Д. Д. ИВАНЕНКО,
П. И. ПРОНИН,
Г. А. САРДАНАШВИЛИ

Групповые, геометрические и топологические методы в теории поля

Часть II

Издательство Московского университета · 1983

МГУ

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА, ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ
РЕВОЛЮЦИИ, ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М.В.ЛОМОНОСОВА

Физический факультет

Д.Д.Иваненко, П.И.Пронин, Г.А.Сарданашвили

ГРУППОВЫЕ, ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ ПОЛЯ

Часть II

Издательство Московского университета
1983

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В последние годы существенно возросла роль учета тополого-алгебраических характеристик полей в конкретных исследованиях моделей фундаментальных физических взаимодействий. Это связано в первую очередь с тем, что для учета весьма сильных эффектов нелинейного взаимодействия часто недостаточно теории возмущений, основанной на разложении по линейным модам. Было показано, что локализованные решения нелинейных классических уравнений соответствуют особым частицам в квантовой теории поля, которые представляют собой когерентные возбуждения фундаментального поля, содержащие бесконечное число "частиц", получающихся при квантовании по теории возмущений.

Сейчас все яснее осознается тот факт, что такие существенно нелинейные образования (солитоны, инстантоны, кинки и др.) представляют совсем другие типы решений, нежели линейные (или почти линейные) моды, и их следует считать столь же фундаментальными. Значение этих нелинейных образований важно и потому, что они несут ценную информацию о структуре пространства-времени, вакуума, заключенную в тополого-алгебраических характеристиках поля (топологическом заряде).

Особо следует подчеркнуть, что для нахождения таких типов нелинейных решений существенно используются современные методы алгебраической топологии и геометрии, которые позволяют классифицировать подобные структуры по элементам гомотопических групп, групп когомологий. Хотя идея использования этих методов была высказана довольно давно, но сейчас признано их важное значение как основы универсального подхода, применимого и в гидродинамике, и в статистической физике, и в квантовой теории поля.

Настоящее учебное пособие является непосредственным продолжением первой части и ставит своей целью познакомить студентов с основами алгебраической топологии и геометрии и их приложениями в теории поля.

РАЗДЕЛ III. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТОПОЛОГИЯ И ТЕОРИЯ ПОЛЯ

ГЛАВА VI. ТЕОРИЯ ГОМОЛОГИЙ

§28. Методы алгебраической топологии

Методы алгебраической топологии позволяют работать с семействами объектов - топологических пространств, многообразий, расслоений и др., которые, если пытаться выделять каждый объект, являются необозримыми. Суть этих методов состоит в установлении определенного отношения эквивалентности объектов в таком семействе и в оперировании с их классами эквивалентности путем сопоставления им некоторых алгебраических и даже числовых характеристик.

Сформулируем идею этого подхода в терминах категорий.

КАТЕГОРИЯ E состоит из класса $Ob\,E$, элементы которого называются ОБЪЕКТАМИ КАТЕГОРИИ, и класса $Mor\,E$, элементы которого называются МОРФИЗМАМИ КАТЕГОРИИ. Эти классы удовлетворяют следующим условиям:

1) каждой упорядоченной паре объектов $A, B \in Ob\,E$ сопоставлен класс $H_E(A,B)$ из $Mor\,E$, элементы которого называются морфизмами из A в B;

2) каждый морфизм E принадлежит одному и только одному классу $H_E(A,B)$;

3) в классе $Mor\,E$ задан частичный закон умножения: произведение морфизмов $\alpha \in H_E(A,B)$ и $\beta \in H_E(C,D)$ определено тогда и только тогда, когда $B=C$ и $\beta\alpha \in H_E(A,D)$;

4) для любых морфизмов $\alpha: A \to B$, $\beta: B \to C$, $\gamma: C \to D$ справедлив закон ассоциативности

$$\gamma(\beta\alpha) = (\gamma\beta)\alpha;$$

5) в каждом классе $H_E(A,A)$ содержится такой морфизм 1_A, что $\alpha \cdot 1_A = \alpha$ и $1_A\beta = \beta$ для любых морфизмов $\alpha: A \to B$ и $\beta: B \to A$.

Примеры категорий.

КАТЕГОРИЯ МНОЖЕСТВ Ens; класс $Ob\,Ens$ состоит из всевозможных множеств, класс $Mor\,Ens$ - из отображений множеств друг в друга.

КАТЕГОРИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ Top ; класс $Ob\,Top$ состоит из всевозможных топологических пространств, класс $Mor\,Top$ - из всех непрерывных отображений топологических пространств.

КАТЕГОРИЯ ГРУПП Gr ; объектами Gr являются всевозможные группы, а морфизмами Gr - гомоморфизмы групп.

Таким образом, понятие категории дает абстрактное описание наиболее общих свойств, присущих отображениям объектов самого разного рода - множеств, групп, пространств, в том числе любых объектов, могущих встретиться в физических моделях.

Отметим, что в определении категории, вообще говоря, не предполагается, что классы объектов и морфизмов категории являются множествами. Это требует некоторой осторожности в оперировании с ними, например, при определении отношения и классов эквивалентности на объектах категории. Нам такая общность не потребуется, и мы в дальнейшем будем считать, что классы объектов и морфизмов категории принадлежат некоторому универсальному множеству.

Определим теперь отображение категорий. Отображение $F: E\to E'$ называется КОВАРИАНТНЫМ ФУНКТОРОМ, если для каждого объекта $A\in Ob\,E$ объект $F(A)\in Ob\,E'$, для каждого морфизма $\alpha\in H_E(A,B)$ образ $F(\alpha)\in H_{E'}(F(A),F(B))$, причем $F(1_A)=1_{F(A)}$ и $F(\alpha\beta)=F(\alpha)\cdot F(\beta)$ всякий раз, когда определено произведение $\alpha\beta$.

Пример I. Сопоставив каждой группе ее множество и каждому групповому гомоморфизму сам этот гомоморфизм как отображение множеств, получим ковариантный функтор из категории групп в категорию множеств.

Каждой категории E может быть сопоставлена ДУАЛЬНАЯ КАТЕГОРИЯ E^*, для которой $Ob\,E^*=Ob\,E$ и $H_{E^*}(A,B)=$ $=H_E(B,A)$, для любых $A,B\in Ob\,E$. Ковариантный функтор из E^* в E' называется КОНТРАВАРИАНТНЫМ ФУНКТОРОМ из E в E'.

Обратимся теперь к изложению существа методов алгебраической топологии.

Пусть E - некоторая категория интересующих нас математических или физических объектов. Поскольку класс $Ob\,E$ является, как правило, пообъектно необозримым, в этом случае описать E означает дать классификацию объектов из E и определить эффективные и вычислимые характеристики, различающие эти классы.

Для этого в $Mor\,E$ вводится некоторое отношение эквивалентности R, которое было бы согласовано с композицией морфизмов (т.е. если $\alpha_1, \alpha_1' \in H_E(A,B)$ и $\alpha_2, \alpha_2' \in H(B,C)$ и $\alpha_1 R \alpha_1'$ и $\alpha_2 R \alpha_2'$, то $(\alpha_1\alpha_2)\,R\,(\alpha_1'\alpha_2')$). Тогда можно определить композицию классов эквивалентности морфизмов $[\alpha_2],[\alpha_1]=[\alpha_2\alpha_1]$ и новую категорию E_R, объектами которой являются объекты из E, а морфизмами - классы эквивалентности по R морфизмов из E. Соотнося каждому $\alpha \in Mor\,E$ его класс эквивалентности $[\alpha]$, получим функтор $F: E \to E_R$ из категории E в категорию E_R. Отношение R определяет и отношение R-эквивалентности между объектами в E, а именно ARB, $A,B \in Ob\,E$, если существуют отображения $\alpha: A \to B$ и $\alpha': B \to A$, такие, что $(\alpha'\alpha)\,R\,(1_A)$ и $(\alpha\alpha')\,R\,(1_B)$. Конечно, для того чтобы классификация имела смысл, отношение R надо выбирать таким, чтобы множество классов R-эквивалентности было обозримым.

Пример 2. E - категория $Diff^2(M)$ диффеоморфизмов некоторого многообразия M. Отношение эквивалентности R в E вводится условием сопряженности диффеоморфизмов относительно некоторого класса S морфизмов M, т.е. fRf', $f,f' \in Diff^2(M)$, если существует $s \in S$, такой, что $fs = sf'$. Казался бы естественным выбор $S = Diff^2(M)$, однако он приводит к слишком сильному отношению R, для которого множество классов эквивалентности необозримо. В качестве S можно взять множество гомеоморфизмов M. Его инвариантами - характеристиками классов эквивалентности по R - являются, например, неподвижные, периодические, блуждающие, возвращающиеся точки диффеоморфизмов M.

Второй этап описания категории E - это задание некоторого набора функторов $\{F: E_R \to Al\}$ категории E в алгебраическую категорию Al (групп, колец, ...), которые были бы R-инвариантны, т.е. если $\alpha R \alpha'$, то $t\alpha = t\alpha'$. Тогда R-эквивалентность морфизмов и объектов в F переходит в эквивалентность их в Al, в частности, функторы F принимают одни и те же значения в Al на R-эквивалентных объектах E. Значения $\{F\}$ в Al образуют набор алгебраических, а если Al - числовое кольцо, то и числовых характеристик объектов из E.

В алгебраической топологии объектом исследования является категория топологических пространств Top или ее подкатегории. Отношение эквивалентности R на ней выбирается как отношение гомотопической или слабой гомотопической эквивалентности и исследуются функторы категории $Top R$ в категорию групп. Таким образом алгебраическая топология позволяет изучать характеристики пространств и конструкций на них, являющихся гомотопическими инвариантами. В теории поля это оказывается совершенно новый класс характеристик - "топологических" квантовых чисел и зарядов, который в настоящее время активно исследуется.

В некотором смысле основной в алгебраической топологии является теория гомотопий.

§29. Гомотопические группы

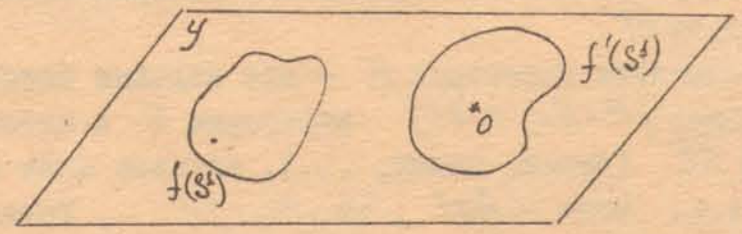
Пусть X и Y - топологические пространства и f и f' - непрерывные отображения X в Y. Отображения f и f' называются ГОМОТОПНЫМИ, если существует непрерывное отображение g: $[0,1] \times X \to Y$, такое, что

$$g \downarrow \{0\} \times X = f, \quad g \downarrow \{1\} \times X = f'.$$

Наглядно гомотопные отображения f и f' можно представить себе как такие, образы которых $f(X)$ и $f'(X)$ в Y могут быть совмещены друг с другом непрерывной деформацией.

<u>Пример I</u>. Пусть X - окружность S^1, а Y - плоскость R^2, все непрерывные отображения S^1 в R^2 являются гомотопными.

<u>Пример 2</u>. Пусть теперь $Y = (R^2 - \{0\})$ - плоскость без точки. Тогда отображения $f, f': S^1 \to Y$, образы которых $f(S^1)$ и $f'(S^1)$ изображены на рисунке



представляют собой пример негомотопных отображений.

<u>Пример 3</u>. Топологическое пространство X называется СТЯГИВАЕМЫМ, если его тождественное отображение на себя $id X$ гомотопно отображению X в некоторую свою точку $X \to x_0 \in X$, т.е. если, наглядно говоря, X может быть непрерывно стянуто в точку. Примером стягиваемых пространств могут служить евклидовы пространства R^n, а нестягиваемых - сферы S^n.

Упражнение I. Показать, что если пространство X стягиваемо, то всякие два непрерывных отображения любого топологического пространства в X гомотопны.

Легко проверить, что понятие гомотопности отображений определяет отношение эквивалентности R на множестве $H_{Top}(X, Y)$ непрерывных отображений топологического пространства X в пространство Y. Классы, на которые оно разбивает множество $H_{Top}(X, Y)$, называются ГОМОТОПИЧЕСКИМИ КЛАССАМИ, и множество этих классов обозначается $\pi(X, Y)$.

Пример 4. Если Y стягиваемо, то множество $\pi(X, Y)$ для любого X состоит из одного элемента.

Упражнение 2. Определить множество $\pi(X, Y)$ для X и Y из Прим.2.

Таким образом, отношение гомотопность задает функтор из категории топологических пространств Top в категорию Top_R, объектами которой являются объекты Top, т.е. топологические пространства, а морфизмами - гомотопические классы отображений топологических пространств, т.е. $H_{Top_R}(X, Y) \overset{def}{=} \pi(X, Y)$ для $X, Y \in Ob\,Top$. Это, в свою очередь, индуцирует и отношение эквивалентности на объектах Top, которое определяется следующим образом.

Пусть f - непрерывное отображение $X \to Y$. Непрерывное отображение $g: Y \to X$ называется ГОМОТОПИЧЕСКИ ОБРАТНЫМ, если композиция gf гомотопна тождественному отображению $id\,X$, а fg - гомотопна $id\,Y$. Непрерывное отображение, обладающее гомотопически обратным, называется ГОМОТОПИЧЕСКОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬЮ. Если существует гомотопическая эквивалентность $X \to Y$, то пространства X и Y называются ГОМОТОПИЧЕСКИ ЭКВИВАЛЕНТНЫМИ.

Очевидно, гомеоморфизм есть гомотопическая эквивалентность. Примером негомеоморфных, но гомотопически эквивалентных пространств служат стягиваемое пространство и его точка. Обобщением этого примера является конструкция деформационной ретракции.

Пусть A - подпространство топологического пространства X. Непрерывное отображение $X \to A$, совпадающее на A с тождественным отображением, называется РЕТРАКЦИЕЙ, а подмножество, на которое пространство может быть ретрагировано, называется его РЕТРАКТОМ. Ретракция f топологического пространства X на его подпространство A называется ДЕФОРМАЦИОННОЙ РЕТ-

РАКЦИЕЙ, если сквозное отображение $X \xrightarrow{f} A \xrightarrow{in} X$ гомотопно id_X. Ясно, что если $f: X \to A$ – деформационная ретракция, то f и включение $A \to X$ являются гомотопически взаимно обратными эквивалентностями.

Гомотопическая эквивалентность разбивает топологические пространства на ГОМОТОПИЧЕСКИЕ ТИПЫ и множество таких типов оказывается уже обозримым. Для этого надо задать функторы из категории Top_R в некоторую алгебраическую категорию Al, которые были бы постоянны на пространствах, принадлежащих одному и тому же гомотопическому типу. Роль таких функторов играют гомотопические группы.

Пусть X – топологическое пространство и $x_0 \in X$. Пару (X, x_0) будем называть ПРОСТРАНСТВОМ С ОТМЕЧЕННОЙ ТОЧКОЙ. Часто, когда конкретный выбор точки несуществен, пространство с отмеченной точкой обозначают $(X, .)$.

Отображением пространства с отмеченной точкой (X, x_0) в пространство с отмеченной точкой (Y, y_0) называется непрерывное отображение $f: X \to Y$, такое, что $f(x_0) = y_0$. Очевидно, что множество таких отображений составляет подмножество множества всех непрерывных отображений и на нем определено отношение гомотопности отображений.

Обозначим $I = [0,1]$ и рассмотрим множество H всевозможных отображений пары $(I, Fr I = \{0\} \cup \{1\})$ в топологическое пространство с выделенной точкой (X, x_0). Образами этих отображений являются замкнутые пути в X, выходящие и входящие в точку x_0, и на их множестве H можно ввести групповую структуру, представив произведение отображений f и g следующим образом:

$$(fg)(t) = \begin{cases} f(2t), & 0 \leq t \leq 1/2, \\ g(2t-1), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Возьмем теперь фактор множества H по отношению гомотопности, обозначив его $\pi_1(X, x_0)$. Он наделен структурой факторгруппы и называется ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ ГОМОТОПИЧЕСКОЙ ГРУППОЙ пространства X в точке x_0.

<u>Пример 5</u>. Фундаментальная гомотопическая группа $\pi_1(X, .)$ стягиваемого пространства тривиальна.

<u>Упражнение 3</u>. Найти $\pi_1(X, .)$ для пространства $X = R^2 - \{0\}$.

Обобщая определение гомотопической группы $\pi_1(X, .)$, рассмотрим пару $(I^n, Fr(I^n))$ и множество $\pi_n(X,.)$ гомотопических классов отображений пары $(I^n, Fr(I^n))$ в пространство $(X,.)$. На $\pi_n(X,.)$ тоже может быть определена структура группы и она называется n-МЕРНОЙ ГОМОТОПИЧЕСКОЙ ГРУППОЙ пространства X в точке x_0. По аналогии группа $\pi_1(X,.)$ часто называется первой гомотопической группой и формально определяется множество $\pi_0(X,.)$, совпадающее с множеством компонент связности пространства X. Группы $\pi_n(X,.)$ с $n>1$ называются ВЫСШИМИ ГОМОТОПИЧЕСКИМИ ГРУППАМИ. Высшие гомотопические группы коммутативны.

<u>Пример 6</u>. Группы $\pi_n(S^1)$ с $n\neq 1$ тривиальны, а $\pi_1(S^1)=\mathbb{Z}$.

В случае связного пространства X все гомотопические группы $\pi_n(X,.)$, взятые в разных точках, изоморфны между собой при любом n. Для таких пространств можно говорить о гомотопической группе $\pi_n(X)$ (как абстрактной группе) пространства X без отмеченной точки. В дальнейшем, как правило, будем подразумевать, что рассматриваемые топологические пространства связны.

Топологическое пространство X называется k-СВЯЗНЫМ ($0\leq \leq k\leq\infty$), если все гомотопические группы $\pi_n(X)$ с $n\leq k$ тривиальны. Это эквивалентно тому, что образ всякого непрерывного отображения $S^n\to X$ с $n\leq k$ стягиваем в X в точку.

Для вычисления групп гомотопий может быть удобна следующая формула произведения. Если $X=X_1\times X_2$, то $\pi_n(X)= =\pi_n(X_1)\times\pi_n(X_2)$ для любых n.

<u>Пример 7</u>. Найдем гомотопические группы тора $T^2=S^1\times S^1$. Группы $\pi_{n\neq 1}(T^2)=\pi_n(S^1)\times\pi_n(S^1)$ – тривиальны, а $\pi_1(T^2)=\pi_1(S^1)\times\pi_1(S^1)=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

Значения гомотопических групп для некоторых топологических пространств, часто встречающихся в физических моделях, приведены в Приложении.

Пусть X – топологическое пространство с гомотопическими группами $\{\pi_n(X)\}$, а Y – топологическое пространство с гомотопическими группами $\{\pi_n(Y)\}$. Всякое непрерывное отображение $f: X\to Y$ индуцирует гомоморфизмы $f_{*n}:\pi_n(X)\to\pi_n(Y)$ гомотопических групп. Если отображения $f, f': X\to Y$ гомотопны, то $f_{*n}=f'_{*n}$ при любом n. Если f – гомотопическая эквивалентность, то f_{*n} – изоморфизмы.

Непрерывное отображение f топологического пространства

X в топологическое пространство Y называется СЛАБОЙ ГОМОТОПИЧЕСКОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬЮ, если гомоморфизмы $f_{*n}:\pi_n(X)\to\pi_n(Y)$ являются изоморфизмами при любом n. Однако сам по себе изоморфизм всех гомотопических групп пространств X и Y не гарантирует их гомотопической эквивалентности, поскольку может не существовать непрерывного отображения X в Y, реализующего этот изоморфизм. Гомотопическая эквивалентность является очевидно слабой гомотопической эквивалентностью, обратное неверно.

Таким образом, сопоставление каждому топологическому пространству последовательности его гомотопических групп определяет искомые функторы из категории топологических пространств в категорию групп. Эти функторы постоянны на слабо гомотопически эквивалентных пространствах.

Естественно возникает вопрос о существовании топологического пространства с наперед заданными гомотопическими группами. Ответ положителен в подкатегории клеточных пространств.

КЛЕТОЧНЫМ ПРОСТРАНСТВОМ X называется хаусдорфово топологическое пространство, наделенное клеточным разбиением, т.е. разбиением, на множестве элементов которого определена такая функция d с натуральными значениями, что для каждого элемента e этого разбиения существует непрерывное отображение шара $D^{d(e)}\to X$ с двумя свойствами: а) оно гомеоморфно отображает $\mathrm{Int}\, D^{d(e)}$ на e; б) оно отображает $S^{d(e)-1}$ в объединение элементов разбиения, на которых d принимает значения, меньшие $d(e)$. Элементы клеточного разбиения называются КЛЕТКАМИ, а их замыкания - замкнутыми клетками. Для клеточных пространств обычно требуется также выполнение следующих двух свойств: (C) замкнутая клетка пересекается лишь с конечным числом клеток; (W) замкнутые клетки составляют фундаментальное покрытие пространства.

<u>Пример 8</u>. Каноническое клеточное разбиение сферы S^n состоит из 0-мерной клетки - некоторой точки x_0 и n-клетки $(S^n - x_0)$.

<u>Пример 9</u>. Всякое компактное многообразие гомотопически эквивалентно конечному (по числу элементов разбиения) клеточному пространству.

<u>Теорема</u>. Каковы бы ни были группа π_1 и абелевы группы π_2, π_3, ..., существует связное клеточное пространство X с $\pi_n(X)\cong\pi_n$ (n =1,...).

Теорема. Для всякого топологического пространства X существует его клеточная аппроксимация, т.е. клеточное пространство, слабо гомотопически эквивалентное X.

Последнее позволяет в теории гомотопий вместо всей категории Top часто ограничиваться рассмотрением подкатегории клеточных пространств. При этом на клеточных пространствах слабая гомотопическая эквивалентность совпадает с гомотопической эквивалентностью.

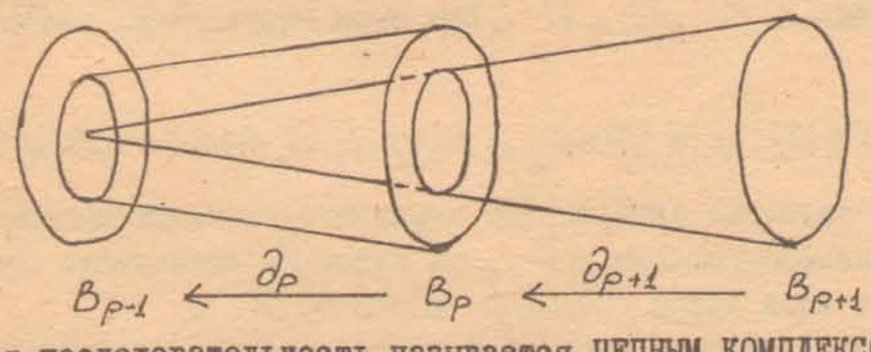
§30. Гомологии

Другой функтор из категории топологических пространств в категорию последовательностей абелевых групп определяет теория гомологий. Существуют различные теории гомологий, но для всех их характерна следующая алгебраическая конструкция.

Пусть $B=\{B_n, \partial_n\}$ есть семейство абелевых групп B_n и гомоморфизмов $\partial_n : B_n \to B_{n-1}$, заданных для всех целых (или натуральных) n, причем $\partial_n \partial_{n+1} = 0$. Последнее условие эквивалентно утверждению, что $Ker\, \partial_n \supset Im\, \partial_{n+1}$. Это значит, что K может быть представлен как бесконечная последовательность

$$\ldots \xleftarrow{\partial_{-1}} B_{-1} \xleftarrow{\partial_0} B_0 \xleftarrow{\partial_1} B_1 \xleftarrow{\partial_2} \ldots, \qquad (30.1)$$

в которой произведение любых двух последовательных отображений равно 0. Графически это можно проиллюстрировать следующим рисунком:



Такая последовательность называется ЦЕПНЫМ КОМПЛЕКСОМ. Элементы группы B_n комплекса называются k-мерными ЦЕПЯМИ, из них элементы из $Ker\, \partial_n$ называются k-мерными ЦИКЛАМИ, а элементы из $Im\, \partial_{n+1}$ - k-мерными ГРАНИЦАМИ. $Im\, \partial_{n+1}$ является очевидно подгруппой $Ker\, \partial_n$, и может быть определена факторгруппа $H_n(B) = Ker\, \partial_n / Im\, \partial_{n+1}$. Эта группа называется k-мерной ГРУППОЙ ГОМОЛОГИИ комплекса B. Циклы, принадлежащие одному и тому же смежному классу из H_n, называются ГОМОЛОГИЧНЫМИ; это будет тогда и только тогда, когда их разность есть некоторая n-граница. Если $H_n(B)=0$, то говорят, что последовательность B точна в B_n. Последовательность, которая точна в каждом элементе, называется ТОЧНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ.

Из всех теорий гомологий мы рассмотрим здесь только СИНГУЛЯРНЫЕ ГОМОЛОГИИ.

Пусть X - дифференцируемое n-мерное ориентируемое связное многообразие. Определим следующий цепной комплекс $B(X)$. Выберем p-цепями $B(X)$ всевозможные конечные формальные суммы $c=\sum k_i c_i$, где c_i - дифференцируемые p-мерные ориентируемые компактные подмногообразия X и k_i - элементы некоторого числового кольца K (причем $(-c_i)$ - это подмногообразие c_i с обратной ориентацией), а гомоморфизмами ∂_p - оператор ∂ взятия границы подмногообразия, считая по определению $\partial c=\sum k_i \partial c_i$. Поскольку граница границы всегда пустое множество, имеем $\partial\partial=0$, и $B(X)$ действительно образует цепной комплекс. Группы гомологий $H_p(X,K)$, $p=0,1,\ldots$, этого комплекса называются группами СИНГУЛЯРНЫХ ГОМОЛОГИЙ многообразия X с коэффициентами в кольце K. Очевидно, что $H_p(X,K)$ для $p>n$, а образующими элементами группы $H_0(X,K)$ являются компоненты линейной связности многообразия X и для связного многообразия $H_0(X,K)=K$.

Группы сингулярных гомологий обычно определяются с коэффициентами в $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$. При этом справедливы соотношения

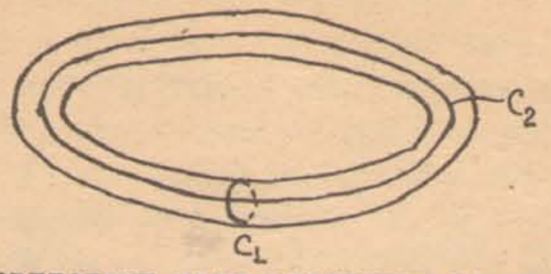
$$H_p(X,\mathbb{R})=H_p(X,\mathbb{Z})\otimes\mathbb{R},\quad H_p(X,\mathbb{C})=H_p(X,\mathbb{R})\otimes\mathbb{C}=H_p(X,\mathbb{Z})\otimes\mathbb{C}.$$

Часто под группами сингулярных гомологий понимают именно группы с коэффициентами в $\mathbb{Z}$, мы будем их обозначать просто $H_p(X)$, а весь набор $\{H_p(X)\}$ через $H_*(X)$.

<u>Пример 1</u>. Группы гомологий стягиваемого пространства для $n>0$ тривиальны.

<u>Пример 2</u>. Если X - замкнутое многообразие, то единственным образующим элементом группы $H_n(X,K)$ является само многообразие X и $H_n(X,K)=K$.

<u>Пример 3</u>. Найдем $H_*(T^2)$, T^2 - тор. Циклы C_1 и C_2, изображенные на рисунке



являются представителями двух различных гомологических классов – образующих элементов группы $H_1(T^2)$. Откуда группы гомологий тора равны:

$$H_0(T^2)=\mathbb{Z},\quad H_1(T^2)=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z},\quad H_2(T^2)=\mathbb{Z}.$$

Пример 4. Группы гомологий сфер: $H_0(S^n)=H_n(S^n)=\mathbb{Z}$, $H_p(S^n)=0,\ p\neq 0,n$.

Упражнение I. Определить $H_*(X)$, если $X=\mathbb{R}^2-\{0\}$.

Практически группы гомологий имеют, как правило, конечное число образующих, и поэтому изоморфны прямой сумме циклических и свободных групп. Если группа гомологии содержит циклическую подгруппу, то говорят, что она содержит КРУЧЕНИЕ. Гомологии с коэффициентами в полях не содержат кручения. Проиллюстрируем это следующим примером.

Пример 5. Пусть $X=\mathbb{R}P^3$ – 3-мерное вещественное проективное пространство. Обозначим через ρ каноническое отображение S^3 на $\mathbb{R}P^3$, отождествляющее антиподальные точки S^3. Пусть S^2 – экватор S^3, S^1 – экватор S^2, а D^k – верхняя полусфера S^k. Тогда $\rho(D^k)$ является k-цепью на $\mathbb{R}P^3$ и

$$\partial\rho(D^3)=0,\quad \partial\rho(D^2)=2\rho(D^1),\quad \partial\rho(D^1)=0.$$

Отсюда следует, что $\partial\rho(D^2)$ является циклом по $K=\mathbb{Z}_2$ (когда 2=0), но не по $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{R}$, и $\rho(D^1)=\frac{1}{2}\partial\rho(D^2)$ является границей относительно $\mathbb{R}$, но не относительно $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_2$. Таким образом,

$$H_0(X)=\mathbb{Z},\quad H_0(X,\mathbb{R})=\mathbb{R},\quad H_0(X,\mathbb{Z}_2)=\mathbb{Z}_2,$$

$$H_1(X)=\mathbb{Z}_2,\quad H_1(X,\mathbb{R})=0,\quad H_1(X,\mathbb{Z}_2)=\mathbb{Z}_2,$$

$$H_2(X)=0,\quad H_2(X,\mathbb{R})=0,\quad H_2(X,\mathbb{Z}_2)=\mathbb{Z}_2,$$

$$H_3(X)=\mathbb{Z},\quad H_3(X,\mathbb{R})=\mathbb{R},\quad H_3(X,\mathbb{Z}_2)=\mathbb{Z}_2.$$

Как и группы гомотопий, группы гомологий изоморфны для гомотопически эквивалентных пространств и представляют собой их гомотопически инвариантные характеристики. Так, например, если X – конечное клеточное пространство, то $\operatorname{rank} H_p(X)$ – минимальное число образующих группы $H_p(X)$ – совпадает с ЧИСЛОМ БЕТТИ b_p – число p-клеток клеточного разбиения X, а $\chi(X) = \sum_p (-1)^p (\operatorname{rank} H_p(X)$ – с ЭЙЛЕРОВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ X. В частности, из Прим.2 следует, что $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$.

Имеется связь между группами гомотопий и группами сингулярных гомологий многообразия X. Определим гомоморфизм Гуревича $h: \pi_n(X) \to H_n(X)$. При $n=1$ его ядро совпадает с коммутантом группы π_1, и, если $\pi_1(X)$ коммутативна, она изоморфна $H_1(X)$. При $n>1$ гомоморфизм h является изоморфизмом, если $\pi_i(X)=0$ при всех $i<n$.

§31. Когомологии

Всякой теории гомологий на категории клеточных пространств может быть сопоставлена двойственная ей теория когомологий.

Пусть B – цепной комплекс (30.1) и A – некоторая абелева группа. Обозначим $Hom(B_n, A)$ абелеву группу всех гомоморфизмов $f: B_n \to A$ и введем гомоморфизм $d^n: Hom(B_n, A) \to Hom(B_{n+1}, A)$, определенный следующим образом:

$$d^n f = (-1)^{n+1} f \partial_{n+1} : B_{n+1} \to A.$$

Легко убедиться, что $d^{n+1} d^n f = (-1) f \partial_n \partial_{n+1} = 0$ для любых $f \in Hom(B_{n-1}, A)$. Таким образом, последовательность

$$\dots \xrightarrow{d^n} Hom(B_{n-1}, A) \xrightarrow{d^{n-1}} Hom(B_n, A) \longrightarrow \dots$$

определяет комплекс абелевых групп, который называется КОЦЕПНЫМ КОМПЛЕКСОМ. Элементы $Hom(B_n, A)$ называются n-мерными КОЦЕПЯМИ, из них элементы $\operatorname{Ker} d^n$ называются n-мерными КОЦИКЛАМИ, а элементы $\operatorname{Im} d^{n-1}$ – n-мерными КОГРАНИЦАМИ. Группы гомологий $H_n(Hom(B, A)) = \operatorname{Ker} d^n / \operatorname{Im} d^{n-1}$ этого комплекса называются ГРУППАМИ КОГОМОЛОГИЙ комплекса B с коэффициентами в A.

Теорией когомологий, двойственной теории сингулярных гомологий, являются когомологии де Рама внешних дифференциальных форм на многообразиях.

Пусть $\Omega(X)=\oplus_p \Omega^p(X)$ - градуированная алгебра внешних дифференциальных форм на n-мерном многообразии X. Оператор внешнего дифференцирования d определяет гомоморфизм d: $\Omega^p\to\Omega^{p+1}$, такой, что $dd=0$. Это наделяет пару (Ω, d) структурой коцепного комплекса

$$\ldots\xrightarrow{d}\Omega^p\xrightarrow{d}\Omega^{p+1}\xrightarrow{d}\ldots\ .$$

Он называется КОМПЛЕКСОМ ДЕ РАМА. Его n-коцепями являются n-формы σ, коциклами - замкнутые формы, а кограницами - точные формы. Группы гомологий этого комплекса $H^p(X)=$ $=Ker\, d\Omega^p/Im\, d\Omega^{p-1}$ называются ГРУППАМИ КОГОМОЛОГИЙ ДЕ РАМА дифференциальных форм на многообразии X. Элементами такой группы $H^p(X)$, $p>0$, являются классы замкнутых p-форм, разность которых является некоторой точной формой. Множество $H^0(X)$, поскольку не существует точных 0-форм, определяется формально как пространство постоянных функций на X, и $dim H^0(X)$ равна числу компонент связности X. Очевидно также, что $H^{p>n}(X)=0$.

<u>Пример I</u>. Группы когомологий $H^{p>0}(X)$ стягиваемого пространства X тривиальны. Это является выражением известной ЛЕММЫ ПУАНКАРЕ, что в евклидовом пространстве всякая замкнутая форма является точной. В частности, если $X=\mathbb{R}^3$ и σ - I-форма, условие замкнутости означает, что $rot\vec{\sigma}=0$, откуда получаем известное следствие, что $\vec{\sigma}=grad\,\varphi$, где φ - некоторая скалярная функция на X. Напротив, на нестягиваемом многообразии могут существовать неградиентные векторные поля, ротор которых равен 0.

<u>Упражнение I</u>. Построить пример такого поля на плоскости с выколотой точкой $\mathbb{R}^2-\{0\}$.

<u>Упражнение 2</u>. Показать, что группы когомологий де Рама образуют градуированную алгебру $H^*(X)=\oplus_p H^p(X)$ с умножением, индуцируемым внешним произведением дифференциальных форм.

Двойственность групп когомологий де Рама $H^*(X)$ и групп сингулярных гомологий $H_*(X,\mathbb{R})$ устанавливается билинейной формой - интегрированием p-форм σ_p по p-цепям C_p:

$$\langle\sigma_p|C_p\rangle=\int_{C_p}\sigma_p\ . \qquad (31.I)$$

При этом в силу теоремы Стокса

$$\langle \sigma_p + d\sigma_{p-1} | c_p \rangle = \int_{c_p} \sigma_p + d\sigma_{p-1} = \int_{c_p} \sigma_p + \int_{\partial c_p} \sigma_{p-1} = \int_{c_p} \sigma_p = \langle \sigma_p | c_p \rangle,$$

$$\langle \sigma_p | c_p + \partial c_{p+1} \rangle = \int_{c_p + \partial c_{p+1}} \sigma_p = \int_{c_p} \sigma_p + \int_{c_{p+1}} d\sigma_p = \int_{c_p} \sigma_p = \langle \sigma_p | c_p \rangle ,$$

т.е. билинейная форма (31.1) зависит только от когомологического класса σ_p и гомологического класса c_p , а тем самым определяет билинейную форму

$$\langle | \rangle : H^p(X) \otimes H_p(X, R) \to R.$$

Таким образом, имеет место теорема ДВОЙСТВЕННОСТИ ДЕ РАМА.

<u>Теорема</u>. Группа когомологий де Рама $H^p(X)$ отождествляется при помощи билинейной формы (31.1) с пространством всех линейных форм на $H_p(X, R)$, и они изоморфны как вещественные векторные пространства.

Отсюда, в частности, следует, что, как и сингулярные гомологии, когомологии де Рама являются гомотопическими инвариантами.

В случае, когда X - замкнутое ориентируемое многообразие, для групп когомологий $H^*(X)$ и гомологий $H_*(X, R)$ имеет место также ДВОЙСТВЕННОСТЬ ПУАНКАРЕ. Она определяется следующей билинейной формой

$$(\sigma_p, \sigma_{n-p}) = \int_X \sigma_p \wedge \sigma_{n-p} , \qquad (31.2)$$

которая, как легко проверить, зависит только от когомологических классов форм σ_p и σ_{n-p} и является тем самым билинейной формой на группах когомологий:

$$(,) : H^p(X) \otimes H^{n-p}(X) \to R.$$

Это определяет изоморфизм $H^p(X) \approx H^{n-p}(X)$ и $H_p(X, R) \approx H_{n-p}(X, R)$ как векторных пространств.

В частности, отсюда следует соотношение $b_p = b_{n-p}$ для чисел Бетти замкнутого ориентируемого многообразия X . и, если $\dim X$ нечетна, его эйлерова характеристика $\chi = 0$.

Для вычисления групп когомологий может быть полезна следующая формула произведения. Пусть $X = X_1 \times X_2$, тогда

$$H^k(X) = \bigoplus_{p+q=k} H^p(X_1) \otimes H^q(X_2).$$

Откуда, в частности, можем получить соотношения для чисел

$$b_k(X)=\sum_{p+q=k} b_p(X_1)b_q(X_2)$$

и эйлеровой характеристики

$$\chi(X)=\chi(X_1)\chi(X_2)$$

в случае конечного клеточного пространства X .

Пример 2. Найдем группы когомологий $H^*(T^2)$. Поскольку $T^2=S^1\times S^1$ замкнутое ориентируемое многообразие, в силу двойственности Пуанкаре $H^0(T^2)=H^2(T^2)=\mathbb{R}$. Группу $H^1(T^2)$ найдем, используя формулу произведения, $H^1(T^2)=$ $=[H^0(S^1)\otimes H^1(S^1)]\oplus[H^1(S^1)\otimes H^0(S^1)]=H^1(S^1)\oplus H^1(S^1)=\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$.

Полезной является также формула надстройки. Пусть X - топологическое пространство. НАДСТРОЙКОЙ SX над X называется факторпространство произведения $X\times I$ по разбиению, элементами которого служат множества $X\times\{0\}$, $X\times\{1\}$ и точки множества $(X\times I)-(X\times\{0\}\cup X\times\{1\})$, т.е. надстройку SX можно представить как цилиндр $X\times I$ со стянутыми в точки основаниями $X\times\{0\}$ и $X\times\{1\}$. Например, $S^n=SS^{n-1}$. Имеют место соотношения $H_{p>0}(X,K)=H_{p+1}(SX,K)$, $H_1(SX,K)\oplus$ $\oplus K=H_0(X,K)$ и соответствующие соотношения для групп когомологий $H^{p>0}(X)=H^{p+1}(SX)$, $H^1(SX)\oplus\mathbb{R}=H^0(X)$.

Пример 3. Вычислим, используя формулу надстройки, группы гомологий и когомологий сфер. $H_p(S^n)=H_1(S^{n-p+1})$, а $H_1(S^{n-p+1})\oplus\mathbb{Z}=H_0(S^{n-p})$. Так как $H_0(S^n)=\mathbb{Z}$ для $n>0$ и $H_0(S^0)=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ для $n=0$ (поскольку по определению состоит из двух точек), получаем $H_{0\neq p\neq n}(S^n)=0$ и $H_0(S^n)=$ $=H_n(S^n)=\mathbb{Z}$. Аналогично находим группы когомологий $H^{0\neq p\neq n}(S^n)=0$, $H^0(S^n)=H^n(S^n)=\mathbb{R}$.

Важным примером теорий когомологий являются также когомологии с коэффициентами в пучках.

ПРЕДПУЧОК считается заданным над топологическим пространством X , если каждому открытому подмножеству $U\subset X$ сопоставлена некоторая абелева группа S_U , а каждой паре открытых множеств $V\subset U$ сопоставлен гомоморфизм $\tau^U_V: S_U\to S_V$, такой, что: а) $\tau^U_U=id\, S_U$; б) $\tau^U_W=\tau^V_W\tau^U_V$ для $W\subset V\subset U$. Предпучок называется ПУЧКОМ, если для всякого $U=\bigcup_i U_i$ выполняются следующие условия:

I) если $s,s'\in S_U$ и $\tau^U_{U_i}(s)=\tau^U_{U_i}(s')$ для всех i , то $s=s'$;

2) если $s_i\in S_{U_i}$ и при $U_i\cap U_j\neq\emptyset$ имеем

$$r^{U_i}_{U_i\cap U_j}(s_i)=r^{U_j}_{U_i\cap U_j}(s_j)$$

для всех i,j, то существует $s\in S_U$, такой, что $r^U_{U_i}(s)=$ $=s_i$ для всех s_i.

Пример 4. Пусть X - топологическое пространство и S_U - множество всех непрерывных вещественных функций на $U\subset X$, а гомоморфизм r^U_V определяется как сужение их на $V\subset U$. Тогда легко проверить, что $\{S_U, r^U_V\}$ - пучок.

Теорема. Всякий пучок на топологическом пространстве может быть задан как множество непрерывных сечений некоторого накрытия над X.

В качестве слоя такого накрытия над точкой $x\in X$ выбирается прямой предел $S_x=\varinjlim_{x\in U} S_U$ по фильтру окрестностей точки x. Для абелевых групп такой предел является абелевой группой и называется СТЕБЛЕМ пучка в точке x. Его элементы называются РОСТКАМИ, и два элемента $s,s'\in S_U$ принадлежат одному и тому же ростку $s_x\in S_x$, только если существует открытая окрестность V точки x, такая, что $r^U_V s=r^U_V s'$. Часто под пучком понимают именно соответствующее ему накрытие.

Пример 5. Пусть X - топологическое пространство и G - абелева группа. Возьмем в качестве S_U постоянные отображения $U\to G$. Они задают пучок, называемый ПОСТОЯННЫМ ПУЧКОМ с коэффициентами в G. Часто он просто обозначается G.

Пучок S над пространством X называется МЯГКИМ, если всякое сечение S над любым замкнутым подмножеством X может быть продолжено до сечения S над всем X.

Упражнение 3. Показать, что постоянный пучок не является мягким.

Пучок S над паракомпактным хаусдорфовым пространством X называется ТОНКИМ, если для любого локально конечного открытого покрытия $\{U_i\}$ пространства X существует семейство морфизмов пучков $\{h_i: S\to S\}$, такое, что: а) $\sum_i h_i = id\, S$; б) $h_i(S_x)=0$. для всех x из некоторой окрестности дополнения к U_i.

Пример 6. Пучок ростков непрерывных вещественных функций на X является тонким. Чтобы это показать, выберем в качестве h_i умножение на функции φ_i, составляющие разбиение единицы для пространства X. Аналогично устанавливается тонкость пучка ростков гладких функций на гладком многообразии X, пучка ростков внешних дифференциальных p-форм на X.

Можно показать, что тонкий пучок мягок.

Пусть S - некоторый пучок над топологическим (паракомпактным) пространством X и пусть $\widehat{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ - открытое покрытие X. Определим в качестве q-мерной коцепи (покрытия $\widehat{U}$ с коэффициентами в S) функцию f, сопоставляющую каждой ($q+1$)-членной последовательности ($i_0,\dots,i_q$) индексов из множества I некоторый элемент $f(i_0,\dots,i_q)$ группы $S(U_{i_0}\cap\dots\cap U_{i_q})$. Все такие q-мерные цепи очевидным образом образуют абелеву группу $C^q(\widehat{U},S)$, а формула

$$(\delta^q f)(i_0,\dots,i_{q+1})=\sum_{k=0}^{q+1}(-1)^k r_W^{W_k}(f(i_0,\dots,\hat{i}_k,\dots,i_{q+1}))$$

определяет гомоморфизм

$$\delta^q: C^q(\widehat{U},S)\longrightarrow S^{q+1}(\widehat{U},S).$$

Здесь знак $\wedge$ над символом означает, что этот символ должен быть опущен, и $W=U_{i_0}\cap\dots\cap U_{i_{q+1}}$, $W_k=U_{i_0}\cap\dots\cap\widehat{U}_{i_k}\cap\dots\cap U_{i_{q+1}}$. Легко проверить, что $\delta^{q+1}\delta^q=0$, и определены группы когомологий

$$H^q(\widehat{U},S)=Ker\,\delta^q/Im\,\delta^{q-1}.$$

Эти группы зависят от покрытия $\widehat{U}$. Пусть покрытие $\widehat{V}$ вписано в покрытие $\widehat{U}$. Как можно показать, это индуцирует гомоморфизм $r_{\widehat{V}}^{\widehat{U}}: H^q(\widehat{U},S)\longrightarrow H^q(\widehat{V},S)$, и, беря прямой предел групп $H(\widehat{U},S)$ по отношению к этим гомоморфизмам, где $\widehat{U}$ пробегает все покрытия пространства X, получаем определение ГРУПП КОГОМОЛОГИЙ ЧЕХА С КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПУЧКЕ S топологического пространства X, обозначаемых $H^q(X,S)$.

Группа когомологий $H^0(X,S)$ по определению представляет собой группу функций f, сопоставляющих каждому U_i из покрытия $\widehat{U}$ пространства X некоторое сечение f_i пучка над U_i, обладающих тем свойством, что $f_i=f_j$ на $U_i\cap U_j$, т.е. f представляет собой некоторое глобальное сечение пучка S, и $H^0(X,S)$ изоморфна группе $\Gamma(X,S)$ глобальных сечений S.

<u>Теорема</u>. Группы когомологий $H^{p>0}(X,S)$ паракомпактного пространства X с коэффициентами в тонком пучке S равны 0.

Рассмотрим точный коцепной комплекс пучков

$$0\longrightarrow S\xrightarrow{h}S_0\xrightarrow{h^0}S_1\xrightarrow{h^1}\dots\xrightarrow{h^{p-1}}S_p\xrightarrow{h^p}\dots \qquad (31.3)$$

над паракомпактным пространством X . Эта последовательность называется РЕЗОЛЬВЕНТОЙ для пучка S , если все группы когомологий $H^{q>0}(X,S_p)=0$ (например, когда все пучки S_p тонкие). Комплекс (31.3) определяет коцепной комплекс

$$0 \to \Gamma(X,S) \xrightarrow{h_*} \Gamma(X,S_0) \xrightarrow{h^1_*} \dots \xrightarrow{h^{p-1}_*} \Gamma(X,S_p) \to \dots \quad (31.4)$$

групп глобальных сечений пучков S , S_0 ,..., который, вообще говоря, точен только в членах $\Gamma(X,S)$ и $\Gamma(X,S_0)$. Имеет место следующая важная теорема.

Теорема. Рассмотрим резольвенту (31.3) пучка S над паракомпактным пространством X . Тогда q-я группа когомологий комплекса (31.4) изоморфна группе когомологий $H^q(X,S)$, т.е.

$$H^{q>0}(X,S) = Ker\, h^q_*/Im\, h^{q-1}_*, \quad H^0(X,S) = Ker\, h^0_*.$$

Пусть, например, S - постоянный пучок вещественных чисел, S_p - пучки внешних p-форм на гладком многообразии X . Рассмотрим комплекс

$$0 \xrightarrow{in} S \xrightarrow{in} S_0 \xrightarrow{d} S_1 \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} S_p \xrightarrow{d} \dots . \quad (31.5)$$

Поскольку все пучки S_p тонкие, то комплекс (31.5) является резольвентой для S . Он определяет комплекс де Рама

$$0 \xrightarrow{in} \mathbb{R} \xrightarrow{in} \Omega^0(X) \xrightarrow{d} \Omega^1(X) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^p(X) \to \dots$$

внешних дифференциальных форм на X , и в силу предыдущей теоремы получаем изоморфизм

$$H^p(X) = H^p(X,\mathbb{R}) \quad (31.6)$$

групп когомологий де Рама $H^p(X)$ и групп $H^p(X,\mathbb{R})$ когомологий гладкого многообразия X с коэффициентами в постоянном пучке $\mathbb{R}$.

Изоморфизм (31.6) является ключом к применению методов алгебраической топологии в теории поля, поскольку позволяет выразить тополого-алгебраические характеристики, представляемые элементами групп когомологий $H^p(X,\mathbb{Z})$ через классы когомологий дифференциальных форм, образованных комбинациями форм кривизны калибровочных полей.

ГЛАВА УП. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ

§32. Характеристические классы расслоений

Большинство "топологических" чисел и зарядов, фигурирующих в полевых моделях, представляет собой тополого-алгебраические характеристики, описывающие различные классы эквивалентности расслоений. Поэтому обратимся к задаче классификации расслоений с данной структурной группой G над топологическим пространством X. В общем виде эта задача решается классификационной теоремой, которая устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентных расслоений над X и гомотопическими классами отображений пространства X в некоторое специальное классифицирующее пространство, зависящее только от структурной группы.

Обозначим через $S(X,G)$ множество классов ассоциированных расслоений над топологическим пространством X со структурной топологической группой G. Рассмотрим отображения, которым это множество подвергается под действием операций сужения структурной группы и индуцирования.

Пусть G' - подгруппа группы G. Тогда вложение $G'\to G$ порождает естественное вложение множества $S(X,G')$ в множество $S(X,G)$, образами которого являются классы расслоений над X, структурная группа G которых может быть редуцирована к подгруппе G'. В частности, если X - паракомпактно, G - группа Ли, а G' - ее максимальная компактная подгруппа, то $S(X,G)=S(X,G')$, поскольку в этом случае структурная группа G расслоения над X всегда редуцируема к G' (см.§I8).

Для нас особенно важными являются примеры такого совпадения множеств $S(X,G)$ и $S(X,G'\subset G)$, когда: $G=GL(n,\mathbb{C})$, $G'=U(n)$; $G=GL(n,\mathbb{R})$, $G'=O(n)$; $G=GL^{+}(n,\mathbb{R})$, $G'=SO(n)$.

Пусть $f: Y\to X$ - непрерывное отображение. Для всякого расслоения λ над X оно индуцирует расслоение $f^{*}\lambda$ над Y и определяет отображение

$$f^{*}: S(X,G)\longrightarrow S(Y,G).$$

Для клеточного пространства Y это отображение f^{*} зависит только от гомотопического класса отображения f и тем самым определяет отображение $f^{**}: \pi(Y,X) \to S(Y,G)$. Если бы нашлось такое пространство X, что отображение $f: Y \to X$ индуцирует биекцию f^{**}, это позволило бы описать множество $S(Y,G)$ классов G-расслоений над Y. Такое пространство существует.

Расслоение λ со структурной группой G, типичным слоем V и базой $bs\,\lambda = X$ называется УНИВЕРСАЛЬНЫМ РАССЛОЕНИЕМ, если: а) для всякого расслоения λ' о клеточной базой X' и слоем V существует такое непрерывное отображение $f: X' \to X$, что расслоение $f^*\lambda$ эквивалентно λ'; б) всякие два непрерывных отображения f_1, f_2 клеточного пространства в X с эквивалентными расслоениями $f_1^*\lambda$, $f_2^*\lambda$ гомотопны. База универсального расслоения со структурной группой G одновременно является базой универсальных расслоений со структурной группой G и всевозможными другими типичными слоями и в этом смысле не зависит от типичного слоя. Она называется КЛАССИФИЦИРУЮЩИМ ПРОСТРАНСТВОМ группы G.

Теорема, устанавливающая существование классифицирующих пространств, называется КЛАССИФИКАЦИОННОЙ ТЕОРЕМОЙ. В общем случае она не ограничивается расслоениями с клеточной базой и гласит следующее.

Теорема. Для всякой топологической группы G существует топологическое пространство $B(G)$, являющееся классифицирующим для всех расслоений со структурной группой G над паракомпактными пространствами, т.е. для всякого такого пространства X

$$S(X,G) = \pi(X, B(G)).$$

Классифицирующее пространство всегда может быть выбрано клеточным, и тотальное пространство универсального расслоения над ним стягиваемо.

Из классификационной теоремы следует, что для данной группы G множество $S(X,G)$ зависит только от гомотопического типа пространства X и является тем самым гомотопическим инвариантом. Это и позволяет решать задачу классификации расслоений методами алгебраической топологии.

Построим, например, классифицирующее пространство для расслоений с дискретной структурной группой G. Главное универсальное расслоение λ, отвечающее G, является накрытием, и его тотальное пространство $tl\,\lambda$ стягиваемо. Воспользуемся тем, что для всякого локально тривиального расслоения λ с базой $bs\lambda$, типичным слоем V, проекцией $pr: tl\lambda \to bs\lambda$ и отмеченной точкой $a \in tl\lambda$ имеет место следующая точная ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ГОМОТОПИЧЕСКИХ ГРУПП:

$$\ldots \to \pi_2(V_a, a) \xrightarrow{in^*} \pi_2(tl\lambda, a) \xrightarrow{pr^*} \pi_2(bs\lambda, pr(a)) \to$$

$$\xrightarrow{\Delta} \pi_1(V_a, a) \xrightarrow{in^*} \pi_1(tl\lambda, a) \xrightarrow{pr^*} \pi_1(bs\lambda, pr(a)) \xrightarrow{\Delta}$$

$$\to \pi_0(V_a, a) \xrightarrow{in^*} \pi_0(tl\lambda, a) \xrightarrow{pr^*} \pi_0(bs\lambda, pr(a)) \to 0.$$

В рассматриваемом случае, поскольку $V = G$, то $\pi_{n>0}(V_a, a) = 0$ и $\pi_0(V_a, a) = G$, а поскольку $tl\lambda$ стягиваемо, то все $\pi_n(tl\lambda, a) = 0$ и Δ - изоморфизмы. Отсюда находим, что единственной отличной от 0 гомотопической группой базы должна быть группа $\pi_1(bs\lambda, pr(a)) = G$. Можно построить клеточное пространство с такими гомотопическими группами, которое и будет классифицирующим пространством, отвечающим дискретной группе G.

Для физических приложений наибольший интерес представляют векторные конечномерные расслоения. Структурными группами этих расслоений являются группы $GL(n, \mathbb{C})$ и $GL(n, \mathbb{R})$, редуцируемые соответственно к $U(n)$ и $O(n)$. Классифицирующими пространствами для этих групп служат соответственно

$$B(U(n)) = \lim_{N\to\infty} G(n, N; \mathbb{C}), \ B(O(q)) = \lim_{N\to\infty} G(n, N; \mathbb{R}),$$

где $G(n, N; \mathbb{C})$ и $G(n, N; \mathbb{R})$ - многообразия Грассмана n-мерных плоскостей соответственно в N-мерном комплексном и вещественном пространствах.

Знание классифицирующих пространств позволяет построить ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ - элементы групп когомологий $H^*(X, \mathbb{Z})$, классифицирующие $U(n)$- и $O(n)$-расслоения над локально компактным паракомпактным конечномерным пространством X. Здесь использовано следующее определение размерности топологического пространства: пространство X имеет размерность $\leqslant n$, если во всякое открытое покрытие $\tilde{U}$ пространства X можно вписать покрытие $\tilde{U}'$, такое, что каждая точка из X лежит не более, чем в $n+1$ открытых подмножествах из $\tilde{U}'$; n-мерное многообразие имеет размерность n и в смысле этого определения.

В дальнейшем мы не будем выходить за рамки категории локально компактных паракомпактных конечномерных топологических пространств.

Мы будем иметь дело со следующими характеристическими классами:

классы Чженя $c_i \in H^{2i}(X, \mathbb{Z})$ для $U(q)$ -расслоений;

классы Понтрягина $q_i \in H^{4i}(X, \mathbb{Z})$ для $O(k)$ -расслоений;

класс Эйлера $e \in H^{q}(X, \mathbb{Z})$ для $SO(q)$ -расслоений;

классы Штифеля - Уитни $W_i \in H^i(X, \mathbb{Z})$ для касательных расслоений.

§33. Классы Чженя $U(q)$-расслоений

Рассмотрим $U(q)$-расслоения. Имеет место следующая теорема.

<u>Теорема</u>. Для всякого класса непрерывных $U(q)$ -расслоений и для всякого целого $i \geqslant 0$ определены КЛАССЫ ЧЖЕНЯ $c_i(\lambda) \in H^{2i}(X, \mathbb{Z})$. Класс $c_0(\lambda) = 1$.

Возможны различные пути описания классов Чженя и определения их свойств. Мы ограничимся рассмотрением $U(q)$ -расслоений над гладкими многообразиями X и, воспользовавшись вложением $H^*(X, \mathbb{Z}) \to H^*(X, \mathbb{R})$ (по модулю кручения) и изоморфизмом $H^*(X, \mathbb{R})$ и групп когомологий де Рама $H^*(X)$, будем строить классы Чженя как классы когомологий некоторых форм на X.

Пусть A - комплексная ($k \times k$)-матрица и $P(A)$ - полином из компонент матрицы A. Полином $P(A)$ называется ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ ПОЛИНОМОМ, если $P(A) = P(gAg^{-1})$ для всех $g \in GL(k, \mathbb{C})$. Если A имеет собственные значения $\{a_1, \ldots, a_k\}$, то $P(A)$ представляет собой симметричную функцию этих значений. Обозначим $S_j(a)$ следующий симметричный полином степени j:

$$S_j(\lambda) = \sum_{i_1 < \ldots < i_j} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_j}. \qquad (33.I)$$

Тогда $P(A)$ представим как полином от $S_j(a)$.

<u>Пример I</u>. $Det(I + A)$, где I - единичная матрица, является характеристическим полиномом, и $Det(I+A) = 1 + S_1(a) + S_2(a) + \ldots + S_k(a)$.

Пусть $P(A)$ - характеристический полином. Подставим в него вместо A матричнозначную 2-форму кривизны Ω некоторой связности на расслоении. Тогда, как можно показать, форма $P(\Omega)$ обладает следующими свойствами:

а) $P(\Omega)$ - замкнутая форма, т.е. $dP(\Omega)=0$;

б) $P(\Omega)-P(\Omega)'$, где Ω и Ω' - формы кривизны любых различных связностей на расслоении, представляет собой точную форму, т.е. $P(\Omega)-P(\Omega')=dQ$.

Последнее означает, что характеристический полином, взятый от различных форм кривизны на данном расслоении, имеет один и тот же когомологический класс де Рама, который тем самым может служить характеристикой этого расслоения. Это действительно так, и характеристические классы расслоений представляются когомологическими классами характеристических полиномов от форм кривизны на расслоениях.

Пусть λ - комплексное векторное расслоение над n-мерным многообразием X со структурной группой $GL(k,\mathbb{C})$, а Ω - форма кривизны на λ. ПОЛНОЙ ФОРМОЙ ЧЖЕНЯ называется следующий характеристический полином от Ω

$$c(\Omega)=\mathrm{Det}\left(I+\frac{i}{2\pi}\Omega\right)=1+c_1(\Omega)+c_2(\Omega)+\cdots. \quad (33.2)$$

$2i$-формы $c_i(\Omega)$ из разложения (33.2) называются ФОРМАМИ ЧЖЕНЯ и являются полиномами степени i по Ω:

$$c_0(\Omega)=1,\ c_1=\frac{i}{2\pi}\mathrm{Tr}\,\Omega,\ c_2=\frac{1}{8\pi^2}\{\mathrm{Tr}(\Omega\wedge\Omega)-\mathrm{Tr}\,\Omega\wedge\mathrm{Tr}\,\Omega\}. \quad (33.3)$$

Все формы Чженя $c_i(\Omega)$ замкнуты, и их когомологические классы отождествляются с характеристическими классами Чженя расслоения λ, будучи образами $c_i(\lambda)\in H^{2i}(X,\mathbb{Z})$ при отображении

$$H^*(X,\mathbb{Z})\xrightarrow{in}H^*(X,\mathbb{R})\approx H^*(X).$$

Представление классов Чженя формами Чженя позволяет легко получить свойства этих классов:

1) $c_i(\lambda)=0,\ 2i>n$;

2) $c_i(\lambda)=0,\ i>k$;

3) $c_i(\lambda\oplus\lambda')=c(\lambda)c(\lambda')$;

4) $c_1(L\otimes L')=c_1(L)+c_1(L')$, где L, L' - $U(1)$-расслоения.

Эти свойства, а также требование, чтобы $c(f^*\lambda)=f^*c(\lambda)$ и что число Чженя $c_1(L)=-1$ для линейного расслоения L

над проективным пространством $\mathbb{C}P^1$, достаточны для аксиоматического определения классов Чженя.

Пример 2. Найдем условие редукции структурной группы $U(q)$-расслоения λ к $SU(q)$. Достаточным, но не необходимым условием такой редукции является существование $su(q)$-значной формы кривизны Ω на λ. Но, как следует из (33.3), для такой формы кривизны форма Чженя $c_1(\Omega)=0$. Откуда искомым условием является $c_1(\lambda)=0$.

Особенно эффективно использовать свойство (3) классов Чженя позволяет следующая теорема.

Теорема. Для всякого гладкого $U(q)$-расслоения λ над многообразием X существует пространство Y и непрерывное отображение $f: Y\to X$, такие, что

а) $f^*: H^*(X,\mathbb{Z})\to H^*(Y,\mathbb{Z})$ – мономорфизм;

б) $f^*\lambda$ есть сумма $U(1)$-расслоений.

Она позволяет в целом ряде случаев классы Чженя $U(q)$-расслоений выражать через классы Чженя $U(1)$-расслоений, или на примере этих случаев исследовать общие свойства классов Чженя. Это называется принципом расщепления. Согласно ему запишем:

$$c(\lambda)=c(L_1\oplus\ldots\oplus L_q)=c(L_1)\times\cdots\times c(L_q)= \\ =(1+x_i)\times\cdots\times(1+x_q), \tag{33.4}$$

где $(1+x_i)$ – класс Чженя расслоения L_i. Из (33.4) находим

$$c_1=\sum_j x_j,\quad c_2=\sum_{i<j}x_ix_j,\quad c_j(\lambda)=\sum_{i_1<\ldots<i_j}x_{i_1}\ldots x_{i_j}. \tag{33.5}$$

Выражение (33.5) идентично выражению (33.1), и это не случайно, поскольку x_i можно рассматривать как компоненты диагонализованной формы кривизны

$$\Omega=\begin{pmatrix}\Omega_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \Omega_k\end{pmatrix},\quad x_i=\frac{i}{2\pi}\Omega_i.$$

Пример 3. Пусть λ^* – двойственное к λ расслоение. Тогда согласно принципу расщепления

$$c(\lambda^*)=c(L_1^*)\times\ldots\times c(L_q^*)=(1+x_1^*)\ldots(1+x_q^*).$$

Поскольку генераторы группы $U(1)$ в двойственном представлении отличаются от генераторов $U(1)$ в исходном представлении на -1, имеет место соотношение $x_j^* = -x_j$. Откуда легко получить, что

$$c_i(\lambda^*) = (-1)^i c_i(\lambda). \qquad (33.6)$$

Пусть теперь база X расслоения λ - замкнутое многообразие. Различными произведениями форм Чженя можно построить некоторый набор n-форм и рассмотреть их интегралы по многообразию X. Значения последних будут зависеть только от когомологических классов построенных n-форм, а тем самым от когомологических классов форм Чженя, т.е. будут характеристическими для данного расслоения. Они называются ЧИСЛАМИ ЧЖЕНЯ расслоения X. Например, если $n=4$, имеется два таких числа Чженя:

$$c_2(\lambda) = \int_X c_2(\Omega), \quad c_1^2(\lambda) = \int_X c_1(\Omega) \wedge c_1(\Omega). \qquad (33.7)$$

Отметим, что, поскольку классы Чженя являются элементами целочисленных групп когомологий, числа Чженя оказываются целыми.

КЛАССАМИ ЧЖЕНЯ $c_i(X)$ КОМПЛЕКСНОГО МНОГООБРАЗИЯ X называются классы Чженя комплексного касательного расслоения $T_{\mathbb{C}}(X)$, и, если X - замкнутое многообразие, число Чженя

$$c_n(X) = \int_X c_n(X) = \chi(X) \qquad (33.8)$$

совпадает с эйлеровой характеристикой X как вещественного многообразия.

Помимо классов Чженя для $U(q)$-расслоений могут быть определены и другие характеристические классы, выражаемые через классы Чженя.

ХАРАКТЕР ЧЖЕНЯ $ch(\lambda)$ определяется характеристическим полиномом

$$ch(\Omega) = Tr\, exp\left(\frac{i}{2\pi}\Omega\right) = \sum_j \frac{1}{j!} Tr\left(\frac{i}{2\pi}\Omega\right)^j. \qquad (33.9)$$

Он обладает свойствами

$$\begin{aligned} ch(\lambda \oplus \lambda') &= ch(\lambda) + ch(\lambda'), \\ ch(\lambda \otimes \lambda') &= ch(\lambda)\, ch(\lambda'), \end{aligned} \qquad (33.10)$$

и его выражение через классы Чженя, используя принцип расщепления, устанавливается в виде

$$ch(\lambda)=\sum_{j=1}^{k} e^{x_j}=k+c_1(\lambda)+\frac{1}{2}(c_1^2-2c_2)(\lambda)+\dots \quad (33.11)$$

КЛАСС ТОДДА определяется следующим образом через классы Чженя:

$$td(\lambda)=\prod_{j=1}^{k}\frac{x_j}{1-e^{-x_j}}=1+\frac{1}{2}c_1+\frac{1}{12}(c_1^2+c_2)+\dots \quad (33.12)$$

и обладает свойством

$$td(\lambda\oplus\lambda')=td(\lambda)\,td(\lambda').$$

§34. Характеристические классы $O(k)$-расслоений

Рассмотрим теперь характеристические классы вещественных векторных расслоений, имеющих структурную группу $O(k)$. Пусть λ - такое расслоение над многообразием X.

Опишем КЛАССЫ ПОНТРЯГИНА этого расслоения когомологическими классами компонент характеристического полинома

$$p(\Omega)=\mathrm{Det}(I-\tfrac{1}{2\pi}\Omega)=1+p_1+p_2+\dots \quad (34.1)$$

от формы кривизны Ω на λ, принимающей значения в алгебре Ли $o(k)$.

Поскольку $\Omega=-\Omega^T$, в разложении (34.1) отличны от 0 только компоненты с четной по Ω степенью и, таким образом, $p_j\in H^{4j}(X)$. Классы Понтрягина обладают следующими свойствами:

1) $p_j(\lambda)=0$ при $4j>n=\dim X$;
2) $p_j(\lambda)=0$ при $2j>k$;
3) $p(\lambda\oplus\lambda')=p(\lambda)p(\lambda')$.

Отметим, что хотя характеристические классы расслоений со структурными группами $GL(k,\mathbb{R})$ и $O(k)$ совпадают, характеристические формы $p(\Omega)$ для них могут быть различны. Например, если Ω - форма кривизны, принимающая значения в алгебре Ли $gl(k,\mathbb{R})$, то компоненты с нечетной степенью по Ω в разложении (34.1) могут уже быть отличны от 0. Поэтому во избежание недоразумений характеристические формы, отвечающие классам Понтрягина, следует строить только из $o(k)$-значных форм кривизны.

Пример 1. Рассмотрим касательное расслоение $T(X^4)$ над многообразием X^4. Для него имеется единственный класс Понтрягина $p_1 \in H^4(X)$. Характеристическая форма для этого класса может быть построена из формы кривизны R некоторой римановой метрики на X:

$$p_1 = -\frac{1}{8\pi^2} \operatorname{Tr} R \wedge R = -\frac{1}{8\pi^2} R_{ab} \wedge R^{ab}.$$

Аксиоматически классы Понтрягина $O(k)$-расслоений могут быть введены через классы Чженя $U(q)$-расслоений. Для этого воспользуемся следующими коммутативными диаграммами вложений

$$\begin{tikzcd} U(q) \arrow[r] \arrow[d] & O(2q) \arrow[d] \\ GL(q,\mathbb{C}) \arrow[r] & GL(2q,\mathbb{R}) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} O(q) \arrow[r] \arrow[d] & U(q) \arrow[d] \\ GL(q,\mathbb{R}) \arrow[r] & GL(q,\mathbb{C}) \end{tikzcd} \qquad (34.2)$$

В первой диаграмме горизонтальные стрелки обозначают вложения, получающиеся, если линейное отображение пространства $\mathbb{C}^q$ с координатами $z^1, \ldots, z^q$ рассматривать как линейное отображение пространства $\mathbb{R}^{2q}$ с координатами $x^1, \ldots, x^{2q}$, положив $z^k = x^{2k-1} + i x^{2k}$. Во второй диаграмме горизонтальные стрелки обозначают вложения, получающиеся, если матрицы с вещественными коэффициентами рассматривать как матрицы с комплексными коэффициентами.

Вторая из диаграмм (34.2) определяет вложение φ множества $S(X, O(q))$ в множество $S(X, U(q))$, и для $O(q)$-расслоений λ над X положим

$$p_j(\lambda) = (-1)^j c_{2j}(\varphi(\lambda)), \quad p(\lambda) = \sum_j p_j(\lambda). \qquad (34.3)$$

Элементы $p_j(\lambda) \in H^{4j}(X, \mathbb{Z})$ определяются как j-е классы Понтрягина, а $p(\lambda)$ – как ПОЛНЫЙ КЛАСС ПОНТРЯГИНА расслоения λ. Их образами в $H^*(X)$ являются классы Понтрягина, определенные через характеристический полином (34.I). Заметим, однако, что для классов Понтрягина (34.3) не выполняется свойство (3), но верно, что $p(\lambda \oplus \lambda') = p(\lambda)\, p(\lambda')$ по модулю элементов порядка 2 в $H^*(X, \mathbb{Z})$.

Первая из диаграмм (34.2) определяет отображение ρ из $S(X, U(q))$ в $S(X, O(2q))$. Если λ есть $U(q)$-расслоение над X, то $\rho(\lambda)$ есть $O(2q)$-расслоение над X, а $\varphi(\rho(\lambda))$ есть $U(2q)$-расслоение над X. При этом элемент $A \in U(q)$ отображениями $U(q) \to O(2q) \to U(2q)$ переводится в элемент $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix}$. Следовательно, $\varphi(\rho(\lambda))$ является суммой Уитни расслоений λ и λ^*. Отсюда получаем соотношение

$$\sum_j (-1)^j p_j(\rho(\lambda)) = c(\varphi\rho(\lambda)) = c(\lambda)c(\lambda^*) = \Big[\sum_j c_j(\lambda)\Big]\Big[\sum_j (-1)^j c_j(\lambda)\Big] \quad (34.4)$$

между классами Чженя $U(q)$-расслоения λ и классами Понтрягина $O(2q)$-расслоения $\rho(\lambda)$.

КЛАССАМИ ПОНТРЯГИНА $p_i(X)$ ВЕЩЕСТВЕННОГО МНОГООБРАЗИЯ X называются классы Понтрягина касательного расслоения $T(X)$.

Пусть $\dim X = n = 2m$ - четна, а X - ориентируемо и обладает почти комплексной структурой. Следствием последнего является редукция структурной группы $GL^+(2m,\mathbb{R})$ расслоения $T(X)$ к образу вложения группы $GL(m,\mathbb{C})$ в $GL^+(2m,\mathbb{R})$, т.е. касательное расслоение $T(X)$ имеет структуру некоторого $GL(m,\mathbb{C})$ -расслоения. КЛАССАМИ ЧЖЕНЯ ВЕЩЕСТВЕННОГО МНОГООБРАЗИЯ X называются классы Чженя расслоения $T(X)$ как $GL(m,\mathbb{C})$ -расслоения, т.е. $c_i(X) = c_i(\rho T(X))$. Отсюда, используя соотношение (34.4), определяем связь между классами Понтрягина и классами Чженя почти комплексного многообразия X :

$$\sum_j (-1)^j p_j(X) = \sum_i c_i(X) \cdot \sum_j (-1)^j c_j(X). \quad (34.5)$$

В частности,

$$p_1 = c_1^2 - 2c_2, \quad p_2 = c_2^2 - 2c_1c_3 + 2c_4, \quad (34.6)$$

или, используя принцип расщепления,

$$p_1 = \sum_i x_i^2, \quad p_2 = \sum_{i<j} x_i^2 x_j^2.$$

Если структурная группа $O(k)$-расслоения λ редуцирована к группе $SO(k)$, а это имеет место, когда расслоение λ ориентируемо, для такого расслоения может быть определен КЛАСС ЭЙЛЕРА. Он задается посредством следующего характеристического полинома $e(A)$.

Пусть A - вещественная антисимметричная ($k\times k$)-матрица из алгебры Ли $o(k)$. Введем формальное k-мерное пространство E с координатами $z^1, \ldots, z^k$. Построим форму $\bar{A} = \frac{1}{2}A_{ij}dz^i \wedge dz^j$ и определим полином $e(A)$ как $e(A)=0$, если k - нечетно, и

$$\frac{1}{q!}\left(\frac{\bar{A}}{2\pi}\right)^q = e(A)\, dz^1 \wedge \ldots \wedge dz^k,$$

когда $k=2q$. Полином $e(A)$ является $SO(k)$-инвариантным, но он не инвариантен относительно общих линейных преобразований, поэтому в форму Эйлера $e(\Omega)$ следует подставлять только $so(k)$-значные формы кривизны Ω. Класс Эйлера $e(\lambda)$ для $SO(k)$-расслоения определяется как когомологический класс формы Эйлера $e(\Omega)$. Отметим, что при изменении ориентации класс Эйлера меняет знак.

Класс Эйлера $e(\lambda)$ для $SO(k)$-расслоения λ может быть построен аксиоматически как элемент группы $H^k(X, Z)$ и обладает следующими свойствами:

1) $2e(\lambda)=0$, если k – нечетно;
2) $e(f^*\lambda)=f^*e(\lambda)$;
3) $e(\lambda\oplus\lambda')=e(\lambda)e(\lambda')$;
4) $e(\lambda)=c_1(\lambda)$, если $k=2$.

Последнее свойство связано с изоморфизмом $SO(2)$ и $U(1)$.

Установим теперь связь класса Эйлера с классами Понтрягина и Чженя.

Пусть η – $U(q)$-расслоение над X. Вложение $U(q)\subset SO(2q)$ определяет $SO(2q)$-расслоение $\rho(\lambda)$ над X. Тогда, применяя принцип расщепления, получаем

$$\begin{aligned} e(\rho(\eta)) &= e(\rho(L_1)\oplus\ldots\oplus\rho(L_q)) = e(\rho(L_1))\times\cdots\times e(\rho(L_q)) = \\ &= c_1(L_1)\times\cdots\times c_1(L_q) = x_1\times\cdots\times x_q = c_q(\eta). \end{aligned} \tag{34.7}$$

В свою очередь, из (34.4) следует, что $p_q(\rho(\eta))=c^2_q(\eta)$, и таким образом для всякого $SO(2q)$-расслоения λ

$$e(\lambda)=[p_q(\lambda)]^{1/2}. \tag{34.8}$$

<u>Пример 2</u>. Определим форму Эйлера для касательного расслоения $T(X4)$, выбирая в качестве формы кривизны Ω кривизну R некоторой римановой метрики на X. Воспользуемся соотношением (34.8), найдя p_2 из разложения

$$\mathrm{Det}\left(I-\frac{1}{2\pi}R\right)=1+p_1+p_2=1-\frac{1}{8\pi^2}\mathrm{Tr}\, R\wedge R+\frac{1}{1024\pi^4}\left(\varepsilon_{abcd}R^{ab}\wedge R^{cd}\right)^2.$$

Откуда

$$e(R)=\frac{1}{32\pi^2}\varepsilon_{abcd}R^{ab}\wedge R^{cd}.$$

ТЕОРЕМА ГАУССА - БОННЕ. Если X - замкнутое четномерное ориентируемое многообразие, имеет место следующая связь класса Эйлера и эйлеровой характеристики многообразия X :

$$\chi(X)=\int_X e(T(M)). \tag{34.9}$$

Комплексным вариантом этой теоремы является соотношение (33.8).

КЛАССЫ ШТИФЕЛЯ - УИТНИ $\{W_i\}$ касательного расслоения над гладким многообразием X определяются как элементы групп когомологий $H^*(X,\mathbb{Z}_2)$: $W_i\in H^i(X,\mathbb{Z}_2)$, $i=0,\dots,n$; $W_0=1$. Класс $W_1=0$ тогда и только тогда, когда X ориентируемо, а если X является почти комплексным, то W_{2i} совпадает с редукцией по модулю 2 классов $C_i(X)$ и $W_{2i+1}=0$. В отличие от ранее рассмотренных классов, классы Штифеля - Уитни не могут быть представлены как когомологические классы каких-либо характеристических форм.

§35. K-теория

Рассмотренные выше характеристические классы позволяют описать классы ассоциированных расслоений с данной структурной группой над данным многообразием, или в применении к векторным расслоениям - классы эквивалентности векторных расслоений данной размерности над данным многообразием.

Рассмотрим теперь множество $\Phi(X)$ всех классов эквивалентности векторных расслоений над данным пространством X . Сделать это позволяет алгебраический прием, который предложен А.Гротендиком и который состоит в замене моноида $\Phi(X)$ (относительно суммы Уитни) некоторой абелевой группой - группой Гротендика, что позволяет изучать свойства векторных расслоений с помощью уже хорошо разработанных методов теории гомологий.

Множество $E(X)$ векторных расслоений над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ с данной базой X образует коммутативный моноид относительно операции суммы Уитни векторных расслоений с нулевым элементом $I^0(X,Id\,X,X)$. Операции $\oplus$ мешает быть групповой то, что она не гарантирует существование обратного элемента, или, иначе говоря, не определена операция $\ominus$.

Структура коммутативного моноида относительно операции $\oplus$ переносится и на множество $\Phi(X)$ классов эквивалентности векторных расслоений над X, поскольку очевидно, что $S(E)\oplus\oplus S(E')=S(E+E')$ для всех $E, E'\in E(X)$.

Рассмотрим теперь формальную конструкцию, которая позволяет по данному коммутативному моноиду построить некоторую абелеву группу. Пусть A - коммутативный моноид. Возьмем произведение $A\times A$ и построим фактормоноид по следующему отношению эквивалентности: $(a,b)\sim(a',b')$, если существует такой элемент $p\in A$, что

$$a+b'+p=b+a'+p. \qquad (35.1)$$

Этот фактормоноид $K(A)$ является группой. Определен гомоморфизм $k: A\to K(A)$, который элементу $a\in A$ сопоставляет класс пары $(a,0)$, а обратным элементом $(-k(a))$ к $k(a)$ является класс пары $(0,a)$. Отсюда, в частности, следует, что всякий элемент из группы $K(A)$ может быть представлен как разность некоторых элементов из образа A в $K(A)$. Действительно, $K(A)\ni cl(a,b)=k(a)-k(b)$. Группа $K(A)$ называется ГРУППОЙ ГРОТЕНДИКА МОНОИДА A.

<u>Упражнение I</u>. Показать, что $k(a)=k(b)$ тогда и только тогда, когда существует элемент $p\in A$, такой, что $a+p=$ $=b+p$.

<u>Пример I</u>. $A=N$, $K(A)=Z$.

<u>Пример 2</u>. $A=N\cup\{\infty\}$, где ∞ - такой элемент, что $n+\infty=\infty$ для всех $n\in N$. Тогда $K(A)=0$, поскольку каждый элемент из $K(A)$ можно представить в виде $k(m)-k(n)=k(m)+$ $+k(\infty)-k(n)-k(\infty)=k(\infty)-k(\infty)=0$.

Построим теперь группу Гротендика $K(X)$ для моноида $\Phi(X)$ классов эквивалентности векторных расслоений над компактным пространством X. Будем обозначать класс объекта из $E(X)$ в $K(X)$ как $[E]$. Тогда, как следует из Упр.I, $[E]=[E']$ в том и только том случае, если в $E(X)$ существует такой объект F, что $E\oplus F\approx E'\oplus F$. Найти такие объекты в $E(X)$ позволяет следующая теорема.

<u>Теорема</u>. Пусть E - векторное расслоение над компактной базой X. Тогда существует такое расслоение E', что расслоение $E\oplus E'$ тривиально.

Следствием этой теоремы, как можно показать, является то, что $[E]=[E']$ в $K(X)$ в том и только том случае, когда $E\oplus I^n\approx F\oplus I^n$, где I^n обозначает n-мерное тривиальное векторное расслоение над X. Отсюда, в частности, вытекает, что в один и тот же класс $[\ ]$ входят векторные расслоения обязательно одинаковой размерности. Однако эти расслоения не обязательно изоморфны. Иллюстрацией этому служит следующий пример.

Пример 3. Пусть E - касательное расслоение сферы S^2. Можно показать, что $T(S^2)\oplus E^1 \approx I^3 \approx I^2 \oplus I^1$. Следовательно, $[T(S^2)]=[I^2]$ в $K(S^2)$, хотя расслоение $T(S^2)$ нетривиально.

Таким образом, отображение $k: S(X)\to K(X)$, вообще говоря, не есть инъекция, но является таковой на классах расслоений размерности $n>\dim X$ для вещественных векторных расслоений и $n>\frac{1}{2}\dim X$ для комплексных расслоений ($\dim X$ - вещественная размерность X).

Из моноида $S(X)$, помимо группы $K(X)$, можно построить другую группу $\widetilde{K}(X)$, получаемую факторизацией $S(X)$ по следующему отношению эквивалентности: $[\widetilde{E}]=[\widetilde{E}']$ тогда и только тогда, когда существуют такие n и p, что $E\oplus I^n \approx E'\oplus I^p$. В частности, все тривиальные расслоения I^n принадлежат нулевому классу из группы $\widetilde{K}(X)$. Расслоения, принадлежащие одному и тому же классу $[\ ]$, называются СТАБИЛЬНО ЭКВИВАЛЕНТНЫМИ. Имеет место изоморфизм $K(X)\approx \mathbb{Z}\oplus \widetilde{K}(X)$.

Пример 4. X - точка; $K(X)\approx\mathbb{Z}$, $\widetilde{K}(X)=0$.

Теорема. Пусть X, Y - компактные пространства и f, f': $X\to Y$ - гомотопные отображения. Тогда f и f' индуцируют одинаковые гомоморфизмы $K(Y)\to K(X)$ и $\widetilde{K}(Y)\to\widetilde{K}(X)$.

Будем в дальнейшем различать группы $K(X)$, $\widetilde{K}(X)$ комплексных и вещественных расслоений, обозначая их соответственно $K_{\mathbb{C}}(X)$, $\widetilde{K}_{\mathbb{C}}(X)$ и $K_{\mathbb{R}}(X)$, $\widetilde{K}_{\mathbb{R}}(X)$.

Установим теперь связь этих групп с группами когомологий пространства X. Она осуществляется характером Чженя

$$ch: K_{\mathbb{C}}(X)\longrightarrow \bigoplus_{i=0}^{\infty} H^{2i}(X,\mathbb{Q}), \tag{35.2}$$

который удовлетворяет условиям

$$ch(E\oplus E')=ch(E)+ch(E'),$$

$$ch([E]-[E'])=ch(E)-ch(E').$$

Теорема. Для любого компактного пространства X гомоморфизм (35.2) индуцирует изоморфизмы Чженя

$$\tilde{K}_{\mathbb{C}}(X)\otimes\mathbb{Q}\approx\bigoplus_{i>0}H^{2i}(X,\mathbb{Q}),$$
$$\tilde{K}_{\mathbb{R}}(X)\otimes\mathbb{Q}\approx\bigoplus_{i>0}H^{4i}(X,\mathbb{Q}).$$

Другими словами, если X имеет нетривиальные честные когомологии, тогда X допускает нетривиальные векторные расслоения.

Пример 5. $X=S^2$. Поскольку $H^4(S^2,\mathbb{Q})=0$, все вещественные векторные расслоения на S^2 стабильно тривиальны.

Пример 6. $X=S^4$. Поскольку $H^4(S^4,\mathbb{Q})=\mathbb{Q}$, сфера S^4 допускает нетривиальные вещественные расслоения, параметризуемые классом Понтрягина p_1.

Отметим, что гомоморфизм (35.2) позволяет определить $K_{\mathbb{C}}(X)$ только по модулю кручения. Если четные группы когомологий пространства X кручения не содержат, то $K_{\mathbb{C}}(X)$ может быть отождествлена с $\bigoplus_{i=0}H^{2i}(X,\mathbb{Z})$

Пример 7.
$$K_{\mathbb{C}}(S^n)=\begin{cases}\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} & \text{для четного } n,\\ \mathbb{Z} & \text{для нечетного } n.\end{cases}$$

§36. Теорема об индексе

Теорема об индексе позволяет установить связь между аналитическими свойствами эллиптических дифференциальных операторов на расслоениях и топологическими свойствами самих этих расслоений.

Пусть $x_1,\dots,x_n$ - координаты в $\mathbb{R}^n$. Для всякой последовательности $t=(t_1,\dots,t_n)$ целых неотрицательных чисел положим

$$|t|=t_1+\dots+t_n,$$
$$D^t=(-i)^{|t|}\frac{\partial^{|t|}}{\partial x_1^{t_1}\dots\partial x_n^{t_n}}.$$

Пусть A и B - конечномерные комплексные векторные пространства и U - открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Пусть $C^\infty(U,A)$ - пространство гладких (т.е. бесконечно дифференцируемых) функций из U в A.

Линейное отображение

$$D: C^\infty(U,A)\longrightarrow C^\infty(U,B)$$

называется ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ порядка r , если существуют матричные функции $a_t \in C^\infty(U, Hom(A,B))$, такие, что

$$\mathcal{D} = \sum_{|t|\le r} a_t \mathcal{D}^t. \tag{36.1}$$

Оператор $\tilde{\mathcal{D}} = \sum_{|t|=r} a_t \mathcal{D}^t$ будет называться ГЛАВНОЙ ЧАСТЬЮ оператора $\mathcal{D}$.

Пример 1. Линейный дифференциальный оператор первого порядка записывается в виде

$$\mathcal{D} = \sum_{i=1}^{n} (-i) a_i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} + b(x). \tag{36.2}$$

Дифференциальный оператор $\mathcal{D}$ порядка r определяет гомоморфизм $\sigma(\mathcal{D})(x,y): A \to B$ для всех $(x,y) = (x; y_1, \ldots, y_n) \in U \times \mathbb{R}^n$ по формуле

$$\sigma(\mathcal{D})(x,y) = \sum_{|t|=r} a_t(x) y_1^{t_1} \times \cdots \times y_n^{t_n}. \tag{36.3}$$

Оператор $\mathcal{D}$ называется ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ порядка r , если для всех $x \in U$ и всех ненулевых $v \in \mathbb{R}^n$ гомоморфизм $\sigma(\mathcal{D})(x,v)$ обратим. Гомоморфизм $\sigma(\mathcal{D})$ называется СИМВОЛОМ оператора $\mathcal{D}$.

Упражнение 1. Убедиться, что оператор Лапласа Δ : $C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ является эллиптическим оператором порядка 2.

Упражнение 2. Показать, что символ $\sigma(\mathcal{D})$ оператора $\mathcal{D}$ является образом Фурье его главной части

$$\hat{\mathcal{D}} f(x) = \int \sigma(\mathcal{D})(x,k) f(k) e^{ikx} dk.$$

Теперь пусть X - гладкое n-мерное многообразие без границы и E, F - гладкие комплексные векторные расслоения над X , а $\Gamma(E)$, $\Gamma(F)$ - соответствующие векторные пространства их глобальных гладких сечений. Линейное отображение $\mathcal{D}: \Gamma(E) \to \Gamma(F)$ называется дифференциальным оператором порядка r , если существуют такие атласы Ψ_E , Ψ_F расслоений E и F на одном и том же покрытии X , что $\mathcal{D}$ представляется операторами (36.1) в атласах Ψ_E и Ψ_F .

Пусть $\mathcal{D}(X)$ и $S(X)$ - расслоения на n-мерные шары и ($n-1$)-мерные сферы, ассоциированные с касательным расслоением $T(X)$, и $\pi: t\ell\mathcal{D}(X) \to X$ - проекция. Рассмотрим индуцированное расслоение $\pi^* E$. Определим символ для $\mathcal{D}$ как послойный гомоморфизм $\sigma(\mathcal{D}):\pi^*E\to\pi^*E$, представляемый в виде

$$\sigma(\mathcal{D}):(y,V_E)\to(v,\sigma(\mathcal{D})(\pi(y),y)V_E), \qquad (36.4)$$

где $y\in t\ell\mathcal{D}(X)$, V_E - типичный слой расслоения E, а $\sigma(\mathcal{D})(x=\pi(y),y)$ задается формулой (36.3). Можно показать, что такой гомоморфизм расслоений корректно определен.

Если E, F, G - комплексные векторные расслоения над X и $\mathcal{D}_1:\Gamma(E)\to\Gamma(F)$, $\mathcal{D}_2:\Gamma(F)\to\Gamma(G)$ - дифференциальные операторы порядков r_1 и r_2 , то $\mathcal{D}_2\mathcal{D}_1$ будет дифференциальным оператором порядка r_1+r_2 и $\sigma(\mathcal{D}_2\mathcal{D}_1)=\sigma(\mathcal{D}_2)\sigma(\mathcal{D}_1)$.

Дифференциальный оператор $\mathcal{D}$ называется эллиптическим порядка r , если символ $\sigma(\mathcal{D})\downarrow S(X)$ - изоморфизм.

Отсюда, в частности, следует, что если $\mathcal{D}$ эллиптичен, то E и F имеют одинаковую размерность слоя.

Предположим теперь, что X компактно и расслоения E и F снабжены эрмитовыми метриками $(\ ,\ )$, а следовательно, определены эрмитовы метрики $\langle\,|\,\rangle=\int_X(\ ,\ )$ на $\Gamma(E)$ и $\Gamma(F)$. Дифференциальный оператор $\mathcal{D}^*:F(F)\to\Gamma(F)$ называется СОПРЯЖЕННЫМ к $\mathcal{D}$, если для всех $s\in\Gamma(E)$, $t\in\Gamma(F)$

$$\langle\mathcal{D}s|t\rangle=\langle s|\mathcal{D}^*t\rangle.$$

Эрмитовы метрики на E и F определяют эрмитовы метрики на π^*E , π^*F ; следовательно, определен гомоморфизм, сопряженный к символу $\sigma(\mathcal{D})^*:\pi^*F\to\pi^*E$.

<u>Теорема</u>. Пусть X компактно и E , F снабжены эрмитовыми метриками. Тогда для $\mathcal{D}$ существует и единствен сопряженный оператор $\mathcal{D}^*$, и $\sigma(\mathcal{D}^*)=\sigma(\mathcal{D})^*$.

Если $\mathcal{D}$ эллиптичен, то $\mathcal{D}^*$ тоже эллиптичен; ядро $\mathrm{Ker}\,\mathcal{D}$ конечномерно и $\dim\mathrm{Ker}\,\mathcal{D}^*=\dim\mathrm{Coker}\,\mathcal{D}$ (коядро гомоморфизма $\varphi:A\to B$ называется $\mathrm{Coker}\,\varphi=B/\mathrm{Im}\,\varphi$).

ИНДЕКС $\tau(\mathcal{D})$ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА $\mathcal{D}$ определяется как

$$\tau(\mathcal{D})=\dim\mathrm{Ker}\,\mathcal{D}-\dim\mathrm{Coker}\,\mathcal{D}=\dim\mathrm{Ker}\,\mathcal{D}-\dim\mathrm{Ker}\,\mathcal{D}^*. \qquad (36.5)$$

Теорема об индексе устанавливает, что $\tau(\mathcal{D})$ может быть выражен через топологические инварианты.

Рассмотрим теперь конечную последовательность $\{E_p;\mathcal{D}_p,\mathcal{D}_p^*\}$ векторных расслоений E_p над компактным многообразием X, дифференциальных операторов $\mathcal{D}_p:\Gamma(E_p)\to\Gamma(E_{p+1})$ и их сопряженных $\mathcal{D}_p^*:\Gamma(E_{p+1})\to\Gamma(E_p)$. Предположим, что

$\mathcal{D}_{p+1}\mathcal{D}_p=0$. Тогда $\{\Gamma(E_p),\mathcal{D}_p,\mathcal{D}_p^*\}$ образует комплекс, который мы обобзначим $(E,\mathcal{D})$.

Упражнение 3. Показать, что если $\mathcal{D}_{p+1}\mathcal{D}_p=0$, то и $\mathcal{D}^*_p\mathcal{D}^*_{p+1}=0$.

Определим оператор Лапласа $\Delta_p=\mathcal{D}_p^*\mathcal{D}_p+\mathcal{D}_{p-1}\mathcal{D}^*_{p-1}$. Комплекс $\{E_p,\mathcal{D}_p,\mathcal{D}_p^*\}$ называется ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ КОМПЛЕКСОМ, если все операторы $\Delta_p:\Gamma(E_p)\to\Gamma(E_p)$ эллиптические.

Пример 2. Комплекс де Рама внешних дифференциальных форм на X с операторами $\mathcal{D}_p=d$ и $\mathcal{D}_p^*=\delta=(-1)^{np+1}*d*$ и лапласианом $\Delta=d\delta+\delta d$ образует эллиптический комплекс.

Для эллиптического комплекса на компактном многообразии имеет место обобщение ТЕОРЕМЫ ХОДЖА. Если $f_p\in\Gamma(E_p)$, тогда f_p может быть однозначно представлена как сумма

$$f_p=\mathcal{D}_{p-1}f_{p-1}+\mathcal{D}_p^*f_{p+1}+h_p. \qquad (36.6)$$

Упражнение 4. Доказать, что сечение f_p является гармоническим тогда и только тогда, когда $\mathcal{D}_p f_p=0$ и $\mathcal{D}^*_{p-1}f_p=0$.

Построим группы когомологий $H^*(E,\mathcal{D})$ комплекса $(E,\mathcal{D})$.

Упражнение 5. Используя теорему Ходжи, показать, что для эллиптического комплекса группа $H^p(E,\mathcal{D})$ изоморфна $\operatorname{Ker}\Delta_p$, т.е. что всякий класс когомологий замкнутых сечений f_p содержит одно и только одно гармоническое сечение E_p.

Из Упр.5 следует, что группы $H^p(E,\mathcal{D})$ эллиптического комплекса конечномерны.

Определим ИНДЕКС КОМПЛЕКСА $(E,\mathcal{D})$ как

$$\tau(E,\mathcal{D})=\sum_p(-1)^p\dim H^p(E,\mathcal{D}), \qquad (36.7)$$

если сумма конечна. Это имеет место в случае эллиптического комплекса и

$$\tau(E,\mathcal{D})=\sum_p(-1)^p\dim\operatorname{Ker}\Delta_p. \qquad (36.8)$$

Пример 3. $(E,\mathcal{D})=(\Omega,d)$ - комплекс де Рама. Согласно Упр.I этот комплекс эллиптический и

$$H^p(\Omega,d)=H^p(X)=H^p(X,\mathbb{R}).$$

Тогда индекс этого комплекса совпадает с эйлеровой характеристикой многообразия X:

$$\tau(\Omega,d)=\sum_p(-1)^p\dim H(X,\mathbb{R})=\sum_p(-1)^p b_p=\chi(X).$$

Пример 4. Пусть $\mathcal{D}:\Gamma(E)\to\Gamma(F)$ эллиптический оператор. Индекс оператора $\mathcal{D}$ можно определить как индекс следующего 2-членного комплекса

$$0\to\Gamma(E)\xrightarrow{\mathcal{D}}\Gamma(F)\to 0. \tag{36.9}$$

Лапласианами этого комплекса по определению являются $\Delta_0 = \mathcal{D}^*\mathcal{D}$, $\Delta_1=\mathcal{D}\mathcal{D}^*$, а его группами когомологий - группы $H_0 = Ker\mathcal{D}$, $H^1=Coker\mathcal{D}$. Комплекс (36.9) эллиптический, и его индекс равен

$$\tau=dim\,Ker\mathcal{D}-dim\,Coker\mathcal{D},$$

что совпадает с выражением (36.5) для индекса оператора $\mathcal{D}$.

Можно построить аналогичный 2-членный комплекс, индекс которого будет совпадать с индексом комплекса $(E,\mathcal{D})$. Пусть

$$\widehat{E}=\bigoplus_p E_{2p},\quad \widehat{F}=\bigoplus_p E_{2p+1},$$

$$\widehat{\mathcal{D}}=\bigoplus_p(\mathcal{D}_{2p}+\mathcal{D}^*_{2p-1}),\ \widehat{\mathcal{D}}^*=\bigoplus_p(\mathcal{D}^*_{2p}+\mathcal{D}_{2p-1}).$$

Легко проверить, что $\widehat{\mathcal{D}}:\Gamma(\widehat{E})\to\Gamma(\widehat{F}),\widehat{\mathcal{D}}^*:\Gamma(\widehat{F})\to\Gamma(\widehat{E})$, и последовательность

$$0\to\widehat{E}\xrightarrow{\widehat{\mathcal{D}}}\widehat{F}\to 0 \tag{36.10}$$

образует комплекс. Его лапласианами являются эллиптические операторы

$$\Box_0=\widehat{\mathcal{D}}^*\widehat{\mathcal{D}}=\bigoplus_p\Delta_{2p},\ \Box_1=\widehat{\mathcal{D}}\widehat{\mathcal{D}}^*=\bigoplus_p\Delta_{2p+1}.$$

Следовательно, комплекс (36.10) эллиптичен и его индекс равен

$$\tau=dim\,Ker\,\Box_0-dim\,Ker\,\Box_1=$$
$$=\sum_p(-1)^p dim\,Ker\,\Delta_p=\tau(E,\mathcal{D}).$$

Пример 5. $(E,\mathcal{D})=(\Omega,d)$ - комплекс де Рама, $\mathcal{D}=\widehat{\mathcal{D}}^*= d+\delta$, $\Box_0=\Box_1=\Delta=(\delta+d)^2=\delta d+d\delta$.

Упражнение 6. Показать, что оператор $\widehat{\mathcal{D}}$ комплекса (36.10) эллиптический.

Перейдем теперь непосредственно к теореме об индексе для комплексов (36.9), (36.10).

Возьмем два экземпляра расслоений: $\mathcal{D}_1(X)$, $\mathcal{D}_2(X)$, и склеим их в каждой точке $x\in X$ по сферам S^{n-1} - границам шаров $\mathcal{D}^n$. Полученное расслоение на сферы S^n называется

КОМПАКТИФИЦИРОВАННЫМ КАСАТЕЛЬНЫМ РАССЛОЕНИЕМ $\Psi(X)$ над X и его ориентация выбирается как у $\mathcal{D}_1(X)$. Пусть $\varrho : \Psi(X) \to X$ - проекция и ϱ_1, ϱ_2 - ограничения ϱ на $\mathcal{D}_1(X)$, $\mathcal{D}_2(X)$. Рассмотрим индуцированные расслоения $\varrho_1^* E$, $\varrho_2^* F$ и склеим их тоже в каждой точке $x \in X$ по границе дисков $\mathcal{D}_1(X), \mathcal{D}_2(X)$, используя в качестве функции перехода изоморфизм $\sigma(\mathcal{D}) \downarrow S(X)$. Полученное расслоение называется РАЗНОСТНЫМ РАССЛОЕНИЕМ.

ТЕОРЕМА АТЬЯ - ЗИНГЕРА ОБ ИНДЕКСЕ устанавливает, что

$$\tau = \int\limits_{t\ell\Psi(X)} ch(\Sigma(A)) \wedge \varrho^* t\ell(T(X)), \tag{36.11}$$

где слева в этом равенстве стоит индекс оператора $\mathcal{D}$, а справа - выражение для ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ИНДЕКСА оператора $\gamma(\mathcal{D})$. Таким образом, теорема об индексе доказывает равенство индекса и топологического индекса эллиптического дифференциального оператора.

<u>Следствия</u>. $\gamma(\mathcal{D})$ - целое число; $\tau(\mathcal{D}) = \gamma(\mathcal{D}) = 0$, если X - нечетномерно.

Если X имеет размерность $2m$ и ориентируемо, то равенство (36.11) можно переписать в виде

$$\tau(\mathcal{D}) = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} \int\limits_X ch(E \ominus F) \frac{td(X)}{e(X)}. \tag{36.12}$$

Если комплекс (36.10) образован из комплекса $(E, \mathcal{D})$, из (36.12) получаем выражение для индекса последнего

$$\tau(E, \mathcal{D}) = (-1)^{\frac{m(m+1)}{2}} \int\limits_X \sum_p (-1)^p ch(E_p) \frac{td(X)}{e(X)}.$$

В Прим.3 было показано, что индексом комплекса де Рама является эйлерова характеристика многообразия X. Приведем еще примеры применения теоремы об индексе для описания топологической сигнатуры многообразия и спинорного комплекса. Будем считать, что X - четномерное ориентируемое многообразие.

Пусть $\dim X = n = 2m$ и θ и φ - элементы когомологической группы $H^m(X)$. Тогда определено внутреннее произведение

$$\sigma(\theta, \varphi) = \int\limits_X \theta \wedge \varphi. \tag{36.13}$$

В силу двойственности Пуанкаре эта квадратичная форма невырождена, симметрична, если m - четно, и антисимметрична, если m - нечетно. ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ СИГНАТУРА $Sgn(X)$ МНОГООБРАЗИЯ X определяется как сигнатура формы (36.13). Очевидно, что $Sgn(X=0)$, если m - нечетно.

Вычислим $Sgn(X)$ как индекс эллиптического комплекса. Определим оператор ω , действующий на p-формы как $i^{p(p-1)+n/2}*$. Можно проверить, что $\omega(d+\delta)=-(d+\delta)\omega$, $\omega^2=1$. Обозначим через $\Omega^{\pm}$ пространства $2k$ -форм с собственными значениями ± 1 относительно ω. Так как ω антикоммутирует с $\mathcal{D}=d+\delta$, мы можем определить эллиптический комплекс

$$d+\delta:\Omega^{+}\longrightarrow\Omega^{-}, \qquad (36.14)$$

индекс которого равен

$$\tau(\Omega^{\pm}, d+\delta)=\dim \operatorname{Ker}\Delta\downarrow\Omega^{+}-\dim\operatorname{Ker}\Delta\downarrow\mathcal{D}^{-}=$$
$$=\dim H^{2k}_{+}(X)-\dim H^{2k}_{-}(X),$$

где $H^{2k}_{\pm}(X)$ обозначают пространства гармонических $2k$-форм, имеющих собственные значения ± 1 относительно ω. Применяя теперь теорему об индексе, получим выражение для сигнатуры

$$Sgn(X)=\int_X L(X)$$

через ПОЛИНОМ ХИРЦЕБРУХА

$$L(X)=\prod_j \frac{x_j}{\tanh x_j}=1+\frac{1}{3}p_1+\frac{1}{45}(7p_2-p_1^2)+\dots .$$

<u>Пример 6</u>. Если $\dim X=2$, $Sgn(X)=0$; если $\dim X=4$,

$$Sgn(X)=\frac{1}{3}\int_X p_1(T(X))=-\frac{1}{24\pi^2}\int_X \operatorname{Tr}(R\wedge R).$$

Рассмотрим теперь комплекс (36.14), когда формы на X принимают значения в слоях некоторого векторного расслоения V. Тогда оператор $d+\delta$ можно обобщить до оператора

$$(d+\delta)_V:\Omega^{+}_{V}\longrightarrow\Omega^{-}_{V},$$

и теорема об индексе в применении к комплексу $(\Omega^{\pm}_{V},(d+\delta)_V)$ дает

$$\tau(\Omega^{\pm}_{V},(d+\delta)_V)=\int_X L(X)\,\widehat{ch}(V),$$

где $\widehat{ch}$ обозначает характер Чженя, но взятый не от Ω , а от 2Ω , где Ω - форма кривизны на V , т.е.

$$\widehat{ch}(V)=\sum_k\left(\frac{i}{2\pi}\right)^k\frac{2^k}{k!}\operatorname{Tr}(\Omega^k).$$

В частности, получаем

$$n=2, \quad \tau=\int_X 2c_1(V)=\frac{i}{\pi}\int_X Tr\,\Omega,$$

$$n=4, \quad \tau=\frac{1}{3}\dim V\int_X p_1+\int_X(2c_1^2(V)-4c_2(V))=$$

$$=-\frac{\dim V}{24\pi^2}\int_X Tr\,R\wedge R-\frac{1}{2\pi^2}\int_X Tr\,\Omega\wedge\Omega,$$

что существенно отличается от значений $Sgn(X)$ в Прим.6.

Заметим, что если построить комплекс де Рама для форм Ω_V^*, то его индекс будет равен $\dim V\cdot\chi(X)$, т.е. оказывается мало чувствительным к изменению пространства значений форм Ω_V.

Пусть теперь E - расслоение на дираковские спиноры. Определим оператор

$$D=\gamma^\alpha h_\alpha^\mu D_\mu=\gamma^\alpha h^\mu{}_\alpha(\partial_\mu+A_\mu)=\gamma^\alpha h^\mu{}_\alpha(\partial_\mu+A_\mu^{ab}I_{ab}),$$

где γ - матрицы Дирака, удовлетворяющие тождеству

$$\gamma^a\gamma^b+\gamma^b\gamma^a=-2\delta^{ab},$$

h_α^μ - тетрадные функции, $I_{ab}=\frac{1}{4}[\gamma_a,\gamma_b]$ - генераторы группы $SO(4)$ и A_μ - связность на E.

$$D^+D=DD^+=-g^{\mu\nu}D_\mu D_\nu+R^{abcd}I_{ab}I_{cd}=-g^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\ldots \tag{36.15}$$

Поскольку $g^{\mu\nu}$ - риманова метрика, оператор (36.15) эллиптический. Образуем комплекс

$$\Gamma_+(E)\xrightarrow{D}\Gamma_-(E), \tag{36.16}$$

где $\Gamma_\pm(E)$ - сечения E, имеющие собственные значения ± 1 относительно оператора γ_5. Индексом спинорного комплекса (36.16) является

$$\tau=\dim Ker D-\dim Ker D^+=n_+-n_-,$$

где $n_\pm$ - число линейно независимых решений уравнения $D\psi=0$ со спиральностями $\pm 1/2$. Применяя теорему об индексе, получим

$$n_+-n_-=\int_X\hat{A}(X),$$

где

$$\hat{A} = \prod_{i=1}^{n/2} \frac{x_i/2}{\sinh(x_i/2)} = 1 - \frac{1}{24} p_1 + \frac{1}{5760}(7p_1^2 - 4p_2) + \ldots,$$

когда $\dim X = 4k = n$. Для $n = 4$ находим

$$n_+ - n_- = -\frac{1}{24} p_1 = \int_X p_1(T(X)) = \frac{1}{192\pi^2} \int_X \mathrm{Tr}(R \wedge R).$$

В случае, когда спиноры снабжены еще и внутренними индексами представления группы $SU(q)$, получаем

$$\tau = \int_X \hat{A}(X) \wedge ch(V),$$

где V – ассоциированное главное $SU(q)$-расслоение. В частности, для $q = 2$, находим

$$n_+ - n_- = \int_X c_1(V) = \frac{i}{2\pi} \int_X \mathrm{Tr}\,\Omega,$$

а для $q = 4$

$$n_+ - n_- = \frac{-\dim V}{2q} p_1 + \frac{1}{2} \int_X (c_1(V)^2 - 2c_2(V)). \qquad (36.17)$$

Например, если $X = S^4$ и $q = 2$, то, поскольку $\dim V = 2$, $p_1 = 0$ и $c_1 = 0$,

$$n_+ - n_- = -\int_X c_2(V) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_X \mathrm{Tr}(\Omega \wedge \Omega).$$

На этом мы закончим изложение основных элементов алгебраической топологии и перейдем к рассмотрению полевых моделей, где они применяются.

ГЛАВА УШ. ПОЛЕВЫЕ МОДЕЛИ С ТОПОЛОГИЧЕСКИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

§37. Солитоны

СОЛИТОН представляет собой самоподдерживающийся волновой пакет, способный распространяться без изменения формы и потерь энергии. Солитон образуется в результате баланса двух конкурирующих явлений, известных в физике волн: расплывания волнового пакета вследствие дисперсии (зависмости скорости распространения волны от ее длины) и сжатия пакета вследствие нелинейности. Солитоны были открыты в гидродинамике более I50 лет назад и в последнее десятилетие стали наиболее активно изучаемыми объектами в теоретической физике после того как выяснилось, что солитоны способны сохранять свою структуру в результате нелинейного взаимодействия друг с другом и что произвольный начальный волновой пакет распадается на определенное количество солитонов и слабый волновой фон. Кроме того, было показано, что солитонным решениям классических уравнений соответствуют частицеподобные объекты в квантовой теории. К настоящему времени разработана последовательная схема квантования солитонов, в существенном совпадающая с квазиклассическим методом, найдены приближенные выражения для масс солитонов, их связных состояний и амплитуд рассеяния. Солитонные решения являются сингулярными по константе связи и не могут быть получены с помощью теории возмущений. Они часто играют роль своеобразного нетривиального основного состояния ("голые" частицы), на котором строятся возбужденные состояния ("одетые" частицы).

Немалую роль в нахождении и классификации солитонных решений играют групповые и топологические методы. Их применение основано на том рассуждении, что поскольку основными характерными чертами солитонов являются их локализованность в пространстве и конечность энергии в сравнении с энергией вакуума, солитонные решения следует искать среди полей, которые на бесконечности стремятся к вакуумным значениям. Формализуем это условие.

Пусть Λ - топологическое пространство вакуумов некоторой полевой модели в d-мерном пространстве-времени $X\times T$. Например, в модели со спонтанно нарушенной группой симметрий G, включающей подгруппу H точных симметрий, пространство вакуумов Λ гомеоморфно факторпространству G/H. Рассмотрим такое поле φ на X, что $\lim\limits_{r\to\infty}\varphi(r\vec{n})=\lambda(\vec{n})\in\Lambda$, где $\vec{r}=r\vec{n}$ - пространственный вектор. Оно задает отображение $\hat{\varphi}=\lim\limits_{r\to\infty}\varphi(S_r^{d-2})$ ($d-2$)-мерной сферы S^{d-2} в пространство Λ вакуумов модели. Однако такое задание не однозначно, поскольку одному и тому же полю могут отвечать различные пространственные волновые функции, различающиеся преобразованиями группы движений, взятые в различные моменты времени и определяющие тем самым различные отображения $\hat{\varphi}$. Чтобы избежать этой неоднозначности, рассмотрим гомотопический класс Φ отображений $\hat{\varphi}$, определяемых данным асимптотически вакуумным полем φ, и будем его называть ТОПОЛОГИЧЕСКИМ СОЛИТОНОМ.

Множество топологических солитонов модели совпадает с множеством $\pi(S^{d-2},\Lambda)=\pi_{d-2}(\Lambda)$, т.е. определяется только размерностью модели и гомотопическим типом пространства ее вакуумов. Поэтому, конечно, не всякому топологическому солитону Φ может отвечать какое-либо солитонное решение самой полевой модели. Однако знание спектра топологических солитонов позволяет определить множество гомотопически неэквивалентных классов возможных солитонных решений в модели данной пространственно-временной размерности и с данным пространством вакуумов. При этом солитонные решения, принадлежащие различным гомотопическим классам, могут различаться значениями зарядов $Q=\int\limits_X J^0 dx$ от некоторых сильно сохраняющихся (нетеровских) токов J^μ: $\partial_\mu J^\mu=0$, в силу чего значения этих зарядов определяются поведением полей φ на бесконечно удаленной пространственной сфере и являются для солитонных решений гомотопическими инвариантами. Такие заряды называются ТОПОЛОГИЧЕСКИМИ.

Приведем теперь примеры некоторых солитонных моделей.

Успехи, достигнутые в теории солитонов, в основном связаны с двумерными моделями теории поля. В четырехмерном случае существует ряд особенностей, затрудняющий поиск таких решений, и в настоящее время механизм получения солитонных решений в 4-мерном пространстве Минковского еще далек от своего завершения.

В двумерной полевой модели для скалярного поля можно построить сохраняющийся ненетеровский ток. Покажем это.

Пусть φ - скалярное поле, введем ток $J^\mu = \varepsilon^{\mu\nu}\partial_\nu \varphi$, где $\mu, \nu = 0, 1$; $\varepsilon^{\mu\nu} = -\varepsilon^{\nu\mu}$. Очевидно, что $\partial_\mu J^\mu = 0$, откуда получаем выражение для заряда

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} J_0\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x \varphi\, dx = \varphi(+\infty) - \varphi(-\infty). \qquad (37.1)$$

Если $\varphi(x \to +\infty) = \varphi(x \to -\infty)$, то $Q = 0$ и говорят, что поле φ принадлежит вакуумному сектору (например, $\varphi = const$). Однако если поле φ стремится на $\pm\infty$ к разным значениям, то заряд (37.1) отличен от 0 и такие решения рассматриваются как кандидаты в солитоны.

<u>МОДЕЛЬ КИНКОВ</u>

Лагранжиан модели скалярного поля в 2-мерном пространстве-времени выбирается в виде

$$L = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right] + \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 - \frac{1}{4}\lambda\varphi^4, \ (\mu^2 > 0 < \lambda). \qquad (37.2)$$

Он инвариантен относительно группы Пуанкаре в (1+1)-пространстве Минковского и группы Z_2 отражений $\varphi \to -\varphi$. Уравнением поля будет

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial^2 t} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \mu^2\varphi - \lambda\varphi^3. \qquad (37.3)$$

Вакуумом в этой модели, минимизирующим функционал энергии

$$E(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + \frac{1}{4}\lambda\varphi^4\right], \qquad (37.4)$$

являются постоянные решения $\varphi = \pm\mu/\sqrt{\lambda}$ уравнения (37.3):

$$E\left(\varphi = \pm\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}\right) = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} dx\left(-\frac{1}{4}\frac{\mu^2}{\lambda}\right) = -\infty.$$

Таким образом, вакуум модели вырожден и образует 2-точечное пространство Λ. Отсюда, поскольку $\pi_0(\Lambda)$ состоит тоже из двух элементов, в модели могут существовать только два класса солитонов со следующим поведением на асимптотике: $\varphi(+\infty) = \varphi(-\infty)$ - вакуумный сектор, $\varphi(+\infty) \neq \varphi(-\infty)$ - солитонный сектор. Статическое решение уравнения (37.3), отвечающее солитонному сектору, имеет вид

$$\varphi_{kink}(x) = \pm\frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}\tanh\left[\frac{\mu}{\sqrt{2}}(x-x_0)\right]. \qquad (37.5)$$

Оно называется КИНКОВЫМ решением. Энергия этого решения относительно вакуума конечна:

$$E(\varphi_{kink}) - E(\varphi_{vac}) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{\mu^3}{\lambda} < +\infty.$$

Определим значение топологического заряда для кинка:

$$n = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\mu}Q = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\mu}\left(\varphi(+\infty) - \varphi(-\infty)\right) = 1.$$

Для вакуумного сектора, очевидно, $n=0$. Решение (37.5) представляет собой статический кинк. От него легко перейти к решению, зависящему от времени, с помощью лоренцевских преобразований $x \to (x-vt)/\sqrt{1-v^2/c^2}$, где V - скорость движения солитона.

Солитонные решения уравнения СИНУС-ГОРДОНА

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = -\sin\varphi, \qquad (37.6)$$

получившее название уравнения синус-Гордона и возникающее как уравнение поля в 2-мерной скалярной модели с лагранжианом

$$L = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right] + (\cos\varphi - 1). \qquad (37.7)$$

Этот лагранжиан инвариантен относительно преобразований поля

$$\varphi \to \varphi + 2\pi n, \quad \varphi \to -\varphi,$$

которые образуют группу $D_\infty = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$.

Трансляционно-инвариантным вакуумом модели являются постоянные решения $\varphi = 2\pi n$, $n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$. Пространство вакуума Λ гомеоморфно факторгруппе $D_\infty/\mathbb{Z}_2$, где $\mathbb{Z}_2$ - стабилизатор точки $\varphi=0$. Множество $\pi_0(D_\infty/\mathbb{Z}_2) = \pi_0(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, откуда уравнение (37.6) может иметь $\mathbb{Z}$ классов солитонных решений, параметризуемых значениями топологического заряда

$$n = \frac{1}{2\pi}\left(\varphi(+\infty) - \varphi(-\infty)\right).$$

В частности, для $n=1$ односолитонное статическое решение имеет вид

$$\varphi_{sol} = 4\,\mathrm{arctg}(\exp(x-x_0)), \qquad (37.8)$$

а для $n=-1$

$$\varphi_{asol} = -\varphi_{sol} = -4\,\mathrm{arctg}(\exp(x-x_0)). \qquad (37.9)$$

Решения (37.8) и (37.9) топологически неэквивалентны: они оба стремятся к 0 на $-\infty$, но различаются на $+\infty$. Можно считать, что они относятся друг к другу как солитон и антисолитон. В секторах с $|n|>1$ статических решений не существует, поскольку мультисолитонные решения не могут быть независимыми от времени. В частности, двусолитонное решение ($n=2$) имеет вид

$$\varphi_{s,s}(x,t) = 4\,\mathrm{arctg}\,\frac{\beta\,\mathrm{sh}(x/\sqrt{1-\beta^2})}{\mathrm{ch}(\beta t/\sqrt{1-\beta^2})},$$

где $\beta = v/c$ и v – скорость между солитонами.

Рассмотрим теперь солитоны в пространстве-времени с размерностью больше 2. Как отмечалось, в этих случаях, в сравнении с 2-мерными моделями, возникает целый ряд трудностей для их построения. Например, чисто скалярные модели уже не могут допускать солитонных решений. Это следует хотя бы из того, что кинетическая энергия в таких моделях принимает бесконечно большое значение:

$$E_T = \frac{1}{2}\int(\nabla\varphi)^2 dx > \lim_{R\to\infty}\int_{r_0}^{R} dr\, r^{d-4}\int(\theta\varphi)^2 d\Omega \propto$$

$$\propto \begin{cases} R^{d-3} & d\geq 4, \\ \ln R & d=3. \end{cases}$$

Хорошими кандидатами на наличие солитонных решений оказались калибровочные модели со спонтанным нарушением симметрий. При этом, однако, надо иметь в виду, что вакуум в таких моделях перестает быть трансляционно-инвариантным, а инвариантен относительно параллельных переносов, генераторами которых являются компенсирующие производные $D_\mu = \partial_\mu - A_\mu$, где A_μ – калибровочное поле. Правда, статичность вакуума можно сохранить, если фиксировать калибровку $A_0 = 0$.

Простейшим примером калибровочной модели, допускающей солитонные решения, является модель Нильсена – Олесена.

МОДЕЛЬ НИЛЬСЕНА - ОЛЕСЕНА

Это простейшая модель скалярной электродинамики в (2+I)-мерном пространстве-времени с лагранжианом

$$L=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+\frac{1}{2}|D_\mu\varphi|^2+\frac{1}{2}\mu^2|\varphi|^2-\frac{1}{4}\lambda(|\varphi|^2)^2, \qquad (37.10)$$

где $D_\mu=\partial_\mu-igA_\mu$, g - заряд, $\lambda>0<\mu^2$; (3+I)-мерным аналогом данной модели является хорошо известная модель сверхпроводимости Гинзбурга-Ландау.

Лагранжиан (37.I0) инвариантен относительно калибровочной группы $U(1)(X): \varphi(x)\to \exp[ig\alpha(x)]\varphi(x), A_\mu\to A_\mu+\partial_\mu\alpha(x)$.

Функционал энергии принимает минимальные значения на полях, удовлетворяющих следующим уравнениям:

$$F_{\mu\nu}=0, \quad D_\mu\varphi=0, \quad |\varphi|=\mu/\sqrt{\lambda}. \qquad (37.11)$$

Эти поля образуют вакуум модели. Он вырожден по группе $U(1)$, и пространство вакуума Λ гомеоморфно S^1 - групповому пространству $U(1)$. Отсюда, поскольку группа гомотопий $\pi_1(S^1)=Z$, в модели может быть Z топологически неэквивалентных классов солитонных решений.

Уравнения поля будут

$$\begin{aligned} D_\mu D^\mu\varphi &= -\mu^2\varphi+\lambda(\varphi^*\varphi)\varphi, \\ \partial^\nu F_{\mu\nu} &= \frac{i}{2}g(\varphi^* D_\mu\varphi-\varphi(D_\mu\varphi)^*). \end{aligned} \qquad (37.12)$$

Их необходимо дополнить граничными условиями и условием калибровки. Выберем калибровку, в которой $A_0=0$, а граничными условиями - вакуумную асимптотику на пространственной бесконечности. Введем полярные координаты (r , θ). Решение вакуумных уравнений (37.II) при больших r имеет вид

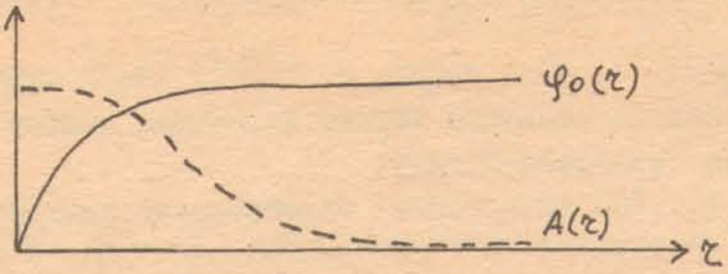
$$\varphi\to\mu/\sqrt{\lambda}\, e^{i\chi(\theta)}, \quad A_r\to 0, \quad A_\theta\to\frac{1}{gr}\frac{d\chi}{d\theta}, \qquad (37.13)$$

где $d\chi/d\theta$ - в точности якобиан отображения $S^1\to S^1$, так что для каждого гомотопического класса $n\in Z$ можно выбрать в качестве представителя $\chi(\theta)=n\theta$.

Выберем услсвия (37.I3) при n =I в качестве граничных условий для поиска односолитонного решения уравнений (37.I2). Решение будем искать в виде

$$\varphi(r,\theta)=\varphi_0(r)e^{i\theta}, \quad A_i=\varepsilon_{ij}x^j A(r).$$

Дифференциальные уравнения для $\varphi_0(r)$ и $A(r)$ точно не решаются, однако последовательными приближениями можно показать, что решения этих уравнений будут вести себя так, как показано на рисунке



а функционал энергии будет равен

$$E = 4\pi \frac{\mu^2}{\lambda} c_1\left(\frac{\lambda}{g}\right),$$

где $c_1(\lambda/g)$ – гладкая функция.

Мультисолитонные решения уравнений (37.I2) следует искать при граничном условии $\varphi = \mu/\sqrt{\lambda}\, e^{in\theta}$, и, если топологический ток выбрать в виде $J^{\mu} = \varepsilon^{\mu\nu\alpha} F_{\nu\alpha}$, они будут отличаться друг от друга значениями топологического заряда

$$Q = \int J_0 \, dx = 2\pi \frac{n}{g}.$$

В четырехмерных моделях классы солитонных решений описываются гомотопической группой $\pi_2(G/H)$, где G – группа спонтанно нарушенных симметрий, а H – ее подгруппа – стабилизатор вакуума. Из свойств группы $\pi_2(G/H)$ можно сделать некоторые общие выводы об условиях, которым должны удовлетворять группы G и H, чтобы в модели могли существовать солитонные решения ($\pi_2(G/H) \neq 0$). Для этого укажем, что если H – связная подгруппа топологической группы G, то $G \to G/H$ – расслоение Серра со слоем H. Для такого расслоения имеет место точная последовательность гомотопических групп (см.§32)

$$\ldots \to \pi_2(G) \to \pi_2(G/H) \to \pi_1(H) \to \pi_1(G) \to \ldots .$$

Если G – группа Ли, то $\pi_2(G)$ и гомоморфизм $\Delta : \pi_2(G/H) \to \pi_1(H)$ – инъекция, т.е. $\pi_2(G/H)$ является подгруппой $\pi_1(H)$. Отсюда следует, что для существования солитонов, в частности, необходимо, чтобы группа H не была тривиальна, дискретна или односвязна. Если группа G – односвязна, то Δ – также эпиморфизм и $\pi_2(G/H) = \pi_1(H)$.

Простейшим примером солитонов в 4-мерном пространстве-времени являются монополи в модели т'Хуфта - Полякова. Эта модель является обобщением на неабелеву группу модели Нильсена - Олесена. Уже на примере последней мы видели, что для получения солитонных решений необходимо вводить калибровочные поля. При этом, помимо решения для скалярных полей, накладываются дополнительные условия и получаются определенные решения для калибровочных полей, что приводит, в частности, к квантованию магнитного потока - через пространственную плоскость в модели Нильсена - Олесена:

$$\Phi = \int H dx = \int_{S^1} \vec{A}\, d\vec{l} = \frac{1}{g} \int_0^{2\pi} \frac{d\chi}{d\theta}\, d\theta = \frac{2\pi n}{g},$$

и к появлению магнитных монополей в модели т'Хуфта - Полякова, которая будет подробно разобрана в следующем параграфе.

В заключение этого параграфа мы приведем пример солитонов, образованных не скалярным, а спинорным полем, т.е. когда группа G, преобразующая полевые функции, является не внутренней, а пространственно-временной.

Вопрос исследования спинорных солитонных решений является чрезвычайно важным, поскольку именно нелинейное спинорное уравнение было взято за основу Иваненко и Гейзенбергом при разработке варианта единой теории поля. Зная классические спинорные солитонные решения, можно "проквантовать" их, добившись, чтобы они имели элементарный заряд и спин, равные, например, электронным. Теория спинорных солитонов разработана еще в меньшей степени, чем для скалярного поля. Даже в двумерном случае исследования далеко не завершены.

Рассмотрим спинорное поле с плотностью лагранжиана

$$L = \frac{i}{2}\{\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi = \partial_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi\} - m\bar{\psi}\psi + \frac{g}{k}(\bar{\psi}\Gamma_{(\alpha)}\psi)^k, \qquad (37.14)$$

где ψ - это четырехкомпонентный спинор в 4-мерном пространстве-времени, либо двухкомпонентный в 2-мерном случае, $\Gamma(\alpha)$ - набор матриц $\{I, \gamma_{\mu}, \gamma_5, \gamma_5\gamma_{\mu}, \sigma_{\mu\nu}\}$, k - некоторая четная степень.

Уравнения движения в общем случае будут

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m) + g(\bar{\psi}\Gamma_{(\alpha)}\psi)^{k-1}\Gamma_{(\alpha)}\psi = 0. \qquad (37.15)$$

Соответствующая плотность гамильтониана

$$H = \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - \partial_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi) + m\bar{\psi}\psi - \frac{g}{k}(\bar{\psi}\Gamma_{(\alpha)}\psi)^k. \qquad (37.16)$$

Функционалы энергии и заряда спинорного поля есть

$$E = \int H dx , \quad Q = \int \psi^+ \psi \, dx .$$

Исследуем 2-мерные модели спинорного поля.

Массивная МОДЕЛЬ ГРОССА - НЕВЬЮ

В этой модели $\Gamma(\alpha) = I$ - единичная матрица, $k=2$. В 2-мерном пространстве существуют только две γ-матрицы

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Солитонные решения уравнения (37.I5) обычно ищутся в виде

$$\psi_{sol}(x,t) = \chi(x) \exp(-iE_0 t),$$

где $\chi(x)$ - постоянный по времени спинор. Для данной модели

$$\chi(x) = \begin{pmatrix} R(x)\cos\theta(x) \\ R(x)\sin\theta(x) \end{pmatrix}, \qquad (37.I7)$$

где $\theta(x) = \operatorname{arctg}(\alpha \operatorname{th} bx)$,

$$\alpha = \left(\frac{m-E_0}{m+E_0}\right)^{1/2} = \left(\frac{1-\omega}{1+\omega}\right)^{1/2}, \quad b = m(1-\omega^2)^{1/2}, \quad \omega = \frac{E_0}{m},$$

$$R^2(x) = \frac{2(m-E_0)}{g^2} \frac{(1+\alpha^2 \operatorname{th}^2 bx)}{\operatorname{ch}^2 bx (1-\alpha^2 \operatorname{th}^2 bx)^2}.$$

Заряд такого спинорного солитона будет

$$Q = \frac{2c(\omega)}{g^2}, \quad c(\omega) = \frac{(1-\omega^2)^{1/2}}{|\omega|},$$

а его энергия

$$E = \frac{2m}{g^2} \operatorname{arcsh}[c(\omega)].$$

Массивная МОДЕЛЬ ТИРРИНГА

В этой модели $\Gamma(\alpha) = \{\gamma_\mu\}$, $k=2$, т.е. нелинейность имеет вид "ток на ток". Солитонное решение совпадает по виду с решением (37.I7), причем функция $\theta(x)$ та же самая, а

$$R^2(x) = \frac{2(m-E_0)}{g} \operatorname{ch}^2 bx (1+\alpha^2 \operatorname{th}^2 bx)^{-1}.$$

Заряд и энергия спинорного солитона в массивной модели Тирринга будут

$$Q = \frac{2\arccos\omega}{g^2}, \quad E = \frac{m}{g^2} 2(1-\omega^2)^{1/2}.$$

Решения типа спинорных солитонов для случая 4-мерного пространства-времени найдены только в варианте $k=2$ и Γ - единичная матрица. Такое решение имеет вид

$$\psi(\vec{x},t) = \exp(-iE_0 t)\chi(\vec{x}), \quad \chi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} F(r) \\ 0 \\ iG(r)\cos\theta \\ iG(r)\sin\theta e^{i\varphi} \end{pmatrix},$$

где функции $F(r)$ и $G(r)$ находятся из уравнений

$$\frac{dG}{dr} + \frac{G^2}{r} + F(E_0+m) - \frac{g}{2\pi} F(F^2-G^2) = 0,$$

$$\frac{dF}{dr} - \frac{2GF}{r} - G(E_0+m) + \frac{g}{2\pi} G(F^2-G^2) = 0,$$

граничными условиями для которых при $r\to\infty$ выбираются постоянные значения

$$G=0 \quad F = \pm\sqrt{\frac{2\pi(E_0+m)}{g}},$$

что приводит к конечной энергии спинорного солитона.

§38. Монополи

Проблема магнитного заряда (монополя Дирака) берет свое начало в работах Дирака.

Основной причиной для введения магнитного заряда была симметризация уравнений Максвелла относительно непрерывных дуальных преобразований. В пустоте такие уравнения Максвелла

$$\partial_\nu F^{\mu\nu}=0, \quad \partial_\nu {}^*F^{\mu\nu}=0, \qquad (38.1)$$
$${}^*F_{\mu\nu} = \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\frac{1}{2}F_{\alpha\beta}$$

инвариантны относительно преобразований

$$F_{\mu\nu} = F'_{\mu\nu}\cos\varphi + {}^*F'_{\mu\nu}\sin\varphi, \qquad (38.2)$$
$${}^*F_{\mu\nu} = -F'_{\mu\nu}\sin\varphi + {}^*F'_{\mu\nu}\cos\varphi,$$

частным случаем которых при $\varphi = \pm\pi/2$ являются преобразования Лармора $F_{\mu\nu} \to \pm {}^*F_{\mu\nu}$, ${}^*F_{\mu\nu} \to \mp F_{\mu\nu}$. Для того чтобы уравнения Максвелла оставались инвариантными относительно преобразований (38.2) при наличии источников, необходимо, наряду с электрическим зарядом (током) q, ввести магнитный заряд (ток) g. Тогда уравнения Максвелла примут вид

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = -J^\mu_q, \qquad \partial_\nu {}^*F^{\mu\nu} = -J^\mu_g, \tag{38.3}$$

и они будут инвариантными относительно преобразований (38.2), если токи преобразуются аналогично:

$$J^\nu_g = J^{\nu\prime}_g \cos\varphi + J^{\nu\prime}_q \sin\varphi, \qquad J^\nu_q = -J^{\nu\prime}_g \sin\varphi + J^{\nu\prime}_q \cos\varphi. \tag{38.4}$$

Если в качестве источника в уравнениях (38.3) взять изолированный магнитный заряд g, то их решением будет подобное кулоновскому электрическому полю "кулоновское" магнитное поле

$$\vec{H} = g\,\frac{\vec{r}}{r^3}, \tag{38.5}$$

которое называется МАГНИТНЫМ МОНОПОЛЕМ (монополем Дирака).

На квантовомеханическом уровне в качестве условия непротиворечивости модели, а также и из других соображений, которые будут приведены ниже, возникает условие так называемого зарядового квантования

$$\frac{qg}{4\pi\hbar} = \frac{n}{2}. \tag{38.6}$$

Пусть q - заряд электрона, тогда из (38.5) нетрудно получить, что $g^2/q^2 \simeq 5\cdot 10^3 n^2$. Таким образом между магнитными монополями должно существовать очень сильное взаимодействие, которое может вынуждать их к быстрой аннигиляции или к образованию магнито-нейтральных частиц. Возможно, это является одной из причин, почему поиски монополей, в частности, на ускорителях в реакции $p + \tilde{p} \to g + g$ пока безрезультатны. Другой причиной того, что монополи еще не обнаружены, может служить большая масса монополя, которая по оценкам теоретиков приблизительно равна 20 Гэв. Но возможно, что источник неудачи имеет более принципиальный характер.

Дело в том, что в пространстве $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ нельзя построить регулярный вектор-потенциал электромагнитного поля A, ротор которого давал бы поле (38.5). Примером поля A, которое приводит к полю магнитного заряда (38.5), является

$$A = \frac{1}{2r} \cdot \frac{1}{z-r} (x\,dy - y\,dx), \tag{38.7}$$

$$F = dA = \frac{1}{2r^3} (x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy).$$

Оно имеет сингулярность вдоль луча $(0, 0, z \geqslant 0)$, которая называется ДИРАКОВСКОЙ СТРУНОЙ. Сингулярности можно избежать, если $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ представить как объединение двух координатных областей $U_\pm$, включающие точки, соответственно, с $z > -\varepsilon$ и $z < \varepsilon$, с областью пересечения $U_+ \cap U_- = \{-\varepsilon < z < \varepsilon\}$. В каждой из этих областей может быть определен везде (кроме ε-окрестности 0) вектор-потенциал

$$A_\pm = \frac{1}{2r} \frac{1}{z \pm r} (x\,dy - y\,dx) = \frac{1}{2} (\pm 1 - \cos\theta) d\varphi, \tag{38.8}$$

так что на пересечении $U_+ \cap U_-$ поля A_+ и A_- связаны калибровочным преобразованием

$$A_+ = A_- + d\varphi. \tag{38.9}$$

Однако поле $F = dA_\pm$ описывается одной и той же формой

$$F = \frac{1}{2r^3} (x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy) = \frac{1}{2} \sin\theta\,d\theta \tag{38.10}$$

в обоих областях, что и должно быть, поскольку F инвариантно относительно калибровочных преобразований. Приведенная конструкция является примером построения магнитного монополя из калибровочных полей A - связностей нетривиального $U(1)$--расслоения над пространством $\mathbb{R}^3 - \{0\}$.

Рассмотрим такое построение подробнее. При этом, поскольку, как видно из (38.8), поля A имеют только угловые составляющие, можно для простоты ограничиться рассмотрением $U(1)$-расслоения над сферой S^2. Сконструируем это расслоение следующим образом. Базой расслоения является сфера с координатами (θ, φ), $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, а слоем - групповое пространство $U(1) = S^1$ с координатами $e^{i\varphi}$. Разобьем S^2 на две полусферы $U_\pm$ с координатами, соответственно, $\theta > -\varepsilon$ и $\theta < \varepsilon$, пересекающиеся по узкому поясу вдоль экватора. $U_\pm$ являются областями тривиализации расслоения, которое выглядит как

$$U_+ \times U(1) \quad \text{с координатами} \quad (\theta, \varphi; e^{i\psi_+}),$$

$$U_- \times U(1) \quad \text{с координатами} \quad (\theta, \varphi; e^{i\psi_-}).$$

Функция перехода должна быть элементом калибровочной группы $U(1)(X)$ и представляется функцией от φ в области $U_+ \cap U_-$ со значениями в группе $U(1)$. Из условия периодичности функции перехода по φ следует, что она имеет вид

$$e^{i\psi_-} = e^{in\varphi} e^{i\psi_+}, \tag{38.11}$$

где n - обязательно целое число.

Для $n=0$ мы имеем тривиальное расслоение с тотальным пространством $t\ell = S^2 \times S^1$, для $n=1$, $t\ell = S^3$, и калибровочные поля на таком расслоении, как мы видели, описывают магнитный монополь. В общем случае функции перехода $g = e^{in\varphi}$ калибровочные поля A_+ и A_-, описывающие монополь, имеют вид

$$A_\pm = \frac{n}{2}(\pm 1 - \cos\theta) d\varphi \tag{38.12}$$

и связаны калибровочным преобразованием

$$A_+ = A_- + \frac{1}{i} g^{-1} dg = A_- + n\varphi.$$

Напряженность

$$F = dA_\pm = \frac{n}{2} \sin\theta \, d\theta \wedge d\varphi \tag{38.13}$$

и представляет собой поле n-зарядного монополя.

Теперь мы покажем, что заряд монополя связан с топологическим инвариантом - числом Чженя C_1 рассмотренного $U(1)$--расслоения. Действительно, кривизна $\Omega = iF$, полная форма Чженя

$$C = \mathcal{D}et\left(I + \frac{i}{2\pi}\Omega\right) = 1 - \frac{F}{2\pi},$$

форма Чженя $c_1 = -\frac{F}{2\pi}$ и число Чженя

$$C_1 = \int_{S^2} c_1 = -\frac{1}{2\pi}\int_{S^2} F = -n.$$

Это равенство можно рассматривать как топологическую версию условия зарядового квантования (38.6).

Мы убедились, что магнитное поле монополя не может быть выражено в $\mathbb{R}^3 - \{0\}$ через регулярный вектор-потенциал A

(форма F замкнутая, но не точная). Однако оказалось, что это можно сделать через калибровочные поля более широкой неабелевой группы симметрий, например, $SU(2)$, в которую "электромагнитная"группа может входить как подгруппа. Принципиальная возможность этого следует из того, что напряженность F в случае неабелевой группы является не ротором, а "ковариантным" ротором от калибровочных полей. Действительно, пусть G^a - некоторое скалярное поле со значениями в алгебре Ли $su(2)$ группы $SU(2)$, а A^a - калибровочное поле этой группы, такие, что $\mathcal{D}G=0$. Образуем поле

$$\widetilde{F}=G_\alpha F^a. \tag{38.10}$$

Легко показать, что поле $\widetilde{F}$ будет удовлетворять уравнению Максвелла в пустоте, если F удовлетворяет уравнению Янга - Миллса,

$$\partial^\mu \widetilde{F}_{\mu\nu}=\partial^\mu G_\alpha F^a_{\mu\nu}=\mathcal{D}^\mu G_\alpha F^a_{\mu\nu}=(\mathcal{D}_\mu G_\alpha)F^{\mu\nu}+G_\alpha \mathcal{D}^\mu F_{\mu\nu}=0.$$

Пусть теперь "электромагнитная" подгруппа $U(1)$ группы $SU(2)$ образована элементами $\exp i\alpha I_3$, где I_3 - генератор $SU(2)$, A^3 - калибровочное поле, отвечающее этой подгруппе, которое может интерпретироваться как электромагнитный потенциал, а G^3 - постоянное поле со значением в элементе I^3 алгебры $su(2)$. Нетрудно проверить, что $\mathcal{D}G^3=0$ и

$$\widetilde{F}_{\mu\nu}=F^3_{\mu\nu}=\partial A^3_\mu/\partial x^\nu-\partial A^3_\nu/\partial x^\mu .$$

Если $\widetilde{F}_{\mu\nu}$ - поле магнитного монополя, то калибровочное поле A^3 должно быть сингулярным в пространстве $\mathbb{R}^3-\{0\}$. Однако при переходе к другой калибровке (поле $\widetilde{F}$ является калибровочно инвариантным)

$$A'=gA^3g^{-1}+gdg^{-1},\ \widetilde{F}\neq dA',$$

и возникает возможность устранить сингулярность в A' за счет градиентного члена gdg^{-1}. Такую возможность действительно удается реализовать, и мы приведем простейший пример модели, в которой монополь строится из регулярных калибровочных и изовекторного полей.

МОДЕЛЬ МОНОПОЛЯ Т'ХУФТА - ПОЛЯКОВА

Это $SO(3)$ -калибровочная модель изотриплета скалярных полей φ^a с лагранжианом

$$L=-\frac{1}{2}F^a_{\mu\nu}F_a^{\mu\nu}+\frac{1}{2}(D_\mu\varphi^a)^2+\frac{1}{2}\mu^2\varphi_a\varphi^a-\frac{1}{4}\lambda(\varphi_a\varphi^a)^2. \quad (38.11)$$

Вакуум модели удовлетворяет тем же условиям (37.11), что и в модели Нильсена - Олесена, в частности, $\varphi^2=\mu/\sqrt{\lambda}$, откуда следует, что пространство вакуумов образует сферу S^2 в изопространстве и $\pi_2(S^2)=Z$ - множество классов возможных солитонных решений модели.

Уравнения поля модели обладают солитонным решением в секторе $n=1$, которое в калибровке $A^a_0=0$ имеет вид

$$\varphi^a=\frac{x^a}{r}\varphi(r),\ A^a_i=\varepsilon^{aij}x_j\cdot A(r) \quad (38.12)$$

с асимптотикой

$$\varphi(r)\longrightarrow\mu/\sqrt{\lambda},\ A(r)\longrightarrow\mu/\sqrt{\lambda}\cdot r$$

и обладает конечной энергией.

Введем теперь калибровочно инвариантное выражение для напряженности электромагнитного поля

$$\hat{F}_{\mu\nu}=\frac{1}{|\varphi|}\varphi_a F^a_{\mu\nu}-\frac{1}{q|\varphi|^3}\varepsilon_{abc}\varphi^a(D_\mu\varphi^b)(D_\nu\varphi^c), \quad (38.13)$$

которое является обобщением выражения (38.10). При подстановке в него солитонного решения (38.12) оно приводит к следующему значению электромагнитного поля:

$$\hat{F}_{ij}=-\frac{1}{qr^3}\varepsilon_{ijk}x^k,$$

которое можно интерпретировать как порожденное магнитным зарядом $g=1/q$. В частности, на бесконечности (38.13) переходит в обычное

$$\hat{F}_{\mu\nu}=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu.$$

Введем магнитный ток

$$K_\mu=\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\partial^\nu\hat{F}^{\alpha\beta}. \quad (38.14)$$

Соответствующее выражение для магнитного заряда приводит к его значению

$$4\pi g=\int K_0\,dx=\int\vec{H}\,d\vec{\sigma}=\frac{4\pi}{q}.$$

Таким образом (38.12) оказывается также и магнитным монополем, удовлетворяющим условию зарядового квантования $qg=1$.

Заметим, что закон сохранения магнитного тока $\partial^\mu K_\mu = 0$ является сильным, не зависящим от решения уравнений поля, т.е. магнитный ток и заряд оказываются топологическими инвариантами модели.

Таким образом, к магнитному монополю приводит тот факт, что в неабелевой калибровочной теории отображение (38.12) сопоставляет паре (A, σ) $U(1)$-расслоение и электромагнитное поле на пространстве R^3. В случае солитонного решения (A, σ) это поле оказывается магнитным монополем и для каждого пространственного направления $\vec{n}$ вакуумное калибровочное поле $A(\vec{n}, r \to \infty)$ определяет отображение алгебры $u(1)$ в алгебру Ли $so(3)$, а следовательно, переходя к экспоненциальному отображению, и отображение группы $U(1)$ в $SO(3)$. При этом для всех направлений $\vec{n}$ эти отображения должны быть гомотопны. Различные гомотопические классы отображений $U(1)$ в калибровочную группу G будут определять различные типы монополей. Множество таких классов является подмножеством гомотопической группы $\pi_1(G)$. В данном случае $\pi_1(SO(3)) = \pi_1(SU(2)/Z_2) = Z_2$, но класс группового отображения $U(1)$ в $SO(3)$ единствен и соответствует отличному от единицы элементу группы Z_2.

Конструкция монополя в калибровочных теориях обобщается и на другие калибровочные группы. При этом, поскольку главной идеей этой конструкции является построение монополя из неабелевых калибровочных полей, желательно, чтобы калибровочная группа не включала изначально фазовых преобразований. В современных моделях Большого объединения таковым являются ПРОЕКТИВНЫЕ УНИТАРНЫЕ ГРУППЫ $PU(N) = U(N)/U(1)$. Группа $PU(N)$ изоморфна факторгруппе $SU(N)/Z_N$, где факторизация проводится по элементам $SU(N)$, различающимся фазовыми множителями $exp(i2\pi k/N)$. Как и $U(N)$, группа $PU(N)$ оставляет инвариантной сферу S^{2N-1} в пространстве C^n, стабилизатором каждой точки которой является некоторая группа $U(N-1)$. Отсюда следует, что пространство вакуумов в $PU(N)$--калибровочной модели гомеоморфно $CP^N = PU(N)/U(N-1)$ и множество классов возможных солитонных решений в ней определяется группой $\pi_2(CP^N) = Z$. При этом множество возможных типов монополей равно $\pi_1(PU(N)) = \pi_1(SU(N)/Z_N) = Z_N$.

§39. Инстантоны

В предыдущих параграфах мы рассмотрели ряд решений нелинейных уравнений, которые мы называли солитонами. При этом такой солитон представлял собой сгусток физического поля (нелинейную волну), локализованный в пространстве и сохраняющий свою форму сколь угодно долго во времени. В последние годы был предложен другой вид солитонов, таких, которые ограничены не только в пространстве, но и во времени. Они представляют собой образования, существующие только в определенном месте пространства в определенный промежуток времени. Этот тип солитонов был назван ИНСТАНТОНАМИ. Инстантонные решения появляются в большом классе полевых теорий, в том числе в тех из них, которые более других претендуют на описание взаимодействия элементарных частиц. В данном параграфе будут рассмотрены в основном инстантоны, возникающие в калибровочных теориях.

На сегодняшний день инстантоны рассматриваются как в теории поля, квантовой механике, так и в чистой математике. Обычно инстантоны получаются не как решения исходных уравнений, а как решения уравнений, полученные переходом в евклидово пространство-время: $t \to x^4 = it$. Такой переход позволяет более просто исследовать квантовые проблемы различных моделей методом континуального интегрирования. Кроме того, переход в евклидову область позволяет более точно выяснить природу самого инстантона. В евклидовой теории поля классические решения типа уединенного кратковременного сигнала соответствуют туннельному переходу в квантовомеханической задаче. Таким образом, инстантоны следует рассматривать не как частицеподобные объекты, а как процессы квантовых переходов между различными состояниями частиц (либо между вакуумами). Существование инстантонов предполагает, что вакуумное состояние в квантовой теории не единственно, а имеет переодическую структуру.

Здесь мы не будем подробно рассматривать квантовую природу инстантонов, а ограничимся лишь тополого-геометрическим подходом к классификации инстантонных решений в различных моделях. Этот подход основан на том, что инстантоны описываются как определенного вида связности на главных расслоениях и их классификация определяется классификацией этих расслоений по числам Чженя, Эйлера, Понтрягина и др. Причем, поскольку инстантоны представляют собой локализованные решения, к евклидову пространству-времени можно добавить бесконечно удаленную точку, т.е. компактифицировать $\mathbb{R}^n$ до S^n, и рассматривать расслоения над компактифицированными евклидовыми пространствами. Это не только технический прием. Всякое решение на сфере S^n при его стереографической проекции на $\mathbb{R}^n$ будет иметь на $\mathbb{R}^n$ в качестве своей асимптотики константу, т.е. переход на сферу заранее отбирает из всех возможных решений на $\mathbb{R}^n$ только локализованные. При этом, ограничиваясь семейством локализованных решений, в последнем можно выделить топологически неэквивалентные классы решений, переход между которыми через локализованные решения невозможен. Однако такой переход возможен через нелокализованные решения на $\mathbb{R}$, свидетельством чему является то, что всякое векторное расслоение на стягиваемом пространстве $\mathbb{R}$ тривиально и имеет нулевые топологические характеристики.

<u>Инстантонные решения σ-модели в 2-мерном пространстве</u>

Это - модель нелинейного векторного поля $\vec{\sigma}(x)\in\mathbb{R}^3, x\in\mathbb{R}^2$, однако мы введем условие $|\vec{\sigma}|^2=1$ и лагранжиан модели сведется только к кинетическому члену

$$L=\frac{1}{2}\partial_\mu\vec{\varphi}\,\partial^\mu\vec{\varphi}. \tag{39.1}$$

Компактифицируем $\mathbb{R}^2$ до S^2. Будем рассматривать поля σ как сечения расслоения λ на сферы S^2, базой которого является тоже сфера S^2. Для удобства, используя гомеоморфизм базы S^2 и комплексного проективного пространства $\mathbb{C}P^1$ и стереографическую проекцию слоя S^2 на комплексную прямую $\mathbb{C}$, трансформируем расслоение λ в дуальное линейное расслоение L^* над проективным пространством $\mathbb{C}P^1$. Тогда поля σ следующим образом представятся через сечения f расслоения L^*:

$$\vec{\sigma}=\left(\frac{2f_1}{|f|^2+1};\frac{2f_2}{|f|^2+1};\frac{|f|^2-1}{|f|^2+1}\right),\quad f=f_1+if_2. \tag{39.2}$$

Опишем расслоение L^*. Покроем базу S^2 двумя областями: U - сфера без южного полюса с координатами (x, y), получаемыми стереографической проекцией из южного полюса, и U' - сфера без северного полюса с координатами (x', y').

Соответствующими комплексными координатами проективного пространства будут $z=x+iy$, $z'=x'+iy$. Функцией перехода является

$$\Phi=\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)=\frac{1}{z}. \qquad (39.3)$$

Введем на L^* стандартную эрмитову метрику

$$ds^2=\frac{dx^2+dy^2}{(1+x^2+y^2)^2}=\frac{dz\cdot d\bar z}{(1+z\bar z)^2}=h\,dz\cdot d\bar z.$$

Тогда каноническая связность A подчиняется условию

$$dh=hA+\bar A h$$

и имеет вид

$$A=\partial \ln(1+|z|^2)=\frac{\bar z\,dz}{1+|z|^2}.$$

Откуда находим форму кривизны

$$\Omega=dA=-\partial\bar\partial \ln(1+|z|^2)=-\frac{dz\wedge d\bar z}{(1+|z|^2)^2}. \qquad (39.4)$$

Из нее можно построить форму Чженя

$$c_1(L^*)=-\frac{i}{2\pi}\Omega=\frac{1}{\pi}\frac{dx\wedge dy}{1+x^2+y^2}=\frac{1}{\pi}\frac{r\,dr\wedge d\varphi}{(1+r^2)^2},$$

и число Чженя, характеризующее расслоение L^* , будет

$$C_1(L)=\int_{S^2}c_1(L)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{r\,dr}{(1+r^2)^2}\int_0^{2\pi}d\varphi=1.$$

Пусть теперь f - некоторое сечение расслоения L^* . Преобразование перехода для него имеет вид

$$f'(z')=f'\left(\frac{1}{z}\right)=f(z)\longrightarrow f'=\frac{1}{f}$$

и совпадает с (39.3), т.е. f может быть использовано для задания некоторых новых координат на CP^1 . В этих координатах форма кривизны (39.4) запишется

$$\Omega=-\frac{df\wedge d\bar f}{(1+|f|^2)^2}. \qquad (39.5)$$

Соответствующая форма Чженя от (39.5) в общем случае будет иметь другой когомологический класс, чем (39.4) и приведет к другому значению числа Чженя $C_1=n,\ n\in\mathbb{Z}=H^2(CP^1,\mathbb{Z})$.

Вернемся теперь к полям σ . Посредством формулы перехода (39.2) форма кривизны (39.5) перепишется в виде

$$R=\frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu}(\vec{\sigma}\times\partial^{\mu}\vec{\sigma})(\partial^{\nu}\sigma)\,dx\wedge dy,$$

и число Чженя

$$C_1=\int\limits_{R^2}\frac{1}{4\pi}\varepsilon_{\mu\nu}(\vec{\sigma}\times\partial^{\mu}\vec{\sigma})\partial^{\nu}\vec{\sigma}\,dx\wedge dy=n. \qquad (39.6)$$

Из неравенства

$$\int\limits_{R^2}(\partial_{\mu}\vec{\sigma}-\varepsilon_{\mu\alpha}\vec{\sigma}\times\partial^{\alpha}\vec{\sigma})(\partial^{\mu}\vec{\sigma}-\varepsilon^{\mu\nu}\vec{\sigma}\times\partial_{\nu}\vec{\sigma})\,d^2x\geqslant 0 \qquad (39.7)$$

следует, что действие $S=\int d^2x\,L\geqslant 4\pi n$.

Из условия (39.7) видно, что знак равенства возможен лишь в случае

$$\partial_{\mu}\vec{\sigma}-\varepsilon_{\mu\nu}\vec{\sigma}\times\partial^{\nu}\vec{\sigma}=0. \qquad (39.8)$$

Это условие называется условием дуальности. Легко проверить, что оно совместно с уравнением поля

$$\partial_{\mu}\partial^{\mu}\vec{\sigma}=0,$$

и решения уравнения поля, удовлетворяющие (39.8), называются самодуальными. Очевидно, что на самодуальных решениях достигается значение абсолютного минимума функционала действия и лагранжиан равен квадрату топологического тока $J_{\mu}=\varepsilon_{\mu\nu}\vec{\sigma}\times\partial^{\nu}\vec{\sigma}$, который сохраняется независимо от уравнений движения.

Условие дуальности (39.8), переписанное для функций f , требует лишь, чтобы f были голоморфны, т.е. $\partial f/\partial\bar{z}=0$. Кривизна (39.5) для таких f принимает вид

$$\Omega=-\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2\frac{dz\wedge d\bar{z}}{(1+|f|^2)^2}, \qquad (39.9)$$

и они могут быть классифицированы по значениям числа Чженя формы (39.9). Пусть эти значения известны, тогда наиболее общее инстантонное решение будет

$$f(z)=\sum_{1}^{n}\frac{\lambda_i}{z-\alpha_i}+\lambda_0,$$

где λ_i, α_i, λ_0 - произвольные параметры, число которых равно $4n+2$. Примером инстантонного решения для $n=1$ является

$$\vec{\sigma} = \{\sin\theta(r)\cos\varphi,\ \sin\theta(r)\sin\varphi,\ \cos\theta(r)\},$$

где $\theta(r) = 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{r}{r_0}$.

Переходом к проективному пространству σ -модель можно обобщить на случай $\mathbb{C}P^n$. Решения, полученные в такой модели, будут отображениями $\mathbb{C}P^n \to M$, где M - кэллерово многообразие.

Инстантонные решения в теории Янга - Миллса

Поля Янга - Миллса (или калибровочные) играют важную роль в современной теории поля и элементарных частиц, так как согласно общепринятой точке зрения именно они являются переносчиками фундаментальных взаимодействий. С геометрической точки зрения, как уже неоднократно указывалось, поля Янга - Миллса - это коэффициенты формы связности на главном расслоении, а их напряженность - тензор кривизны этой связности. Это делает калибровочные поля чрезвычайно удобным объектом для тополого-алгебраического анализа, поскольку такие характеристические классы, как классы Чженя, Понтрягина и др., представляют собой когомологические классы характеристических форм, образованных именно из форм кривизны на главных расслоениях.

Напомним, что мы рассматриваем модели на евклидизированном компактифицированном пространстве-времени, т.е. на сфере S^4, а также будем предполагать, что калибровочная группа G компактна, а именно, $SU(n)$ или $SO(n)$.

В теории Янга - Миллса без источников, заданной в четырехмерном евклидовом пространстве, был обнаружен целый ряд решений инстантонного типа, которые обладают нетривиальными топологическими характеристиками.

Эвклидизированное действие в теории Янга - Миллса выбирается в виде

$$S = -\frac{1}{2g^2}\int d^4x\, Tr\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right), \tag{39.9}$$

где $F = F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu$ - форма связности на главном расслоении $P(S^4, G)$. Пусть $G = SU(n)$. Расслоение $P(S^4, SU(n))$ будет характеризоваться вторым классом Чженя $c_2 \in H^4(S^4, Z) = Z$. Соответствующее число Чженя

$$q = \frac{1}{16\pi^2}\int d^4x\, Tr\left(F_{\mu\nu}{}^*F^{\mu\nu}\right), \tag{39.10}$$

где ${}^*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$.

Инстантонное решение в теории Янга - Миллса приводит к конечному действию (39.9), которое ограничено снизу значениями топологического заряда - числа Чженя (39.10). Действительно, из неравенства

$$-\frac{1}{4}\int d^4x\, Tr\{(F_{\mu\nu} \pm {}^*F_{\mu\nu})^2\} \geqslant 0 \tag{39.11}$$

и алгебраического соотношения $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = {}^*F_{\mu\nu}{}^*F^{\mu\nu}$ следует, что

$$S \geqslant \frac{8\pi^2}{g^2}q. \tag{39.12}$$

Равенство возможно только если

$$F_{\mu\nu} = \pm {}^*F_{\mu\nu}. \tag{39.13}$$

Знак "+" в (39.13) приводит к самодуальным полям, а знак "-" к антисамодуальным.

Таким образом, множество полей с конечным действием (39.9) распадается на компоненты, состоящие из полей с определенным топологическим зарядом. Рассматривая солитоны и монополи, мы установили, что решения такого типа характеризуются особым поведением полей на бесконечности, а именно, при $x \to \infty$ $F_{\mu\nu} \to 0$. Это можно реализовать, рассматривая поля

$$A_\mu \to g^{-1}\partial_\mu g, \tag{39.14}$$

где $g(x)$ принимает значение в группе G и является отображением S^3_∞ в G. Гомотопический класс такого отображения характеризуется элементом группы $\pi_3(G)$, которая для многих групп ($SU(n)$, $Sp(n)$, G_2 , F_4 , F_8 , $\overline{E}_6$, E_7) равна $\mathbb{Z}$.

Покажем, что заряд q в этом случае является топологическим инвариантом, связанным с многообразием группы G . Заметим, что $Tr\,{}^*F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ является полной дивергенцией в $\mathbb{R}^4$:

$$Tr\,{}^*F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \partial_\mu J^\mu, \tag{39.15}$$

где $J^\mu = 4\varepsilon^{\mu\alpha\beta\nu}Tr(\frac{1}{2}A_\alpha\partial_\beta A_\nu + \frac{1}{3}A_\alpha A_\beta A_\nu)$.

Предположим, что поле A_μ несингулярно, тогда

$$q = -\frac{1}{16\pi^2}\int d^4x\, Tr\,{}^*F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \lim_{R\to\infty}\{-\frac{1}{16\pi^2}\int_S d^3s\, n_\mu J^\mu,$$

где n_μ - внешняя нормаль к поверхности S_∞ бесконечного радиуса. Подставим выражение (39.14) для A_μ, тогда

$$q = \lim \frac{1}{24\pi^2} \int_S d^3 s\, \varepsilon^{\mu\alpha\beta\nu} n_\mu \operatorname{Tr}\{(g^{-1}\partial_\alpha g)(g^{-1}\partial_\beta g)(g^{-1}\partial_\nu g)\} = \tag{39.16}$$
$$= \lim \frac{1}{24\pi^2} \int_S d^3 s \frac{\partial g}{\partial s} = \lim \frac{1}{24\pi^2} \operatorname{sgn} g \int_G d^3 g .$$

Здесь $d^3 g$ – инвариантный объем группы G. Откуда очевидно следует, что топологический заряд равен объему группы, умноженному на некоторое целое число $\operatorname{sgn} g$, которое определяется числом прообразов в S^3 каждой точки из G при отображении $g: S^3 \to G$. Оно называется степенью отображения и связано с гомотопическим классом отображения g.

Рассмотрим теперь пример конкретного инстантонного решения уравнений Янга – Миллса, впервые полученного т'Хуфтом и Поляковым для случая $G = SU(2)$. Граничные условия для решения с зарядом $q = 1$ будут выполнены, если положить

$$g(x) = \frac{\alpha \cdot x}{\sqrt{x^2}}, \qquad g^{-1}(x) = \frac{\bar{\alpha} \cdot x}{\sqrt{x^2}}, \tag{39.17}$$
$$\alpha^\mu = \{I, i\vec{\sigma}\}, \quad \bar{\alpha}^\mu = \{I, -i\vec{\sigma}\},$$

где I – единичная (2×2)-матрица, а $\vec{\sigma}$ – матрицы Паули, $\alpha \cdot x = x^4 + i(\vec{\sigma} \cdot \vec{x})$, $x^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$. Потенциал A_μ будет

$$A_\mu = g^{-1} \partial_\mu g = \frac{-2i\sigma_{\mu\nu} x^\nu}{x^2}, \tag{39.18}$$
$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{4i} (\bar{\alpha}_\mu \alpha_\nu - \bar{\alpha}_\nu \alpha_\mu), \; \sigma_{i4} = \frac{1}{2} \sigma_i, \; \sigma_{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \sigma^k .$$

Топологический ток $J^\mu = -8 \frac{x^\mu}{x^4}$. Подставляя это значение в

в (39.15), получим $q = 1$.

На первый взгляд этот результат может показаться неожиданным, поскольку напряженность поля для потенциалов вида (39.14) равна, как известно, 0. Однако заметим, что A_μ сингулярен в начале координат, и, в частности, интегрирование в (39.16) можно проводить по поверхности, сколь угодно близкой к $x = 0$, что и приводит к значению $q = 1$.

Попытаемся избавиться от сингулярности в потенциале (39.18), сохранив все свойства инстантонного решения, в том числе его заряд $q = 1$. Положим

$$A_\mu = -2i f(x^2) \frac{\sigma_{\mu\nu} x^\nu}{x^2}, \tag{39.19}$$

где функция $f(x^2)$ такова, что $f(0)=0$, $f(\infty)=1$. Подставив (39.19) в выражение для $F_{\mu\nu}$, получим

$$F_{\mu\nu} = 4i\left(f-f^2\right)\frac{\sigma_{\mu\nu}}{x^2} + \tag{39.20}$$
$$+\frac{4i}{x^2}\left(f'+f/x^2+f^2/x^2\right)\left(\sigma_{\mu\alpha}x^\alpha x_\nu - \sigma_{\nu\alpha}x^\alpha x_\mu\right).$$

Условие самодуальности выполняется только, если

$$x^2 f' - f + f^2 = 0.$$

Откуда

$$f(x^2) = \frac{x^2}{\lambda^2+x^2},$$

где λ^2 - некоторое произвольное число, не равное 0. Если потребовать, чтобы $f(0)=1$, $f(\infty)=0$, тогда мы получим значение

$$f(x^2) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2+x^2},$$

которое приведет к антиинстантонному решению с $q=-1$.

Напряженность поля для инстантонного решения будет

$$F_{\mu\nu} = \frac{4i\lambda^2}{(\lambda^2+x^2)^2}\sigma_{\mu\nu},$$

для антиинстантонного

$$F_{\mu\nu} = \frac{4i\lambda^2}{(\lambda^2+x^2)^2 x^2}\left(\sigma_{\mu\nu}x^2 - 2\sigma_{\mu\alpha}x^\alpha x_\nu + 2\sigma_{\nu\alpha}x_\mu x^\alpha\right).$$

Действие S, взятое от такого поля, будет конечно:

$$S = \pm\frac{8\pi^2}{g^2},$$

"+" - для инстантонов, "-" - для антиинстантонов.

Исследуем вопрос о том, сколько всего инстантонных решений существует для данного топологического заряда q. Запишем

$$A^\mu = i\sigma^{\mu\nu}a_\nu, \quad a_\nu = -\frac{2x_\nu}{\lambda^2+x^2}.$$

Подставляя эти выражения в $F_{\mu\nu}$ и ${}^*F_{\mu\nu}$, получим

$$F^{\mu\nu} = i\left[(\partial^\mu a_\rho - a^\mu a_\rho)\sigma^{\nu\rho} - (\partial^\nu a_\rho - a^\nu a_\rho)\sigma^{\mu\rho} - a_\rho a^\rho \sigma^{\mu\nu}\right], \tag{39.21}$$
$${}^*F^{\mu\nu} = -i\left[(\partial_\rho a^\mu - a_\rho a^\mu)\sigma^{\nu\rho} - (\partial_\rho a^\nu - a_\rho a^\nu)\sigma^{\mu\rho} - \partial_\rho a^\rho \sigma^{\mu\nu}\right],$$

где мы использовали

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\sigma_{\nu\rho} = -\delta^{\mu}_{\rho}\sigma^{\alpha\beta} - \delta^{\alpha}_{\rho}\sigma^{\beta\mu} - \delta^{\beta}_{\rho}\sigma^{\mu\alpha} .$$

Из условия самодуальности следует уравнение на вектор

$$\partial_\mu a_\nu + \partial_\nu a_\mu - 2a_\mu a_\nu = \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}(\partial_\alpha a^\alpha - a_\alpha a^\alpha),$$

которое можно разрешить, подставив $a_\mu = \partial_\mu \ln\Phi$. Функция Φ подчиняется уравнению

$$\frac{1}{\Phi}\Box\Phi = 0,$$

несингулярным решением которого будет

$$\Phi = \sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_i^2}{(x-a_i)^2}. \tag{39.22}$$

Подставляя (39.22) в выражение для топологического заряда, получим

$$q = -\frac{1}{16\pi^2}\int d^4x\, \Box\Box \ln P,$$

где P - это полином по x степени $(2m-2)$, что приводит нас к оценке

$$q \doteq -\lim_{R\to\infty}\frac{1}{16\pi^2}\int d\Omega\, R_\mu \partial^\mu \Box \ln(R^{2m-2}+\ldots) = m-1 . \tag{39.23}$$

Откуда число параметров, появляющихся в выражении для самодуального решения уравнений Янга - Миллса, будет $(8q-3)$.

Аналогичными методами можно исследовать инстантонные решения в калибровочных моделях для других групп симметрий. Мы приведем здесь таблицу, в которой даны числа параметров инстантонных решений для различных групп.

Группа	Размерность пространства параметров	Примечание
$SU(n)$	$4nk-n^2+1$	$k \geq n/2$
$Spin(n)$	$4(n-2)k - \frac{n(n-1)}{2}$	$k \geq n/4$ $(n \geq 7)$
$Sp(n)$	$4(n+1)k - n(2n+1)$	$k \geq n$
G_2	$16k-14$	$k \geq 2$
F_4	$36k-52$	$k \geq 3$
E_6	$48k-78$	$k \geq 3$
E_7	$72k-133$	$k \geq 3$

В заключение укажем на существование красивой реформулировки теории Янга – Миллса на проективных пространствах изотропных лучей в пространстве Минковского, предложенной Атья, Дринфельдом, Хитчиным, Маниным, которая, в частности, позволяет дать полную классификацию инстантонных решений. Однако изложение этого подхода требует более серьезной математической подготовки читателя, чем та, которую дает этот курс.

§40. Инстантонные решения в римановой гравитации

Подчеркнем с самого начала, что в этом параграфе речь идет о римановой гравитации, полевой функцией для которой служит не псевдориманова, а риманова метрика. Если локально переход от теории гравитации к теории римановой гравитации сводится к обычным приемам евклидизации, то глобальные свойства римановой и псевдоримановой метрик могут быть существенно разными. Примером является то, что риманова метрика существует на любом компактном многообразии, а псевдориманова – на компактных многообразиях только с нулевой эйлеровой характеристикой. В дальнейшем же будет показано, что число Эйлера с необходимостью участвует в классификации гравитационных инстантонов.

В теории римановой гравитации, как и в теории Янга – Миллса, существуют инстантонные решения, которые описывают гравитационные поля определенной конфигурации и являются метриками некоторых римановых многообразий. ИНСТАНТОННЫЕ МЕТРИКИ должны:

а) подчиняться уравнениям Эйнштейна (без Λ -члена);

б) отвечать условию самодуальности;

в) быть локализованными, т.е. асимптотически стремиться к плоской евклидовой метрике;

г) быть свободными от сингулярностей.

Такие метрики обладают рядом специфических свойств, одно из которых – равенство нулю гильберт – эйнштейновского действия для гравитационного поля

$$S(g) = \int d^4x \sqrt{+g}\, R(g), \qquad (40.\mathrm{I})$$

где $R(g) = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$; $R_{\mu\nu} = \left\{{}^{\alpha}_{\mu\nu}\right\}_{,\alpha} - \left\{{}^{\alpha}_{\mu\alpha}\right\}_{,\nu} + \left\{{}^{\alpha}_{\mu\nu}\right\}\left\{{}^{\sigma}_{\alpha\sigma}\right\} - \left\{{}^{\alpha}_{\mu\sigma}\right\}\left\{{}^{\sigma}_{\alpha\nu}\right\}$,

$\left\{{\alpha \atop \mu\nu}\right\}$ - символы Кристофеля.

Процедура поиска гравитационных инстантонов аналогична той, что применялась в теории Янга - Миллса. Однако, прежде чем переходить к описанию этой процедуры, установим соответствие между метрикой евклидова пространства

$$ds^2 = dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

и уравнением структуры Маурера - Картана для группы $SU(2)$.

Введем вместо (t, x, y, z) четырехмерные сферические координаты (r, θ, φ, ψ) и определим величины

$$G_x = \frac{1}{r^2}(x\,dt - t\,dx + y\,dz - z\,dy) = \frac{1}{2}(\sin\psi\, d\theta - \sin\theta\cos\psi\, d\varphi),$$

$$G_y = \frac{1}{r^2}(y\,dt - t\,dy + z\,dx - x\,dz) = \frac{1}{2}(-\cos\psi\, d\theta - \sin\theta\sin\psi\, d\varphi), \quad (40.2)$$

$$G_z = \frac{1}{r^2}(z\,dt - t\,dz + x\,dy + y\,dx) = \frac{1}{2}(d\psi + \cos\theta\, d\varphi),$$

где $r^2 = t^2 + (\vec{x})^2$, а θ, φ, ψ - углы Эйлера на сфере S^3:

$$0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad 0 \le \psi \le 4\pi.$$

G_x, G_y, G_z представляют собой I-формы, которые подчиняются уравнениям структуры Маурера - Картана

$$dG_x = G_y \wedge G_z .$$

Метрика плоского евклидова пространства может тогда быть переписана в виде

$$ds^2 = dr^2 + r^2 (G_x^2 + G_y^2 + G_z^2).$$

Рассмотрим теперь случай произвольной римановой метрики $g_{\mu\nu}(x)$, которая удовлетворяет уравнениям Эйнштейна

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)\, dx^\mu dx^\nu .$$

Введем тетрадные функции $h^a_\mu(x)$, тогда

$$g_{\mu\nu}(x) = h^a_\mu h^b_\nu \delta_{ab}, \text{ и } ds^2 = \sum_{a=0}^{3} (h^a)^2, \text{ где } h^a = h^a_\mu dx^\mu .$$

Напомним ряд соотношений между тетрадными коэффициентами и коэффициентами вращения Риччи (или римановой связностью):

$$dh^a + \omega^a{}_b \wedge h^b = 0, \quad \omega_{ab} = \omega_{\mu ab}\, dx^\mu, \quad (40.3)$$

$$\omega_{ab} = -\omega_{ba} .$$

2-форма кривизны определяется как

$$R^a{}_b = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b\,, \tag{40.4}$$

где $R^a{}_b = 1/2\, R^a{}_{b\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu = \frac{1}{2} R^a{}_{bcd}\, h^c \wedge h^d$.

Дуальную 2-форму к R^{ab} зададим следующим образом:

$$^*R_{ab} = \frac{1}{2}\varepsilon_{abcd} R^{cd}. \tag{40.5}$$

Уравнения Эйнштейна будут иметь вид

$$R_{ab} = 0, \tag{40.6}$$

а условие самодуальности (антисамодуальности)

$$R_{ab} = \pm\, ^*R_{ab}. \tag{40.7}$$

Условие (40.7) является уравнением второго порядка на h^a_μ, которое можно записать как уравнение первого порядка для $\omega^a{}_b$, если учесть, что $\omega^0{}_i = \pm 1/2\, \varepsilon_{ijk}\, \omega^{jk}$. Тогда (40.7) выполняется, если

$$\omega_{ab} = \pm\, ^*\omega_{ab}\,,\quad ^*\omega_{ab} = \frac{1}{2}\varepsilon_{abcd}\,\omega^{cd}. \tag{40.8}$$

Заметим также, что при $O(4)$-преобразованиях

$$h^a = (L^{-1})^a_b\, h^b,\quad L \in O(4)$$

I-форма связности и 2-форма кривизны преобразуются по следующим законам:

$$\omega'^a{}_b = (L^{-1})^a_c\, \omega^c{}_d L^d{}_b + (L^{-1})^a_c\, dL^c{}_d,$$

$$R'^a{}_b = (L^{-1})^b_c\, R^c{}_d\, L^d{}_b,$$

т.е. ω^{ab} ведет себя как $O(4)$-калибровочное поле. Полезно будет привести здесь в виде таблицы соотношения различных величин в теории Янга - Миллса с их аналогами в теории гравитации Эйнштейна.

	Теория Янга - Миллса	Теория Эйнштейна
Динамические переменные	$A^a_\mu(x)$	$h^a_\mu(x),\ \omega^{ab}(x)$
Метрика	—	$g_{\mu\nu}(x)$
Уравнения структуры	—	$dh^a + \omega^a{}_c \wedge h^c = 0$

	Теория Янга – Миллса	Теория Эйнштейна
Связность	$A = A^a_\mu \frac{\sigma_a}{2i} dx^\mu$	$\omega^a{}_b = \omega_\mu{}^a{}_b\, dx^\mu$
Кривизна	$F = dA + A\wedge A$	$R^a{}_b = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c\wedge\omega^c{}_b = \frac{1}{2} R^a{}_{bcd}\, h^c\wedge h^d$
Дуальная кривизна	${}^*F^a_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$	$R_{abcd} = \frac{1}{2}\varepsilon_{abmn} R^{mn}{}_{cd}$
Дуальная связность	—	${}^*\omega^{ab} = \frac{1}{2}\varepsilon^{abcd}\omega_{cd}$
Тождество Бианки	$DF = dF + A\wedge F - F\wedge A = 0$	$DR^a{}_b = dR^a{}_b + \omega^a{}_c\wedge R^c{}_b - R^a{}_c\,\omega^c{}_b = 0$
Уравнение Эйлера	$d{}^*F + A\wedge{}^*F - {}^*F\wedge A = 0$	$R^a{}_b\wedge h^b = 0 \to R^a{}_{cb}{}^c = 0$
Уравнения самодуальности	$F = \pm{}^*F$	$R_{ab} = \pm{}^*R_{ab}$ $\omega_{ab} = \pm{}^*\omega_{ab}$

Теперь рассмотрим процедуру нахождения инстантонных решений, а именно, поскольку плоская метрика удовлетворяет очевидно и уравнениям Эйнштейна, и условию дуальности, ее можно считать инстантоноподобной, тогда другие инстантоноподобные метрики, которые относятся к IX типу по Бианки, будут иметь вид

$$ds^2 = f^2(r^2)\,dr^2 + a^2(r^2)\sigma_x^2 + b^2(r^2)\sigma_y^2 + c^2(r^2)\sigma_z^2. \quad (40.9)$$

Приведем примеры некоторых метрик, относящихся к этому типу.

<u>МЕТРИКА ЭГУЧИ – ХАНСОНА</u>

$$ds^2 = f^2(r)\,dr^2 + r^2(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + g^2(r)\sigma_z^2). \quad (40.10)$$

Если выбрать тетрады в виде $h^a = \{f(r)dr,\ r\sigma_x,\ r\sigma_y,\ rg(r)\sigma_z\}$, тогда коэффициенты связности будут

$$\omega^1{}_0 = \frac{1}{rf}h^1,\quad \omega^2{}_0 = \frac{1}{rf}h^2,\quad \omega^3{}_0 = \left[\frac{1}{rf} + \frac{g'}{gf}\right]h^3,$$

$$\omega^2{}_3 = \frac{g}{r}h^1,\quad \omega^3{}_1 = \frac{g}{r}h^2,\quad \omega^1{}_2 = \frac{2-g^2}{rg}h^3.$$

Откуда условие самодуальности приводит к следующим уравнениям:

$$fg = 1,\quad g + rg' = f(2-g^2),$$

решение которых имеет вид

$$g^2(r)=f^{-2}(r)=1-\left(\frac{a}{r}\right)^4,$$

где a - некоторая константа. Получившаяся метрика

$$ds^2=\frac{dr^2}{1-\left(\frac{a}{r}\right)^4}+\frac{r^2}{4}\left(1-\left(\frac{a}{r}\right)^4\right)(d\psi+\cos\theta d\varphi)^2+\frac{r^2}{4}(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)$$

сингулярна при $r=a$. Чтобы избавиться от этого, считают, что угол Эйлера ψ изменяется от 0 до 2π, а не до 4π. Группа движений пространства с такой метрикой будет $U(2)$.

МЕТРИКА ШВАРЦШИЛЬДА

Запишем эту метрику в привычном виде

$$ds^2=\left(1-\frac{2m}{r}\right)dt^2+\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2).$$

Метрика Шварцшильда сингулярна на горизонте $r=2m$. Для того чтобы избавиться от сингулярности, считают, что временная координата t изменяется периодически с периодом $8\pi m$, тогда радиальная координата изменяется от $2m$ до ∞. Такое многообразие имеет топологию $R^2\times S^3$ и группу движений $O(2)\times O(3)$.

Инстантоноподобная метрика ТАУБА - НУТ.

Эта метрика имеет вид

$$ds^2=\frac{1}{4}\frac{r+m}{r-m}dr^2+\frac{1}{4}(r^2-m^2)(d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2)+$$
$$+m^2\frac{r-m}{r+m}(d\psi+\cos\theta d\varphi)^2,$$

m - некоторая константа. Метрика сингулярна при $r=m$. От этой сингулярности можно избавиться, считая время τ, которое связано с r соотношением

$$d\tau^2=\frac{1}{4}\left(\frac{r+m}{r-m}\right)dr^2,$$

периодической функцией с периодом $8\pi m$.

МЕТРИКА ФУБИНИ - СТАДИ

Эта метрика получена как самодуальное решение уравнений Эйнштейна с космологическим членом $\Lambda>0$

$$R_{ab}=\Lambda g_{ab}. \qquad (40.II)$$

Простейшим примером такой метрики является индуцированная метрика на сфере S^4 радиуса $\sqrt{3/\Lambda}$, погруженной в евклидово пространство $\mathbb{R}^5$. Это – метрика пространства де Ситтера. Группой движений такого пространства является $O(5)$.

Следующим примером самодуального решения уравнений (40.II) является стандартная кэллеровская метрика на проективном пространстве $\mathbb{C}P^2$, которая может быть записана в координатах (z_1, z_2, z_3) пространства $\mathbb{C}^3-\{0\}$. Группой движений такого пространства является $SU(3)/\mathbb{Z}_3$. При переходе к координатам (r, φ, θ, ψ), связанным с координатами $z_{1,2,3}$ соотношениями

$$\frac{z_1}{z_3} = r\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\exp\frac{i(\psi+\varphi)}{2},$$

$$\frac{z_2}{z_3} = r\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\exp i\frac{(\psi-\varphi)}{2},$$

эта метрика примет вид

$$ds^2 = dr^2\left(1+\frac{1}{6}\Lambda r^2\right)^{-2} + \frac{1}{4}r^2\left(1+\frac{1}{6}\Lambda r^2\right)^{-2}(d\psi+\cos\theta\, d\varphi)^2 +$$

$$+\frac{1}{4}r^2\left(1+\frac{1}{6}\Lambda r^2\right)^{-1}(d\theta^2+\sin^2\theta\, d\varphi^2).$$

Все вышеприведенные метрики могут быть охарактеризованы значениями двух топологических зарядов – числа Эйлера и топологической сигнатурой многообразия X^4. Для компактного многообразия эти топологические числа имеют вид

$$\chi = \frac{1}{128\pi^2}\int\limits_{X^4} R_{abcd}R_{mnkl}\,\varepsilon^{abmn}\varepsilon^{cdkl}\sqrt{+g}\,d^4x, \qquad (40.12)$$

$$Sgn(X^4) = \frac{1}{96\pi^2}\int\limits_{X^4} R_{abcd}R^{ab}{}_{mn}\,\varepsilon^{cdmn}\sqrt{g}\,d^4x \qquad (40.13)$$

Для некомпактных многообразий необходимо добавить к формулам (40.12) и (40.13) граничные члены. К χ надо добавить

$$\frac{1}{128\pi^2}\int R_{abcd}K^{ac}n^b n^d + 64\det|K^a{}_b|\sqrt{h}\,d^3x,$$

а к Sgn прибавить

$$-\frac{1}{48\pi^2}\int R_{abcd}\,\varepsilon^{cdmn}n^a n_m K^b_n\sqrt{h}\,d^3x - \eta,$$

где $K_{ab} = n_{f;c}h^f_a h^c_b$, $h_{ab} = g_{ab} - n_a n_b$, n_a – внешняя нормаль к граничной гиперповерхности S в X^4, а η конструируется из собственных значений определенных дифференциальных операторов на S.

Приведем значения χ и $Sgn = \frac{1}{3} p_1$ для описанных выше метрик.

	χ	Sgn
Метрика Эгучи - Хансона	2	I
Метрика Шварцшильда	2	0
Метрика Тауба - НУТ	I	0
Метрики класса Фубини - - Стади:		
S^4 (де Ситтера)	2	0
CP^2	3	-I

На этом мы закончим изложение основных элементов алгебраической топологии и ее применения в физических моделях. В пособие не вошел целый ряд важных и интересных разделов, изучение которых по мере необходимости, получив уже предварительную подготовку в объеме настоящего пособия, можно осилить самостоятельно, в том числе, по рекомендуемой ниже литературе.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведем конкретные значения гомотопических групп некоторых пространств, часто встречающихся в физических моделях.

Гомотопические группы сфер

Сферы	Гомотопические группы π_{n+k}				
S^n	$k<0$	0	1	2	3
S^1	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0
S^2	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$
S^3	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$
S^4	0	$\mathbb{Z}$		$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_{12}$

Фундаментальные группы

X	$\pi_1(X)$	Примечание
$SO(n)$	$\mathbb{Z}_2\ (n>2)$	$\pi_1(SO(2))=\mathbb{Z}$
$U(n)$	$\mathbb{Z}$	
$SU(n)$	0	
$SU(n)/\mathbb{Z}_n$	$\mathbb{Z}_n$	
$Sp(2n)$	0	
$\mathbb{R}P^n$	$\mathbb{Z}_2\ (n>1)$	$\pi_1(\mathbb{R}P^1)=\mathbb{Z}$
$\mathbb{C}P^n$	0	

Высшие гомотопические группы

X	$\pi_2(X)$	$\pi_3(X)$
Простые группы Ли	0	$\mathbb{Z}$
$\mathbb{R}P^n$	$\pi_2(S^n)$	$\pi_3(S^n)$
$\mathbb{C}P^n$	$\pi_2(S^{2n+1}/S^1)=\mathbb{Z}$	

Гомотопические группы классических групп

r	I	2	3	4	5	6	7	$r>7$
$\pi_r(U(1))$	$\mathbb{Z}$	0	0					
$\pi_r(U(2))$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$					
$\pi_r(U(n>2))$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	$\pi_{r \bmod 2}(U(n))$
$\pi_r(SO(2))$	$\mathbb{Z}$	0	0					
$\pi_r(SO(3))$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$					
$\pi_r(SO(4))$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$					
$\pi_r(SO(n\geq 7))$	$\mathbb{Z}_2$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\pi_{r \bmod 8}(SO(2))$

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Борисевич Ю.Г. и др. Введение в топологию. М.: Высшая школа, 1980.

Мищенко А.С., Фоменко А.Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1980.

Рохлин В.А., Фукс Д.Б. Начальный курс топологии. Геометрические главы. М.: Наука, 1977.

Милнор Дж., Сташеф Дж. Характеристические классы. М.: Мир, 1979.

Масси У. Теория гомологий и когомологий. М.: Мир, 1981.

Маклейн С. Гомология. М.: Мир, 1966.

Современные проблемы математики. Т.17 (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР), М.: 1980.

Ребби К. Солитоны. - Успехи физич. наук, 1980, т.130, №2, с.329-356.

Солитоны в действии / Под общ. ред. К.Лонгрена и Э.Скотта. М.: Мир, 1981.

Теория солитонов. Метод обратной задачи / Под общ. ред. С.П.Новикова. М.: Наука, 1980.

Eguchi T., Gilkey P., Hanson A. Gravitation, gauge theories and differential geometry. - Physics Reports, 1980, v.66, №6, p.213-393.

Boya L., Carinena J., Mateos J. Homotopy and solitons. - Fortshritte der Physik, 1978, v.26, p.175-214.

Gibbons G., Hawking S. Classification of gravitational instanton symmetries. - Commun. Math. Phys., v.66, p.291-310.

УКАЗАТЕЛЬ ТЕРМИНОВ