

© 2015 г. П.А. АКИМОВ, канд. физ.-мат. наук (akmpavel@rambler.ru),  
А.И. МАТАСОВ, д-р физ.-мат. наук (alexander.matasov@gmail.com)  
(Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова)

## ИТЕРАЦИОННЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ $l_1$ -АППРОКСИМАЦИИ В ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ОЦЕНИВАНИЯ<sup>1</sup>

Рассматривается подход к оцениванию векторов состояния динамических систем, состоящий в решении проблемы  $l_1$ -аппроксимации. Предложен алгоритм решения данной задачи – метод весовой и временной рекурсий, который сочетает в себе идеи вариационно-взвешенных квадратичных приближений и сглаживающего фильтра Калмана. Для итераций метода построены оценки уровней неоптимальности, что является развитием предыдущих результатов, полученных авторами для классического метода наименьших модулей.

### 1. Введение

Известно, что  $l_1$ -аппроксимация [1, 2] оказывается весьма эффективным и методически ясным подходом к обработке измерительной информации с аномально большими ошибками (сбоями), а также в случае, когда некоторые компоненты вектора состояния динамической системы могут меняться скачкообразно [2–5]. В статье предлагается метод численного решения задач  $l_1$ -аппроксимации для динамических систем при длительных интервалах измерений<sup>2</sup>.

В предыдущих работах авторов для решения таких проблем использовались методы, состоящие в сведении динамических задач оценивания к статическим с вектором неизвестных параметров большой размерности [5, 7]. Представленный ниже алгоритм существенно использует динамическую структуру задач оценивания, что позволяет избежать критической зависимости от длительности процесса измерений. Метод основан на последовательном решении квадратичных проблем оптимизации со специальным подбором весовых коэффициентов. Применительно к статическим задачам оценивания аналогичный подход давно используется на практике, его называют алгоритмом вариационно-взвешенных квадратичных приближений (алгоритмом Вейсфельда) [8, 9]. Однако для динамических задач он может быть усовершенствован путем использования рекуррентных соотношений между оценками фазовых векторов системы в различные моменты времени, что позволяет существенно повысить вычислительную эффективность процедур.

Важный аспект, связанный с итерационными алгоритмами решения, состоит в необходимости оценки качества получаемого на текущей итерации

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект № 11-08-00004а).

<sup>2</sup> Данная статья является переработанной и расширенной версией доклада [6].

приближенного решения исходной задачи. Ниже будет получена оценка уровня неоптимальности текущей итерации соответствующего алгоритма, также учитывающая динамический характер проблемы.

## 2. Задачи аппроксимации

### 2.1. Проблема $l_1$ -аппроксимации в динамическом случае

Рассмотрим динамическую систему, описываемую дискретной моделью

$$x(k+1) = Fx(k) + Gq(k) + g(k), \quad k = 0, \dots, K-1,$$

где  $x(k) \in \mathbf{R}^n$  – неизвестный вектор состояния системы в момент времени  $k$ ,  $q(k) \in \mathbf{R}^l$  – неизвестный вектор погрешностей,  $F \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $G \in \mathbf{R}^{n \times l}$  – заданные матрицы,  $g(k) \in \mathbf{R}^n$  – известный вектор, отвечающий неоднородностям данной системы. Здесь для простоты будем полагать, что матрицы  $F$  и  $G$  постоянны. Все описываемые далее методы применимы и для случая переменных  $F$  и  $G$ .

Пусть также имеется априорная информация  $\bar{x}(0)$  о начальном состоянии системы:

$$\bar{x}(0) = x(0) + \bar{r}(0), \quad \bar{x}(0), \bar{r}(0) \in \mathbf{R}^n.$$

В каждый момент времени производятся измерения, линейно связанные с компонентами вектора состояния системы:

$$z(k) = Hx(k) + r(k), \quad k = 0, \dots, K.$$

Здесь  $z(k) \in \mathbf{R}^m$  – вектор измерений, соответствующий моменту  $k$ ,  $H \in \mathbf{R}^{m \times n}$  – заданная матрица,  $r(k) \in \mathbf{R}^m$  – погрешность измерений.

Характерные значения шумов в измерениях, погрешностей в динамике и априорной информации считаются известными и задаются положительными величинами  $R_j, Q_j, \Pi_j$  соответственно:

$$\begin{aligned} r_j(k) &\sim R_j, & j = 1, \dots, m, & k = 0, \dots, K; \\ q_j(k) &\sim Q_j, & j = 1, \dots, l, & k = 0, \dots, K-1; \\ \bar{r}_j(0) &\sim \Pi_j, & j = 1, \dots, n. & \end{aligned}$$

Кроме того, будем полагать, что в редкие моменты времени погрешности измерений могут допускать аномально большие значения, превышающие  $\Pi_j, R_j, Q_j$ , а погрешности в динамике могут приводить к скачкообразным изменениям компонент фазового вектора. При этом каких-либо предположений о вероятностных свойствах шумов делать не будем.

Необходимо оценить значения векторов состояния  $x(k)$  на всем интервале времени  $k = 0, \dots, K$ . По аналогии с применяемым в статических проблемах методом наименьших модулей [2, 8] эти оценки будем искать как решение

вариационной задачи  $l_1$ -аппроксимации<sup>3</sup>:

$$(1) \quad I(x, q) = \|\Pi^{-1}(\bar{x}(0) - x(0))\|_1 + \sum_{k=0}^{K-1} \|Q^{-1}q(k)\|_1 + \sum_{k=0}^K \|R^{-1}(z(k) - Hx(k))\|_1 \rightarrow \inf_{(x, q)}$$

при ограничениях

$$(2) \quad x(k+1) - Fx(k) - Gq(k) - g(k) = 0, \quad k = 0, \dots, K-1.$$

Здесь введены краткие обозначения для неизвестных векторов в описанной системе

$$(x, q) = (x(0), \dots, x(K), q(0), \dots, q(K-1)),$$

и для весовых матриц

$$\Pi^{-1} = \text{diag}(\Pi_1^{-1}, \dots, \Pi_n^{-1}), \quad Q^{-1} = \text{diag}(Q_1^{-1}, \dots, Q_l^{-1}), \\ R^{-1} = \text{diag}(R_1^{-1}, \dots, R_m^{-1}).$$

Таким образом, необходимо минимизировать сумму  $l_1$ -норм векторов невязок, соответствующих погрешностям начальной информации, динамической модели и измерений. Ясно, что проблему (1), (2) можно трактовать как задачу метода наименьших модулей в динамическом случае. С математической точки зрения, эта задача состоит в поиске минимума негладкой функции при линейных ограничениях — равенствах.

Наиболее простые методы решения задач вида (1), (2) состоят в сведении к эквивалентным проблемам линейного программирования (ЛП) с дополнительными к (2) ограничениями-неравенствами [3]. Недостаток такого подхода заключается в том, что он требует больших вычислительных ресурсов при обработке результатов длительных измерений, поскольку в этом случае матрица, задающая ограничения-неравенства, достигает большой размерности, пропорциональной количеству негладких слагаемых в функционале исходной задачи

Существенным шагом вперед в решении проблем оптимизации большой размерности является так называемый ADMM — Alternating Direction Method of Multipliers [10]. Этот метод представляет собой итерационный поиск минимума функции Лагранжа для исходной проблемы, при котором параллельно решаются задачи с переменными меньшей размерности. Применительно к динамическим проблемам оценивания ADMM позволяет по отдельности оценивать фазовые векторы в разные моменты времени. Однако один из шагов ADMM все равно требует решения вспомогательных квадратичных задач, по количеству переменных сопоставимых с исходной проблемой. Для некоторых простых случаев это препятствие можно преодолеть, однако для линейных динамических систем общей структуры использование ADMM напрямую не позволяет произвести декомпозицию исходной негладкой проблемы.

<sup>3</sup> Здесь и далее, как обычно,  $\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$ ,  $\|x\|_\infty = \max_i \{|x_i|\}$ ,  $\|x\|_2 = (\sum_i x_i^2)^{1/2}$ .

В связи с этим, возникает необходимость в разработке простых по структуре методов, существенно использующих динамический характер проблем оценивания и позволяющих избежать сведения их к статическим проблемам.

## 2.2. Необходимые сведения из теории квадратичных задач сглаживания

Предлагаемый в разделе 3 алгоритм решения проблемы (1), (2) опирается на более распространенную квадратичную задачу сглаживания [11]:

$$(3) \quad J(x, q) = \left( \|\Pi^{-1}(\bar{x}(0) - x(0))\|_2^2 + \sum_{k=0}^{K-1} \|Q^{-1}q(k)\|_2^2 + \sum_{k=0}^K \|R^{-1}(z(k) - Hx(k))\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \rightarrow \inf_{(x, q)}$$

при тех же ограничениях (2).

Напомним рекуррентные соотношения, определяющие решение задачи (3), (2).

*Утверждение 1* [11]. Пусть  $(x^{*\Gamma}(0), \dots, x^{*\Gamma}(K), q^{*\Gamma}(0), \dots, q^{*\Gamma}(K-1))^{\Gamma}$  — решение проблемы (3), (2). Тогда оно описывается следующей краевой задачей:

$$(4) \quad \begin{aligned} x^*(k+1) &= Fx^*(k) + GQ^2G^{\Gamma}\lambda^J(k+1) + g(k), \\ q^*(k) &= Q^2G^{\Gamma}\lambda^J(k+1), \quad k = 0, \dots, K-1, \\ \lambda^J(k) &= F^{\Gamma}\lambda^J(k+1) + H^{\Gamma}R^{-2}(z(k) - Hx^*(k)), \quad k = K, \dots, 0, \end{aligned}$$

при краевых условиях  $\lambda^J(K+1) = 0$ ,  $x^*(0) = \bar{x}(0) + \Pi^2\lambda^J(0)$ .

Строго говоря, в книге [11] утверждение 1 доказано для случая  $\bar{x}(0) = 0$ ,  $g(k) = 0$ . Однако нетрудно убедиться, что утверждение 1 непосредственно следует из результатов [11]. Для этого нужно перейти к центрированному процессу  $\tilde{x}(k) = x(k) - \bar{x}(k)$ , где векторы  $\bar{x}(k)$  известны и описываются рекуррентными формулами  $\bar{x}(k+1) = F\bar{x}(k) + g(k)$ ,  $k = 0, \dots, K-1$ , с известным начальным условием  $\bar{x}(0)$ .

В силу задания граничных условий на разных концах, формулы (4) не удобны для непосредственного решения проблемы (3), (2). Для преодоления этой трудности можно использовать, например, формулы Брайсона–Фрейзера, которые представлены в следующем утверждении.

*Утверждение 2* [11]. Решение проблемы (3), (2)  $(x^{*\Gamma}(0), \dots, x^{*\Gamma}(K), q^{*\Gamma}(0), \dots, q^{*\Gamma}(K-1))^{\Gamma}$  определяется формулами

$$\begin{aligned} x^*(j) &= x^-(j) + P^-(j)\lambda^J(j), \quad j = 0, \dots, K, \\ q^*(j) &= Q^2G^{\Gamma}\lambda^J(j+1), \quad j = 0, \dots, K-1, \end{aligned}$$

где  $x^-(j)$  — оценки фазовых векторов, доставляемые фильтром Калмана:

$$\begin{aligned} x^-(j+1) &= Fx^-(j) + K_p(j)(z(j) - Hx^-(j)) + g(j), \quad x^-(0) = \bar{x}(0), \\ P^-(j+1) &= FP^-(j)F^T + GQ^2G^T - K_p(j)(R^2 + HP^-(j)H^T)K_p^T(j), \quad P^-(0) = \Pi^2, \\ K_p(j) &= FP^-(j)H^T(R^2 + HP^-(j)H^T)^{-1}, \quad j = 0, \dots, K-1, \end{aligned}$$

а  $\lambda^J(j)$  — векторы, вычисляемые из рекуррентных соотношений в “обратном” времени:

$$\begin{aligned} \lambda^J(j) &= (F - K_p(j)H)^T \lambda^J(j+1) + H^T(R^2 + HP^-(j)H^T)^{-1}(z(j) - Hx^-(j)), \\ \lambda^J(K+1) &= 0, \quad j = K, \dots, 0. \end{aligned}$$

Формулы Брайсона–Фрейзера позволяют в два прохода по массиву обрабатываемых измерений найти решение квадратичной задачи сглаживания. При первом проходе строятся оценки согласно фильтру Калмана, при втором проходе — слагаемые  $\lambda^J(j)$ . В итоге результирующая оценка учитывает для каждого момента времени  $j$  информацию, соответствующую всему интервалу времени измерений.

### 3. Метод весовой и временной рекурсий

Предложим метод численного решения проблемы  $l_1$ -аппроксимации (1), (2). Речь пойдет о модификации алгоритма Вейсфельда (алгоритма вариационно-взвешенных квадратических приближений), использование которого в методе наименьших модулей описано, например, в [5, 8]. Отличие состоит в том, каким образом на каждой итерации этого алгоритма будут решаться задачи  $l_2$ -аппроксимации.

Пусть  $(x^{(0)}, q^{(0)}) = \{x(k, 0), q(j, 0)\}_{k=0, \dots, K}^{j=0, \dots, K-1}$  — набор векторов, являющийся допустимым для задачи (1), (2), т.е. удовлетворяющий равенствам (2). В этих обозначениях первый аргумент в скобках  $k$  — момент времени, а второй, в данном случае “0”, — номер итерации. Рассмотрим последовательность итераций, на каждой из которых ищется минимум квадратичной функции с весовыми коэффициентами, зависящими от решения, полученного на предыдущей итерации:

$$(5) \quad J_{(s+1)} = \inf_{(X, q)} \left( (\bar{x}(0) - x(0))^T \Pi_W^{-2}(s) (\bar{x}(0) - x(0)) + \sum_{k=0}^{K-1} q^T(k) Q_W^{-2}(k, s) q(k) + \sum_{k=0}^K (z(k) - Hx(k))^T R_W^{-2}(k, s) (z(k) - Hx(k)) \right)^{\frac{1}{2}}$$

при ограничениях (2).

Здесь  $\Pi_W^{-2}(s)$ ,  $Q_W^{-2}(k, s)$ ,  $R_W^{-2}(k, s)$  — диагональные матрицы весовых коэффициентов, элементы которых зависят как от момента дискретного време-

ни  $k$ , так и от номера предыдущей итерации  $s$ :

$$\Pi_{W_i}^{-2}(s) = \begin{cases} \Pi_i^{-1}/|\bar{x}_i(0) - x_i(0, s)|, & \text{если } |\bar{x}_i(0) - x_i(0, s)| > \alpha\Pi_i, \\ \Pi_i^{-2}/\alpha, & \text{если } |\bar{x}_i(0) - x_i(0, s)| \leq \alpha\Pi_i, \end{cases} \quad i = 1, \dots, n;$$

$$R_{W_i}^{-2}(k, s) = \begin{cases} R_i^{-1}/|z_i(k) - H_i x(k, s)|, & \text{если } |z_i(k) - H_i x(k, s)| > \alpha R_i, \\ R_i^{-2}/\alpha, & \text{если } |z_i(k) - H_i x(k, s)| \leq \alpha R_i, \end{cases} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, m, \\ k = 0, \dots, K; \end{matrix}$$

$$Q_{W_i}^{-2}(k, s) = \begin{cases} Q_i^{-1}/|q_i(k, s)|, & \text{если } |q_i(k, s)| > \alpha Q_i, \\ Q_i^{-2}/\alpha, & \text{если } |q_i(k, s)| \leq \alpha Q_i, \end{cases} \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, l, \\ k = 0, \dots, K - 1, \end{matrix}$$

где  $(x^{(s)}, q^{(s)}) = \{x(k, s), q(j, s)\}_{k=0, \dots, K}^{j=0, \dots, K-1}$  — решение, полученное на предыдущей итерации с номером  $s$ . Параметр  $\alpha$  характеризует малость невязок. Поскольку невязки могут иметь разные масштабы, то малость каждого слагаемого, например, соответствующего измерениям, задается величинами вида  $\alpha R_i$  и т.п. (напомним, что  $R_i$  задает характерное значение уровня шумов в измерении  $z_i(k)$ ).

Таким образом, вместо, например, слагаемых  $R_i^{-1}|z_i(k) - H_i x(k)|$  в функционале присутствуют слагаемые  $R_i^{-1}(z_i(k) - H_i x(k))^2/|z_i(k) - H_i x(k, s)|$ . При этом используется регуляризация; если на какой-то итерации невязки становятся слишком малы:  $|z_i(k) - H_i x(k, s)| \leq \alpha R_i$ , то соответствующий весовой коэффициент фиксируется и дальше не уменьшается (и аналогично для других компонент).

Задача сглаживания (5), (2) решается при помощи рекуррентных формул Брайсона–Фрейзера (см. утверждение 2), усовершенствованных согласно методу корня [11]. Эта рекуррентность позволяет иметь дело с векторами и матрицами относительно малой размерности (порядка  $n$  и  $n \times n$  соответственно), что существенно экономит вычислительные ресурсы по сравнению со статическим случаем, в котором приходится решать проблемы ЛП с вектором неизвестных параметров размерности  $n + Kl + n + (K + 1)m + Kl$  и соответствующей ему матрицей размерности  $(n + (K + 1)m + Kl) \times (n + Kl + n + (K + 1)m + Kl)$ . Разумеется, современные пакеты численного решения (CVX, CPLEX, Gurobi, Mosek) существенно расширяют возможности применения ЛП для динамических задач с большим количеством переменных, однако и предложенный в статье метод, несомненно, полезен. Его сильными сторонами являются простота структуры и численной реализации, отсутствие необходимости выделять большие объемы оперативной памяти компьютера для матриц, возникающих в задачах ЛП.

Получаемое на каждой итерации  $s + 1$  решение квадратичной проблемы  $(x^{(s+1)}, q^{(s+1)})$  будем рассматривать как приближенное решение негладкой проблемы (1), (2).

Далее будем считать, что  $J_{(s+1)} > 0$ . Если это не так и  $J_{(s+1)} = 0$ , то каждое слагаемое в этом функционале равно нулю. Следовательно и в функциона-

ле (1), (2) каждое слагаемое равно нулю. Поэтому  $I_0 = 0$  и нет необходимости далее продолжать вычислительный процесс, так как решение проблемы  $l_1$ -аппроксимации (1), (2) найдено.

Итак, согласно рассматриваемому подходу, используются два “вложенных” итерационных процесса: во внешнем цикле формулируются задачи сглаживания вида (5), (2) на основании решения, полученного на предыдущем шаге этого цикла; во внутреннем цикле ищется решение каждой такой задачи. В первом случае речь идет об итерациях, параметризованных индексом  $s$ , во втором случае — индексом  $k$ , соответствующим дискретному времени.

Описанный алгоритм является итерационным, кроме того, гарантировать его сходимость не представляется возможным, так как на поздних итерациях невязки приближаются к нулевым значениям и применяется регуляризация. Поэтому возникает необходимость в оценке точности приближенного решения, а также в задании критериев останова итерационного процесса. Точность приближенного решения, полученного на итерации  $s$ , будем характеризовать уровнем неоптимальности этой итерации [5, 12]

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{I(x^{(s+1)}, q^{(s+1)})}{I_0},$$

где  $I_0$  — неизвестное минимальное значение функционала (1), а  $I(x^{(s+1)}, q^{(s+1)})$  — значение этого функционала на текущей итерации. Отметим, что  $\Delta \geq 1$  и, чем приближенное решение точнее, тем  $\Delta$  ближе к 1.

Точное решение задачи (1), (2) неизвестно, поэтому уровень неоптимальности неизвестен. Ниже будут построены конструктивно вычисляемые оценки уровней неоптимальности сверху  $\Delta_0$ , дающие возможность гарантированно оценить качество полученного на каждой итерации приближенного решения. Иными словами, если зафиксирован достаточно близкий к единице уровень точности  $\Delta_{\text{end}}$  и на текущей итерации  $\Delta_0 \leq \Delta_{\text{end}}$ , то  $\Delta \leq \Delta_0 \leq \Delta_{\text{end}}$  и итерационный процесс можно остановить, считая  $(x^{(s+1)}, q^{(s+1)})$  решением проблемы  $l_1$ -аппроксимации с заданным уровнем точности.

Далее в обозначениях для весовых коэффициентов и решения задачи (5), (2) не будем указывать номер итерации  $s$ , полагая

$$\begin{aligned} \Pi_W(s) &= \Pi_W, & Q_W(i, s) &= Q_W(i), & R_W(k, s) &= R_W(k), & J_{(s+1)} &= J_0, \\ x(k, s+1) &= x^*(k), & q(i, s+1) &= q^*(i), & k &= 0, \dots, K, & i &= 0, \dots, K-1, \end{aligned}$$

поскольку все выводы верны для любой итерации.

#### 4. Двойственные задачи

Для получения оценок уровней неоптимальности воспользуемся фактами из теории двойственности выпуклых вариационных задач. Вариационным проблемам (1), (2) и (5), (2) ставятся в соответствие так называемые двойственные задачи, решения и значения которых тесно связаны с решениями исходных проблем. При помощи стандартных выкладок [13, 14] может быть показано, что для двойственных проблем верны следующие утверждения.

Утверждение 3. Задача, двойственная к проблеме (1), (2), имеет вид

$$(6) \quad I^0 = \sup_{(\lambda, \mu)} \left( \bar{x}^T(0)\lambda(0) + \sum_{k=0}^K z^T(k)\mu(k) + \sum_{k=0}^{K-1} g^T(k)\lambda(k+1) \right)$$

при ограничениях

$$(7) \quad \lambda(k) - F^T \lambda(k+1) + H^T \mu(k) = 0, \quad k = 0, \dots, K, \quad \lambda(K+1) = 0,$$

$$(8) \quad \begin{aligned} |\Pi_i \lambda_i(0)| &\leq 1, \quad i = 1, \dots, n, \\ |R_i \mu_i(k)| &\leq 1, \quad i = 1, \dots, m, \quad k = 0, \dots, K, \\ |Q_i G_i^T \lambda(k+1)| &\leq 1, \quad i = 1, \dots, l, \quad k = 0, \dots, K-1, \end{aligned}$$

где  $G_i \in \mathbf{R}^n$  – столбцы матрицы  $G$ .

Кроме того, выполняется соотношение двойственности:  $I_0 = I^0$ .

Доказательство утверждения 3 приведено в Приложении.

Утверждение 4. Задача, двойственная к проблеме (5), (2), имеет вид

$$(9) \quad J^0 = \sup_{(\lambda, \mu)} \left( \bar{x}^T(0)\lambda(0) + \sum_{k=0}^K z^T(k)\mu(k) + \sum_{k=0}^{K-1} g^T(k)\lambda(k+1) \right)$$

при ограничениях (7) и

$$(10) \quad \left( \lambda^T(0) \Pi_W^2 \lambda(0) + \sum_{k=0}^K \mu^T(k) R_W^2(k) \mu(k) + \sum_{k=0}^{K-1} \lambda^T(k+1) G Q_W^2(k) G^T \lambda(k+1) \right)^{\frac{1}{2}} \leq 1.$$

Кроме того, выполняется соотношение двойственности:  $J^0 = J_0$ .

Доказательство утверждения 4 аналогично доказательству утверждения 3.

В утверждениях 3 и 4 векторы

$$\begin{aligned} \lambda &= (\lambda^T(0), \dots, \lambda^T(K))^T, \quad \lambda(k) \in \mathbf{R}^n, \\ \mu &= (\mu^T(0), \dots, \mu^T(K))^T, \quad \mu(k) \in \mathbf{R}^m, \quad k = 0, \dots, K, \end{aligned}$$

являются множителями Лагранжа для соответствующих исходных задач.

Между решениями прямой и двойственной проблем (5), (2) и (9), (7), (10) можно установить связь, которая представлена в следующем утверждении.

Утверждение 5. Пусть  $(x^*, q^*)$  – решение проблемы (5), (2) и  $J_0$  – соответствующее минимальное значение функционала (5), удовлетворяющее условию  $J_0 > 0$ . Тогда решение проблемы (9), (7), (10) –  $(\lambda^*, \mu^*)$  – определяется следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \lambda^*(0) &= \frac{1}{J_0} \Pi_W^{-2} (\bar{x}(0) - x^*(0)), \quad \mu^*(k) = \frac{1}{J_0} R_W^{-2}(k) (z(k) - Hx^*(k)), \quad k = 0, \dots, K, \\ \lambda^*(k+1) &= -\frac{1}{J_0} \lambda^J(k+1), \quad k = 0, \dots, K-1, \end{aligned}$$

где векторы  $\lambda^J(k)$  находятся из соотношений, аналогичных (4):

$$\lambda^J(k) = F^T \lambda^J(k+1) + H^T R_W^{-2}(k)(z(k) - Hx^*(k)), \quad k = K, \dots, 0, \quad \lambda^J(K+1) = 0.$$

При этом выполняются равенства  $G^T \lambda^*(k+1) = -\frac{1}{J_0} Q_W^{-2}(k) q^*(k)$ ,  $k = 0, \dots, K-1$ .

Утверждение 5 будет использовано далее для построения оценок уровней неоптимальности приближенного решения проблемы  $l_1$ -аппроксимации (1), (2). Доказательство утверждения 5 приведено в Приложении.

### 5. Оценки уровней неоптимальности

В данном разделе получим оценку сверху уровня неоптимальности алгоритма весовой и временной рекурсий, представленного в разделе 3.

*Утверждение 6.* Пусть  $(x^*, q^*)$  — решение проблемы  $l_2$ -аппроксимации (5), (2) и оптимальное значение этого функционала  $J_0$  отлично от нуля. Тогда для уровня неоптимальности имеет место следующая оценка сверху:

$$\Delta \leq \Delta_0, \quad \Delta_0 = \frac{I(x^*, q^*) \theta_{\max}}{J_0^2},$$

где величина  $\theta_{\max}$  определяется равенством

$$\theta_{\max} = \max \left\{ \|\Pi \Pi_W^{-2}(\bar{x}(0) - x^*(0))\|_{\infty}, \|\mathcal{Q} \mathcal{Q}_W^{-2}(0) q^*(0)\|_{\infty}, \dots \right. \\ \left. \dots, \|\mathcal{Q} \mathcal{Q}_W^{-2}(K-1) q^*(K-1)\|_{\infty}, \|\mathcal{R} \mathcal{R}_W^{-2}(0)(z(0) - Hx^*(0))\|_{\infty}, \dots \right. \\ \left. \dots, \|\mathcal{R} \mathcal{R}_W^{-2}(K)(z(K) - Hx^*(K))\|_{\infty} \right\}.$$

*Доказательство утверждения 6.* Пусть на текущем шаге данного алгоритма получено решение  $(x^*, q^*)$  задачи  $l_2$ -аппроксимации (5), (2). Напомним, что уровень неоптимальности текущей итерации определяется соотношением  $\Delta = I(x^*, q^*)/I_0$ . Для того, чтобы оценить величину  $\Delta$  сверху, оценим неизвестное оптимальное значение  $I_0$  снизу, воспользовавшись соотношением двойственности из утверждения 3:  $I_0 = I^0$ .

Так как  $I^0$  — максимальное значение функционала задачи (6)–(8), то для любого набора векторов  $(\lambda', \mu')$ , удовлетворяющего ограничениям (7), (8), имеет место неравенство

$$I^0 \geq \left( \bar{x}^T(0) \lambda'(0) + \sum_{k=0}^K z^T(k) \mu'(k) + \sum_{k=0}^{K-1} g^T(k) \lambda'(k+1) \right).$$

Заметим, что функционалы и ограничения-равенства (7) в проблемах (6)–(8) и (9), (7), (8) совпадают, что позволяет применить следующий общий подход [5, 12].

Оценим  $I_0$  снизу, найдя максимальное значение функционала (6) по множеству векторов, коллинеарных решению задачи (9), (7), (8):

$$\lambda'(k) = \sigma \lambda^*(k), \quad \mu'(k) = \sigma \mu^*(k), \quad k = 0, \dots, K, \quad \sigma \in \mathbf{R},$$

где параметр  $\sigma$  может варьироваться, а векторы  $\lambda^*, \mu^*$  определены в утверждении 5. Тогда получим неравенство

$$(11) \quad I_0 = I^0 \geq \max_{\sigma} \sigma \left( \bar{x}^T(0)\lambda^*(0) + \sum_{k=0}^K z^T(k)\mu^*(k) + \sum_{k=0}^{K-1} g^T(k)\lambda^*(k+1) \right),$$

при ограничениях на величину  $\sigma$ :

$$(12) \quad \begin{aligned} |\sigma \Pi_i \lambda_i^*(0)| &\leq 1, \quad i = 1, \dots, n, \\ |\sigma R_i \mu_i^*(k)| &\leq 1, \quad i = 1, \dots, m, \quad k = 0, \dots, K, \\ |\sigma Q_i G_i^T \lambda^*(k+1)| &\leq 1, \quad i = 1, \dots, l, \quad k = 0, \dots, K-1. \end{aligned}$$

В формуле (11) выражение в скобках не зависит от  $\sigma$ . Более того, в силу соотношения двойственности из утверждения 4 оно равно минимальному значению функционала задачи  $l_2$ -аппроксимации (5), (2):

$$\bar{x}^T(0)\lambda^*(0) + \sum_{k=0}^K z^T(k)\mu^*(k) + \sum_{k=0}^{K-1} g^T(k)\lambda^*(k+1) = J^0 = J_0.$$

Заметим, что условия (12) эквивалентны скалярному неравенству

$$|\sigma| \max \left\{ \|\Pi \lambda^*(0)\|_{\infty}, \|R \mu^*(0)\|_{\infty}, \dots, \|R \mu^*(K)\|_{\infty}, \right. \\ \left. \|Q G^T \lambda^*(1)\|_{\infty}, \dots, \|Q G^T \lambda^*(K)\|_{\infty} \right\} \leq 1.$$

Подставляя в это неравенство выражения для  $\lambda^*, \mu^*$  из утверждения 5, получим:

$$|\sigma| \frac{1}{J_0} \theta_{\max} \leq 1, \quad \text{или} \quad |\sigma| \leq J_0 / \theta_{\max},$$

где

$$\theta_{\max} = \max \left\{ \|\Pi \Pi_W^{-2} (\bar{x}(0) - x^*(0))\|_{\infty}, \|Q Q_W^{-2}(0) q^*(0)\|_{\infty}, \dots \right. \\ \left. \dots, \|Q Q_W^{-2}(K-1) q^*(K-1)\|_{\infty}, \|R R_W^{-2}(0) (z(0) - Hx^*(0))\|_{\infty}, \dots \right. \\ \left. \dots, \|R R_W^{-2}(K) (z(K) - Hx^*(K))\|_{\infty} \right\}.$$

Итак, из соотношения (11) вытекает, что

$$I_0 = I^0 \geq \max_{\sigma: |\sigma| \leq J_0 / \theta_{\max}} \sigma J_0 = \frac{J_0^2}{\theta_{\max}}.$$

Поэтому из определения уровня неоптимальности окончательно получим:

$$\Delta = \frac{I(x^*, q^*)}{I_0} \leq \frac{I(x^*, q^*) \theta_{\max}}{J_0^2}.$$

Данное утверждение позволяет на каждой итерации алгоритма из раздела 3 оценить уровень неоптимальности текущего решения соответствующей квадратичной задачи сглаживания. Тем самым, появляется механизм контроля точности вычислений, дающий критерий остановки итерационного процесса. В [15] аналогичный результат получен для простейшего статического случая, когда все весовые коэффициенты равны единице и нет дополнительных ограничений, описывающих динамику системы.

## 6. Численные эксперименты

Проиллюстрируем свойства предложенной методики на примере. Рассмотрим задачу оценивания компонент фазового вектора динамической системы

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 1 & \varkappa_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \varkappa_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\omega \\ 0 & 0 & \omega & 1 \end{pmatrix} x(k) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} q(k), \quad k = 0, \dots, K-1.$$

Здесь  $x(k) \in \mathbf{R}^4$ ,  $q(k) \in \mathbf{R}^2$ ,  $g(k) = 0_{4 \times 1}$ ,  $\varkappa_1 = 5 \cdot 10^{-2}$ ,  $\varkappa_2 = 5 \cdot 10^{-3}$ ,  $\omega = 8 \cdot 10^{-3}$ .

Ставится задача оценивания векторов  $x(k)$  по априорной информации и измерениям:

$$0 = x(0) + \bar{r}(0), \quad z(k) = x_1(k) + r(k), \quad k = 0, \dots, K.$$

При помощи этих формул и датчика (псевдо)случайных чисел были созданы массивы измерений  $z(k)$ , фазовых переменных  $x(k)$  и погрешностей  $\bar{r}(0)$ ,  $q(k)$ ,  $r(k)$ . При этом соответствующие среднеквадратические отклонения были заданы равными  $\sigma_{\bar{r}_i} = 1$ ,  $\sigma_r = 0,9$ ,  $\sigma_{q1} = \sigma_{q2} = 0,3$ . В динамике компоненты  $x_2(k)$  был смоделирован скачок на величину 0,65, а в измерения  $z(k)$  добавлены два последовательных аномальных участка — резких кратковременных повышений величины погрешности. Количество дискретных моментов времени в этом примере равно  $K = 3550$ .

Оценки векторов  $x(k)$  искались как решение проблемы (1), (2) с весовыми матрицами

$$\Pi = \text{diag}(1; 1; 1; 1), \quad Q = \text{diag}(0,1; 0,1), \quad R = 1.$$

Эти матрицы выбираются в соответствии с представлениями исследователя о характерных масштабах шумов. Заметим, что решение задачи (1), (2) малочувствительно к выбору весовых коэффициентов: даже при изменении их в десятки раз оценки получаются очень похожими, близкими к модельным значениям. Поэтому  $\Pi$ ,  $Q$ ,  $R$  можно выбирать на основании весьма приблизительного знания о средних (по модулю) значениях погрешностей.

Так как здесь  $n = 4$ ,  $l = 2$ ,  $m = 1$ , то количество неизвестных величин в этой задаче равно  $(K+1)n + Kl = 21304$ , а количество компонент невязок — слагаемых в функционале (1) — равно  $n + (K+1)m + Kl = 10655$ .

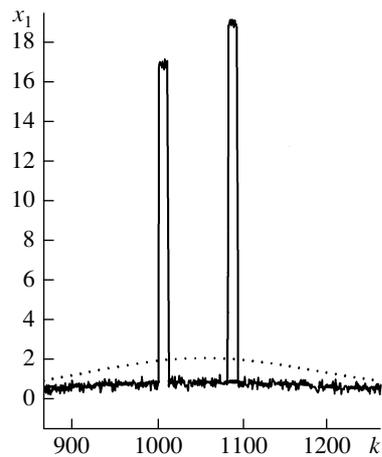


Рис. 1.

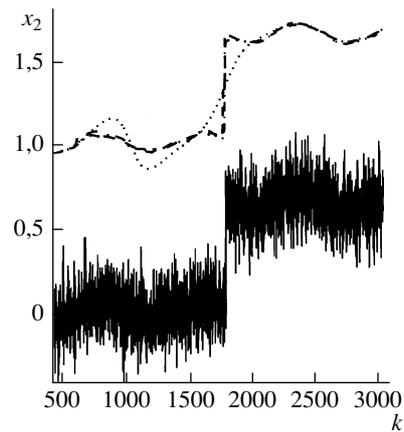


Рис. 2.

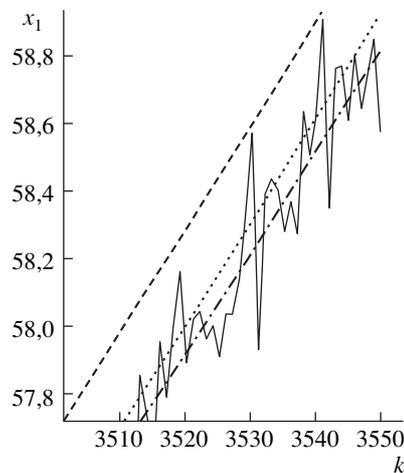


Рис. 3.

Рассмотрены три способа оценки компонент фазового вектора (рис. 1–3): при помощи задачи  $l_1$ -аппроксимации (1), (2), решаемой путем сведения к ЛП [5] (штриховая линия на графиках ниже); при помощи задачи  $l_1$ -аппроксимации (1), (2), решаемой предложенным в этой статье методом весовой и временной рекурсий (штрихпунктирная линия); при помощи задачи  $l_2$ -аппроксимации (3), (2), для решения которой были применены формулы Брайсона–Фрейзера (пунктирная линия). Сплошной линией показан исходный сигнал:  $z(k)$  на рис. 1 и 3 и  $x_2(k)$  на рис. 2.

Параметр регуляризации  $\alpha$  для алгоритма весовой и временной рекурсий был задан равным  $5 \cdot 10^{-3}$ . Важно отметить, что ЛП применялось к разреженным данным с шагом дискретизации 10 (т.е. в динамической системе и в измерениях рассматривались только моменты времени  $k = 0, 10, 20, \dots$ ), а остальные методы — к исходным данным с шагом 1. Это объясняется тем,

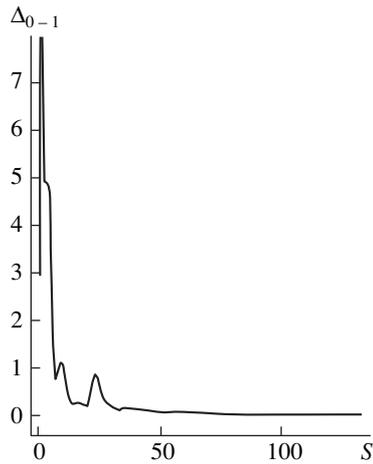


Рис. 4.

что сведение к ЛП в данной задаче приводит к необходимости работать с матрицами и векторами, имеющими порядка  $10^8$  элементов (многие из которых, правда, нулевые), и поэтому для обычного персонального компьютера такие вычисления слишком трудоемки.

Рисунки 1 и 2 демонстрируют преимущество  $l_1$ -аппроксимации при обработке данных со сбоями. Как видим, сбои в измерениях (рис. 1) приводят к смещению оценок, полученных при помощи  $l_2$ -сглаживания, тогда как применение негладкой оптимизации позволяет избежать их влияния на оценки. Скачкообразное изменение компоненты  $x_2$  (рис. 2) также точнее идентифицируется при помощи  $l_1$ -аппроксимации. На этом же рисунке видно, что квадратичный метод аппроксимации привел к слишком “размытой” оценке скачка в  $x_2$  (пунктирная линия), не позволяющей определить момент, когда он произошел. Более того, в этом случае оценки, полученные при помощи ЛП и алгоритма весовой и временной рекурсий, оказываются весьма близки. На рис. 2 графики оценок искусственно “сдвинуты” на 1,0 вверх, для того чтобы не сливаться с исходным сигналом.

Тем не менее увеличение шага дискретизации для проблемы ЛП привело к тому, что оценки  $x_1(k)$  получились менее точные (рис. 3). На нем в увеличенном масштабе показаны исходные измерения  $z(k)$  и соответствующие траектории решений; видно, что штриховая линия, соответствующая ЛП, несколько удалена от траекторий других решений и исходных измерений.

На каждой итерации алгоритма весовой и временной рекурсий вычислялись оценки уровней неоптимальности, при помощи которых был задан критерий останова вычислительного процесса:  $\Delta_0 \leq 1 + 10^{-3}$ . Динамика оценок уровней неоптимальности показана на рис. 4. Решение с требуемой точностью было найдено за 132 итерации, занявших 99 секунд.

Таким образом, предложенный в данной статье метод оказался намного более точным, чем классический квадратичный метод сглаживания в случае обработки данных со сбоями, и более эффективным с вычислительной точки

зрения, чем стандартный подход к решению задач  $l_1$ -оптимизации. Эти его преимущества подтверждаются и более сложными примерами, в частности в задаче идентификации скачков в показаниях датчиков бесплатформенных инерциальных навигационных систем [5, 6], где фазовый вектор имеет большую размерность и возможно возникновение нескольких скачков, причем в различных компонентах фазового вектора.

## 7. Заключение

В работе представлена методика оценивания фазового вектора динамической системы, основанная на  $l_1$ -оптимизации. Она особенно полезна в ситуациях, когда в измерениях и шумах системы возможны редкие аномальные значения. Для численного решения задачи  $l_1$ -аппроксимации предложен алгоритм весовой и временной рекурсий. Он состоит в сведении исходной негладкой проблемы к последовательности квадратичных оптимизационных задач, которые, в свою очередь, решаются рекуррентным методом во избежание операций с векторами и матрицами большой размерности. Этот подход позволяет эффективно решать задачи обработки больших массивов данных и при помощи уровней неоптимальности гарантированно оценивать точность получаемых приближенных решений.

Авторы выражают благодарность Б.Т. Поляку за обсуждение и ценные советы.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

*Доказательство утверждения 3.* Введем дополнительные переменные, соответствующие невязкам в функционале (1),

$$(П.1) \quad u_0 = \bar{x}(0) - x(0), \quad u(k) = z(k) - Hx(k), \quad k = 0, \dots, K.$$

Тогда проблема (1), (2) запишется следующим образом:

$$(П.2) \quad I_0 = \inf_{(x,q,u)} \left( \|\Pi^{-1}u_0\|_1 + \sum_{k=0}^{K-1} \|Q^{-1}q(k)\|_1 + \sum_{k=0}^K \|R^{-1}u(k)\|_1 \right)$$

при ограничениях (П.1), (2):

$$(П.3) \quad \begin{aligned} x(0) + u_0 &= \bar{x}(0), & Hx(k) + u(k) &= z(k), & k &= 0, \dots, K, \\ x(k+1) - Fx(k) - Gq(k) &= g(k), & k &= 0, \dots, K-1. \end{aligned}$$

Вектор неизвестных и правую часть ограничений представим в блочном виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \left( u_0^T, u^T(0), \dots, u^T(K), x^T(0), \dots, x^T(K), \right. \\ &\quad \left. q^T(0), \dots, q^T(K-1) \right)^T \in \mathbf{R}^{n+(K+1)(n+m)+Kl}, \\ a &= \left( \bar{x}^T(0), z^T(0), \dots, z^T(K), g^T(0), \dots, g^T(K-1) \right)^T \in \mathbf{R}^{(K+1)(n+m)}. \end{aligned}$$

Кроме того, введем матрицу  $\Lambda$  такую, что (П.3) можно представить как  $\Lambda \mathcal{X} = a$ . В этих обозначениях задача (П.2), (П.3) примет вид

$$I_0 = I_0(a) = \inf_{\Lambda \mathcal{X}=a} \tilde{I}(\mathcal{X}),$$

где  $\tilde{I}(\mathcal{X})$  – функционал в (П.2), а  $I_0(a)$  указывает на зависимость решения от правых частей в ограничениях-равенствах.

Для того, чтобы можно было применить теорему двойственности, необходимо доказать непрерывность функции  $I_0(b)$  в точке  $a$  [13, 14].

Возьмем произвольную ограниченную окрестность  $U \in \mathbf{R}^{(K+1)(n+m)}$  точки  $a$  и рассмотрим возмущенную задачу с переменным вектором в правой части ограничений

$$I_0(b) = \inf_{\Lambda \mathcal{X}=b} \tilde{I}(\mathcal{X}), \quad b \in U.$$

Из структуры оператора  $\Lambda$  следует, что для любого  $b$  существует единственный допустимый элемент  $\bar{\mathcal{X}}(b)$  с  $x(0) = 0$ ,  $\{q(j)\}_{j=0}^{K-1} = 0$ . Причем, если  $b \in U$ , то множество таких элементов  $\bar{\mathcal{X}}(b)$  ограничено в  $\mathbf{R}^{n+(K+1)(n+m)+Kl}$ . Тогда для любого  $b \in U$

$$I_0(b) = \inf_{\Lambda \mathcal{X}=b} \tilde{I}(\mathcal{X}) \leq \tilde{I}(\bar{\mathcal{X}}(b)) \leq \text{const}.$$

Итак,  $I_0(b)$  равномерно ограничена сверху в  $U$ . Кроме того,  $I_0(b)$  выпукла [13]. Следовательно  $I_0(b)$  непрерывна в точке  $a$  [13, 14]. Поэтому применима теорема двойственности для выпуклых вариационных задач:

$$(П.4) \quad I_0 = \inf_{(x,q,u)} \left( \sup_{(\lambda,\mu)} L(x,q,u,\lambda,\mu) \right) = \sup_{(\lambda,\mu)} \left( \inf_{(x,q,u)} L(x,q,u,\lambda,\mu) \right) \stackrel{\text{def}}{=} I^0,$$

где  $L(x,q,u,\lambda,\mu)$  – функция Лагранжа для задачи (П.2), (П.3).

Выпишем эту функцию:

$$\begin{aligned} L(x,q,u,\lambda,\mu) &= \|\Pi^{-1}u_0\|_1 + \sum_{k=0}^K \|R^{-1}u(k)\|_1 + \sum_{k=0}^{K-1} \|Q^{-1}q(k)\|_1 + \\ &+ \lambda^T(0)(\bar{x}(0) - x(0) - u_0) + \sum_{k=0}^K \mu^T(k)(z(k) - Hx(k) - u(k)) + \\ &+ \sum_{k=0}^{K-1} \lambda^T(k+1)(-x(k+1) + Fx(k) + Gq(k) + g(k)). \end{aligned}$$

Здесь  $\lambda(k) \in \mathbf{R}^n$ ,  $\mu(k) \in \mathbf{R}^m$  – множители Лагранжа, соответствующие ограничениям (2), (П.1), и для удобства введен фиктивный множитель  $\lambda(K+1) = 0$ .

Нетрудно убедиться, что точная нижняя грань для  $L(x, q, u, \lambda, \mu)$  (при фиксированных  $\lambda, \mu$ ) определяется выражением

$$\inf_{(x, q, u)} L(x, q, u, \lambda, \mu) = \begin{cases} \lambda^T(0)\bar{x}(0) + \sum_{k=0}^K \mu^T(k)z(k) + \sum_{k=0}^{K-1} \lambda^T(k+1)g(k), \\ \text{если выполнены условия (7), (8);} \\ -\infty \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Поэтому из теоремы двойственности (П.4) следует, что задача, двойственная к (1), (2), записывается в виде (6)–(8) и выполняется равенство  $I_0 = I^0$ .

*Доказательство утверждения 5.* Рассмотрим задачу минимизации, эквивалентную (9), (7), (10), в которой знак в функционале заменен на противоположный, а в ограничении (10) обе части неравенства возведены в квадрат:

$$(П.5) \quad -J^0 = \inf_{(\lambda, \mu)} \left( -\bar{x}^T(0)\lambda(0) - \sum_{k=0}^K z^T(k)\mu(k) - \sum_{k=0}^{K-1} g^T(k)\lambda(k+1) \right)$$

при ограничениях (7) и

$$(П.6) \quad \begin{aligned} & \lambda^T(0)\Pi_W^2 \lambda(0) + \sum_{k=0}^K \mu^T(k)R_W^2(k)\mu(k) + \\ & + \sum_{k=0}^{K-1} \lambda^T(k+1)GQ_W^2(k)G^T \lambda(k+1) - 1 \leq 0. \end{aligned}$$

Запишем функцию Лагранжа для проблемы (П.5), (7), (П.6):

$$\begin{aligned} \tilde{L}(\lambda, \mu, \beta) = & \beta_0 \left( -\bar{x}^T(0)\lambda(0) - \sum_{k=0}^K z^T(k)\mu(k) - \sum_{k=0}^{K-1} g^T(k)\lambda(k+1) \right) + \\ & + \sum_{k=0}^K \beta^T(k) (\lambda(k) - F^T \lambda(k+1) + H^T \mu(k)) + \\ & + \beta_- \left( \lambda^T(0)\Pi_W^2 \lambda(0) + \sum_{k=0}^K \mu^T(k)R_W^2(k)\mu(k) + \sum_{k=0}^{K-1} \lambda^T(k+1)GQ_W^2(k)G^T \lambda(k+1) - 1 \right), \end{aligned}$$

где  $\beta = (\beta_0, \beta^T(0), \dots, \beta^T(K), \beta_-)^T$  — вектор множителей Лагранжа,  $\beta_0, \beta_- \in \mathbf{R}$ ,  $\beta(k) \in \mathbf{R}^n$ .

Применим принцип множителей Лагранжа для гладких выпуклых задач с ограничениями типа равенств и неравенств [13, 14]. Пусть  $(\lambda^*, \mu^*)$  — решение задачи (П.5), (7), (П.6), тогда найдутся такие множители Лагранжа  $\beta$ , одновременно не равные нулю, для которых выполняются:

а) условие стационарности функции Лагранжа по  $\lambda, \mu^4$

$$\frac{\partial \tilde{L}(\lambda^*, \mu^*, \beta)}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{L}(\lambda^*, \mu^*, \beta)}{\partial \mu} = 0;$$

б) условие согласования знаков  $\beta_0 \geq 0, \beta_- \geq 0$ ;

в) условие дополняющей нежесткости

$$\beta_- \left( \lambda^{*\text{T}}(0) \Pi_W^2 \lambda^{*\text{T}}(0) + \sum_{k=0}^K \mu^{*\text{T}}(k) R_W^2(k) \mu^*(k) + \sum_{k=0}^{K-1} \lambda^{*\text{T}}(k+1) G Q_W^2(k) G^{\text{T}} \lambda^*(k+1) - 1 \right) = 0.$$

Рассмотрим несколько случаев применительно к условию согласования знаков б).

1. Пусть  $\beta_0 = 0, \beta_- = 0$ , тогда из условия а) получим:

$$\begin{aligned} \beta^{\text{T}}(0) &= 0, \quad \beta^{\text{T}}(k) H^{\text{T}} = 0, \quad k = 0, \dots, K, \\ \beta^{\text{T}}(j) - \beta^{\text{T}}(j-1) F^{\text{T}} &= 0, \quad j = 1, \dots, K. \end{aligned}$$

Следовательно все величины  $\beta_0, \beta_-, \beta(0), \dots, \beta(K)$  равны нулю, что противоречит принципу множителей Лагранжа.

2. Пусть  $\beta_0 = 0, \beta_- > 0$ , тогда

$$\begin{aligned} \tilde{L}(\lambda, \mu, \beta) &= \sum_{k=0}^K \beta^{\text{T}}(k) (\lambda(k) - F^{\text{T}} \lambda(k+1) + H^{\text{T}} \mu(k)) + \\ &+ \beta_- \left( \lambda^{\text{T}}(0) \Pi_W^2 \lambda(0) + \sum_{k=0}^K \mu^{\text{T}}(k) R_W^2(k) \mu(k) + \right. \\ &\left. + \sum_{k=0}^{K-1} \lambda^{\text{T}}(k+1) G Q_W^2(k) G^{\text{T}} \lambda(k+1) - 1 \right). \end{aligned}$$

Так как  $(\lambda^*, \mu^*)$  — решение задачи (П.5), (7), (П.6), то выполняются ограничения (7) и условие дополняющей нежесткости, поэтому  $\tilde{L}(\lambda^*, \mu^*, \beta) = 0$ . С другой стороны, подставив в выражение для  $\tilde{L}(\lambda, \mu, \beta)$  значения  $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ , получим:  $\tilde{L}(0, 0, \beta) = -\beta_- < 0 = \tilde{L}(\lambda^*, \mu^*, \beta)$ , т.е.  $(\lambda^*, \mu^*)$  не доставляет минимум функции  $\tilde{L}(\lambda, \mu, \beta)$ . Таким образом, приходим к противоречию с тем, что  $\beta_0 = 0, \beta_- > 0$ .

<sup>4</sup> Поскольку функция Лагранжа  $\tilde{L}(\lambda, \mu, \beta)$  линейно-квадратичная по  $(\lambda, \mu)$  и соответствующая квадратичная форма неотрицательно определена, то условие а) эквивалентно тому, что  $(\lambda^*, \mu^*)$  доставляет минимум функции  $\tilde{L}(\lambda, \mu, \beta)$ .

3. Пусть  $\beta_0 > 0$ . Без потери общности можно считать, что  $\beta_0 = 1$ . Выпишем подробнее условие а):

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \tilde{L}(\lambda^*, \mu^*, \beta)}{\partial \lambda(0)} = -\bar{x}^T(0) + \beta^T(0) + 2\beta_- \lambda^{*\Gamma}(0) \Pi_W^2 = 0, \\
& \frac{\partial \tilde{L}(\lambda^*, \mu^*, \beta)}{\partial \lambda(k)} = -g^T(k-1) + \beta^T(k) - \beta^T(k-1)F^T + \\
& \quad + 2\beta_- \lambda^{*\Gamma}(k) GQ_W^2(k-1)G^T = 0, \quad k = 1, \dots, K, \\
& \frac{\partial \tilde{L}(\lambda^*, \mu^*, \beta)}{\partial \mu(k)} = -z^T(k) + \beta^T(k)H^T + 2\beta_- \mu^{*\Gamma}(k) R_W^2(k) = 0, \quad k = 0, \dots, K.
\end{aligned}
\tag{П.7}$$

Если  $\beta_- = 0$ , то равенства (П.7) примут вид:

$$\begin{aligned}
& \beta(k) - F\beta(k-1) - g(k-1) = 0, \quad k = 1, \dots, K, \\
& -\bar{x}(0) + \beta(0) = 0, \quad -z(k) + H\beta(k) = 0, \quad k = 0, \dots, K.
\end{aligned}
\tag{П.8}$$

Рассмотрим следующие наборы векторов:  $X'(k) = \beta(k)$ ,  $q'(j) = 0$ . Как видно из (П.8), они удовлетворяют ограничениям (2). При их подстановке в функционал (5) каждое слагаемое в этом функционале оказывается равным нулю, следовательно,  $(X', q')$  — решение задачи (5), (2) и  $J_0 = 0$ , что противоречит условию утверждения 5.

Итак, далее будем считать, что  $\beta_0 = 1$ ,  $\beta_- > 0$ . Тогда из равенств (П.7) выразим  $(\lambda^*, \mu^*)$  через  $\beta$ :

$$\begin{aligned}
& \lambda^*(0) = \frac{1}{2\beta_-} \Pi_W^{-2}(\bar{x}(0) - \beta(0)), \quad \mu^*(k) = \frac{1}{2\beta_-} R_W^{-2}(k)(z(k) - H\beta(k)), \quad k = 0, \dots, K, \\
& \beta(k) - F\beta(k-1) - g(k-1) + 2\beta_- GQ_W^2(k-1)G^T \lambda^{*\Gamma}(k) = 0, \quad k = 1, \dots, K.
\end{aligned}
\tag{П.9}$$

С другой стороны, поскольку  $(\lambda^*, \mu^*)$  — решение проблемы (П.5), (7), (П.6), то для него имеют место ограничения (7), следовательно, из (7) и второй группы равенств системы (П.9) получим:

$$\begin{aligned}
& \lambda^*(k) = F^T \lambda^*(k+1) - H^T \mu^*(k) = \\
& = F^T \lambda^*(k+1) - \frac{1}{2\beta_-} H^T R_W^{-2}(k)(z(k) - H\beta(k)).
\end{aligned}
\tag{П.10}$$

Таким образом, формулы (П.9) и (П.10) представляют собой рекуррентные соотношения для  $\beta(k)$ ,  $\lambda^*(k)$ :

$$\begin{aligned}
& \beta(k+1) = F\beta(k) - 2\beta_- GQ_W^2(k)G^T \lambda^*(k+1) + g(k), \\
& \lambda^*(k) = F^T \lambda^*(k+1) - \frac{1}{2\beta_-} H^T R_W^{-2}(k)(z(k) - H\beta(k)), \quad k = 0, \dots, K,
\end{aligned}
\tag{П.11}$$

при краевых условиях  $\lambda^*(K+1) = 0$  и  $\beta(0) = \bar{x}(0) - 2\beta_- \Pi_W^2 \lambda^*(0)$ .

Системы уравнений (4) и (П.11) совпадают с точностью до замены  $\beta(k)$  на  $X^*(k)$ ,  $-2\beta_- \lambda^*(k)$  на  $\lambda^J(k)$  и  $\Pi, Q, R$  на  $\Pi_W, Q_W, R_W$ . Поскольку, как

нетрудно доказать, решение каждой из этих краевых задач единственно (см., например, [11] или [12]), то

$$(П.12) \quad \begin{aligned} \beta(k) &= X^*(k), \quad \lambda^*(k) = -\frac{1}{2\beta_-} \lambda^J(k), \\ \lambda^*(0) &= \frac{1}{2\beta_-} \Pi_W^{-2}(\bar{x}(0) - x^*(0)), \quad \mu^*(k) = \frac{1}{2\beta_-} R_W^{-2}(k)(z(k) - Hx^*(k)), \\ q^*(i) &= -2\beta_- Q_W^2(i) G^T \lambda^*(i+1), \quad k = 0, \dots, K, \quad i = 0, \dots, K-1. \end{aligned}$$

При этом  $\beta_-$  определяется из условия дополняющей нежесткости в):

$$\begin{aligned} &\lambda^{*\top}(0) \Pi_W^2 \lambda^*(0) + \sum_{k=0}^K \mu^{*\top}(k) R_W^2(k) \mu^*(k) + \\ &+ \sum_{k=0}^{K-1} \lambda^{*\top}(k+1) G Q_W^2(k) G^T \lambda^*(k+1) = 1. \end{aligned}$$

Подставив сюда равенства (П.12), получим уравнение

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4\beta_-^2} \left( \|\Pi_W^{-1}(\bar{x}(0) - x^*(0))\|_2^2 + \sum_{k=0}^{K-1} \|Q_W^{-1}(k)q^*(k)\|_2^2 + \right. \\ &\left. + \sum_{k=0}^K \|R_W^{-1}(k)(z(k) - Hx^*(k))\|_2^2 \right) = 1, \end{aligned}$$

откуда  $2\beta_- = J_0$ , что и завершает доказательство утверждения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поляк Б.Т. Методы  $l_1$ -оптимизации в управлении и фильтрации // Матер. пленарн. докл. III мультikonф. по проблемам управления. СПб.: ОАО "Концерн ЦНИИ "Электроприбор", 2010.
2. Bloomfield P., Steiger W.L. Least Absolute Deviations: Theory, Applications, and Algorithms. Boston-Basel-Stuttgart: Birkhaüser, 1983.
3. Boyd S., Vandenberghe L. Convex Optimization. Cambridge University Press, 2004.
4. Farahmand S., Giannakis G., Angelosante D. Doubly robust smoothing of dynamical processes via outlier sparsity constraints // IEEE Trans. Signal Proc. 2011. V. 59. No. 10. P. 4529–4543.
5. Акимов П.А., Деревянкин А.В., Матасов А.И. Гарантирующий подход и  $l_1$ -аппроксимация в задачах оценивания параметров БИНС при стендовых испытаниях. М.: Изд-во МГУ, 2012.
6. Akimov P.A., Matasov A.I. Recursive estimation algorithm for  $l_1$ -norm approximation in dynamic systems with nonoptimality levels // Proc. Eur. Control Conf. Zurich, Switzerland. 2013. P. 2427–2432.
7. Акимов П.А., Матасов А.И. Оценка смещений в инерциальных датчиках БИНС посредством  $l_1$ -аппроксимации // АиТ. 2011. № 2. С. 9–24.  
Akimov P.A., Matasov A.I. Estimating Errors in PINS Inertial Sensor Readings with  $l_1$ -approximation // Autom. Remote Control. 2011. V. 72. No. 2. P. 225–239.

8. *Мудров В.И., Кушко В.Л.* Методы обработки измерений: квазиправдоподобные оценки. М.: Радио и связь, 1983.
9. *Weiszfeld E., Plastria F.* On the point for which the sum of the distances to  $n$  given points is minimum // Ann. Oper. Res. 2008. V. 167. No. 1. P. 7–41.
10. *Wahlberg B., Boyd S., Annergren M., Wang Y.* An ADMM algorithm for a class of total variation regularized estimation problems // Proc. 16th IFAC Sympos. Syst. Identificat. Brussels. Belgium. Jul. 2012.
11. *Kailath T., Sayed A.H., Hassibi B.* Linear Estimation. New Jersey, Prentice Hall, 2000.
12. *Matasov A.I.* Estimators for Uncertain Dynamic Systems. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Academ. Publish., 1999.
13. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Физматлит, 2005.
14. *Эккланд И., Теллам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
15. *Акимов П.А., Матасов А.И.* Уровни неоптимальности алгоритма Вейсфельда в методе наименьших модулей // АиТ. 2010. № 2. С. 4–16.  
*Akimov P.A., Matasov A.I.* Levels of Nonoptimality of the Weiszfeld Algorithm in the Least-Modules Method // Autom. Remote Control. 2010. V. 71. No. 2. P. 172–184.

*Статья представлена к публикации членом редколлегии П.С. Щербаковым.*

Поступила в редакцию 1.12.2014