алгебр. В частности, во второй главе доказываются достаточные условия H -коинвариантности радикала Джекобсона в H -комодульных ассоциативных алгебрах. Кроме того, во второй главе классифицируются конечномерные ассоциативные алгебры, простые по отношению к действию алгебр Тафта.

Третья глава посвящена изучению структуры H -(ко)модульных алгебр Ли. В частности, в третьей главе доказываются достаточные условия H -(ко)инвариантности радикалов в H -(ко)модульных алгебрах Ли и H -(ко)инвариантный аналог теоремы Леви. Кроме того, в третьей главе классифицируются конечномерные алгебры Ли, простые по отношению к действию алгебр Тафта.

В четвертой главе исследуется структура ассоциативных алгебр, градуированных полугруппами, и классифицируются конечномерные ассоциативные градуированно-простые алгебры, градуированные конечными полугруппами с тривиальными максимальными подгруппами.

В пятой главе вводится понятие обобщённого H -действия, приводятся примеры таких действий и доказываются некоторые результаты, касающиеся структуры таких алгебр с обобщённым H -действием.

В шестой главе вводятся полиномиальные тождества различных типов, их коразмерности и соответствующие свободные алгебры, формулируется гипотеза Амицура и её аналоги, доказываются теоремы равенства для коразмерностей различных видов полиномиальных тождеств и оценка сверху на кодлины. Наконец, в шестой главе доказывается существование

градуированной PI -экспоненты у любой конечномерной градуированно-простой (необязательно ассоциативной) алгебры, градуированной произвольным множеством, и H - PI -экспоненты у любой конечномерной H -простой (необязательно ассоциативной) алгебры с обобщённым H -действием.

Седьмая глава посвящена изучению роста коразмерностей полиномиальных H -тождеств в ассоциативных алгебрах с обобщённым H -действием и доказательству соответствующих аналогов гипотезы Амицура.

В восьмой главе исследуется рост коразмерностей полиномиальных H -тождеств и градуированных полиномиальных тождеств в H -модульных и градуированных алгебрах Ли и доказываются соответствующие аналоги гипотезы Амицура.

Девятая глава посвящена изучению роста коразмерностей градуированных полиномиальных тождеств в ассоциативных алгебрах, градуированных полугруппами. В девятой главе строится серия конечномерных градуированно-простых ассоциативных алгебр, градуированных лентами правых нулей, с дробной градуированной PI -экспонентой (полученные примеры являются первыми примерами ассоциативных алгебр с дополнительной структурой, в которых экспонента роста коразмерностей соответствующих тождеств является нецелым числом).

В заключении перечисляются основные результаты работы, а также формулируются задачи для дальнейшего исследования.

Результаты диссертации являются новыми, они четко сформулированы, снабжены полными доказательствами и получены автором самостоятельно или (в двух случаях) при равноценном вкладе с соавторами. Работа в целом производит очень сильное впечатление. Ее результаты найдут применения в дальнейших исследованиях.

Данные результаты докладывались на российских и международных конференциях высокого уровня, а также научных семинарах. По теме диссертации опубликована 21 работа в ведущих российских и международных журналах, все из которых входят в базы цитирования Scopus и Web of Science.

Автореферат и опубликованные статьи полно и правильно отражают содержание диссертации.

Таким образом, публикации основных научных результатов удовлетворяют п. 2.3 «Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова».

Объём диссертации и автореферата адекватны решаемым в диссертации задачам. В свою очередь, диссертация соответствует заявленной специальности 01.01.06 - Математическая логика, алгебра и теория чисел.

Резюмируя, можно сказать, что представленная диссертация является научно-квалификационной работой, в которой на основании выполненных автором исследований разработаны теоретические положения, совокупность которых можно квалифицировать как научное достижение, и решены важные научные проблемы.

Диссертация удовлетворяет критериям, определённым в пп. 2.1-2.5 «Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова». Считаю, что её автор, Гордиенко Алексей Сергеевич, заслуживает присуждения учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.01.06 - Математическая логика, алгебра и теория чисел.

Официальный оппонент:

профессор Департамента математики
ФГОБУ ВО «Финансовый университет при
Правительстве Российской Федерации»,
д.ф.-м.н., профессор

Сергей Валентинович Пчелинцев

Научная специальность: 01.01.06 – Математическая логика, алгебра и теория чисел

Адрес: 125993 (ГСП-3), г. Москва, Ленинградский просп., 49

Интернет-сайт: <http://www.fa.ru>

E-mail: Spchelintcev@fa.ru

Телефон: +7 (499) 277-21-54

