

УДК 539.3:534.1

## ЗАДАЧА О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ СО СМЕШАННЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

С. Д. Алгазин, И. А. Селиванов\*

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, 119526 Москва, Россия

\* Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,  
119991 Москва, Россия

E-mails: algazinsd@mail.ru, shertors@gmail.com

Рассматриваются собственные колебания прямоугольной пластины с двумя защемленными и двумя свободно опертыми краями. С использованием метода Бубнова — Галеркина вычислены первые собственные значения, причем в случае одной пробной функции первое собственное значение вычисляется с погрешностью менее 1 %. Проведено сравнение с известными результатами, приведены собственные формы.

**Ключевые слова:** бигармоническое уравнение, свободные колебания пластины, метод Бубнова — Галеркина, вычислительный эксперимент.

DOI: 10.15372/PMTF20210207

**Введение.** В данной работе рассматривается решение задачи о колебаниях прямоугольной пластины. Подобные задачи решались различными методами [1]. Особенностью этих задач является необходимость точного вычисления собственных значений задачи. Получать аналитические формы для любых комбинаций граничных условий не всегда возможно, поэтому необходимо строить решения, позволяющие находить точное собственное значение при малых вычислительных затратах. Более подробно данная проблема рассмотрена в работе [1], в которой также предлагается искать решение в виде комбинации тригонометрических и аналитических функций, при этом необходимо определить восемь различных коэффициентов.

Решению задач о колебаниях прямоугольной пластины посвящена монография [2], в которой построение решения основано на методе суперпозиции и решении Леви [3]. Рассматриваемые задачи делятся на подзадачи, которые решаются отдельно. При этом решение задачи строится таким образом, что собственное значение нужно вычислять методом перебора.

Применяя процедуру Бубнова — Галеркина [4], можно сформулировать задачу в матричной форме, получая в результате ряд собственных значений на редкой сетке. Используя это преимущество метода Бубнова — Галеркина, можно строить точные решения задачи о собственных колебаниях прямоугольной пластины.

### **1. Постановка задачи о собственных колебаниях прямоугольной пластины.**

Рассмотрим задачу о собственных колебаниях прямоугольной пластины с двумя жестко закрепленными и двумя свободно опертыми краями. Схема пластины представлена на рис. 1.

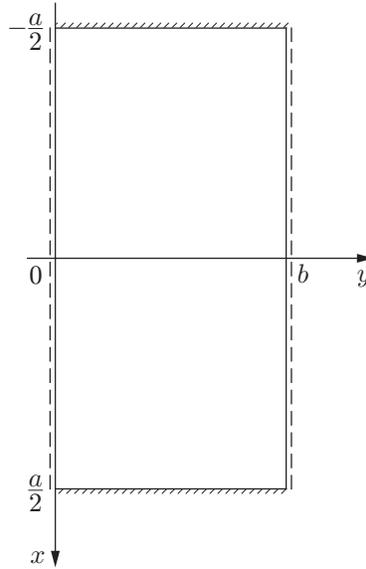


Рис. 1. Схема пластины

Уравнение собственных колебаний пластины и соответствующие граничные условия записываются следующим образом [2–6]:

$$D\nabla^4 w(x, y, t) + \rho h \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = 0; \quad (1)$$

$$w(x, y, t)|_{|x|=a/2} = 0, \quad \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x} \Big|_{|x|=a/2} = 0; \quad (2)$$

$$w(x, y, t)|_{y=0,b} = 0, \quad \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial^2 y} \Big|_{y=0,b} = 0. \quad (3)$$

Здесь  $w(x, y, t)$  — прогиб пластины;  $\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2$ ;  $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$  — бигармонический дифференциальный оператор, записанный в прямоугольной системе координат;  $D = Eh^3 / [12(1 - \nu^2)]$  — цилиндрическая жесткость пластины, Н·м;  $\rho$  — плотность материала пластины, кг/м<sup>3</sup>;  $h$  — толщина пластины, м;  $E$  — модуль Юнга, Па;  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Решение задачи можно представить в виде [5]

$$w(x, y, t) = w(x, y) e^{i\omega t}. \quad (4)$$

Таким образом, задача (1) с учетом допущения (4) принимает вид

$$\nabla^4 w(x, y) = \lambda w(x, y),$$

где величина  $\lambda = \rho h \omega^2 / D$  имеет размерность м<sup>-4</sup> (безразмерной величиной является  $b^2 \sqrt{\lambda}$ ).

**2. Построение решения.** Для пластин, два противоположных края которых свободно оперты, решение будем искать в виде ряда (см., например, [4])

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{m_x} \sum_{n=1}^{m_y} U_m(x) \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (5)$$

$$m = 1, 3, 5, \dots, m_x, \quad n = 1, 2, 3, \dots, m_y,$$

который удовлетворяет граничным условиям (3).

Рассматривая только симметричные относительно оси  $y$  колебания (получая только четные собственные формы), функции  $U_m(x)$  примем в следующем виде:

$$U_m(x) = \frac{4}{\pi^5 m^5} + A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi x}{b} + B_m \frac{m\pi x}{b} \operatorname{sh} \frac{m\pi x}{b}$$

( $A_m, B_m$  — константы, определяемые из граничных условий (2)).

Введем обозначение  $V_n(y) = \sin(n\pi y/b)$ . Тогда выражение (5) принимает вид

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{m_x} \sum_{n=1}^{m_y} U_m(x) V_n(y).$$

**3. Метод Бубнова — Галеркина.** Согласно методу Бубнова — Галеркина решение будем искать в виде [7]

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{m_x} \sum_{n=1}^{m_y} a_m U_m(x) b_n V_n(y),$$

где  $a_m, b_n$  — произвольно выбранные постоянные, которые определяются из условия ортогональности базисных функций к невязке

$$\int_0^b \int_{-a/2}^{a/2} \sum_{m=1}^{m_x} \sum_{n=1}^{m_y} [\nabla^4(a_m U_m(x) b_n V_n(y)) - \lambda(a_m U_m(x) b_n V_n(y))] U_p(x) V_q(y) dx dy = 0. \quad (6)$$

Преобразуем условие (6). Заметим, что

$$\nabla^4(U_m(x) V_n(y)) U_p(x) V_q(y) = \nabla^2(U_m(x) V_n(y)) \nabla^2(U_p(x) V_q(y)).$$

Вводя матрицу  $A$  размером  $p \times q, m \times n$ , для элемента  $pqmn$  этой матрицы получаем

$$\begin{aligned} A_{pqmn} = & \int_{-a/2}^{a/2} U_m'' U_p'' dx \int_0^b V_n V_q dy + \int_{-a/2}^{a/2} U_m U_p dx \int_0^b V_n'' V_q'' dy + \\ & + \int_{-a/2}^{a/2} U_m U_p'' dx \int_0^b V_n'' V_q dy + \int_{-a/2}^{a/2} U_m'' U_p dx \int_0^b V_n V_q'' dy. \end{aligned}$$

Вводя матрицу  $B$  того же размера, что и  $A$ , для элемента  $pqmn$  получаем выражение

$$B_{pqmn} = \int_{-a/2}^{a/2} U_m U_p dx \int_0^b V_n V_q dy.$$

Вычислим интегралы, учитывая, что

$$V_n'' = \frac{\partial^2}{\partial^2 y} \sin \frac{n\pi y}{b} = -\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad V_q = \delta_{nq} V_n,$$

$$U_m''(x) = \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi x}{b} + 2\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2 B_m \operatorname{ch} \frac{m\pi x}{b} + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^3 B_m x \operatorname{sh} \frac{m\pi x}{b}$$

( $\delta_{nq}$  — символ Кронекера). Тогда

$$\int_0^b V_n'' V_q dy = \int_0^b V_n V_q'' dy = -\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \int_0^b V_n^2 dy = \delta_{nq} \frac{1}{2} \frac{n\pi}{b} (\cos(n\pi) \sin(n\pi) - n\pi),$$

$$\int_0^b V_n V_q dy = -\delta_{nq} \frac{b}{2n\pi} (\cos(n\pi) \sin(n\pi) - n\pi), \quad (7)$$

$$\int_0^b V_n'' V_q dy = -\delta_{nq} \frac{1}{2} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^3 (\cos(n\pi) \sin(n\pi) - n\pi).$$

Таким образом, интегралы в (7) являются ненулевыми только при  $n = q$ .

Интегралы по переменной  $x$  могут быть вычислены либо аналитически, либо численно. При этом в случае  $m = p$  целесообразно записать аналитическую формулу, а в случае  $m \neq p$  — вычислить интегралы с использованием квадратурных формул

$$\int_{-a/2}^{a/2} f(x) dx = \sum_{k=1}^{m_x} C_k f(x_k),$$

$$C_k = \frac{a}{m_x} \left(1 + \sum_{l=2(2)}^{m_x-1} \frac{2}{1-l^2} \cos(l\theta_k)\right), \quad \theta_k = \frac{a}{2} \frac{2k-1}{2m_x} \pi, \quad x_k = \cos\left(\frac{a}{2} \frac{2k-1}{2m_x} \pi\right).$$

В результате исходная задача (6) записывается в виде

$$\sum_{m,p=1}^{m_x} \sum_{n,q=1}^{m_y} a_m b_n A_{pqmn} = \lambda \sum_{m,p=1}^{m_x} \sum_{n,q=1}^{m_y} a_m b_n B_{pqmn}, \quad (8)$$

где суммирование по  $m, p$  и  $n, q$  проводится отдельно. При этом матрица  $B$  является недиагональной, а матрица  $A$  — симметричной.

**4. Определение собственных значений.** Задача сводится к определению собственных значений системы линейных алгебраических уравнений (8). Эти значения можно вычислить следующим образом:

$$B^{-1}A = \lambda E. \quad (9)$$

Для получения собственных значений  $\lambda$  необходимо вычислить собственные значения матрицы  $B^{-1}A$ . Такие вычисления можно выполнить с помощью подпрограмм ELMHES, ELTRAN и HQR2 библиотеки EISPACK [8].

Матрица  $B$  в левой части (9) плохо обусловлена, что приводит к возникновению ошибок при обращении матрицы. Применение процедуры итерационного уточнения [9] не оказывает существенного влияния на точность вычисления собственных значений.

**5. Получение приближенного значения первого собственного значения.** Если рассмотреть решение, в котором  $m_x = m_y = 1$ , т. е.  $m = n = p = q = 1$ , то из (9) следует

Таблица 1

Приближенные и точные значения собственных значений для различных пластин

| $\varphi$ | $b^2\sqrt{\lambda}$   |                     |              |
|-----------|-----------------------|---------------------|--------------|
|           | Приближенное значение | Точное значение [3] | $\Delta, \%$ |
| 1,0       | 29,087 171 22         | 28,9509             | 0,47         |
| 1,5       | 17,491 057 39         | 17,3730             | 0,68         |
| 0,4       | 146,006 353 40        | 145,4839            | 0,36         |
| 2/3       | 56,569 370 81         | 56,3481             | 0,39         |

Таблица 2

Собственные значения для сеток различного размера и различных значений  $a, b, \varphi$ 

| $25 \times 25$<br>( $a = b = 2, \varphi = 1$ ) | $25 \times 25$<br>( $a = 3, b = 2, \varphi = 1,5$ ) | $17 \times 17$<br>( $a = 4, b = 2, \varphi = 2$ ) | $25 \times 25$<br>( $a = 2,5, b = 2, \varphi = 1,25$ ) |
|--|---|---|--|
| 28,951 910 528                                 | 17,481 586 540                                      | 13,567 112 199                                    | 21,316 341 135   |
| 54,743 212 672                                 | 45,484 590 932                                      | 42,684 675 502                                    | 48,517 702 057   |
| 102,215 483 810                                | 63,702 743 866                                      | 48,143 638 987                                    | 86,970 995 036   |
| 128,817 819 860                                | 89,952 676 890                                      | 73,172 684 662                                    | 96,908 804 415   |
| 154,588 481 230                                | 94,212 032 164                                      | 91,383 089 231                                    | 112,934 984 290  |
| 170,345 705 210                                | 136,660 789 330                                     | 119,644 835 400                                   | 158,922 203 720  |
| 199,699 869 470                                | 163,072 480 590                                     | 155,719 801 950                                   | 165,504 075 620  |
| 255,724 960 990                                | 173,810 416 990                                     | 155,719 801 950                                   | 225,639 831 980  |
| 258,613 254 030                                | 198,342 152 830                                     | 160,585 885 680                                   | 238,633 269 170  |
| 265,132 668 970                                | 203,966 101 330                                     | 184,248 542 960                                   | 254,088 777 180  |
| 271,510 583 280                                | 241,763 983 050                                     | 187,179 853 460                                   | 264,013 433 860  |
| 299,535 235 220                                | 251,719 616 030                                     | 206,200 350 190                                   | 268,036 343 590  |
| 310,858 778 010                                | 291,615 403 750                                     | 246,658 473 580                                   | 308,976 678 640  |
| 328,428 556 610                                | 305,603 159 720                                     | 249,385 643 610                                   | 313,720 179 950  |
| 348,367 786 220                                | 360,127 005 580                                     | 275,237 852 490                                   | 362,426 533 920  |
| 351,076 768 020                                | 390,334 202 440                                     | 308,211 405 610                                   | 376,934 111 220  |
| 366,816 551 300                                | 399,407 368 260                                     | 339,465 908 760                                   | 418,308 761 560  |
| 376,321 105 190                                | 488,465 221 110                                     | 357,950 166 330                                   | 479,900 782 500  |
| 443,274 746 700                                | 495,988 260 890                                     | 383,567 191 720                                   | 490,625 559 130  |
| 457,419 157 470                                | 527,153 788 610                                     | 392,000 873 550                                   | 508,086 113 690  |
| 494,868 708 520                                | 557,941 691 120                                     | 486,101 058 590                                   | 546,309 535 870  |
| 519,745 690 300                                | 565,267 235 390                                     | 498,543 023 990                                   | 556,014 806 970  |
| 529,583 115 830                                | 581,329 927 770                                     | 512,565 360 020                                   | 638,577 523 540  |
| 584,000 916 720                                | 622,204 385 100                                     | 629,178 299 120                                   | 658,553 690 460  |
| 585,242 688 770                                | 623,300 706 450                                     | 634,106 662 100                                   | 683,036 847 160  |
| 619,083 382 440                                | 637,541 498 110                                     | 637,247 267 220                                   | 693,765 859 260  |
| 635,573 798 370                                | 659,821 754 650                                     | 669,689 691 160                                   | 806,288 876 010  |
| 637,315 179 720                                | 659,821 754 650                                     | 789,851 433 770                                   | 810,310 968 590  |
| 642,726 860 840                                | 683,230 765 820                                     | 802,022 627 850                                   | 826,680 361 260  |
| 674,625 178 380                                | 749,264 875 280                                     | 822,870 802 600                                   | 861,053 982 090  |
| 704,560 765 790                                | 769,249 022 660                                     | 884,602 064 670                                   | 878,505 384 690  |
| 730,692 661 510                                | 804,131 287 870                                     | 989,531 987 240                                   | 912,433 870 840  |
| 746,915 921 430                                | 841,824 317 440                                     | 996,428 480 110                                   | 933,682 997 150  |
| 751,081 798 370                                | 902,911 981 030                                     | 1008,398 843 700                                  | 979,813 236 160  |
| 761,540 340 360                                | 930,864 356 440                                     | 1008,398 843 700                                  | 993,761 470 780  |
| 800,629 906 700                                | 954,180 903 110                                     | 1011,459 591 400                                  | 1048,486 622 100                                       |
| 810,368 806 150                                | 954,180 903 110                                     | 1090,947 007 500                                  | 1057,615 216 500                                       |
| 848,433 358 940                                | 991,625 802 110                                     | 1196,742 895 900                                  | 1132,341 140 700                                       |
| 887,567 335 560                                | 1021,354 548 500                                    | 1218,889 304 700                                  | 1145,912 558 200                                       |
| 896,862 526 520                                | 1023,563 976 700                                    | 1244,187 753 000                                  | 1152,554 761 400                                       |

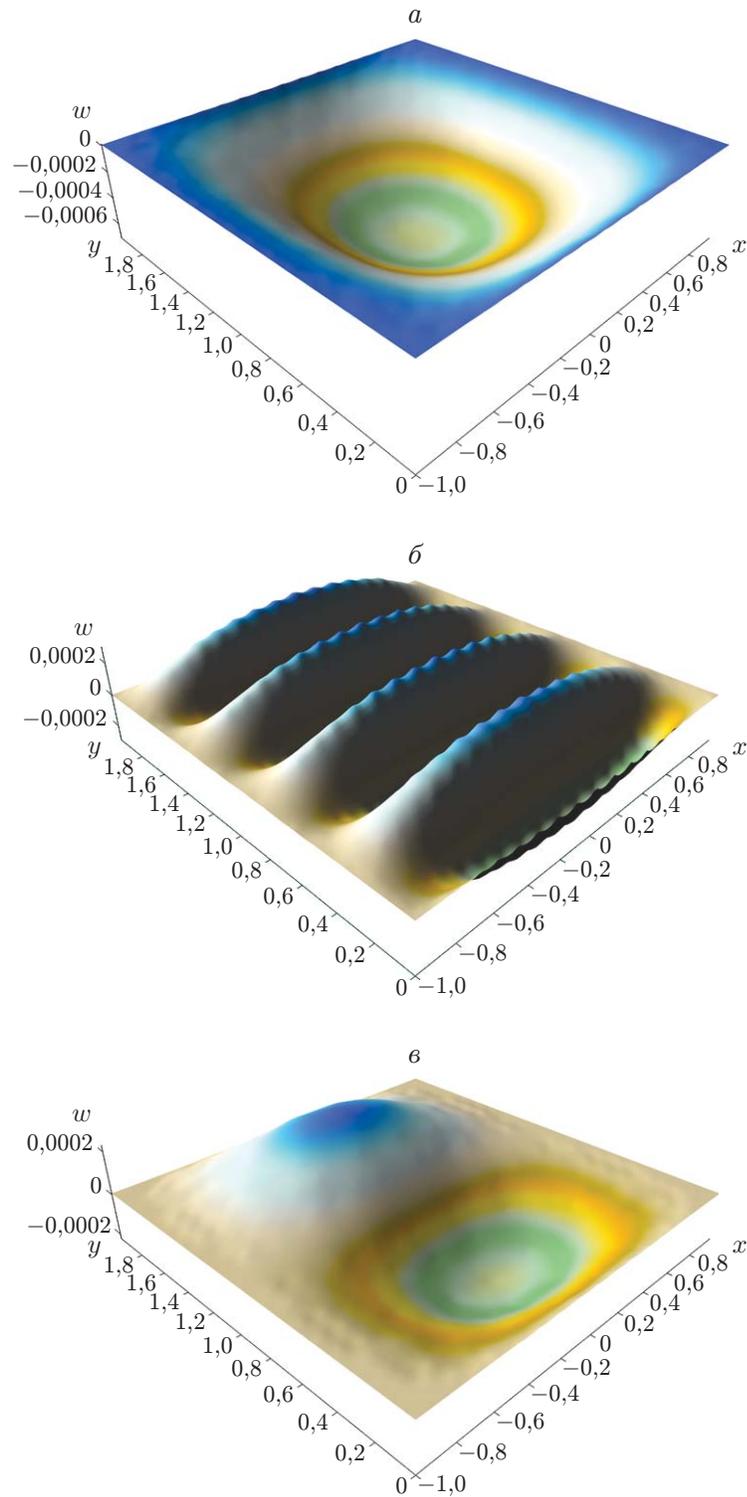


Рис. 2. Собственные формы при  $a = b = 2$  и различных значениях  $\lambda$ :  
 $a - \lambda = 28,951\,910\,528$ ,  $б - \lambda = 642,726\,860\,840$ ,  $в - \lambda = 154,588\,481\,230$

уравнение, решение которого является приближенным значением первого собственного значения задачи.

В табл. 1 приведены приближенные и точные [3] значения собственных значений при различных значениях  $\varphi = a/b$ , а также погрешность  $\Delta$  приближенного решения.

Численное решение нетрудно получить, например, с помощью пакета Maple.

**6. Программная реализация и результаты расчетов.** Программная реализация решения задачи выполнена на языке Fortran. Поиск решения проводился при различных значениях  $a$  и  $b$ . В табл. 2 приведены вычисленные собственные значения при  $\varphi = a/b = 1,00; 1,50; 2,00; 1,25$ .

На рис. 2 представлены собственные формы для квадратной пластины.

**Заключение.** В работе рассмотрена задача о собственных колебаниях пластины с двумя защемленными и двумя свободно опертыми краями, решение которой строится по аналогии с решением Леви. Применение метода Бубнова — Галеркина позволило сформулировать задачу на собственные значения в матричной форме и построить приближенное аналитическое решение для первого собственного значения при  $m_x = m_y = 1$ . При этом погрешность вычисления не превышает 0,7 %.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Eisenberger M., Deutsch A. Solution of thin rectangular plate vibrations for all combinations of boundary conditions // J. Sound Vibrat. 2019. V. 452. P. 1–12.
2. Gorman D. J. Free vibration analysis of rectangular plates. N. Y.: Elsevier North Holland, Inc, 1982.
3. Leissa A. W. The free vibration of rectangular plates // J. Sound Vibrat. 1973. V. 31, N 3. P. 257–293.
4. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки. Изд. 2-е, стереотип. / С. П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. М.: Наука, 1966.
5. Germain S. Recherches sur la theorie des surfaces elastiques. P.: Mme ve Courcier, 1821.
6. Барашков В. Н. Основы теории упругости: Учеб. пособие / В. Н. Барашков, И. Ю. Смолина, Л. Е. Путеева, Д. Н. Песцов. Томск: Том. гос. архит.-строит. ун-т, 2012.
7. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. 2-е изд. М.: Наука, 1970.
8. EISPACK. A collection of Fortran subroutines that compute the eigenvalues and eigenvectors. [Электрон. ресурс]. Режим доступа: <https://www.netlib.org/eispack/>.
9. Фаддеев Д. К. Вычислительные методы линейной алгебры / Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. М.: Физматгиз, 1963.

*Поступила в редакцию 21/IV 2020 г.,  
после доработки — 3/VI 2020 г.  
Принята к публикации 29/VI 2020 г.*