

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Гусак Галина Валерьевна

**Изучение контактного взаимодействия колеса и дороги
с использованием модели стержневого протектора**

Специальность 01.02.01 – теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2021

Работа выполнена на кафедре теоретической механики и мехатроники
механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова

- Научные руководители** – Вильке Владимир Георгиевич,
доктор физико-математических наук, профессор

Кулешов Александр Сергеевич,
кандидат физико-математических наук
- Официальные оппоненты** – Бардин Борис Сабирович,
доктор физико-математических наук, профессор РАН,
заведующий кафедрой мехатроники и теоретической
механики Московского авиационного института
(национального исследовательского университета)

Шатина Альбина Викторовна,
доктор физико-математических наук, доцент,
профессор кафедры высшей математики
Института кибернетики «МИРЭА – Российского
технологического университета»

Климина Любовь Александровна,
кандидат физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник
Лаборатории навигации и управления 302
НИИ механики МГУ

Защита диссертации состоится «14» мая 2021 г. в 17 часов на заседании диссертационного совета МГУ.01.10 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, Главное здание МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-16.

Е-mail: dissovet.msu.01.10@math.msu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на сайте ИАС «ИСТИНА»: <https://istina.msu.ru/dissertations/361637263/>

Автореферат разослан «12» апреля 2021 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук

А.А. Зобова

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования и степень ее разработанности

Колесные транспортные средства являются неотъемлемой частью современной жизни. Большая часть грузовых и пассажирских перевозок приходится на колесный транспорт, автомобильный и железнодорожный, а также авиацию, где колеса играют важную роль при взлете и посадке. Колесами оснащается сельскохозяйственная, строительная и другая специальная техника на Земле и за ее пределами.

Вследствие широкого распространения колесных машин, изучение взаимодействия колеса и дороги становится чрезвычайно важным, так как управляемое движение сообщается колесному экипажу только через контакт между колесом и опорной поверхностью. Возникновение проскальзывания и заноса во время движения может привести к аварийной ситуации. Кроме того, изучение воздействия сил трения на поверхность колес необходимо для расчета их износа. Таким образом, представление о процессах, имеющих место в зоне контакта, необходимо для лучшего понимания динамики колесных транспортных средств, повышения их безопасности и экономичности.

Модели, позволяющие описывать деформации колеса, применяются в задачах, где необходимо учитывать распределение сил в неточечной области контакта с дорогой, относительное проскальзывание поверхностей, а также рассеяние энергии при качении.

Распространенным типом деформируемого колеса является колесо с пневматической шиной. Существующие математические модели шин очень разнообразны. Они имеют различную сложность математического описания, различную точность при сравнении с экспериментом и предназначены для разных целей. При моделировании движения транспортных средств как правило используются простые модели шин, в то время как сложные модели находят применение в детальном анализе характеристик шины с целью оптимизации ее конструкции.

Эмпирические модели шин обобщают имеющиеся экспериментальные данные с помощью таблиц или математических формул и определенных схем интерполяции. Формулы имеют заданную структуру, а коэффициенты при переменных обычно оцениваются с помощью процедур регрессии так, чтобы обеспечить наилучшее соответствие опытным данным. «Магическая формула» Г. Пасейки относится к этой группе.

Простые физические модели, основанные на неких механических аналогах, служат для лучшего понимания поведения шин. К этой группе относятся «щеточные» модели: модель Г. Фромма и ее модификации. Представление периферии колеса в виде набора деформируемых элементов, стержней или пружинок, с одной стороны, позволяет учитывать такие важные аспекты контактного взаимодействия как сопротивление качению, частичное или полное скольжение в пятне контакта, зависимость силы трения от относительного проскальзывания, а с другой стороны, допускает не слишком громоздкое математическое описание.

Сложные физические модели создаются с целью более подробного анализа шины. К этой категории относятся сложные модели на основе метода конечных элементов. Моделирование покрышки методами механики сплошной среды представляет значительную сложность в силу: во-первых, неоднородности шины; во-вторых, необходимости решения систем уравнений с частными производными для описания деформирования каждого отдельного конечного элемента протектора и взаимодействия

элементов. Модели этого типа обсуждаются в работах С.В. Шешенина, Д.Ю. Погорелова и других авторов.

Подробное описание различных моделей деформируемых колес приведено в обзоре литературы.

Постоянное совершенствование конструкции пневматических шин, приводящее к изменению их динамических свойств, а также создание новых типов колес (например, колес с безвоздушными шинами), делают актуальной разработку новых математических моделей. Многообразие теоретических исследований и отсутствие единого универсального подхода свидетельствуют о том, что в настоящий момент объяснение законов поведения деформируемого колеса далеко от завершения.

Цели и задачи диссертационной работы

Целью диссертационной работы является аналитическое описание статического и динамического взаимодействия колеса с деформируемой периферией и жесткой дороги.

Задачи заключаются в определении для деформируемого колеса таких параметров контакта с дорогой как границы зоны контакта, наличие или отсутствие проскальзывания, величина и направление возникающей реакции, потери энергии за счет трения; а также в анализе динамики колеса с учетом проскальзывания в контактной области в зависимости от сил и момента, приложенных к центру диска, жесткостных и геометрических характеристик протектора, трения с дорогой. Рассматриваются следующие типы движения: качение без проскальзывания, качение с частичным проскальзыванием, движение «юзом» – с проскальзыванием во всей контактной области. Изучается влияние угла развала на реакции в зоне контакта.

Научная новизна

Предложена новая модель колеса с деформируемой периферией, с помощью которой выстроено аналитическое описание взаимодействия протектора с дорогой в заранее неизвестной области контакта. Колесо представляется в виде твердого диска, окруженного по периметру набором радиально расположенных упругих стержней, часть из которых испытывает деформации сжатия и изгиба вследствие силового воздействия со стороны опорной плоскости. Деформации колеса определяются как совокупность деформаций элементов протектора. Сначала рассматривается дискретная модель с конечным числом стержней, затем осуществляется переход к непрерывной модели протектора. Стержневой протектор служит моделью среды, поглощающей энергию, и обуславливающей тем самым сопротивление качению.

Границы области контакта, участков сцепления и проскальзывания внутри нее, величины и направления сил реакции считаются заранее неизвестными и определяются в ходе исследования в зависимости от жесткостных и геометрических характеристик протектора, а также сил и момента, приложенных к диску колеса.

Согласно способу моделирования периферии колеса предлагаемая модель может быть отнесена к классу щеточных, однако, благодаря конструктивным особенностям, позволяет использовать меньшее количество гипотез в сравнении с предшествующими моделями данной группы. Существенное отличие заключается в форме «основания щетки». В таких известных моделях как модель Г. Фромма или модель И.В. Новожилова основание щетки полагалось плоским в области контакта, что упрощало вычисления, однако, в силу «идентичности» щетинок в зоне контакта за счет их параллельного

расположения, требовалось введение гипотезы о характере распределения вертикальной нагрузки в пятне контакта. В модели, предлагаемой в диссертации, не делается предположений об изменении дугообразной формы диска колеса на участок прямой линии вблизи пятна контакта и параллельности «щетинки». Поэтому основание «щетинки» из стержней, образующих протектор, имеет форму дуги окружности, вследствие чего при нагружении колеса стержни протектора испытывают разную нагрузку, зависящую от их положения на диске. Возможность анализа «индивидуальных» стержней позволяет вычислить (а не ввести гипотетически) распределение сил в контактной области, а также аналитически определить границы областей сцепления и скольжения в зоне контакта в рамках выбранной модели трения между элементом протектора и опорной поверхностью.

Теоретическая и практическая значимость

Модель колеса со стержневым протектором может быть использована для аналитических исследований и приближенного моделирования таких систем с подвижным контактным сопряжением как «колесо с пневматической шиной – дорожное покрытие» или «железнодорожное колесо – рельс». Описанная модель может быть реализована в вычислительных комплексах для проведения на ее основе расчета таких параметров упругого взаимодействия как деформации колеса, силовые факторы, границы областей проскальзывания, рассеяние энергии в пятне контакта с дорогой.

Найденные в рамках модели стержневого протектора соотношения могут применяться как для верификации более сложных моделей деформируемых колес, так и для построения математических моделей, описывающих динамику транспортного средства в целом.

Теоретическую ценность представляет разработанный в диссертации метод расчета параметров контактного взаимодействия колеса и шероховатой дороги в зависимости от геометрии и жесткости протектора. В частности, алгоритм, с помощью которого возможно предсказание появления и определение границ зон проскальзывания в пятне контакта в зависимости от свойств протектора, линейной и угловой скоростей движения. Модель стержневого протектора наглядно иллюстрирует механизм возникновения трения качения как следствия перераспределения сил в зоне контакта нагруженного деформированного колеса с опорной поверхностью.

Результаты диссертации могут быть использованы в исследованиях, проводимых в МГУ имени М.В. Ломоносова, МФТИ, НИИ Механики МГУ, Институте проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН, Институте прикладной математики имени М.В.Келдыша РАН и других научно-исследовательских центрах.

Методология диссертационного исследования

Используемый в диссертации метод исследования контактного взаимодействия основан на математическом описании упрощенной физической модели системы с подвижным контактным сопряжением «деформируемое колесо–дорога».

Периферия колеса представляется в виде деформируемого стержневого протектора. Описание взаимодействия элементов протектора с опорной поверхностью проводится в соответствии с законом сухого трения Кулона. Связь между силами, действующими со стороны дороги на участок периферии колеса, и его перемещением, определяется из принципа возможных перемещений в рамках линейной теории продольно-изгибных деформаций стержней.

Для описания переходных процессов в деформируемом протекторе колеса используется метод разделения движений, согласно которому процессы перемещения элементов протектора рассматриваются в квазистатическом приближении. В основе данного метода лежит предположение о том, что времена, характеризующие переходные процессы при движении элементов протектора, значительно меньше времён, характеризующих динамику самого колеса и связанного с ним транспортного средства.

Положения, выносимые на защиту

1. Трение в зоне контакта уменьшает вертикальную просадку колеса, статически нагруженного фиксированным весом.
2. В случае нулевого угла развала при статической нагрузке весом в центре зоны контакта всегда существует конечная область прилипания, размер которой не зависит от просадки колеса. Для малой зоны контакта ее линейный размер прямо пропорционален коэффициенту сухого трения между протектором и дорогой. В случае ненулевого угла развала при той же статической нагрузке колеса существуют значения параметров, при которых вся зона контакта становится областью проскальзывания.
3. Для рассмотренного частного случая соотношения жесткостей протектора в продольном и поперечном направлениях на стационарном движении колеса с постоянными линейной и угловой скоростями суммарная сила трения достигает равного нуля минимума в случае качения без проскальзывания; сила трения увеличивается непрерывно с ростом размера области проскальзывания в зоне контакта; при движении юзом сила трения максимальна и прямо пропорциональна весу колеса.

Достоверность результатов

Все теоретические результаты получены на основе фундаментальных положений теоретической механики и теории упругости с помощью строгих математических методов. О достоверности научных результатов свидетельствует соответствие полученных выводов результатам классических и новых исследований по рассматриваемой тематике.

Апробация результатов

Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

- XVII, XXIII Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (Москва, 2010, 2016)
- 55-й научной конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук» (Москва-Долгопрудный, 19-25 ноября 2012 г.)
- X Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем» им. Ю.И. Неймарка (Нижний Новгород, 26-29 сентября 2016 г.)
- XII Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Уфа, 20-24 августа 2019 г.)
- Всероссийской конференции молодых ученых-механиков (Сочи, «Буревестник» МГУ, 3-13 сентября 2020 г.)

- Международной научной конференции по механике «IX Поляховские чтения» (Санкт-Петербург, 9-12 марта 2021 г.)

и на научно-исследовательских семинарах:

- семинар секции теоретической механики имени профессора Н.Н. Поляхова Санкт-Петербургского Дома ученых РАН (под руководством проф. А.А. Тихонова и проф. М.П. Юшкова)
- семинар имени академика А.Ю. Ишлинского при Научном совете РАН по механике систем (под руководством акад. В.Ф. Журавлева и акад. Д.М. Климова)
- семинар имени профессора В.В. Белецкого по динамике относительного движения (под руководством проф. Ю.Ф. Голубева, проф. В.Е. Павловского, доц. К.Е. Якимовой и доц. Е.В. Мелкумовой, мехмат МГУ)
- семинар имени академика В.В. Румянцева по аналитической механике и теории устойчивости (под руководством проф. А.В. Карапетяна и доц. А.А. Зобовой, мехмат МГУ)

Публикации

Материалы диссертации опубликованы в 8 печатных работах, из них 3 статьи в рецензируемых журналах [1 - 3] и 5 статей в сборниках трудов конференций [4 - 8].

Личный вклад автора

Постановки задач и методы их исследования предложены научными руководителями. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, обзора литературы, трех глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации 141 страница, из них 128 страниц текста, включая 36 рисунков. Библиография включает 141 наименование на 13 страницах.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы, сформулированы цель и задачи работы, показаны научная новизна, практическая и теоретическая значимость исследования, представлены положения, выносимые на защиту, приведено краткое содержание диссертации.

В обзоре литературы проводится обзор научных работ, посвященных описанию контактного взаимодействия тел при качении, разработке математических методов решения контактных задач, а также созданию и применению различных подходов к моделированию автомобильных и железнодорожных колес.

В первой главе выстраивается математическое описание модели колеса со стержневым протектором. С помощью указанной модели проводится расчет характеристик контактного взаимодействия статически нагруженного колеса и опорной поверхности. Сначала рассматривается нагрузка только вертикальной силой (весом), далее, дополнительное нагружение крутящим моментом. Моделируется механизм

рассеяния энергии в контактной области при последовательной нагрузке и разгрузке колеса. В первой главе считается, что колесо расположено вертикально (без развала), задачи решаются в двумерной постановке.

Деформируемое колесо моделируется механической системой, состоящей из абсолютно твердого диска радиуса r и деформируемого протектора толщины h . Радиус колеса вместе с протектором: $R = r + h$. Протектор представлен множеством упругих стержней, закрепленных на диске. Ось недеформированного стержневого элемента протектора направлена вдоль радиуса диска и перпендикулярна диску в точке закрепления стержня. Внешние концы стержней либо свободны, либо контактируют с дорогой. Контакт происходит на концах стержней, в одной точке для каждого стержня, и описывается законом сухого трения Кулона. Дорога считается недеформируемой и при двумерной постановке задачи задается прямой линией (рис.1а).

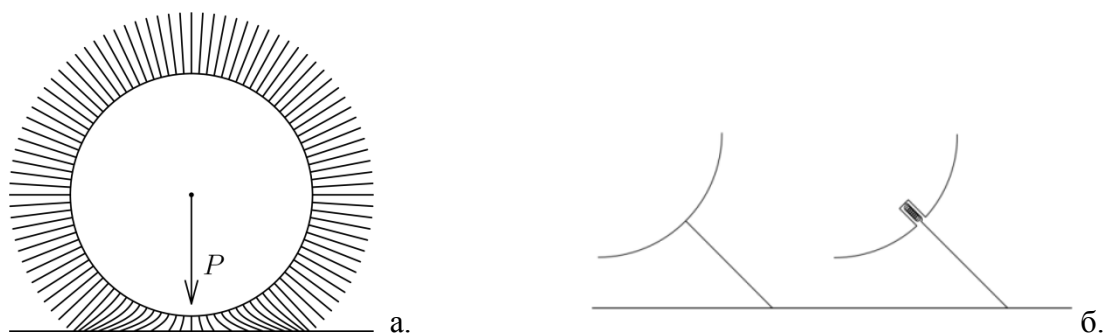


Рис.1. (а): Модель колеса. (б): Способы закрепления стержней

Элемент протектора – деформируемый линейно упругий стержень длины h , который имеет продольную жесткость N и поперечную жесткостью T . В работе рассматривается два возможных способа закрепления стержня на диске. Первый способ – это жесткое закрепление (рис.1б, слева). При втором способе закрепления (рис.1б, справа) в основании стержня расположена пружина жесткости C , позволяющая стержню смещаться вдоль радиуса диска. Считается, что это смещение происходит только в продольном направлении и достаточно мало, чтобы не влиять на изгиб стержня. В работе показано, что жесткое закрепление является предельным случаем закрепления с пружиной при $C \rightarrow \infty$.

Нагрузка колеса вертикальной силой (весом)

При приложении к центру диска вертикальной нагрузки P происходит смещение центра колеса вниз по вертикали на величину Rx , часть стержней протектора вступает в контакт с дорогой, деформируясь под действием сил реакции. Деформации стержней описываются в рамках линейной теории продольных и изгибных деформаций. Чем сильнее смещается центр колеса, тем больше стержней попадает в зону контакта.

Конец стержня, вступающий в контакт с дорожным покрытием, испытывает силовое воздействие со стороны дороги. Это воздействие представлено двумя силами – нормальной к плоскости дороги силой F_1 , и касательной силой F_2 , обусловленной сухим трением. Если выполнено условие

$$|F_2| \leq f \cdot |F_1|, \quad (1)$$

где f – коэффициент сухого трения, то проскальзывание в точке контакта отсутствует. В противном случае, конец стержня переместится вдоль дороги на величину Ry ,

достаточную для перераспределения нормальных и касательных сил. В результате этого перемещения возникнет равенство $|F_2| = f \cdot |F_1|$. Согласно методу разделения движений, описанный выше процесс движения стержней, образующих протектор, рассматривается в квазистатическом приближении, так как времена, характеризующие переходные процессы при движении стержней протектора, значительно меньше времён, характеризующих динамику самого колеса и связанного с ним транспортного средства.

Введем неподвижную систему координат OX_1X_2 , направив ось OX_1 вертикально вниз, а ось OX_2 горизонтально. Относительно системы OX_1X_2 прямолинейный участок дороги задается уравнением $X_1 = R = r + h$ (рис.2). Также введем подвижную систему координат Cx_1x_2 с началом в центре колеса, полагая ось Cx_1 направленной по вертикали к дороге, ось Cx_2 – по горизонтали, а плоскость колеса совпадающей с плоскостью OX_1X_2 . Положение элемента протектора на диске задается угловой координатой φ , отсчитываемой от вертикали (рис.2).

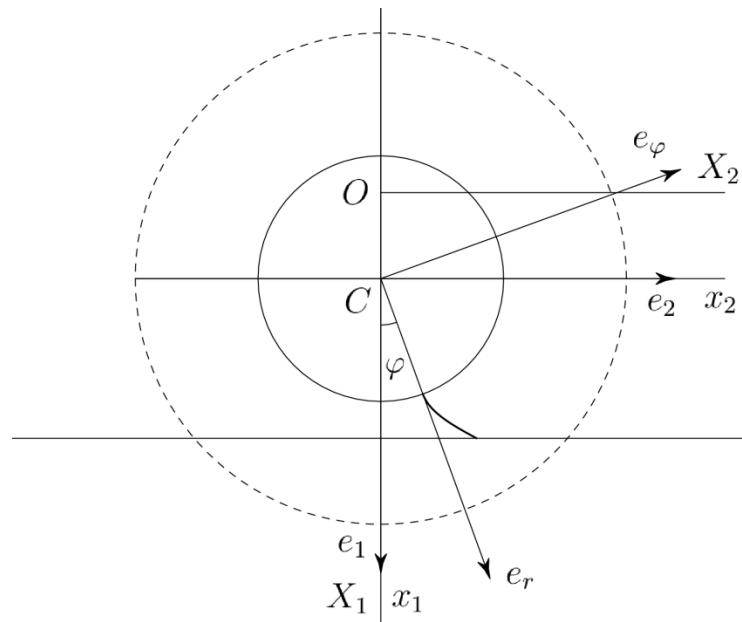


Рис.2. Деформация стержня протектора при вертикальном смещении диска.
Системы координат

Зависимость компонент реакции, действующей на стержень с координатой φ в точке контакта с дорогой, от вертикального смещения центра колеса и жесткостных характеристик стержня находим из принципа возможных перемещений. В случае жесткого закрепления стержней имеем:

$$\begin{aligned} F_1 &= -\frac{NR}{h} [(1 + \zeta \operatorname{tg}^2 \varphi) z(\varphi, x) + y(\zeta - 1) \operatorname{tg} \varphi] \cos^2 \varphi, \\ F_2 &= \frac{NR}{h} [z(\varphi, x)(\zeta - 1) \operatorname{tg} \varphi + y(\operatorname{tg}^2 \varphi + \zeta)] \cos^2 \varphi, \quad \zeta = \frac{3T}{Nh^2} \end{aligned} \quad (2)$$

а в случае закрепления стержней с пружинками в основании:

$$\begin{aligned} F_1 &= -\frac{NRC}{(Ch+N)} [(1 + \zeta_* \operatorname{tg}^2 \varphi) z(\varphi, x) + y(\zeta_* - 1) \operatorname{tg} \varphi] \cos^2 \varphi, \\ F_2 &= \frac{NRC}{(Ch+N)} [z(\varphi, x)(\zeta_* - 1) \operatorname{tg} \varphi + y(\operatorname{tg}^2 \varphi + \zeta_*)] \cos^2 \varphi, \quad \zeta_* = \frac{3T(Ch+N)}{Nch^3} \end{aligned} \quad (3)$$

где $z(\varphi, x) = x - 1 + \cos \varphi$ имеет смысл смещения конца стержня вдоль вертикальной оси, а ζ и ζ_* – безразмерные параметры, характеризующие жесткость протектора.

Заметим, что формулы (3) переходят в формулы (2) при $C \rightarrow \infty$. То есть жесткое закрепление является частным случаем закрепления с пружиной. В дальнейшем в работе для выражения сил, действующих на участок протектора с координатой φ , по умолчанию используются формулы вида (2), соответствующие жесткому закреплению стержня. Однако все проводимые на основании формул (2) рассуждения могут быть распространены на случай конструкции протектора с пружинками в основаниях стержневых элементов путем замены соответствующих коэффициентов: ζ следует заменить на ζ_* , а коэффициент $\frac{NR}{h}$ заменить на $\frac{NRC}{(Ch+N)}$.

Зона контакта (ЗК) определяется неравенствами:

$$-\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0, \quad \varphi_0 = \arccos(1 - x),$$

где зависимость φ_0 от вертикального смещения колеса x найдена из геометрических соображений. Для случая малого смещения колеса ($x \ll 1$) может быть использована аппроксимация:

$$\varphi_0 = \arccos(1 - x) \approx \sqrt{2x}. \quad (4)$$

Условие отсутствия проскальзывания конца стержня в точке контакта с шероховатой плоскостью в модели сухого трения выражается соотношением (1), которое, после подстановки в него F_1 и F_2 из (2) приобретает вид:

$$|z(\varphi, x)(\zeta - 1)\operatorname{tg} \varphi + y(\operatorname{tg}^2 \varphi + \zeta)| \leq f[(1 + \zeta \operatorname{tg}^2 \varphi)z(\varphi, x) + y(\zeta - 1)\operatorname{tg} \varphi]. \quad (5)$$

Неравенство (5) позволяет найти возможные положения равновесия стержня с координатой φ , соответствующие заданной «просадке» колеса x (положение равновесия стержня определяется величиной y перемещения его конца вдоль дороги). При $f \neq 0$ значение $y(f, \varphi, x, \zeta)$ не определяется однозначно для фиксированных значений параметров f, φ, x, ζ ; однако из (5) может быть найден диапазон $[y_-, y_+]$ (или $[y_+, y_-]$, если $y_+ < y_-$) возможных значений y . При фиксированных f, φ, x, ζ выполнено: $\forall y$ такого что $y \in [y_-, y_+]$, стержень находится в равновесии. Границы указанного диапазона выражаются формулами:

$$y_{\pm} = k_{\pm}(\varphi, f, \zeta) \cdot z(\varphi, x), \quad k_{\pm}(\varphi, f, \zeta) = \frac{(1-\zeta)\operatorname{tg} \varphi \pm f(1+\zeta \operatorname{tg}^2 \varphi)}{\operatorname{tg}^2 \varphi + \zeta \pm f(1-\zeta)\operatorname{tg} \varphi}. \quad (6)$$

В случае отсутствия трения с дорогой ($f = 0$) смещение конца стержня, при котором будет достигнуто равновесие стержня (для фиксированных φ, x, ζ), определяется однозначно ($y = y_0$). Выражение для y_0 получается из формул (6) при подстановке $f = 0$:

$$y_0 = k_0(\varphi, \zeta) \cdot z(\varphi, x), \quad k_0(\varphi, \zeta) = \frac{(1-\zeta)\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg}^2 \varphi + \zeta}. \quad (7)$$

Таким образом, при отсутствии трения диапазон $[y_-, y_+]$ сжимается до одной точки: $y_- = y_+ = y_0$.

Из анализа (7) следует, что направление перемещения y_0 конца стержня определяется значением параметра ζ . От точки первоначального контакта с дорогой конец

стержня будет перемещаться: при $\zeta < 1$ – от центра зоны контакта; при $\zeta > 1$ – к центру зоны контакта. На рисунке 3а приведен пример формы деформированного стержня для колеса с параметрами $r = h = 1$, вертикальным смещением $x = 0.35$ для различных значений ζ . Пунктирной линией обозначена ось недеформированного стержня, точка показывает место первоначального контакта стержня с дорогой.

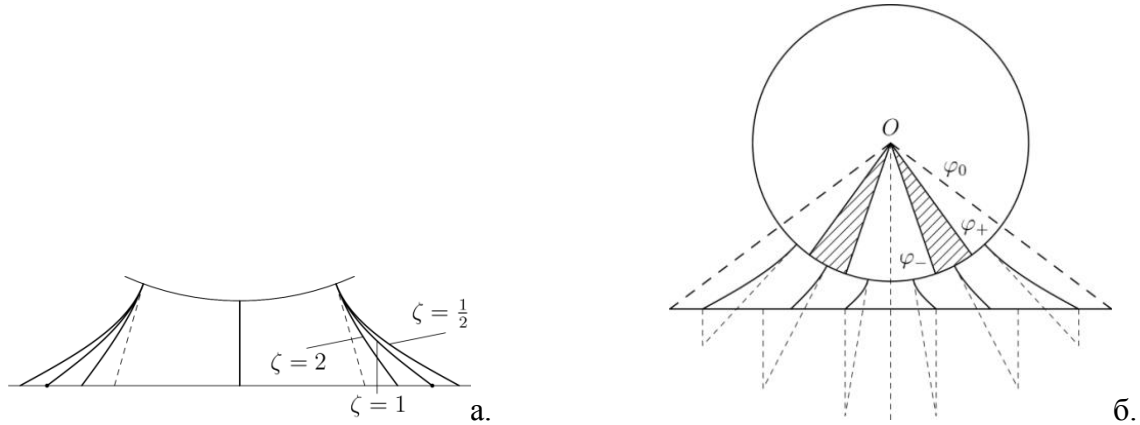


Рис.3. (а): Форма деформированного стержня при $f = 0$ и различных значениях ζ
(б): Зона контакта при $f \neq 0$: области проскальзывания и прилипания

При наличии сухого трения между протектором и дорогой ($f \neq 0$) границы областей проскальзывания определяются неравенствами:

$$\varphi_- < |\varphi| < \varphi_+, \quad \varphi_{\pm} = \arctg \left[\frac{|1-\zeta| \pm \sqrt{(1-\zeta)^2 - 4f^2\zeta}}{2f\zeta} \right]. \quad (8)$$

Соотношения (8) получены из (5) при $y = 0$. На рисунке 3б представлен пример разбиения ЗК на области проскальзывания и прилипания при $\zeta = 4$, $f = 0.7$, $r = h = 1$, $x = 0.4$. Углы φ_0 , φ_- , φ_+ отсчитываются от вертикали. Границы зоны контакта $[-\varphi_0; \varphi_0]$ обозначены пунктирными линиями с началом в точке O . Областям проскальзывания $(-\varphi_+; -\varphi_-)$ и $(\varphi_-; \varphi_+)$ соответствуют заштрихованные сектора. Для каждого из стержневых элементов протектора изображены: деформированная форма (сплошная линия) и недеформированная ось (мелкий пунктир). Проекция конца недеформированной оси стержня на дорогу соответствует точке первоначального контакта данного стержня с поверхностью. Таким образом, из рис.3б видим, что концы стержней из «заштрихованных секторов» сместились относительно точек первоначального контакта; для остальных стержней деформации не сопровождалась горизонтальным перемещением точки контакта.

Зоны проскальзывания концов стержней не возникнут, если выполняется условие:

$$4f^2 > \frac{(1-\zeta)^2}{\zeta}. \quad (9)$$

Приближенная оценка размеров области в зоне контакта, где не будет проскальзывания, в предположении малости угла φ имеет вид:

$$\varphi_- \approx \frac{f}{|1-\zeta|}. \quad (10)$$

Проскальзывание точки контакта приводит к различным величинам восстанавливающих сил при нагрузке и разгрузке стержня, а также к *потере энергии за счет работы сил сухого трения*.

На рис.4 показано изменение y , F_1 , F_2 для стержня из области проскальзывания на цикле нагрузки-разгрузки колеса (а именно, при увеличении $z = x - 1 + \cos \varphi$ и последующем его уменьшении; изменение z равносильно изменению просадки колеса x в силу постоянства φ для выбранного стержня).

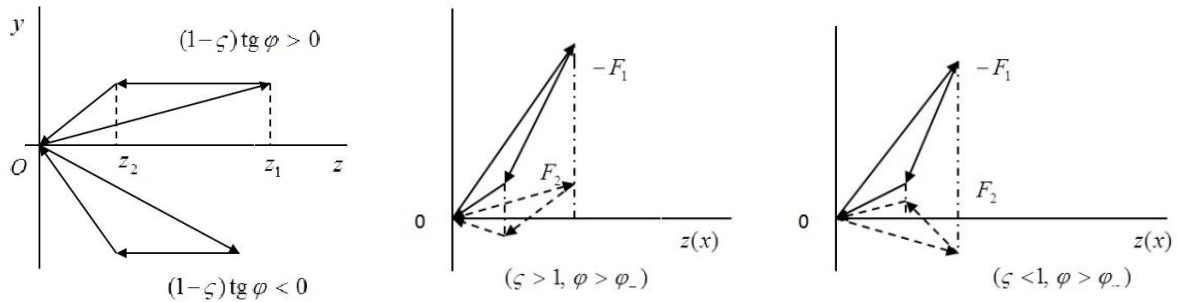


Рис.4. Изменение y , F_1 , F_2 при проскальзывании стержня на цикле нагрузки-разгрузки (для различных ζ)

Изменение каждой из величин y , F_1 , F_2 на цикле происходит по треугольнику (рис.4), при нагрузке система обладает большей жесткостью чем при разгрузке. Таким образом, при наличии проскальзывания, процесс нагрузки и разгрузки стержня обладает гистерезисом и сопровождается потерей энергии.

Для стержня с координатой φ , т.ч. $\varphi_- < \varphi < \varphi_0$, на цикле нагрузки-разгрузки работа силы F_1 равна:

$$\Delta A_1 = \frac{NR^2}{2h} D_1, \quad D_1 = \frac{\min(|k_+|, |k_-|)}{\max(|k_+|, |k_-|)} |(k_+ - k_-)(1 - \zeta) \sin \varphi| (x - 1 + \cos \varphi)^2 \cos \varphi, \quad (11)$$

работа силы трения F_2 :

$$\Delta A_2 = -\frac{NR^2}{2h} D_2, \quad D_2 = 2(\min(|k_+|, |k_-|))^2 (x - 1 + \cos \varphi)^2 (\sin^2 \varphi + \zeta \cos^2 \varphi). \quad (12)$$

Если угол φ , определяющий наклон стержня, мал, то проскальзывание конца стержня отсутствует, и треугольники на рисунке 4 вырождаются в отрезки прямых линий.

Для вычисления *суммарной реакции*, действующей на нагруженное колесо, предложены несколько способов. Первый способ – *дискретная модель протектора* – заключается в суммировании сил, действующих на отдельные стержни (для большого, но конечного числа стержней):

$$P_\Sigma = \sum_j F_{1j}, \quad (13)$$

где F_{1j} – нормальная реакция, действующая на j -й стержень в зоне контакта. Второй способ предполагает переход к *модели непрерывного протектора* и интегрирование распределенных усилий по области контакта. При этом продольная жесткость одного стержня N заменяется на удельную жесткость единицы длины протектора $n = \frac{Ni}{2\pi R}$, где i – общее количество стержней в дискретной модели. Тогда:

$$P = 2 \int_0^{\varphi_0} |F_1| d\varphi = \frac{2nR^2}{h} \int_0^{\varphi_0} [(\cos^2 \varphi + \zeta \sin^2 \varphi)(x - 1 + \cos \varphi) + y(\zeta - 1) \cos \varphi \sin \varphi] d\varphi \quad (14)$$

Проанализируем и сравним P в следующих случаях: 1) при отсутствии проскальзывания, 2) при отсутствии трения, 3) при частичном проскальзывании между протектором и дорогой.

Суммарная реакция при отсутствии проскальзывания

Отсутствие проскальзывания выражается в отсутствии смещения концов стержней вдоль дороги, а именно, в выполнении условия $y = 0$ для всех стержней в зоне контакта. Суммарная реакция в этом случае:

$$P_{no_slip} = \frac{2nR^2}{h} \int_0^{\varphi_0} (\cos^2 \varphi + \zeta \sin^2 \varphi)(x - 1 + \cos \varphi) d\varphi. \quad (15)$$

Более простую, полиномиальную, форму зависимости силы P_{no_slip} от просадки колеса x получим, вычислив приближенное значение интеграла (15) в предположении $x \ll 1$:

$$P_{no_slip} \approx \frac{4nR^2\sqrt{2}}{3h} x^{3/2} \left(1 - \frac{7-8\zeta}{20} x\right). \quad (16)$$

Суммарная реакция при отсутствии трения

При $f = 0$ суммарную реакцию находим по формуле:

$$P_{no_friction} = \frac{2nR^2}{h} \left[\int_0^{\varphi_0} (\cos^2 \varphi + \zeta \sin^2 \varphi)(x - 1 + \cos \varphi) d\varphi - \int_0^{\varphi_0} \frac{(\zeta - 1)^2 \sin^2 \varphi}{\operatorname{tg}^2 \varphi + \zeta} (x - 1 + \cos \varphi) d\varphi \right].$$

Заметив, что первое слагаемое совпадает с P_{no_slip} и введя обозначение ΔP для второго слагаемого, получим:

$$P_{no_friction} = P_{no_slip} - \Delta P. \quad (17)$$

В предположении $x \ll 1$ будем иметь:

$$P_{no_friction} \approx \frac{4\sqrt{2}nR^2}{3h} x^{3/2} \left(1 - \frac{8-9\zeta}{20\zeta} x\right). \quad (18)$$

При этом

$$\Delta P \approx \frac{nR^2}{h} \cdot \frac{8\sqrt{2}(\zeta-1)^2}{15\zeta} x^{5/2}. \quad (19)$$

Соотношение (18) качественно согласуется с результатами контактной задачи Герца, если отбросить малый по сравнению с единицей член в скобках, пропорциональный x .

В задаче Герца не учитывается трение (т.е. $f = 0$). В действительности же возникающие касательные силы влияют на величину нормальной реакции в зоне контакта. Достоинством модели стержневого протектора является то, что она позволяет учитывать влияние трения в зоне контакта на величину возникающих реакций.

При фиксированной просадке колеса x имеем: $P_{no_friction} < P_{no_slip}$. Из оценок для случая малых x : $P_{no_slip} \sim x^{3/2}$, $P_{no_friction} \sim x^{3/2}$, $\Delta P \sim x^{5/2}$ следует, что добавка за счет сил

трения имеет более высокий порядок малости, чем вклад в силу реакции за счет упругости.

Если считать фиксированным вес колеса P и сравнивать просадку в случаях отсутствия трения и отсутствия проскальзывания (т.е. при достаточно большом трении), получим: $x_{no_friction} > x_{no_slip}$. Данный результат означает, что при фиксированном весе колеса наличие трения в зоне контакта уменьшает его вертикальную просадку.

Суммарная реакция при частичном проскальзывании в зоне контакта:

$$P = \frac{2nR^2}{h} \left[\int_0^{\varphi_0} (\cos^2 \varphi + \zeta \sin^2 \varphi)(x - 1 + \cos \varphi) d\varphi + \int_{\varphi_-}^{\varphi_0} y(\zeta - 1) \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \right] \quad (20)$$

Если величина x такова, что угол φ_0 оказывается больше угла φ_+ , то верхний предел во втором интеграле следует заменить углом φ_+ .

Первый интеграл в (20) совпадает с (15), а второй – вносит отрицательную поправку. Второе слагаемое зависит от величины $y(x)$, которая определяется предысторией процесса нагрузки-разгрузки. При нагрузке система обладает большей жесткостью, чем при разгрузке (явление имеет место когда $x > 1 - \cos \varphi_-$).

При малых размерах зоны проскальзывания влияние y на P пренебрежимо мало, в формуле (20) модуль второго слагаемого много меньше модуля первого. При наличии обширных областей скольжения, точность методов численного интегрирования в (20) оказывает существенное влияние на соответствие оценки P , полученной в рамках непрерывной модели протектора (14), результатам, найденным с помощью дискретной модели протектора (13).

Для определения работы внешних сил и реакций связей на цикле нагрузки-разгрузки колеса с протектором в виде распределенной системы стержней необходимо вычислить интегралы по той части зоны контакта, где происходит проскальзывание:

$$A = \frac{nR^3}{h} \int_{\varphi_-}^{\min(\varphi_0, \varphi_+)} (D_1 - D_2) d\varphi$$

где D_1, D_2 соответствуют (11) и (12).

Нагрузка колеса крутящим моментом

Пусть теперь колесо, помимо веса, статически нагружено также крутящим моментом, что выражается в повороте диска на малый угол $\Delta\varphi$ из положения, характеризуемого вертикальной просадкой x , описанного выше (рис.5а). Изучим предельное равновесное состояние колеса (оно соответствует состоянию ведущего колеса перед началом движения).

При повороте по часовой стрелке предельное состояние, соответствующее переходу стержня протектора к проскальзыванию, характеризуется его положением на правой границе y_+ его области положений равновесия $[y_-, y_+]$. Полное скольжение в зоне контакта наступает при $\Delta\varphi > \Delta\varphi_{max}$, где $\Delta\varphi_{max}$ при заданном f определяется как максимум $\Delta\varphi$ по всем стержням в ЗК (см. график на рис.5б).

Буксование колеса возникнет, когда горизонтальная сила реакции, действующая на протектор, превысит предельное значение F_{crit} , которое может быть вычислено как сумма горизонтальных сил реакции для всех стержней, либо как аналогичный интеграл для модели сплошного протектора, в момент, когда поворот колеса $\Delta\varphi$ достигнет значения

$\Delta\varphi_{max}$. Предельный момент, приложенный к центру колеса, при котором наступает полное проскальзывание, будет равен: $M_{crit} = F_{crit}R(1 - x)$.

До достижения горизонтальной силой предельной величины будут существовать элементы протектора, не перешедшие к проскальзыванию, и колесо будет находиться в покое.

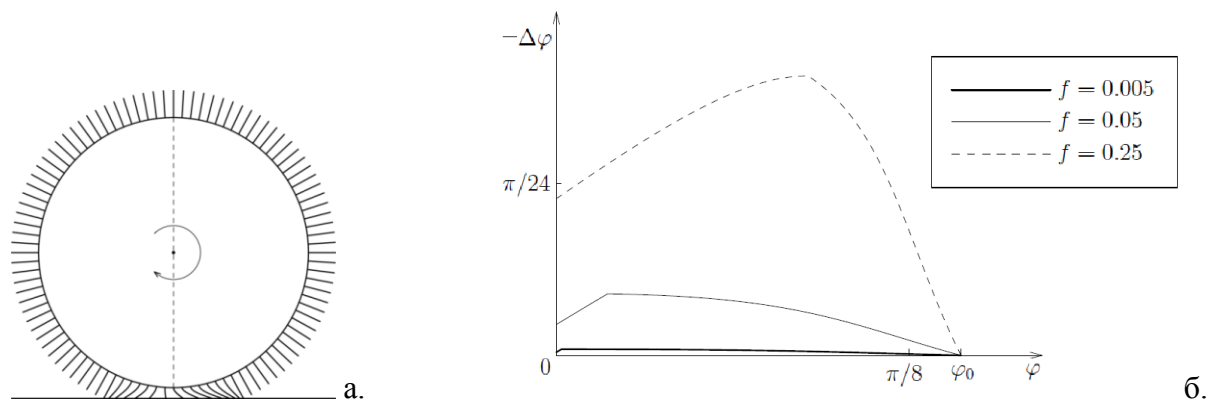


Рис.5. (а): Колесо, нагруженное весом и крутящим моментом

(б): Угол поворота $\Delta\varphi$, необходимый для перехода стержня с изначальной координатой φ к проскальзыванию (для $x = 0.1$, $\zeta = 1/8$ и различных f)

Влияние внешнего момента на силу вертикальной реакции (при значениях $\zeta < 1$) выражается в увеличении вертикальной просадки колеса и расширении зоны контакта, а также в смещении равнодействующей силы нормальной реакции в переднюю часть зоны контакта (рис.6а). Вследствие этого смещения в системе появляется внутренний крутящий момент (пара сил P и F_1 , рис.6б), препятствующий повороту колеса. Движение колеса начнется когда внешний момент M превысит влияние пары сил P и F_1 . До этого (при меньших, но ненулевых значениях M) колесо будет находиться в покое. Таким образом, в отличие от случая жесткого колеса, которое при приложении внешнего момента сразу начинает катиться, для деформируемого колеса существует трение покоя.

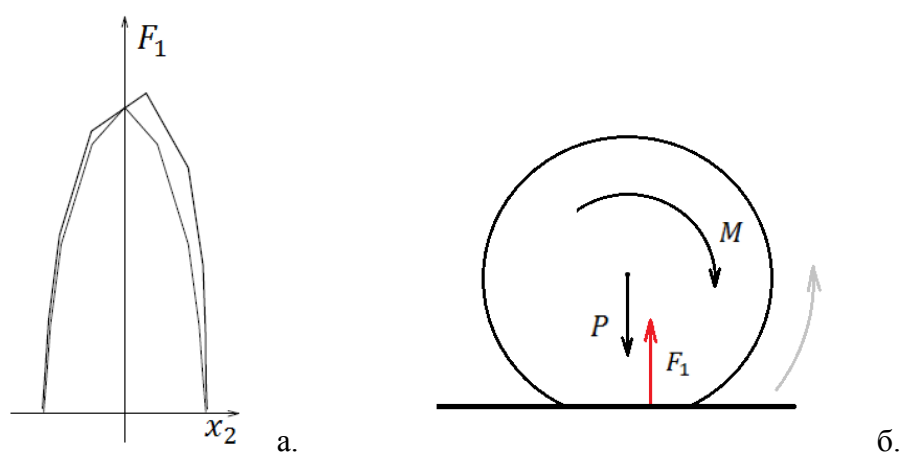


Рис.6. (а): Распределение нормальной реакции в ЗК для колеса под действием: веса (тонкая линия), веса и крутящего момента (жирная линия)

(б): Силы, действующие на ведущее колесо (серая стрелка – момент, создаваемый парой P и F_1)

Во второй главе рассмотрена задача о нагружении колеса вертикальной силой в трехмерной постановке. Изучено влияние угла α отклонения плоскости диска от вертикальной плоскости на перераспределение сил в области контакта с дорогой. В недеформированном состоянии колесо считается плоским, однако под нагрузкой допускается выход элементов протектора из плоскости диска.

Описано равновесное состояние деформированного элемента протектора, контактирующего с дорогой. Показано, что при проскальзывании конец стержня будет смещаться в плоскости дороги вдоль прямой, проходящей через конец стержня и проекцию центра колеса (например, для правого стержня на рис.7 смещение будет происходить вдоль прямой HK , а для среднего стержня - вдоль HM). Направление смещения, как и в двумерном случае, определяется значением параметра жесткости ζ (смещение в направлении т. H (рис.7) при $\zeta > 1$; от т. H при $\zeta < 1$; при $\zeta = 1$ проскальзывание отсутствует).

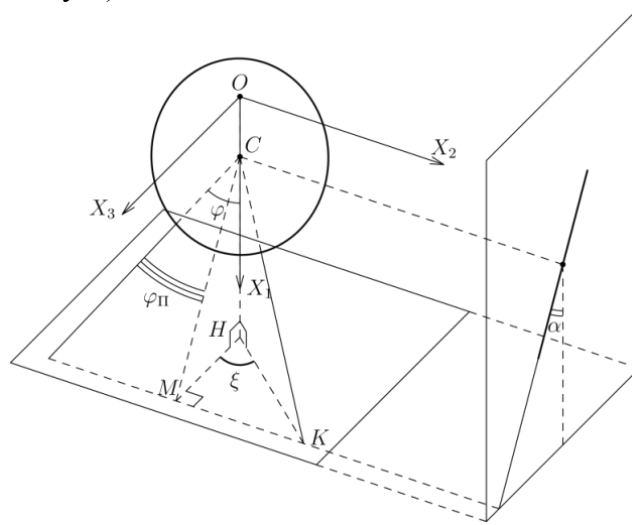


Рис.7. Углы, задающие положение стержня протектора в пространстве

Стержни, находящиеся в зоне контакта, определяются из условия:

$$-\varphi_{п0} \leq \varphi_{п} \leq \varphi_{п0}, \quad \varphi_{п0} = \arccos\left(1 - \frac{x}{\cos \alpha}\right), \quad (21)$$

где $\varphi_{п}$ – это угол в плоскости колеса, задающий положение стержня на диске, x – вертикальная просадка колеса (рис.7).

Не проскальзывают стержни с координатами $\varphi_{п}$, для которых выполнено:

$$|(\zeta - 1)| \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \varphi_{п} \cdot \cos^2 \alpha} - 1} \leq f \cdot \left[\left((1 - \zeta) + \frac{\zeta}{\cos^2 \varphi_{п} \cdot \cos^2 \alpha} \right) \right]. \quad (22)$$

Области проскальзывания определяются значениями углов $\varphi_{п}$ из отрезка $[-\varphi_{п0}, \varphi_{п0}]$, при которых нарушается неравенство (22).

Отметим, что для вертикально расположенного колеса ($\alpha = 0$) в центре зоны контакта обязательно существует область прилипания (10). В трехмерном случае границы области прилипания (22) зависят также и от угла развала α . При определенных соотношениях ζ , f и α неравенство (22) нарушается даже в центре зоны контакта, откуда следует, что при $\alpha \neq 0$ область прилипания в центре зоны контакта существует не при любых условиях.

Нормальную P_n и касательную P_τ реакции, действующие со стороны дороги на деформированное колесо, центр которого смещен вниз по вертикали на величину $R\chi$ находим из соотношений:

$$P_n = 2 \int_0^{\varphi_{п0}} |F_n| d\varphi_{п}, \quad P_\tau = 2 \int_0^{\varphi_{п0}} F_\tau \cdot \cos \xi d\varphi_{п},$$

где F_n и F_τ – нормальная и касательная реакции, действующие на стержень протектора с координатой $\varphi_{п}$ в точке контакта с дорогой, ξ – угол в горизонтальной плоскости между проекциями оси стержня и оси OX_3 (рис.7).

Суммарная сила P_τ равна нулю при $\alpha = 0$ в силу симметрии зоны контакта. При $\alpha \neq 0$ равнодействующая реакция имеет ненулевую проекцию на ось OX_3 и вычисление P_τ представляет интерес, так как определяет силу, действующую на ось колесной пары.

Зависимость P_n и P_τ от просадки колеса χ при $\chi \ll 1$ для случая отсутствия проскальзывания в зоне контакта выражается соотношениями:

$$P_n \cong \frac{4\sqrt{2}nR^2}{3h\sqrt{\cos \alpha}} \chi^{3/2} \left((\cos^2 \alpha + \zeta \sin^2 \alpha) + \frac{8\zeta - 7(\cos^2 \alpha + \zeta \sin^2 \alpha)}{20 \cos \alpha} \chi \right),$$

$$P_\tau \cong \frac{4nR^2(\zeta - 1)}{3h} \sqrt{2 \cos \alpha} \cdot \sin \alpha \cdot \chi^{3/2} \left(1 - \frac{7}{20 \cos \alpha} \chi \right).$$

Реакции, возникающие в области контакта колеса и дороги, являются существенным силовым фактором, воздействующим на элементы конструкции колесной пары. От направления касательной реакции зависит какие именно напряжения (растяжение или сжатие) испытывают ось колесной пары и узлы крепления колес. На рисунках 8 и 9 показано влияние углов установки колес и жесткости протектора на направление реакций в зоне контакта.

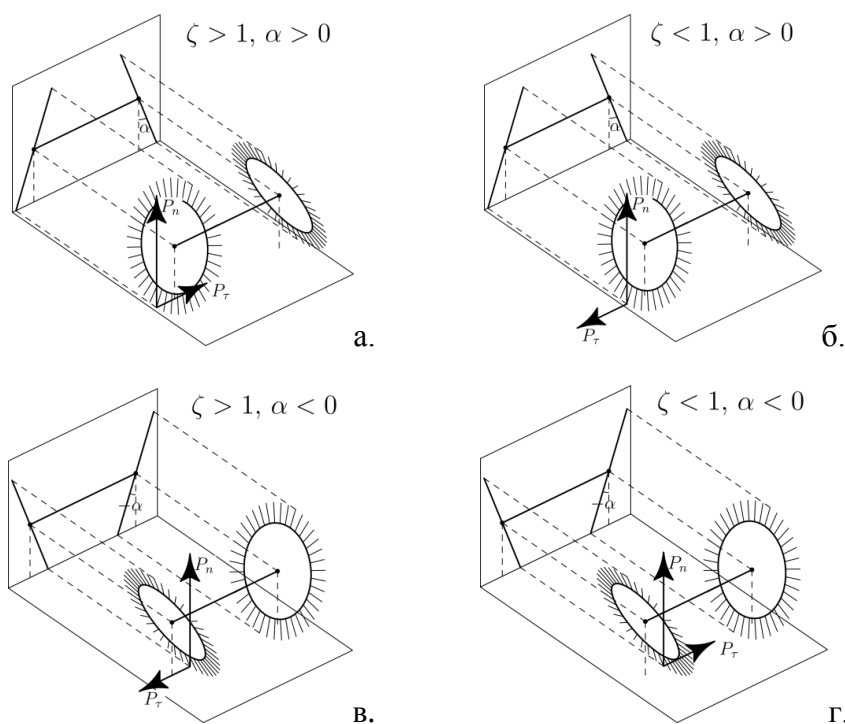


Рис.8. Направление реакций при различных значениях развала α и жесткости протектора ζ

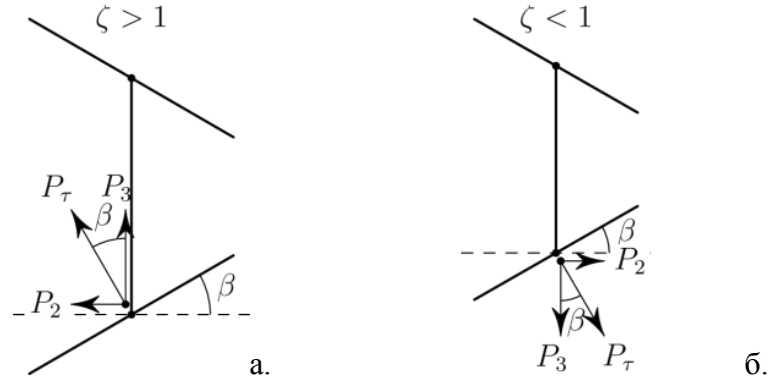


Рис.9. Проекция P_t в горизонтальной плоскости на направления: движения (P_2) и оси колесной пары (P_3) с развалом $\alpha > 0$ и схождение β при различных значениях жесткости протектора ζ

Как видно из сравнения рисунков 8а и 8б, 8в и 8г, а также 9а и 9б, влияние жесткости протектора на перераспределение усилий в контактной области оказывается значительным и не может не учитываться при проектировании транспортного средства.

Третья глава посвящена изучению динамики колеса со стержневым протектором. Как и в первой главе рассматривается двумерная постановка задачи. Исследовано движение колеса под действием вертикальной силы P , горизонтальной силы Q и момента M , приложенных к центру диска.

Описание деформаций протектора проводится в рамках квазистатической теории малых деформаций стержней, кинетическая энергия колебаний стержней не учитывается. Считается, что в момент соприкосновения конца стержня с дорогой происходит абсолютно неупругий удар, в результате которого становится равной нулю вертикальная составляющая скорости. В дальнейшем конец стержня не покидает связь до момента, когда угол, характеризующий его положение относительно вертикали, не станет равным $-\varphi_0 = -\arccos(1 - x)$.

Положение центра колеса C в неподвижной системе координат OX_1X_2 зададим координатами Rx, Ry , а его поворот относительно оси Cx_3 – углом ψ . Направления осей в СК $OX_1X_2X_3$ и $Cx_1x_2x_3$ соответствуют рис.2.

Общий вид уравнений движения деформируемого колеса:

$$\begin{aligned} mR\ddot{x} &= P + \kappa \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} (u_h \cos \varphi - \zeta v_h \sin \varphi) d\varphi, \\ mR\ddot{y} &= Q + \kappa \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} (u_h \sin \varphi + \zeta v_h \cos \varphi) d\varphi, \\ J\ddot{\psi} &= M + R\kappa \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} [\zeta v_h + u_h v_h (\zeta - 1)] d\varphi. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь: $\cos \varphi_0 = 1 - x$, $\kappa = \frac{nR}{h}$, $\zeta = \frac{3\tau}{nh^2}$,

где m, J – масса колеса и его момент инерции относительно оси Cx_3 ; h – длина стержня, n, τ – удельные значения продольной и изгибной жесткостей; $u_h(\varphi, t), v_h(\varphi, t)$ – продольное и поперечное перемещения конца стержня с координатой φ .

Система трех уравнений (23), содержит пять неизвестных x, y, ψ, u_h, v_h . Дополним ее геометрическим условием в зоне контакта, означающим, что конец стержня контактирует с дорогой, но не проникает в поверхность:

$$x + (1 + u_h) \cos \varphi - v_h \sin \varphi = 1, \quad |\varphi| \leq \varphi_0 \quad (24)$$

а также соотношением, связывающим нормальную и касательную компоненты реакций в точках контакта стержней с дорогой. Это соотношение представляется законом сухого трения $|f_2(\varphi, t)| \leq -f \cdot f_1(\varphi, t)$:

$$|u_h \sin \varphi + \zeta v_h \cos \varphi| \leq -f \cdot (u_h \cos \varphi - \zeta v_h \sin \varphi). \quad (25)$$

Соотношение (25) обращается в равенство, если скорость точки контакта не равна нулю, или заменяется равенством нулю скорости точки контакта.

Таким образом, соотношения (23), (24) и (25) представляют замкнутую систему уравнений движения деформируемого колеса.

Алгоритм нахождения *областей проскальзывания* основан на анализе неравенства (25) для стержней, принадлежащих зоне контакта.

Для случая $\zeta = 1$ определим, какие из стержней будут скользить, анализируя функцию $G(\varphi)$:

$$G(\varphi) = f(\cos \varphi - \cos \varphi_0) - |p(\varphi - \varphi_0) + \sin \varphi_0 - \sin \varphi|, \quad (26)$$

где $p = -\frac{v}{\omega} = -\frac{\dot{y}}{\dot{\psi}}$. Стержень с координатой φ скользит, если для него $G(\varphi) < 0$.

На рисунке 10 приведены три графика функции $G(\varphi)$, соответствующие одинаковым значениям f, φ_0 ($f = 0.8, \varphi_0 = 0.1$), но разным значениям p ($p_1 = 0.9983, p_2 = 1.01, p_3 = 1.1$).

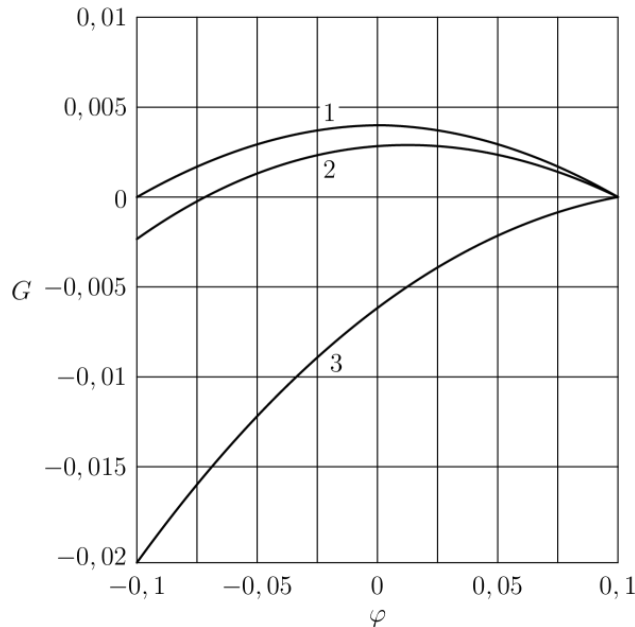


Рис.10. Области сцепления и скольжения при различных V/ω

В первом случае $G(\varphi) > 0$ во всей области контакта, что означает отсутствие проскальзывания во всей ЗК. Следовательно, при соотношении линейной и угловой скоростей, равном p_1 , колесо катится без проскальзывания. Во втором случае для ряда значений φ на левой границе ЗК $G(\varphi) < 0$, что означает наличие участка проскальзывания

в задней части ЗК. То есть при соотношении скоростей p_2 имеет место качение с частичным проскальзыванием. В третьем случае функция $G(\varphi) < 0$ во всей ЗК, что означает наличие в ней полного скольжения. Следовательно, при соотношении скоростей p_3 реализуется движение юзом.

Простейшим случаем движения колеса является его качение, когда центр колеса имеет постоянную скорость, направленную по оси OX_2 , и постоянную угловую скорость. При $\zeta = 1$ силы и момент, необходимые для поддержания описанного *стационарного движения*, могут быть найдены из соотношений:

$$\begin{aligned} P &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \kappa x^{3/2}, \\ Q &= \frac{1}{6} f \kappa (\varphi_*^3 - 3\varphi_* \varphi_0^2 - 2\varphi_0^3) \cdot \operatorname{sgn} \left(1 + \frac{V}{\omega} \right) - \frac{1}{2} \kappa (\varphi_0 - \varphi_*)^2 \left(1 + \frac{V}{\omega} \right), \\ M &= RQ, \end{aligned} \quad (27)$$

если для выбранных V и ω , согласно (25), реализуется качение с частичным проскальзыванием, а значение угла $\varphi_* \in (-\varphi_0, \varphi_0)$ разделяет зону контакта на две части $(-\varphi_0, \varphi_*) \cup [\varphi_*, \varphi_0)$, в одной из которых имеет место проскальзывание, а в другой – нет.

Формулы, описывающие стационарное движение для случая качения без проскальзывания могут быть получены из (27) при $\varphi_* = -\varphi_0$, а выражения, описывающие движение юзом, получаются из (27) при $\varphi_* = \varphi_0$.

При стационарном движении силы, действующие на колесо, уравновешены, и сила тяги Q из (27) будет равна по величине и противоположна по направлению силе трения, действующей на колесо в зоне контакта с дорогой.

На рисунке 11 приведена зависимость силы трения в контактной области от относительного проскальзывания δ (здесь: $\delta = -\frac{\omega + V}{v}$) при стационарном движении (при $x = 0.1$ и различных коэффициентах трения, в предположении малости ЗК).

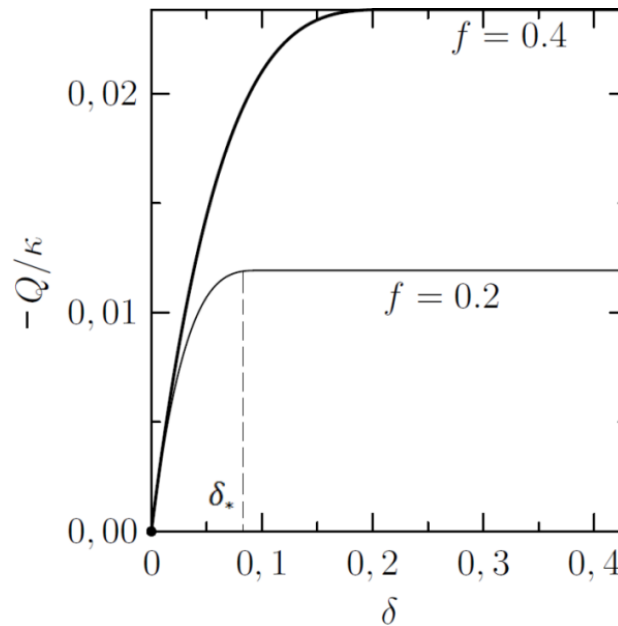


Рис.11. Зависимость силы трения от относительного проскальзывания в ЗК

На рисунке 11 значению $\delta = 0$ соответствует качению без проскальзывания, в этом случае $Q = 0$. Кривая на участке $0 < \delta < \delta_*$ отвечает качению с частичным проскальзыванием, значение Q в этом случае находится из второго соотношения (27). Прямая на участке $\delta \geq \delta_*$ соответствует полному скольжению в ЗК, значение силы в этом случае: $Q = -fP \operatorname{sgn}\left(1 - \frac{1}{1+\delta}\right)$.

Увеличение δ соответствует увеличению размера области проскальзывания в ЗК, откуда следует вывод:

«Сила трения минимальна при качении без проскальзывания; она возрастает с ростом участка проскальзывания в ЗК пока не достигнет предельного значения, равного по величине силе трения скольжения. Переход к предельному значению силы трения происходит, когда начинается скольжение всей ЗК. Предельное значение силы трения пропорционально весу колеса.»

Полученный вид зависимости $Q(\delta)$ согласуется с теорией качения Картера, которая имеет экспериментальные подтверждения.

В заключении сформулированы основные результаты работы и определены возможные направления дальнейших исследований.

Список публикаций

По результатам работы опубликованы в рецензируемых журналах, индексируемых в международных базах WebOfScience, Scopus и RSCI, следующие статьи:

1. Вильке В.Г., Гусак Г.В. Об одной модели армированной шины со стержневым протектором // ПММ. 2011. Т.75. №3. С.435-448. = A model of a reinforced tyre with a rod protector // Journal of Applied Math. and Mechanics. 2011. Vol.75. no.3. P.308-316. (WoS IF 0.517)
2. Гусак Г.В. Силы реакции при статическом нагружении колесной пары с развалом // Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. Математика. Механика. 2018. №4. С.40-47. = Reaction forces under static loading of a wheel pair with camber // Moscow University Mechanics Bulletin. Vol.73. P.84-90. (Scopus IF 0.3)
3. Гусак Г.В. Гистерезисные потери при нагрузке-разгрузке колеса со стержневым протектором // Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. Математика. Механика. 2020. №2. С.28-34. = Hysteresis losses during loading-unloading a wheel with a rod protector // Moscow University Mechanics Bulletin. Vol.75. P.25-31. (Scopus IF 0.7)

Прочие печатные работы:

4. Гусак Г.В., Вильке В.Г. Об одной модели армированной шины со стержневым протектором // Труды 55-й научной конференции МФТИ. 2012. Т.1 Аэрофизика и космические исследования. С.96-97.
5. Гусак Г.В., Вильке В.Г. Качение колеса со стержневым протектором по шероховатой плоскости // Труды X Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем». Нижний Новгород. 2016. С.298-305.
6. Гусак Г.В. Силы реакции при статическом нагружении колесной пары с развалом // Сборник трудов XII Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Уфа. 2019. Т.1. С.458-460.
7. Гусак Г.В. О стержневой модели деформируемой периферии колеса // Труды Всероссийской конференции молодых ученых-механиков YSM-2020. М.: Изд-во МГУ. 2020. С.59.
8. Гусак Г.В. Математическое моделирование контактного взаимодействия деформируемого колеса и дороги // IX Поляховские чтения: Материалы международной научной конференции по механике, 9–12 марта 2021 г., Санкт-Петербург, Россия. — СПб.: Изд-во ВВМ. 2021. С.89-90.