

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

*На правах рукописи*

**Гусак Галина Валерьевна**

**Изучение контактного взаимодействия колеса и дороги  
с использованием модели стержневого протектора**

Специальность 01.02.01 – теоретическая механика

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научные руководители:

доктор физ.–мат. наук, профессор

**В.Г. Вильке**

кандидат физ.–мат. наук

**А.С. Кулешов**

Москва – 2021

# Оглавление

<b>Введение</b> .....	4
<b>Обзор литературы</b> .....	13
<b>Глава 1. Равновесие колеса со стержневым протектором под действием различных видов статических нагрузок</b> .....	31
1.1. Модель колеса со стержневым протектором. Постановка задачи .....	31
1.2. Деформированное состояние элемента протектора. Уравнения равновесия. Силы реакции .....	35
1.2.1. Равновесие деформированного стержня в случае жесткого закрепления .....	35
1.2.2. Равновесие деформированного стержня в случае закрепления с пружинкой.....	42
1.3. Контакт стержня с дорогой. Зона контакта. Условие отсутствия проскальзывания .....	46
1.4. Определение областей проскальзывания внутри зоны контакта. ....	49
1.5. Последовательная нагрузка–разгрузка элемента протектора. Неоднозначность положения равновесия стержня. Гистерезис. ....	52
1.6. Потери энергии на цикле нагрузки–разгрузки колеса.....	56
1.7. Суммарная нормальная реакция, действующая на колесо.....	58
1.7.1. Дискретная модель протектора.....	58
1.7.2. Непрерывная модель протектора.....	60
1.8. Нагрузка колеса крутящим моментом.....	72
<b>Глава 2. Статическое нагружение колесной пары с развалом</b> .....	85
2.1. Модель колесной пары. Трехмерная постановка задачи о деформировании колеса. ....	85
2.2. Определение положения равновесия стержня протектора в 3D .....	87
2.3. Зона контакта. Области проскальзывания .....	91
2.4. Суммарные нормальная и касательная реакции, действующие на нагруженное колесо .....	98

2.5. Влияние углов развала и схождения на перераспределение сил в зоне контакта с дорогой. Нагрузки, передающиеся на ось колесной пары. ....	101
<b>Глава 3. Качение колеса со стержневым протектором по шероховатой плоскости</b> .....	104
3.1. Постановка задачи. Квазистатическая теория малых деформаций. Неупругий удар. ....	104
3.2. Уравнения движения. ....	107
3.3. Определение областей проскальзывания в зоне контакта. ....	112
3.4. Стационарное движение (качение с постоянными $V$ и $\omega$ ). ....	116
3.5. Зависимость силы трения от относительного проскальзывания колеса и дороги при стационарном движении. ....	121
<b>Заключение</b> .....	126
<b>Список литературы</b> .....	129

# Введение

## Актуальность темы исследования и степень ее разработанности

Колесные транспортные средства являются неотъемлемой частью современной жизни. Большая часть грузовых и пассажирских перевозок приходится на колесный транспорт, автомобильный и железнодорожный, а также авиацию, где колеса играют важную роль при взлете и посадке. Колесами оснащается сельскохозяйственная, строительная и другая специальная техника на Земле и за ее пределами.

Вследствие широкого распространения колесных машин, изучение взаимодействия колеса и дороги становится чрезвычайно важным, так как управляемое движение сообщается колесному экипажу только через контакт между колесом и опорной поверхностью. Возникновение проскальзывания и заноса во время движения может привести к аварийной ситуации. Кроме того, изучение воздействия сил трения на поверхность колес необходимо для расчета их износа. Таким образом, представление о процессах, имеющих место в зоне контакта, необходимо для лучшего понимания динамики колесных транспортных средств, повышения их безопасности и экономичности.

Модели, позволяющие описывать деформации колеса, применяются в задачах, где необходимо учитывать распределение сил в неточечной области контакта с дорогой, относительное проскальзывание поверхностей, а также рассеяние энергии при качении.

Распространенным типом деформируемого колеса является колесо с пневматической шиной. Существующие математические модели шин очень разнообразны. Они имеют различную сложность математического описания, различную точность при сравнении с экспериментом и предназначены для разных целей. При моделировании движения транспортных средств как правило используются простые модели шин, в то время как сложные модели находят применение в детальном анализе характеристик шины с целью оптимизации ее конструкции.

Эмпирические модели шин обобщают имеющиеся экспериментальные данные с помощью таблиц или математических формул и определенных схем интерполяции. Формулы имеют заданную структуру, а коэффициенты при переменных обычно оцениваются с помощью процедур регрессии так, чтобы обеспечить наилучшее соответствие опытным данным. «Магическая формула» Г. Пасейки относится к этой группе.

Простые физические модели, основанные на неких механических аналогах, служат для лучшего понимания поведения шин. К этой группе относятся «щеточные» модели: модель Фромма и ее модификации. Представление периферии колеса в виде набора деформируемых элементов, стержней или пружинок, с одной стороны, позволяет учитывать такие важные аспекты контактного взаимодействия как сопротивление качению, частичное или полное скольжение в пятне контакта, зависимость силы трения от относительного проскальзывания, а с другой стороны, допускает не слишком громоздкое математическое описание.

Сложные физические модели создаются с целью более подробного анализа шины. К этой категории относятся сложные модели на основе метода конечных элементов. Моделирование покрышки методами механики сплошной среды представляет значительную сложность в силу: во-первых, неоднородности шины; во-вторых, необходимости решения систем уравнений с частными производными для описания деформирования каждого отдельного конечного элемента протектора и взаимодействия элементов. Модели этого типа обсуждаются в работах С.В. Шешенина, Д.Ю. Погорелова и других авторов.

Подробное описание различных моделей деформируемых колес приведено в обзоре литературы.

Постоянное совершенствование конструкции пневматических шин, приводящее к изменению их динамических свойств, а также создание новых типов колес (например, колес с безвоздушными шинами), делают актуальной разработку новых математических моделей. Многообразие теоретических исследований и отсутствие единого универсального подхода свидетельствуют о

том, что в настоящий момент объяснение законов поведения деформируемого колеса далеко от завершения.

## **Цели и задачи диссертационной работы**

Целью диссертационной работы является аналитическое описание статического и динамического взаимодействия колеса с деформируемой периферией и жесткой дороги.

Задачи заключаются в определении для деформируемого колеса таких параметров контакта с дорогой как границы зоны контакта, наличие или отсутствие проскальзывания, величина и направление возникающей реакции, потери энергии за счет трения; а также в анализе динамики колеса с учетом проскальзывания в контактной области в зависимости от сил и момента, приложенных к центру диска, жесткостных и геометрических характеристик протектора, трения с дорогой. Рассматриваются следующие типы движения: качение без проскальзывания, качение с частичным проскальзыванием, движение «юзом» – с проскальзыванием во всей контактной области. Изучается влияние угла развала на реакции в зоне контакта.

## **Научная новизна**

Предложена новая модель колеса с деформируемой периферией, с помощью которой выстроено аналитическое описание взаимодействия протектора с дорогой в заранее неизвестной области контакта. Колесо представляется в виде твердого диска, окруженного по периметру набором радиально расположенных упругих стержней, часть из которых испытывает деформации сжатия и изгиба вследствие силового воздействия со стороны опорной плоскости. Деформации колеса определяются как совокупность деформаций элементов протектора. Сначала рассматривается дискретная модель с конечным числом стержней, затем осуществляется переход к непрерывной модели протектора. Стержневой протектор служит моделью среды, поглощающей энергию, и обуславливающей тем самым сопротивление качению.

Границы области контакта, участков сцепления и проскальзывания внутри нее, величины и направления сил реакции считаются заранее неизвестными и определяются в ходе исследования в зависимости от жесткостных и геометрических характеристик протектора, а также сил и момента, приложенных к диску колеса.

Согласно способу моделирования периферии колеса предлагаемая модель может быть отнесена к классу щеточных, однако, благодаря конструктивным особенностям, позволяет использовать меньшее количество гипотез в сравнении с предшествующими моделями данной группы. Существенное отличие заключается в форме «основания щетки». В таких известных моделях как модель Фромма или модель Новожилова основание щетки полагалось плоским в области контакта, что упрощало вычисления, однако, в силу «идентичности» щетинок в зоне контакта за счет их параллельного расположения, требовалось введение гипотезы о характере распределения вертикальной нагрузки в пятне контакта. В модели, предлагаемой в диссертации, не делается предположений об изменении дугообразной формы диска колеса на участок прямой линии вблизи пятна контакта и параллельности «щетинок». Поэтому основание «щетки» из стержней, образующих протектор, имеет форму дуги окружности, вследствие чего при нагружении колеса стержни протектора испытывают разную нагрузку, зависящую от их положения на диске. Возможность анализа «индивидуальных» стержней позволяет вычислить (а не ввести гипотетически) распределение сил в контактной области, а также аналитически определить границы областей сцепления и скольжения в зоне контакта в рамках выбранной модели трения между элементом протектора и опорной поверхностью.

### **Теоретическая и практическая значимость**

Модель колеса со стержневым протектором может быть использована для аналитических исследований и приближенного моделирования таких систем с подвижным контактным сопряжением как «колесо с пневматической шиной – дорожное покрытие» или «железнодорожное колесо – рельс». Описанная модель

может быть реализована в вычислительных комплексах для проведения на ее основе расчета таких параметров упругого взаимодействия как деформации колеса, силовые факторы, границы областей проскальзывания, рассеяние энергии в пятне контакта с дорогой.

Найденные в рамках модели стержневого протектора соотношения могут применяться как для верификации более сложных моделей деформируемых колес, так и для построения математических моделей, описывающих динамику транспортного средства в целом.

Теоретическую ценность представляет разработанный в диссертации метод расчета параметров контактного взаимодействия колеса и шероховатой дороги в зависимости от геометрии и жесткости протектора. В частности, алгоритм, с помощью которого возможно предсказание появления и определение границ зон проскальзывания в пятне контакта в зависимости от свойств протектора, линейной и угловой скоростей движения. Модель стержневого протектора наглядно иллюстрирует механизм возникновения трения качения как следствия перераспределения сил в зоне контакта нагруженного деформированного колеса с опорной поверхностью.

Результаты диссертации могут быть использованы в исследованиях, проводимых в МГУ имени М.В. Ломоносова, МФТИ, НИИ Механики МГУ, Институте проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН, Институте прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН и других научно-исследовательских центрах.

## **Методология диссертационного исследования**

Используемый в диссертации метод исследования контактного взаимодействия основан на математическом описании упрощенной физической модели системы с подвижным контактным сопряжением «деформируемое колесо–дорога».

Периферия колеса представляется в виде деформируемого стержневого протектора. Описание взаимодействия элементов протектора с опорной

поверхностью проводится в соответствии с законом сухого трения Кулона. Связь между силами, действующими со стороны дороги на участок периферии колеса, и его перемещением, определяется из принципа возможных перемещений в рамках линейной теории продольно-изгибных деформаций стержней.

Для описания переходных процессов в деформируемом протекторе колеса используется метод разделения движений, согласно которому процессы перемещения элементов протектора рассматриваются в квазистатическом приближении. В основе данного метода лежит предположение о том, что времена, характеризующие переходные процессы при движении элементов протектора, значительно меньше времён, характеризующих динамику самого колеса и связанного с ним транспортного средства.

### **Положения, выносимые на защиту**

1. Трение в зоне контакта уменьшает вертикальную просадку колеса, статически нагруженного фиксированным весом.
2. В случае нулевого угла развала при статической нагрузке весом в центре зоны контакта всегда существует конечная область прилипания, размер которой не зависит от просадки колеса. Для малой зоны контакта ее линейный размер прямо пропорционален коэффициенту сухого трения между протектором и дорогой.  
В случае ненулевого угла развала при той же статической нагрузке колеса существуют значения параметров, при которых вся зона контакта становится областью проскальзывания.
3. Для рассмотренного частного случая соотношения жесткостей протектора в продольном и поперечном направлениях на стационарном движении колеса с постоянными линейной и угловой скоростями суммарная сила трения достигает равного нуля минимума в случае качения без проскальзывания; сила трения увеличивается непрерывно с ростом размера области проскальзывания в зоне контакта; при движении юзом сила трения максимальна и прямо пропорциональна весу колеса.

## **Достоверность результатов**

Все теоретические результаты получены на основе фундаментальных положений теоретической механики и теории упругости с помощью строгих математических методов. О достоверности научных результатов свидетельствует соответствие полученных выводов результатам классических и новых исследований по рассматриваемой тематике.

## **Апробация результатов**

Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

- XVII, XXIII Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (Москва, 2010, 2016)
- 55-й научной конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук» (Москва-Долгопрудный, 19-25 ноября 2012 г.)
- X Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем» им. Ю.И. Неймарка (Нижний Новгород, 26-29 сентября 2016 г.)
- XII Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Уфа, 20-24 августа 2019 г.)
- Всероссийской конференции молодых ученых-механиков (Сочи, «Буревестник» МГУ, 3-13 сентября 2020 г.)
- Международной научной конференции по механике «IX Поляховские чтения» (Санкт-Петербург, 9-12 марта 2021 г.)

и на научно-исследовательских семинарах:

- семинар секции теоретической механики имени профессора Н.Н. Поляхова Санкт-Петербургского Дома ученых РАН (под руководством проф. А.А.Тихонова и проф. М.П. Юшкова)

- семинар имени академика А.Ю. Ишлинского при Научном совете РАН по механике систем (под руководством акад. В.Ф. Журавлева и акад. Д.М. Климова)
- семинар имени профессора В.В. Белецкого по динамике относительного движения (под руководством проф. Ю.Ф. Голубева, проф. В.Е. Павловского, доц. К.Е. Якимовой и доц. Е.В. Мелкумовой, мехмат МГУ)
- семинар имени академика В.В. Румянцева по аналитической механике и теории устойчивости (под руководством проф. А.В. Карапетяна и доц. А.А. Зобовой, мехмат МГУ)

## **Публикации**

Материалы диссертации опубликованы в 8 печатных работах, из них 3 статьи в рецензируемых журналах [134 - 136] и 5 статей в сборниках трудов конференций [137 - 141].

## **Личный вклад автора**

Постановки задач и методы их исследования предложены научными руководителями. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором.

## **Структура и объем диссертации**

Диссертация состоит из введения, обзора литературы, трех глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации 141 страница, из них 128 страниц текста, включая 36 рисунков. Библиография включает 141 наименование на 13 страницах.

## **Содержание работы**

**Во введении** определен объект исследования и приведено краткое содержание диссертации.

**В обзоре литературы** представлен анализ работ, относящихся к теме диссертации.

**В первой главе** рассматриваются задачи о статическом нагружении деформируемого колеса сначала только вертикальной силой, затем, вертикальной силой и крутящим моментом. Задачи решаются в двумерной постановке. Описано равновесие нагруженного колеса, найдена зона контакта и условия возникновения внутри нее участков проскальзывания. Вычислены реакции опорной поверхности. Определены потери энергии на цикле последовательной нагрузки-разгрузки колеса. Исследовано влияние трения в зоне контакта на просадку нагруженного колеса. Показано влияние крутящего момента на смещение точки приложения равнодействующей нормальной реакции относительно центра зоны контакта.

**Во второй главе** рассмотрена трехмерная постановка задачи о нагружении деформируемого колеса. Допускается отклонение плоскости колеса от вертикальной плоскости, а также смещения деформированных элементов протектора в произвольных направлениях, в том числе выход из плоскости диска колеса. Получены выводы о влиянии углов развала и схождения на распределение сил в области контакта.

**Третья глава** посвящена изучению динамики колеса со стержневым протектором. Как и в первой главе рассматривается двумерная постановка задачи. Исследовано движение колеса под действием сил и момента, приложенных к центру диска. Составлены уравнения движения деформируемого колеса. В результате исследования проскальзывания в области контакта получен метод определения типа движения (качение без проскальзывания, качение с частичным проскальзыванием, движение юзом). Изучен стационарный режим движения, при котором линейная и угловая скорость колеса остаются постоянными. Получена зависимость силы трения в контактной области от относительного проскальзывания колеса и дороги.

**В заключении** сформулированы основные результаты работы и определены возможные направления дальнейших исследований.

## Обзор литературы

Современная эпоха в развитии колесного транспорта началась в XIX веке с изобретением пневматической шины [64]. Оснащение жестких ободов колес деформируемыми шинами позволило уменьшить силу тяги на неровных покрытиях, развивать большие скорости при движении, улучшить плавность хода, снизить уровень шума и увеличить комфорт при езде. Однако с применением пневматических шин оказались связаны и некоторые потенциально опасные динамические эффекты (например, шимми – явление самовозбуждения интенсивных угловых колебаний колеса). От изучения этих эффектов с целью дальнейшего их контроля на практике зависит безопасность движения. Поэтому в 20-х годах прошлого столетия начал развиваться научный подход к исследованию пневматических шин. К настоящему времени существует большое число трудов, посвященных изучению деформируемых колес. Далее будут описаны некоторые из этих работ, а также распространенные методы, используемые при математическом моделировании колеса с пневматиком.

Однако прежде остановимся на некоторых работах (часть из которых появилась задолго до изобретения пневматических шин), дающих ключ к пониманию механизма взаимодействия колеса и поверхности дороги при качении, а также рассмотрим методы математического описания указанного взаимодействия.

### Развитие представлений о взаимодействии тел при качении

Использование колеса в глубокой древности свидетельствует о том, что уже тогда имелись представления о том, что трение при качении значительно меньше трения скольжения. Тем не менее первые количественные исследования трения качения появились только в XVIII веке.

В 1785 году французский ученый Ш. Кулон опубликовал работу [87], в которой описал ряд экспериментов по качению деревянных цилиндров по деревянным поверхностям, с помощью которых установил характер зависимости

силы трения качения от сжимающей нагрузки и радиуса цилиндра при равномерном качении (сила трения качения пропорциональна сжимающей нагрузке и обратно пропорциональна радиусу цилиндра). Однако указанная работа Кулона интересна не только экспериментальным исследованием трения качения, но главным образом ее фундаментальной ролью в развитии общей теории сухого трения. В публикации обсуждается механизм возникновения трения скольжения (теория поверхностной шероховатости), с помощью которого объясняются установленные ранее экспериментально независимость трения от геометрической площади контакта и относительной скорости тел, а также разница между статическим и кинетическим трением. Линейная зависимость трения от нагрузки в настоящее время носит название закона трения Кулона.

Истории закона сухого трения посвящена статья В.Ф. Журавлева [25].

Изучение сопротивления качению в первой половине XIX века продолжили французские ученые А. Морен и Ж. Дюпюи, проводившие эксперименты по определению сопротивления экипажей перекачиванию по дороге. Многочисленные опыты Морена [108] подтвердили справедливость зависимостей, установленных Кулоном. В работах Дюпюи [89] помимо описания экспериментов появляются также рассуждения о сопротивлении качению как следствии несовершенной упругости контактирующих тел. Согласно Дюпюи, когда колесо катится по плоскости, в задней части области контакта нормальная реакция меньше чем в передней из-за того, что материал колеса, испытавший сжатие при входе в контакт с дорогой, не успел полностью восстановиться к моменту выхода из контакта. Вследствие этого точка приложения давления находится несколько впереди геометрического центра контакта. Таким образом, имеется опрокидывающая пара сил, которая должна преодолеваться движущей силой. Откуда следует вывод о том, что для существования сопротивления качению одно из контактирующих тел должно быть сжимаемым, но не должно быть совершенно упругим. Таким образом, уже в первой половине позапрошлого века было сформулировано качественное объяснение того, что гистерезисные потери в материале тел являются существенным источником трения качения.

Изучению упругого гистерезиса внутри контактирующих тел как источника трения при качении впоследствии были посвящены работы [91, 98, 128, 129].

Другим источником сопротивления качению современная наука называет относительное проскальзывание поверхностей в пределах площадки контакта.

Этот источник диссипации энергии впервые обнаружил английский ученый О. Рейнольдс. В статье 1876 года [121] он описал явление, наблюдавшееся им в ходе эксперимента: металлический цилиндр при качении по плоскости из резины проходил путь, меньший длины своей окружности. Объясняя данное явление, названное «продольным псевдоскольжением», ученый предположил, что зона контакта состоит из зоны сцепления, где действуют силы трения, и зоны микропроскальзывания, рассеяние энергии из-за упругих деформаций в которой вызывает сопротивление качению. Кроме того, Рейнольдс указал, что явление продольного псевдоскольжения должно наблюдаться при качении железнодорожного состава по рельсам, так как в силу упругости материалов, колесо, передающее рельсу силу тяги, будет сжиматься, одновременно растягивая рельс. Таким образом, при качении материал колеса окажется всегда сжатым, а материал пути всегда растянутым, что вызовет появление зон их относительного проскальзывания.

Впоследствии явление продольного псевдоскольжения, качественно описанное Рейнольдсом, экспериментально изучалось в работах [39, 55].

Таким образом, выше мы описали два механизма рассеяния энергии, имеющих место при качении. Отметим здесь, что современная наука объясняет сопротивление качению совокупностью трех факторов. Это указанные ранее несовершенная упругость материалов и относительное проскальзывание поверхностей, а также силы молекулярного сцепления (адгезия) [16]. Вклад каждого из перечисленных факторов в формирование силы сопротивления качению для различных материалов контактирующих тел обсуждается в [3]. Фактор адгезии не будет учитываться далее в данной диссертации в силу предположения о том, что силы молекулярного сцепления не играют существенной роли при контакте колеса и дороги.

Закономерности трения качения исследовались аналитически в работах А.Ю. Ишлинского [31 - 34], в которых рассмотрено стационарное движение катка по деформируемому основанию с упругими и вязкими свойствами. Представление не вполне упругого основания как совокупности стержней позволило обосновать расположение зон сцепления и проскальзывания при качении с учетом трения Кулона в области контакта.

В работах [16, 17] применяется аналитический подход к определению параметров контактного взаимодействия в неточечной области контакта при качении, основанный на расчете нормальных и тангенциальных напряжений, возникающих в материале катящегося тела и опорной поверхности в окрестности контактной области. Для задачи о движении бесконечного упругого цилиндра по упругому основанию из того же материала получены выводы о связи таких параметров как: размер контактной области, размер участка сцепления, нормальная и касательная реакции в зоне контакта, с исходными данными: величиной сдвливающей нагрузки, коэффициентом трения, линейной и угловой скоростями движущегося тела.

### **Математическое описание контакта колеса и опорной плоскости**

Описание контактного взаимодействия деформируемого колеса и (в общем случае деформируемой) дороги можно разбить на три связанные части:

1. Моделирование деформаций колеса.
2. Моделирование деформаций дороги.
3. Задание модели трения на поверхности соприкосновения.

В данной диссертации дорога считается абсолютно твердой, поэтому будут рассматриваться только деформации колеса.

Распределение нормальных сил в площадке контакта, возникающее вследствие деформации контактирующих тел, часто описывают либо в предположениях контактной теории Г. Герца [103, 104], либо с помощью модели упругого основания Э. Винклера [18, 132].

Для решения задач динамики требуется анализировать также распределение касательных сил реакции в пятне контакта. Это делается с помощью феноменологического задания модели трения как некоторого соотношения между нормальными  $p$  и тангенциальными  $\tau$  нагрузками в зоне контакта. В качестве примера таких моделей можно привести часто используемый закон трения Амонтона-Кулона в форме  $\tau = \mu p$ , или более общий двучленный закон трения вида  $\tau = \tau_0 + \mu p$ , установленный экспериментально Кулоном и учитывающий помимо механических свойств поверхностей, силы молекулярного взаимодействия между телами (слагаемое  $\tau_0$ ). В 1894 году Н.Е. Жуковский показал [21], что закон трения Кулона может применяться в локальной (дифференциальной) форме к элементу площади в зоне контакта двух тел с последующим интегрированием по этой области для определения главного вектора и главного момента элементарных сил трения.

Динамическое взаимодействие деформируемых твердых тел с использованием модели сухого трения изучалось А.Ю. Ишлинским [34], В.Ф. Журавлевым [22], Г. Дюво и Ж. Лионсом [19].

Работы Дж. Пиотровски [120], а также Ж. Паскаля и Г. Соваж [119] посвящены разработке более точных, чем герцевская, моделей контакта с учетом асимметрии площадки контакта (для железнодорожного колеса и рельса). Искажение диаграммы распределения нормальных напряжений в контакте при качении обсуждается также в [16, 127]. В работах И. Калкера описана нелинейная теория контакта с проскальзыванием [35, 105].

Итак, выше мы рассмотрели составляющие задачи контактного взаимодействия деформируемых тел. Такой подход используется, когда необходимо учитывать конечный размер области контакта и распределение сил внутри нее. Однако высокая точность в совокупности с вычислительной сложностью, характеризующие описанный подход, оправданы не для всех задач теории качения.

## Методы теоретической механики при описании движения колеса

В теоретической механике задачи о качении колеса нередко решаются в предположении, что и колесо, и опорная поверхность являются абсолютно твердыми, а их контакт происходит в одной точке. Это позволяет, в случае качения без проскальзывания, применять для описания движения системы методы неголономной механики [30, 51]. Если же необходимо учитывать влияние на динамику системы упругости пневматика и скольжения в зоне контакта, используется следующий прием: в выражение для равнодействующей реакции, приложенной к абсолютно твердому колесу в точке контакта, включаются дополнительные слагаемые, соответствующие указанным особенностям реальных колес. Корректность такого подхода обоснована в книге [43].

Примеры изучения систем с качением методами неголономной механики содержатся в книгах [30, 46]. В книге [46] методами неголономной механики решен ряд задач о путевой устойчивости систем с качением, а также приведено обсуждение корректности используемых математических моделей и, в частности, рассмотрен вопрос о допустимости пренебрежения конечными размерами площадки соприкосновения катящихся друг по другу тел.

Тот факт, что колесо катится по некоторой поверхности, накладывает ограничения (связи) на его движение. Данные связи могут быть классифицированы как неудерживающие. Движение при наличии неудерживающих связей в общем случае и на примере конкретных задач, рассматривается в книге [29]. В частности, изучается качение различных систем при учете возможного проскальзывания.

Обобщение принципа виртуальных перемещений и принципа Даламбера на системы с неудерживающими связями можно найти в работе М.В. Остроградского [54].

В книге [43] сложное взаимодействие шины с дорогой, включающее возможность бокового скольжения, описано феноменологической моделью деформируемого колеса. В рамках модели определяются сила и момент,

действующие на колесо в контактной области при движении экипажа, а движение системы описывается уравнениями Лагранжа второго рода.

В статье И.И. Косенко [40] предложен способ компьютерного моделирования движения неголономных систем с односторонними связями. В работе рассмотрена задача регуляризации переходов между состояниями отдельной связи: от относительного полета (подпрыгивания) к контакту и обратно, а также между качением и скольжением с учетом модели кулоновского трения; кроме того, реализована распределенная модель ударных взаимодействий в механической системе.

Развитием представлений об описании взаимодействия тела с поверхностью при качении стала теория поликомпонентного сухого трения В.Ф. Журавлева [22, 23].

Теория описания взаимодействия колеса и дороги методами теоретической механики развивается в работах [5, 6, 36, 47, 48].

Итак, мы рассмотрели различные способы описания взаимодействия колеса и дороги. Далее вернемся к обзору трудов, посвященных моделированию различных классов деформируемых колес.

## **Феноменологическое описание явлений при качении деформируемого колеса**

При качении деформируемого колеса наблюдается ряд особых динамических эффектов, таких как увод или шимми, влияющих на безопасность при движении. Поэтому изучение с целью последующего контроля данных явлений на практике имеет большую важность.

Явление увода (встречается также термин «боковое псевдоскольжение») пневматического колеса, состоящее в способности такого колеса под действием боковой силы катиться в направлении, отличном от его срединной плоскости (плоскости диска) было описано Г. Брулье в 1925 году [85]. Причина увода состоит в боковой деформации шины под действием приложенных сил. Брулье

феноменологически ввел предположение о линейной зависимости боковой реакции в пятне контакта от угла увода.

В 1926-1928 годах Ф. Картер с целью описания динамики железнодорожного колеса разработал теорию качения, позволившую учитывать продольное и боковое псевдоскольжения (относительное скольжение и увод) [86]. Введенное Картером предположение о линейной зависимости между тангенциальной силой реакции в контакте и величиной относительного скольжения (определявшейся на основе эксперимента из соотношения пути, пройденного колесом, и произведения его радиуса на скорость вращения), получило название гипотезы крипа. Впоследствии было экспериментально установлено, что данная гипотеза дает хорошее приближение лишь для небольших значений тангенциальной силы реакции. При дальнейшем увеличении силы линейная зависимость нарушалась, а при достижении силой некоторого критического значения, возникало обычное скольжение и тангенциальная сила переходила в силу трения скольжения. Зависимость боковой силы от угла увода в теории Картера также предполагалась линейной.

В прикладных задачах при составлении уравнений движения на пневматических колесах часто используется гипотеза увода И. Рокара [60], в рамках которой считается, что угол увода пропорционален величине боковой деформации пневматика, которая, в свою очередь, пропорциональна величине боковой силы. С целью упрощения задачи, вместо рассмотрения механизма деформации шины, в теории Рокара используется следующая схематизация явления: рассматривается абсолютно жесткое колесо, а в уравнения движения включается слагаемое, отвечающее боковой силе, пропорциональной углу увода. Однако область применения гипотезы Рокара весьма ограничена, так как она сформулирована для колес, плоскость вращения которых вертикальна.

Более полной является теория качения И. Грейдануса [46, 99], учитывающая наряду с поперечной деформацией также деформацию скручивания пневматика. Параметры, участвующие в формулировке кинематических связей, определяются из геометрии кривой, образованной проекцией центральной окружности

деформированного пневматика на горизонтальную плоскость. Теория Грейдануса допускает описание движения как вертикальных, так и наклонных колес.

Работы Ю.А. Ечеистова [20] и Е.А. Чудакова [68 - 70] посвящены изучению увода при качении наклонного колеса с пневматической шиной при постоянной ориентации средней плоскости колеса. Причиной увода названо возникновение поперечной силы и момента, стремящихся повернуть колесо в сторону его наклона. Для малого отклонения средней плоскости колеса от вертикали, указанные сила и момент считаются пропорциональными величине угла наклона средней плоскости колеса.

Имеется значительное число публикаций по проблеме шимми. Под этим термином подразумевают явление самовозбуждения интенсивных угловых колебаний колеса, наблюдаемое при определенных условиях у переднего колеса трехколесного шасси самолета и у передних колес автомобиля, и представляющее серьезную угрозу безопасности движения. Общепринято рассматривать в качестве основной причины шимми деформации пневматической шины.

Классической моделью качения пневматического колеса является теория М.В. Келдыша [36], созданная им для изучения явления шимми переднего колеса шасси самолета. В указанной теории рассматривается качение без проскальзывания, а деформация пневматика описывается следующими тремя параметрами: расстоянием от линии пересечения диаметральной плоскости смещенного обода колеса с опорной плоскостью до центра площадки контакта; углом, отсчитываемым от вышеуказанной линии, до средней линии площадки контакта; углом наклона обода колеса, отсчитываемым от вертикали до диаметральной плоскости колеса. Компоненты силы и момента, действующих на колесо в области контакта, выражаются через перечисленные параметры, а также значения нормальной нагрузки и внутреннего давления в шине. Условия движения при качении без проскальзывания описывается с помощью кинематических связей.

В книге [46] предложены способы понижения порядка системы дифференциальных уравнений теории Келдыша путем введения малых

параметров в следующих двух случаях: при движении с большой скоростью и в случае больших величин кинематических коэффициентов. Показано, что гипотезы увода Рокара, Чудакова и Ечеистова могут быть получены из теории Келдыша при определенном пренебрежении переходными процессами в пневматике. А также, с помощью модели Келдыша, решен ряд задач о путевой устойчивости транспортных средств на пневматических колесах.

Развитие феноменологической теории качения Келдыша было осуществлено в работе В.С. Гоздека [15]. К уравнениям теории Келдыша были добавлены уравнения, учитывающие вертикальные перемещения центра колеса и деформации в срединной плоскости. Однако это потребовало также введения дополнительной гипотезы о линейном распределении продольных деформаций в области контакта.

Современными учеными выявлены дополнительные факторы, провоцирующие шимми наряду с упругостью пневматика [27]. В работе [28] обосновано влияние скольжения в пятне контакта на возникновение шимми. Предложенный в статье подход позволяет объяснить наличие шимми в системах с относительно жесткими колесами (например, у тележек в супермаркете). Для расчетов использовалась модель абсолютно жесткого колеса на упругой стойке, взаимодействующего с опорной плоскостью посредством сил сухого трения. Распределение нормальных напряжений в круговом пятне контакта учитывалось согласно [127], а сила и момент трения при наличии скольжения и верчения согласно [24, 26].

Шимми передней подвески автомобиля рассматривалось Б.А. Глухом [14].

По аналогии с «шимми передней подвески» говорят также о «шимми автомобиля» [46], имея ввиду колебания кузова автомобиля, возникающие при езде по ровной дороге. Теоретическое изучение этого явления различными методами проводилось в работах [2, 60, 77, 122].

Все перечисленные виды шимми возникают в первую очередь вследствие упругости пневматика (и, как показано выше, возможно, еще скольжения в зоне

контакта). Поэтому изучение свойств шины чрезвычайно важно для предотвращения данного типа нежелательных колебаний.

Н.А. Фуфаевым предложена феноменологическая теория качения, учитывающая диссипацию энергии в материале деформируемой периферии колеса [67].

Описание качения пневматической шины без проскальзывания посредством рассмотрения наложенных на нее кинематических связей проведено И.И. Метелицыным [45]. Моделью шины в указанной работе служит поверхность тора, а деформации описываются перемещением грузовой линии вдоль оси колеса.

В задачах транспортной динамики нашла широкое применение так называемая «магическая формула» (Magic Formula) Г. Пасейки [75, 76, 114, 115, 117, 118], которая представляет собой набор эмпирически найденных нелинейных зависимостей реакций в области контакта от параметров качения. Указанные зависимости выражаются комбинацией тригонометрических функций с коэффициентами, определяемыми из эксперимента. «Магическая формула» позволяет с высокой точностью вычислить продольную и боковую компоненты реакции, а также момент верчения в области контакта в зависимости от значений радиального прогиба шины, угловой скорости колеса, продольного скольжения, угла увода, верчения и развала. В отличие от линейных теорий увода Рокара и Картера, «магическая формула» хорошо согласуется с экспериментом даже при больших значениях входных параметров. В статье [126] описан метод нахождения коэффициентов «магической формулы».

## **Модели деформируемого колеса на основе простого физического аналога. Щеточные модели**

Модели шины, основанные на простом физическом аналоге, в некоторых областях применения могут обеспечить достаточную описательную точность. Значительное упрощение представления шины относительно реального необходимо, чтобы, с одной стороны, математическая формулировка не была

слишком громоздкой и могла применяться при моделировании динамики транспортных средств, а с другой, отражала бы такие важные аспекты как скольжение в продольном и боковом направлениях и падение коэффициента трения с увеличением скорости скольжения.

К типу простых физических моделей относится щеточная модель Г. Фромма [102], состоящая из жесткого каркаса и протектора в виде набора эластичных щетинок (рис. 1). Податливость щетинок отражает эластичность комбинации каркаса, бандажа и фактических элементов протектора реальной шины. Щеточная модель позволяет описывать и анализировать свойства проскальзывания в зоне контакта с дорогой, что оказывается полезным при разработке более сложных моделей шин.

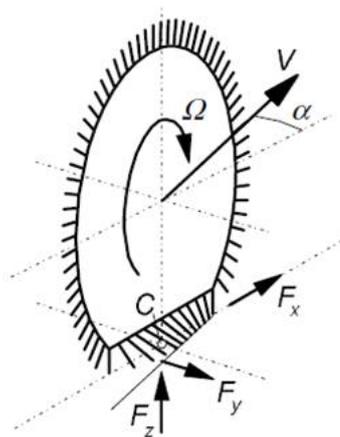


Рис. 1. Щеточная модель Фромма

Другим примером простой физической модели шины является модель Э. Фиалы [90] (или «модель с гибким каркасом», рис. 2). Она позволяет описывать податливость каркаса в боковом направлении, при этом распределение нормальной силы считается параболическим, а коэффициент трения постоянным.

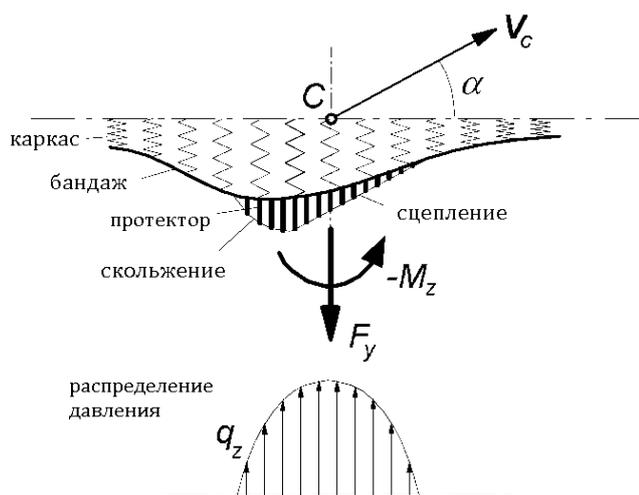


Рис. 2. Модель шины с гибким каркасом при стационарном качении с углом увода  $\alpha$

Простое представление бокового отклонения каркаса, наблюдаемого в нижней части шины около пятна контакта, значительно ускоряет вычисления (по сравнению со сложными моделями, основанными на методе конечных элементов). Этим обосновано создание следующей модели.

Tread Simulation Model (TreadSim, «имитационная модель протектора») [97, 101, 107, 116, 117, 125, 131] – это метод компьютерного моделирования, в основе которого лежит физическое представление шины в виде гибкого каркаса, способного испытывать боковые отклонения вблизи зоны контакта, и элементов протектора в виде масс, присоединенных к каркасу с помощью пружинок (рис. 3). Метод вычисления характеристик контакта является итерационным и заключается в прослеживании движения отдельного элемента протектора на отрезке времени, когда он проходит через длину контакта, в предположении о том, что прогиб каркаса в течение этого отрезка времени остается постоянным. В отличие от щеточной модели, указанный метод не допускает аналитического описания, однако позволяет включить в рассмотрение следующие факторы: произвольное распределение давления; зависимость коэффициента трения от скорости; анизотропную жесткость; скольжение элементов – боковое, продольное, а также связанное с развалом или поворотом и другие. Модель TreadSim способна работать в нестационарных условиях.

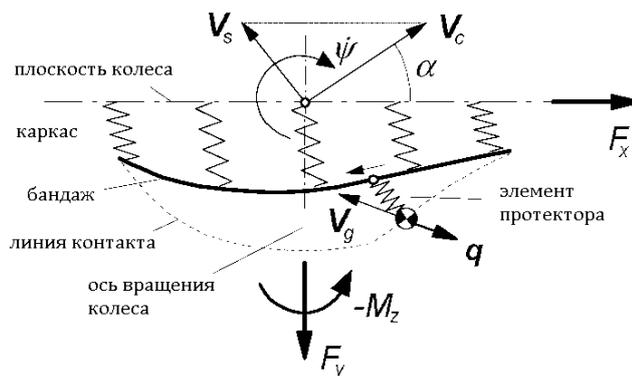


Рис. 3. Модель TreadSim с гибким каркасом и контактными элементами

Хотя возможно разработать модель для нестационарных условий движения эмпирическими средствами, большинство как относительно простых, так и более сложных моделей для описания динамики и переходных процессов основаны на физической природе шины. Для правильного описания поведения шины во времени, ее существенные свойства должны быть отражены в физической модели.

Г. Пасейка [115] выделяет четыре фундаментальных фактора, играющих роль при математическом описании выбранной физической модели шины. Это – свойства трения на границе раздела шина-дорога, распределение нормального давления в области контакта, а также податливость материалов протектора и каркаса. Выше мы уже перечисляли эти факторы, однако, говоря о деформации шины не разделяли ее на протектор и каркас.

В литературе часто встречаются следующие представления герметичной оболочки, состоящей из каркаса с бандажом и боковыми стенками, и находящейся под давлением сжатого воздуха: либо в виде упругой балки [81 - 83], либо в виде натянутой струны [73, 112, 113], где указанные балка или струна подвешены на упругом основании к ободу колеса.

В статье [42] оболочка под давлением моделируется несколькими рядами параллельных струн, соединенных нерастяжимыми нитями корда.

В классической щеточной модели Фромма податливость каркаса не учитывается. В моделях Фиалы [90] и Г. Фроденштайна [94] прогиб каркаса аппроксимируется симметричной параболой.

Ф. Франк [92] провел сравнение моделей шины, состоящих из каркаса в виде натянутой нити, балки или жесткой конструкции, и протектора, образованного множеством упругих элементов. В результате он заключил, что модель типа натянутой нити более подходит для моделирования шины с диагональным кордом, тогда как модель балки – для шины с радиальными слоями. Франк также показал в работе [93], что при правильном выборе параметров модели тип представления каркаса (балка, струна или жесткий) имеет ограниченный эффект.

Влияние распределения вертикальной силы на характеристики контакта исследовалось: для симметричных распределений В. Боргманом [84], для несимметричных распределений – К. Го [100]. В следующих работах распределение нормальной реакции вдоль области контакта задается как параболическое [78, 90, 94, 111, 124], равномерное [88] или трапециевидное [79].

Характер зависимости вертикальной реакции в пятне контакта от вертикального смещения центра колеса для различных режимов качения рассмотрен в статье [130].

Рассмотрение случая непостоянного коэффициента трения осуществлялось, среди прочего, в работах [79, 80, 84, 88, 123].

Итак, щеточная модель согласно определению из книги Г. Пасейки [115] – это модель жесткого каркаса с упругими элементами протектора. Она является достаточно простой, но качественно согласуется с экспериментальными данными. Поэтому разработка моделей протектора на базе щеточной модели представляет интерес, в первую очередь для описания процессов проскальзывания в зоне контакта, что может быть полезно при разработке более сложных моделей шин.

И.В. Новожиловым [49, 50] предложена математическая модель колеса с шиной, объединившая модель Келдыша и щеточную модель Фромма. В модели Новожилова контактирующая с дорогой часть периферии колеса представляется в виде опорного элемента, который состоит из недеформируемой подложки нулевой кривизны и бесконечно тонкого деформируемого пограничного слоя, образованного бесконечно малыми не взаимодействующими друг с другом

контактными элементами. Указанная модель позволяет описывать сложные движения колеса не пренебрегая проскальзыванием в зоне контакта с дорогой. С помощью данной модели И.А. Смирновым исследован ряд задач о движении автомобиля без потери сцепления, а также при различных вариантах потери сцепления колес с дорогой [62].

Таким образом, рассмотренные выше щеточные модели используются для уточнения компонент сил и моментов реакции в области контакта с учетом зон проскальзывания для дальнейшего решения задач путевой устойчивости транспортных средств. Детальное рассмотрение механизмов контактного взаимодействия не является целью указанных работ, а конструкция используемой модели (с плоским основанием щетки) не предполагает вычисления распределения нормальных усилий в контактной области. Распределение нормальных сил в контакте, которое определяет расположение и размер зон сцепления и проскальзывания, задается с помощью гипотез.

Ряд моделей, представляющих пневматическую шину как систему с бесконечным числом степеней свободы, разработан В.Г. Вильке [8, 10, 11].

В статье [10] рассматривается представление пневматической шины в виде поверхности тора. При моделировании нагруженного состояния учитываются деформации всей поверхности тора по всем направлениям, определяется форма пневматика как в зоне контакта, так и на его свободной поверхности. Контакт с опорной плоскостью без проскальзывания происходит по части бандажа, представленного гибкой нерастяжимой нитью.

В статьях В.Г. Вильке и И.Ф. Кожевникова [11 - 13] периферия колеса в ненагруженном состоянии моделируется круговым цилиндром (представляющим бандаж) и частями поверхностей двух торов (соответствуют боковой поверхности шины). Деформации конструкции вычисляются в зависимости от перемещений срединной линии бандажа. Рассмотрены режимы качения как без проскальзывания, так и с проскальзыванием в зоне контакта с дорогой. Критерий перехода от одного режима качения к другому сформулирован В.Г. Вильке в

статье [7]. В рамках описанной модели деформируемой периферии в работе [37] определяются собственные частоты и собственные формы колебаний шины.

В статье И.Ф. Кожевникова [38] представлен обзор большого числа разнообразных математических моделей колеса с деформируемой периферией.

Статья [61] содержит описание различных известных моделей качения деформируемых колес по недеформируемому основанию. Приведено сравнение указанных моделей относительно их применимости к решению задач нестационарного качения автомобильного колеса.

### **Сложные физические модели (методы механики сплошной среды: метод конечных элементов и др., компьютерное моделирование, численные методы)**

В вычислительной механике для моделирования упругих тел используется следующий подход: упругое тело заменяется системой абсолютно твердых тел, связанных друг с другом упруго-диссипативными связями. Пример использования указанного метода при моделировании автомобильного колеса с пневматической шиной дают работы [1, 95, 96].

В работе Д.Г. Агапова [1] трехмерная модель шины представляет из себя набор абсолютно твердых частиц, наделенных массами, и связанных между собой и с диском колеса упруго-диссипативными элементами (каждый такой элемент – это параллельно соединенные пружинка и демпфер). Массы частиц рассчитываются в соответствии с массой всей шины и разбивкой ее поверхности, а коэффициенты жесткости и диссипации связующих элементов подбираются в соответствии с физическими характеристиками шины. С помощью модели проводится анализ собственных частот и собственных форм модели, а также определяются силы взаимодействия в пятне контакта с дорогой и между самими дискретными элементами при вертикальном нагружении и при различных режимах движения колеса.

В механике сплошной среды одним из основных методов расчета напряжений в деформированном теле является метод конечных элементов. Суть метода заключается в том, что для каждого малого фрагмента поверхности записываются условия равновесия, и затем получившаяся система уравнений решается численными методами [56, 63].

Моделирование деформирования оболочки пневматической шины методом конечных элементов описано в статьях [65, 106, 110]. Статья [109] содержит обзор исследований, основанных на методе конечных элементов. При моделировании шины используют различные типы конечных элементов: балочные [133], элементы плоской оболочки [74], объемные [41]. Алгоритмы решения контактных задач с трением методом конечных элементов обсуждаются в [52, 53].

В работе Д.Ю. Погорелова и А.Н. Родикова [58] содержатся описания вывода математической модели упругого конечного элемента и его применения к моделированию динамики автомобильной шины.

Способы учета упругости колес при компьютерном моделировании динамики систем с качением обсуждаются в [66].

Теоретические аспекты трехмерного моделирования пневматической шины рассмотрены в работах С.В. Шешенина и соавторов [44, 71, 72]. Авторами предложены различные с точки зрения алгоритмов подходы к численному решению задачи динамики деформируемого твёрдого тела.

## **Вывод из обзора литературы**

Приведенный обзор литературы показывает, что исследования законов поведения деформируемого колеса не теряют актуальности и на данный момент далеки от завершения.

В следующих главах диссертации описана еще одна из возможных моделей колеса с деформируемой периферией и показано ее применение к задачам взаимодействия колеса и дороги.

# Глава 1

## Равновесие колеса со стержневым протектором под действием различных видов статических нагрузок<sup>1</sup>

В первой главе выстраивается математическое описание модели колеса со стержневым протектором. С помощью указанной модели проводится расчет характеристик контактного взаимодействия статически нагруженного колеса и опорной поверхности. Сначала рассматривается нагрузка только вертикальной силой (весом), далее, дополнительное нагружение крутящим моментом. Моделируется механизм рассеяния энергии в контактной области при последовательной нагрузке и разгрузке колеса. В первой главе считается, что колесо расположено вертикально (без развала), задачи решаются в двумерной постановке.

### 1.1. Модель колеса со стержневым протектором.

#### Постановка задачи

##### Модель колеса

В диссертационной работе деформируемое колесо моделируется механической системой, состоящей из абсолютно твердого диска радиуса  $r$  и деформируемого протектора толщины  $h$ . Радиус колеса вместе с протектором:  $R = r + h$ . Протектор представлен множеством упругих стержней, закрепленных на диске. Ось недеформированного стержневого элемента протектора направлена вдоль радиуса диска и перпендикулярна диску в точке закрепления стержня. Внешние концы стержней либо свободны, либо контактируют с дорогой. Контакт происходит на концах стержней, в одной точке для каждого стержня, и

---

<sup>1</sup> Раздел изложен в соответствии со статьями [134, 136, 141]. Статья [134] написана в соавторстве с В.Г. Вильке, которому принадлежит постановка задачи. Статьи [136, 141] написаны лично соискателем.

описывается законом сухого трения Кулона. Дорога считается недеформируемой и при двумерной постановке задачи задается прямой линией (рис. 4).

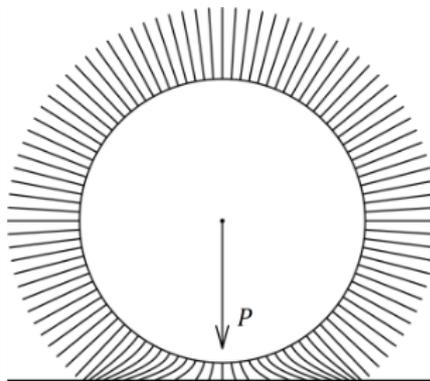


Рис. 4. Модель колеса со стержневым протектором

Элемент протектора – деформируемый линейно упругий стержень длины  $h$ , который имеет продольную жесткость  $N$  и поперечную жесткостью  $T$ . В работе рассматривается два возможных способа закрепления стержня на диске. Первый способ – это жесткое закрепление (рис. 5, слева). При втором способе закрепления (рис. 5, справа) в основании стержня расположена пружина жесткости  $C$ , позволяющая стержню смещаться вдоль радиуса диска. Считается, что это смещение происходит только в продольном направлении и достаточно мало, чтобы не влиять на изгиб стержня. Далее будет показано, что жесткое закрепление является предельным случаем закрепления с пружинкой при  $C \rightarrow \infty$ .

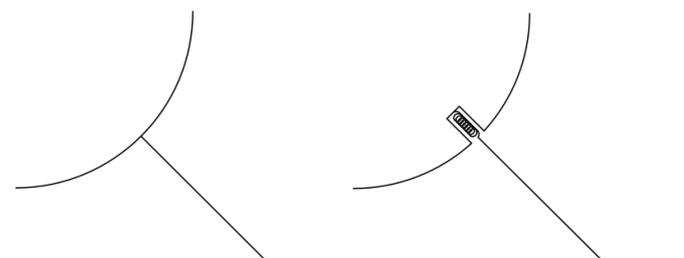


Рис. 5. Способы закрепления стержней:  
жесткое закрепление (слева) и закрепление с пружиной в основании (справа)

При приложении к центру диска вертикальной нагрузки  $P$  происходит смещение центра колеса вниз по вертикали на величину  $R\chi$ , часть стержней протектора вступает в контакт с дорогой, деформируясь под действием сил

реакции. Деформации стержней описываются в рамках линейной теории продольных и изгибных деформаций. Чем сильнее смещается центр колеса, тем больше стержней попадает в зону контакта.

Конец стержня, вступающий в контакт с дорожным покрытием, испытывает силовое воздействие со стороны дороги. Это воздействие представлено двумя силами – нормальной к плоскости дороги силой, и касательной силой, обусловленной сухим трением. Если модуль касательной силы не превосходит величины нормальной силы, умноженной на коэффициент сухого трения, то проскальзывание в точке контакта отсутствует. В противном случае, конец стержня переместится вдоль дороги на величину, достаточную для перераспределения нормальных и касательных сил. В результате возникнет равенство модуля касательной силы и величины нормальной силы, умноженной на коэффициент сухого трения. Согласно методу разделения движений [4], описанный выше процесс движения стержней, образующих протектор, можно рассматривать в квазистатическом приближении, так как времена, характеризующие переходные процессы при движении стержней протектора, значительно меньше времён, характеризующих динамику самого колеса и связанного с ним транспортного средства.

Сила, действующая на колесо со стороны дороги, вычисляется как совокупность реакций отдельных стержней. Сначала рассматривается дискретное множество стержней, затем осуществляется переход к модели непрерывного протектора.

Деформации элементов протектора описываются в рамках классической теории упругого изгиба стержня Эйлера-Бернулли, что подразумевает следующие допущения [57, 59]:

- Деформации считаются малыми.
- Выполняется гипотеза плоских сечений: поперечные сечения, плоские и нормальные к оси стержня до деформации, остаются плоскими и нормальными к его оси и после деформации.

- Материал стержня обладает линейной упругостью.
- Предположение малости производной прогиба (отклонения от недеформированной оси стержня).

Возможность контакта между соседними стержнями, а также возможность контакта стержня с дорогой в точке, отличной от конца стержня, не учитывается.

### **Постановка задачи**

Для постановки задачи контактного взаимодействия твердых тел необходимо задать способ описания деформаций каждого из тел, а также определить закон их взаимодействия, из которого впоследствии определяются силы и моменты, действующие со стороны одного тела на другое. В данной работе деформации колеса определяются совокупностью деформаций стержневых элементов его протектора. Дорога считается недеформируемой. Взаимодействие при контакте описывается законом сухого трения Кулона.

Первая задача, рассматриваемая в данной главе, заключается в определении для деформируемого колеса, находящегося в контакте с дорогой вследствие смещения центра диска вниз по вертикали на известную величину, следующих параметров контактного взаимодействия: картины распределения сил в области контакта, границ зоны контакта и областей проскальзывания и прилипания внутри нее, а также значения равнодействующей реакции со стороны дороги с учетом относительного проскальзывания поверхностей.

Входными параметрами задачи являются геометрические и жесткостные характеристики колеса, величина вертикального смещения его центра вследствие приложения нагрузки, а также коэффициент сухого трения между протектором и опорной поверхностью. В главе 1 задача описания контактного взаимодействия колеса и дороги решается в двумерной постановке.

## 1.2. Деформированное состояние элемента протектора. Уравнения равновесия. Силы реакции

Рассмотрим деформированное состояние стержневого элемента протектора в двух случаях: сначала – в случае жесткого закрепления стержня на диске, затем – в случае закрепления с пружинкой в основании стержня.

### 1.2.1. Равновесие деформированного стержня в случае жесткого закрепления

Пусть элемент протектора, гибкий упругий стержень длины  $h$ , жестко заделан в бандаже, представленном недеформируемым диском радиуса  $r$ . Введем неподвижную систему координат  $OX_1X_2$ , направив ось  $OX_1$  вертикально вниз, а ось  $OX_2$  горизонтально. Пусть относительно системы  $OX_1X_2$  прямолинейный участок дороги задается уравнением  $X_1 = R = r + h$  (рис. 6).

Введем также подвижную систему координат  $Cx_1x_2$ , с началом в центре колеса. Полагаем ось  $Cx_1$  направленной по вертикали к дороге, ось  $Cx_2$  – по горизонтали, а плоскость колеса совпадающей с плоскостью  $OX_1X_2$ . Тогда, поместив центр недеформированного колеса радиуса  $R$  (где  $R$  – это радиус диска вместе с протектором) в начало неподвижной системы отсчета, получим ситуацию касания с дорогой в одной точке.

Рассмотрим случай, когда перемещения центра колеса происходят вдоль оси  $OX_1$  и величина смещения выражается как  $|OC| = Rx$ . Поскольку  $R$  – это постоянная величина, равная радиусу недеформированного колеса, вертикальное смещение центра диска определяется безразмерным параметром  $x$ . (Далее в тексте именно  $x$ , а не  $Rx$ , будет называться «вертикальным смещением колеса».)

Стержень протектора направлен по радиусу диска и составляет в недеформированном состоянии угол  $\varphi$  с осью  $Cx_1$ . Параметр  $\varphi$  однозначно определяет рассматриваемый стержень и его положение на диске. Под действием нагрузок, приложенных к диску колеса, часть протектора вступает в контакт с дорогой и деформируется.

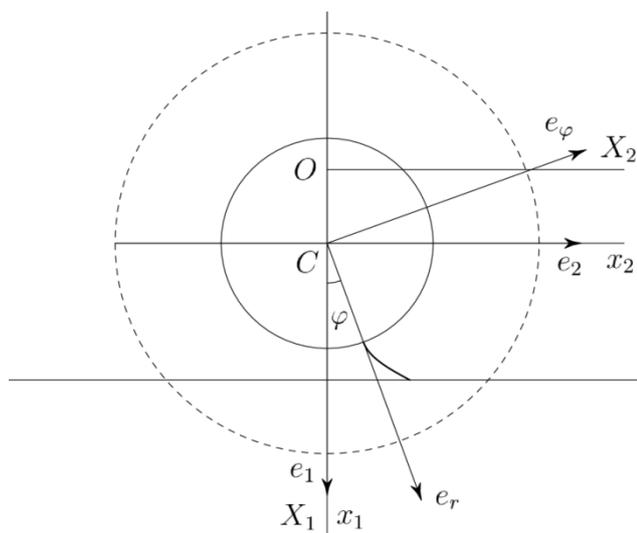


Рис. 6. Деформация стержневого элемента вследствие вертикального смещения центра колеса.  
Системы координат

Радиус вектор точки стержня протектора в системе координат  $Cx_1x_2$  зададим в виде

$$\vec{R}(s, t) = [r + s + u(s, t)]\vec{e}_r + v(s, t)\vec{e}_\varphi, \quad 0 \leq s \leq h. \quad (1.1)$$

Здесь  $\vec{e}_r$ ,  $\vec{e}_\varphi$  – орты полярной системы координат в плоскости  $Cx_1x_2$ ,  $s$  – координата точки на недеформированном стержне,  $u(s, t)$  и  $v(s, t)$  – продольное и поперечное перемещение точки стержня с координатой  $s$  в момент времени  $t$ .

Пусть под действием вертикальной нагрузки, приложенной к диску колеса, центр колеса переместился на расстояние  $Rx$ , а стержни протектора деформировались. Допустим, что конец стержня (точка  $K$ ) вошел в контакт с шероховатой горизонтальной плоскостью и в процессе нагрузки колеса не проскальзывал по плоскости. Уравнения равновесия стержня в деформированном состоянии получим из принципа возможных перемещений, используя линейную теорию продольно-изгибных деформаций стержней. Функционал потенциальной энергии изогнутого стержня имеет вид [8]:

$$\Pi = \int_0^h \frac{1}{2} ES(u')^2 ds + \int_0^h \frac{1}{2} EJ(v'')^2 ds, \quad (1.2)$$

где  $E$  – модуль Юнга,  $S$  – площадь поперечного сечения стержня,  $J$  – момент инерции сечения относительно оси изгиба, штрихом обозначена производная по координате  $s$  на оси стержня.

В формуле (1.2) первое слагаемое – потенциальная энергия продольной деформации стержня, второе слагаемое – потенциальная энергия изгиба.

Введём следующие обозначения:

$N = E \cdot S$  – продольная жесткость (жесткость на сжатие),

$T = E \cdot J$  – поперечная (изгибная) жесткость стержня.

Функционал энергии в новых обозначениях примет вид:

$$\Pi = \int_0^h \frac{1}{2} (N(u')^2 + T(v'')^2) ds. \quad (1.3)$$

Согласно вариационному принципу, вариация функционала энергии равна работе внешних сил [9]. Для того чтобы в дальнейшем получить из вариационного принципа уравнения движения точек стержня, найдем вариацию функционала энергии:

$$\delta \Pi = \delta \int_0^h \frac{1}{2} (N(u')^2 + T(v'')^2) ds = \int_0^h (Nu' \delta u' + Tv'' \delta v'') ds. \quad (1.4)$$

Учитывая  $\delta u' = \frac{\partial}{\partial s} \delta u$ ,  $\delta v'' = \frac{\partial^2}{\partial s^2} \delta v$ , преобразуем отдельно каждое из слагаемых правой части формулы (1.4).

Для первого слагаемого имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^h Nu' \delta u' ds &= \int_0^h Nu' d\delta u = Nu' \delta u \Big|_0^h - \int_0^h Nu'' \delta u ds = \\ &= Nu' \delta u(h) - \int_0^h Nu'' \delta u ds \end{aligned} \quad (1.5)$$

При переходе к последнему равенству в формуле (1.5), используется граничное условие  $u(0) = 0$ , откуда следует  $\delta u(0) = 0$  для вариации перемещений на закрепленном конце стержня. Вариация на свободном конце равна  $\delta u(h)$ .

Для второго слагаемого из формулы (1.4) имеем:

$$\int_0^h Tv'' \delta v'' ds = \int_0^h Tv'' d\delta v' = Tv'' \delta v' \Big|_0^h - \int_0^h Tv''' \delta v' ds =$$

$$\begin{aligned}
&= Tv'' \delta v' \Big|_0^h - Tv''' \delta v \Big|_0^h + \int_0^h Tv^{IV} \delta v ds = \\
&= Tv'' \delta v'(h) - Tv''' \delta v(h) + \int_0^h Tv^{IV} \delta v ds \quad (1.6)
\end{aligned}$$

В формуле (1.6) при переходе к последнему равенству используем условие жесткого закрепления конца стержня  $v(0) = v'(0) = 0$ , из чего следует  $\delta v(0) = \delta v'(0) = 0$ .

Таким образом, вариация функционала энергии равна

$$\begin{aligned}
\delta \Pi &= \delta \int_0^h \frac{1}{2} (N(u')^2 + T(v'')^2) ds = \\
&= \int_0^h Tv^{IV} \delta v ds - \int_0^h Nu'' \delta u ds + Nu' \delta u(h) + Tv'' \delta v'(h) - Tv''' \delta v(h) \quad (1.7)
\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим внешние силы, действующие на стержень. Сила реакции со стороны дороги, приложенная к концу стержня, равна

$$\vec{F} = F_r \vec{e}_r + F_\varphi \vec{e}_\varphi. \quad (1.8)$$

Тогда вариационный принцип запишется в виде

$$\delta \int_0^h \frac{1}{2} (N(u')^2 + T(v'')^2) ds = F_r \delta u(h) + F_\varphi \delta v(h),$$

или, с учётом (1.7):

$$\begin{aligned}
&\int_0^h Tv^{IV} \delta v ds - \int_0^h Nu'' \delta u ds + Nu' \delta u(h) + Tv'' \delta v'(h) - Tv''' \delta v(h) - \\
&- F_r \delta u(h) - F_\varphi \delta v(h) = 0. \quad (1.9)
\end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при независимых вариациях  $\delta u$ ,  $\delta v$ ,  $\delta v'$  и добавляя кинематические граничные условия, наложенные на перемещения стержня в заделке, получим систему уравнений равновесия точек стержня:

$$\left\{ \begin{array}{l} Nu''(s) = 0, \quad 0 \leq s \leq h; \\ Tv^{IV}(s) = 0, \quad 0 \leq s \leq h; \\ Nu'(h) = F_r; \\ Tv''(h) = 0; \\ Tv'''(h) = -F_\varphi; \\ u(0) = 0; \\ v(0) = v'(0) = 0. \end{array} \right. \quad (1.10)$$

Полученная система (1.10) состоит из двух обыкновенных дифференциальных уравнений с шестью граничными условиями. Граничные условия представлены условиями жесткой заделки стержня на одном конце и силового воздействия со стороны дороги на другом конце стержня.

Решениями приведенной системы будут выражения:

$$u(s) = \frac{F_r s}{N}, \quad v(s) = \frac{F_\varphi}{T} \left( \frac{hs^2}{2} - \frac{s^3}{6} \right). \quad (1.11)$$

Соотношения (1.11) выражают зависимость между перемещениями точек стержня и приложенными к его концу силами реакции.

Положение конца стержня при условии, что он проскальзывает в процессе нагрузки, определяется в системе координат  $Cx_1x_2$  вектором

$$\vec{R}(h) = R(1 - x)\vec{e}_1 + R(\sin \varphi + y)\vec{e}_2, \quad (1.12)$$

где  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  – орты осей  $Cx_1$  и  $Cx_2$  соответственно.

$Ry$  – величина проскальзывания вдоль оси  $OX_2$ , или, другими словами, величина горизонтального смещения конца стержня за время от начала контакта с дорогой до рассматриваемого момента. Поскольку значение  $R$  постоянно для колеса, величина горизонтального смещения характеризуется безразмерным параметром  $y$ . (Поэтому далее по отношению к  $y$  также будет употребляться выражение «горизонтальное смещение конца стержня».)

Выражение (1.12) представляет геометрическое условие, описывающее положение конца деформированного стержня. С другой стороны, согласно формуле (1.1) и решениям уравнений равновесия деформированного стержня (1.11), имеем:

$$\vec{R}(h) = \left( R + \frac{hF_r}{N} \right) \vec{e}_r + \frac{h^3 F_\varphi}{3T} \vec{e}_\varphi . \quad (1.13)$$

Учитывая разложение базисных векторов  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_2$

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \vec{e}_r \cos \varphi - \vec{e}_\varphi \sin \varphi , \\ \vec{e}_2 &= \vec{e}_r \sin \varphi + \vec{e}_\varphi \cos \varphi , \end{aligned}$$

и приравнивая правые части соотношений (1.12) и (1.13), получим

$$\begin{aligned} R(1-x)(\vec{e}_r \cos \varphi - \vec{e}_\varphi \sin \varphi) + R(\sin \varphi + y)(\vec{e}_\varphi \cos \varphi + \vec{e}_r \sin \varphi) \\ = \left( R + \frac{hF_r}{N} \right) \vec{e}_r + \frac{h^3 F_\varphi}{3T} \vec{e}_\varphi . \end{aligned}$$

Перегруппировав слагаемые, из равенства коэффициентов при  $\vec{e}_r$  и  $\vec{e}_\varphi$  получим:

$$\begin{aligned} R(1-x) \cos \varphi + R(\sin \varphi + y) \sin \varphi &= R + \frac{hF_r}{N} , \\ R(\sin \varphi + y) \cos \varphi - R(1-x) \sin \varphi &= \frac{h^3 F_\varphi}{3T} . \end{aligned}$$

Из приведенных выше выражений найдем уравнения для компонент реакции, действующей на конце стержня в точке контакта с дорогой:

$$\begin{aligned} F_r &= -\frac{NR}{h} [(x-1 + \cos \varphi) \cos \varphi - y \sin \varphi] , \\ F_\varphi &= \frac{3TR}{h^3} [(x-1 + \cos \varphi) \sin \varphi + y \cos \varphi] . \end{aligned}$$

Введем обозначения:

1.  $z = x - 1 + \cos \varphi$ . При этом  $Rz$  будет иметь смысл смещения конца стержня вдоль вертикальной оси (далее выражение «вертикальное смещение конца стержня» будет применяться также по отношению к безразмерному параметру  $z$ ).
2.  $\zeta = \frac{3T}{Nh^2}$  – безразмерная величина, характеризующая отношение изгибной и продольной жесткостей стержня.

Тогда полученные выражения для сил преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} F_r &= -\frac{NR}{h} [z(\varphi, x) \cos \varphi - y \sin \varphi] , \\ F_\varphi &= \frac{NR}{h} \zeta [z(\varphi, x) \sin \varphi + y \cos \varphi] . \end{aligned} \quad (1.14)$$

Далее, чтобы вычислить значения нормальной и касательной компонент реакции, найдем проекции реакции в точке контакта на оси  $OX_1, OX_2$  (рис.7):

$$\begin{aligned} F_1 &= F_r \cos \varphi - F_\varphi \sin \varphi , \\ F_2 &= F_r \sin \varphi + F_\varphi \cos \varphi . \end{aligned}$$

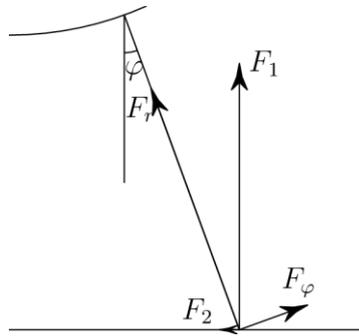


Рис. 7. Компоненты реакции  $\vec{F}$ , действующей на стержень с координатой  $\varphi$ :  
 $\vec{F} = F_1 \vec{e}_1 + F_2 \vec{e}_2 = F_r \vec{e}_r + F_\varphi \vec{e}_\varphi$

Учитывая соотношения (1.14) получим:

$$\begin{aligned} F_1 &= -\frac{NR}{h} [(1 + \zeta \operatorname{tg}^2 \varphi) z(\varphi, x) + y(\zeta - 1) \operatorname{tg} \varphi] \cos^2 \varphi , \\ F_2 &= \frac{NR}{h} [z(\varphi, x)(\zeta - 1) \operatorname{tg} \varphi + y(\operatorname{tg}^2 \varphi + \zeta)] \cos^2 \varphi . \end{aligned} \quad (1.15)$$

Из полученных формул следует, что зависимость нормальной реакции  $F_1$  от угла  $\varphi$  четная, а касательной реакции  $F_2$  – нечетная.

Отметим, что  $F_1 \leq 0$  в силу предположения о том, что стержень не сходит с неудерживающей связи (не отрывается от поверхности дороги) в течение всего времени контакта. Для стержней, принадлежащих зоне контакта, выполнено также:  $z(\varphi, x) \geq 0$ .

### 1.2.2. Равновесие деформированного стержня в случае закрепления с пружиной

Рассмотрим теперь более общий случай закрепления элемента протектора на диске.

Будем считать, что элемент протектора устроен следующим образом: он представляет из себя деформируемый линейно упругий стержень, наделенный продольной жесткостью  $N$  и поперечной жесткостью  $T$ , в основании стержня (в месте его крепления к диску) расположена пружина жесткости  $C$ , позволяющая стержню смещаться вдоль радиуса диска (иными словами, вдоль недеформированной оси этого стержня)(рис.5, справа). Пусть это смещение достаточно мало, чтобы не влиять на изгиб стержня. Представление элемента протектора в виде комбинации стержня и пружинки позволяет считать стержни достаточно жесткими в продольном направлении ( $N \gg C$ ).

Для того чтобы найти соотношения, описывающие деформированное состояние стержневого элемента, закрепленного на диске с помощью пружинки, требуется провести рассуждения, аналогичные п. 1.2.1. Ниже будет показано как изменятся формулы (1.10)-(1.15) при добавлении пружинки в конструкцию элемента протектора.

Переход от предположения о жестком закреплении стержня на диске к предположению о креплении с помощью пружины требует изменения в системе уравнений (1.10) одного из граничных условий. Условие, описывающее осевое смещение основания стержня, теперь будет иметь вид [57]:

$$u(0) = \frac{F_r}{C}. \quad (1.16)$$

Соотношение (1.16) означает, что деформация пружины, находящейся в основании стержня, происходит только в осевом направлении и определяется законом Гука.

Система уравнений равновесия точек стержня переписется в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} Nu''(s) = 0, \quad 0 \leq s \leq h; \\ Tv^{IV}(s) = 0, \quad 0 \leq s \leq h; \\ Nu'(h) = F_r; \\ Tv''(h) = 0; \\ Tv'''(h) = -F_\varphi; \\ Cu(0) = F_r; \\ v(0) = v'(0) = 0, \end{array} \right. \quad (1.17)$$

где  $u$  – продольное,  $v$  – поперечное перемещение точки стержня.

Решив полученную систему уравнений, найдем выражение для осевого смещения точки стержня с координатой  $s$ :

$$u(s) = \frac{F_r}{C} + \frac{F_r s}{N}. \quad (1.18)$$

В частности, осевое смещение конца стержня, контактирующего с дорогой, будет равно:

$$u(h) = \frac{F_r(N+Ch)}{CN}. \quad (1.19)$$

Отметим, что изменение представления о креплении стержня на диске не повлияет на выражения для поперечного смещения. Для произвольной точки стержня имеем:

$$v(s) = \frac{F_\varphi}{T} \left( \frac{hs^2}{2} - \frac{s^3}{6} \right),$$

поперечное смещение незакрепленного конца стержня:

$$v(h) = \frac{F_\varphi h^3}{3T}.$$

Далее запишем выражения для радиус-вектора конца деформированного стержня двумя способами (аналогично (1.12) и (1.13)).

В системе координат с началом в центре колеса, одна из осей которой направлена вдоль недеформированной оси стержня, а другая перпендикулярна ей, радиус-вектор конца деформированного стержня будет иметь вид:

$$\vec{R}(h) = (R + u(h))\vec{e}_r + v(h)\vec{e}_\varphi$$

или, после подстановки выражений для  $u(h)$  и  $v(h)$  :

$$\vec{R}(h) = \left( R + \frac{F_r(N+Ch)}{CN} \right) \vec{e}_r + \frac{F_\varphi h^3}{3T} \vec{e}_\varphi. \quad (1.20)$$

С другой стороны, в системе координат  $Cx_1x_2$  выражение для  $\vec{R}(h)$  запишется в виде:

$$\vec{R}(h) = R(1-x)\vec{e}_1 + R(\sin\varphi + y)\vec{e}_2.$$

Учитывая выражения перехода между базисами  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$  и  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$ , приравняв правые части полученных соотношений для  $\vec{R}(h)$ , из равенства коэффициентов при  $\vec{e}_r$  и  $\vec{e}_\varphi$  найдем выражения для компонент реакции  $F_r$  и  $F_\varphi$ , приложенных к стержню в точке контакта:

$$\begin{aligned} F_r &= -\frac{NRC}{(Ch+N)} [(x-1+\cos\varphi)\cos\varphi - y\sin\varphi], \\ F_\varphi &= \frac{3TR}{h^3} [(x-1+\cos\varphi)\sin\varphi + y\cos\varphi]. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Введем безразмерный параметр  $\zeta_*$ , характеризующий жесткость протектора, как отношение коэффициентов при  $F_\varphi$  и  $F_r$ :

$$\zeta_* = \frac{3TR}{h^3} \cdot \frac{(Ch+N)}{NRC} = \frac{3T(Ch+N)}{NCh^3} = \frac{3T}{Nh^2} + \frac{3T}{Ch^3}. \quad (1.22)$$

$\zeta_*$  будет аналогом  $\zeta$ , введенного выше для жестко закрепленного стержня.

Отметим, что

- 1)  $\zeta_* \rightarrow \infty$  при  $C \rightarrow 0$ ,
- 2)  $\zeta_* \rightarrow \frac{3T}{Nh^2}$  (т.е.  $\zeta_* \rightarrow \zeta$ ) при  $C \rightarrow \infty$ .

Из вышесказанного следует, что:

- Изменяя значение жесткости пружины  $C$  можно получить произвольно большие значения параметра  $\zeta_*$ .
- При устремлении жесткости пружины к бесконечности,  $\zeta_*$  переходит в значение  $\zeta$ , соответствующее протектору с жестко закрепленными стержневыми элементами.

С учетом обозначения  $z = x - 1 + \cos \varphi$ , перепишем выражения для сил в виде:

$$\begin{aligned} F_r &= -\frac{NRC}{(Ch+N)} [z(\varphi, x) \cdot \cos \varphi - y \sin \varphi], \\ F_\varphi &= \frac{NRC}{(Ch+N)} \cdot \zeta_* \cdot [z(\varphi, x) \cdot \sin \varphi + y \cos \varphi]. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Полученные выражения отличаются от формул (1.14), соответствующих ситуации жестко закрепленного стержня, коэффициентом при выражениях в квадратных скобках, а также тем, что на месте  $\zeta$  теперь стоит  $\zeta_*$ . Отметим, что и упомянутый коэффициент, и безразмерный параметр, характеризующий жесткость протектора ( $\zeta_*$ ), теперь зависят также от жесткости  $C$  пружины в основании стержня.

Формулы  $F_1$  и  $F_2$  (проекций реакции на вертикальную и горизонтальную оси неподвижной системы координат) для стержня с пружиной в основании будут иметь вид:

$$\begin{aligned} F_1 &= -\frac{NRC}{(Ch+N)} [(1 + \zeta_* \operatorname{tg}^2 \varphi)z(\varphi, x) + y(\zeta_* - 1)\operatorname{tg} \varphi] \cos^2 \varphi, \\ F_2 &= \frac{NRC}{(Ch+N)} [z(\varphi, x)(\zeta_* - 1)\operatorname{tg} \varphi + y(\operatorname{tg}^2 \varphi + \zeta_*)] \cos^2 \varphi, \quad \zeta_* = \frac{3T(Ch+N)}{NCh^3} \end{aligned} \quad (1.24)$$

Анализируя соотношения (1.24), заключим, что полученные зависимости  $F_1$  и  $F_2$  от  $\varphi, z, y$  аналогичны формулам (1.15) с точностью до коэффициентов:  $\zeta_*$  и коэффициента при выражениях в квадратных скобках.

Отметим, что  $\frac{NRC}{(Ch+N)} \rightarrow \frac{NR}{h}$  при  $C \rightarrow \infty$ . Учитывая также  $\zeta_* \rightarrow \zeta$  при  $C \rightarrow \infty$ , заметим, что формулы (1.14) могут быть получены из (1.23), а формулы (1.15) – из (1.24) при  $C \rightarrow \infty$ . То есть жесткое закрепление является частным случаем закрепления с пружиной. Коэффициенты  $\frac{NRC}{(Ch+N)}$  и  $\zeta_*$  зависят только от параметров жесткости, являются характеристиками протектора в целом и не зависят ни от конкретного стержня, ни от смещения колеса, ни от условий контакта с дорогой.

В дальнейшем в диссертации для выражения сил, действующих на участок протектора с координатой  $\varphi$ , по умолчанию будут использоваться формулы вида (1.15), соответствующие жесткому закреплению стержня. Однако в силу вышесказанного, все проводимые ниже на основании формул (1.15) рассуждения

могут быть распространены на случай конструкции протектора с пружинками в основаниях стержневых элементов путем замены соответствующих коэффициентов:  $\zeta$  следует заменить на  $\zeta_*$ , а коэффициент  $\frac{NR}{h}$  заменить на  $\frac{NRC}{(Ch+N)}$ .

### 1.3. Контакт стержня с дорогой. Зона контакта.

#### Условие отсутствия проскальзывания

Зона контакта (ЗК) определяется неравенствами

$$-\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_0,$$

где значения  $\varphi_0$  находим из геометрического соображения  $\cos \varphi_0 = \frac{R-Rx}{R}$ . Таким образом

$$\varphi_0 = \arccos(1 - x). \quad (1.25)$$

Для случая, когда вертикальное смещение колеса мало в сравнении с его радиусом, т.е.  $Rx \ll R$  или, в эквивалентной записи,  $x \ll 1$ , может быть использована аппроксимация

$$\varphi_0 = \arccos(1 - x) \approx \sqrt{2x} \quad (1.26)$$

Итак, величина зоны контакта определяется из геометрических соображений. Зависимость положения границы зоны контакта  $\varphi_0$  от вертикального смещения колеса  $x$  в общем случае выражается формулой (1.25), а в случае малого  $x$  может быть использовано приближение (1.26).

Соотношение между нормальной и касательной компонентами силы реакции определяется свойствами трения, действующего в зоне контакта рассматриваемых тел. Будем решать задачу в предположении, что между стержнем и дорогой действует сухое трение Кулона.

*Условие отсутствия проскальзывания* в точке контакта стержня с шероховатой плоскостью в модели сухого трения имеет вид

$$|F_2| \leq -f \cdot F_1, \quad (1.27)$$

где  $f$  – коэффициент трения покоя.

Подставляя в неравенство (1.27) вместо  $F_1$  и  $F_2$  выражения из формул (1.15), получим:

$$|z(\varphi, x)(\zeta - 1)\operatorname{tg}\varphi + y(\operatorname{tg}^2\varphi + \zeta)| \leq f[(1 + \zeta \operatorname{tg}^2\varphi)z(\varphi, x) + y(\zeta - 1)\operatorname{tg}\varphi]. \quad (1.28)$$

Неравенство (1.28) определяет возможные положения равновесия конца стержня – множество значений перемещения конца стержня  $y$ , при которых возможно равновесие при заданной величине  $z$ , определяемой координатой стержня  $\varphi$  и перемещением центра колеса  $x$ .

Если сухое трение в точке контакта конца стержня с дорогой отсутствует ( $f = 0$ ), то согласно (1.28) область возможных положений равновесия сводится к одной точке  $y_0$ , когда

$$z(\varphi, x)(\zeta - 1)\operatorname{tg}\varphi + y_0(\operatorname{tg}^2\varphi + \zeta) = 0,$$

и, следовательно,

$$y_0 = \frac{(1-\zeta)\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}^2\varphi + \zeta} z(\varphi, x). \quad (1.29)$$

Таким образом, при  $f = 0$  связь между горизонтальным и вертикальным перемещениями конца стержня выражается линейной зависимостью:

$$y_0 = k_0(\zeta, \varphi)z, \quad \text{где } k_0(\zeta, \varphi) = \frac{(1-\zeta)\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}^2\varphi + \zeta} \quad (1.30)$$

Заметим, что для положительных  $\varphi$  перемещение конца стержня  $y_0 \geq 0$  при  $(1 - \zeta) > 0$  и  $y_0 \leq 0$  при  $(1 - \zeta) < 0$ . Для отрицательных значений углов  $\varphi$  картина меняется на противоположную:  $y_0 \leq 0$  при  $(1 - \zeta) > 0$  и  $y_0 \geq 0$  при  $(1 - \zeta) < 0$ . Из анализа этих неравенств можно заключить, что *направление перемещения  $y_0$  конца стержня* определяется значением параметра  $\zeta$ , выражающего отношение изгибной и продольной жесткостей стержня. Концы стержней перемещаются либо от центра зоны контакта (точка с координатами  $(R(1 - x), 0)$ ), когда  $\zeta < 1$ , либо к центру зоны контакта, когда  $\zeta > 1$ .

На первый взгляд, из приведенных выше формулировок может показаться, что при значениях  $\zeta > 1$  стержень начинает изгибаться к центру зоны контакта, однако, это не так. Рассматривается перемещение конца стержня относительно *первоначальной точки контакта*. При этом, независимо от значения  $\zeta$ , деформированная ось стержня находится с внешней стороны от оси недеформированного стержня.

На рисунке 8 приведен пример формы деформированного стержня для колеса с параметрами  $r = h = 1$ , вертикальным смещением  $x = 0.35$  для различных значений  $\zeta$ . Пунктирной линией обозначена ось недеформированного стержня, точка показывает место первоначального контакта стержня с дорогой.

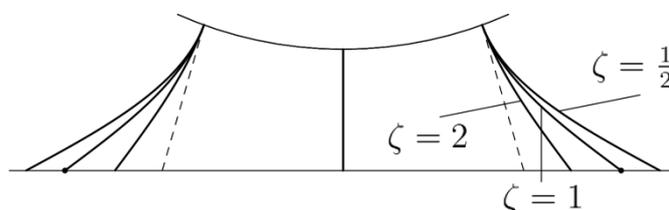


Рис. 8. Форма деформированного стержня при  $f = 0$  и различных значениях  $\zeta$

Из рис. 8 видно, что чем больше значение  $\zeta$ , тем ближе находится ось деформированного стержня к его недеформированной оси. Это объясняется тем, что условие  $\zeta > 1$  означает, что приведенная изгибная жесткость стержня больше осевой, иными словами, сжатию стержень поддается легче, чем изгибу. При  $0 < \zeta < 1$  стержень, напротив, легче поддается изгибу, чем сжатию.

Проведенные в данном параграфе рассуждения будут верны для стержней, закрепленных на диске с помощью пружинки, если заменить в них  $\zeta$  на  $\zeta_*$  (действительно, если подставить в (1.27) выражения (1.24), получим неравенство, единственное отличие которого от (1.28) будет в присутствии  $\zeta_*$  вместо  $\zeta$  в соответствующих слагаемых).

## 1.4. Определение областей проскальзывания внутри зоны контакта

Найдем области сцепления («прилипания») и области проскальзывания внутри зоны контакта при наличии сухого трения в точке контакта. Разбиение на названные области определяется распределением нагрузок внутри зоны контакта.

Если проскальзывание отсутствует, то  $y = 0$ , и неравенство (1.28) принимает вид

$$|F_2| \leq -f \cdot F_1 \quad \Rightarrow \quad |1 - \zeta| \cdot |\operatorname{tg} \varphi| \leq f(1 + \zeta \operatorname{tg}^2 \varphi) \quad (1.31)$$

Неравенство (1.31) всегда справедливо в некоторой окрестности  $\varphi = 0$ , то есть в центре зоны контакта проскальзывание отсутствует. Отметим, что величина зоны контакта, где проскальзывание отсутствует, не зависит от величины перемещения центра диска колеса в направлении оси  $OX_1$ .

Из анализа неравенства (1.31) следует, что существует условие, при котором проскальзывание будет отсутствовать в любой точке зоны контакта, а именно,  $\zeta = 1$  (для жестко закрепленных стержней). Для стержней с пружинкой в основании аналогичное условие имеет вид:  $\zeta_* = 1$ .

Параметр  $\zeta$  (как и  $\zeta_*$ ) зависит только от геометрических и жесткостных характеристик элемента протектора, откуда следует возможность сконструировать элементы протектора таким образом, чтобы проскальзывание в зоне контакта отсутствовало при любых значениях коэффициента трения. Выполнение указанного условия при конструировании протектора обеспечило бы отсутствие проскальзывания в точках контакта при любом коэффициенте трения и уменьшило тем самым износ протектора шины.

Далее определим границы областей проскальзывания. Зоны проскальзывания определяются значениями углов  $\varphi$ , при которых нарушается неравенство (1.31):

$$|1 - \zeta| \cdot |\operatorname{tg} \varphi| \geq f(1 + \zeta \operatorname{tg}^2 \varphi), \quad \text{или} \quad f\zeta \operatorname{tg}^2 \varphi - |1 - \zeta| \cdot |\operatorname{tg} \varphi| + f \leq 0.$$

Решая квадратное уравнение относительно  $\operatorname{tg}\varphi$ , получим

$$\operatorname{tg}\varphi_{\pm} = \frac{|1 - \zeta| \pm \sqrt{(1 - \zeta)^2 - 4f^2\zeta}}{2f\zeta}.$$

Неравенства, задающие *границы зоны проскальзывания*, имеют вид:

$$\varphi_- < |\varphi| < \varphi_+, \quad \varphi_{\pm} = \operatorname{arctg} \left[ \frac{|1 - \zeta| \pm \sqrt{(1 - \zeta)^2 - 4f^2\zeta}}{2f\zeta} \right]. \quad (1.32)$$

Заметим, что так как в формуле (1.32) не присутствует  $x$ , проскальзывание или непроскальзывание обусловлено жесткостью и геометрическими характеристиками стержня, а не смещением центра колеса. То есть для конкретного стержня с координатой  $\varphi$  заранее (до изменения  $x$ ) можно узнать, будет ли он проскальзывать, а именно: если стержень проскальзывает (при данном коэффициенте трения  $f$ ), то он проскальзывает с самого начала контакта; если не проскальзывает, то не проскальзывает при любом  $x$ .

На рисунке 9 представлен пример разбиения зоны контакта на области проскальзывания и прилипания. Углы  $\varphi_0$ ,  $\varphi_-$ ,  $\varphi_+$  отсчитываются от вертикали. Границы зоны контакта  $[-\varphi_0; \varphi_0]$  обозначены пунктирными линиями с началом в точке  $O$ . Областям проскальзывания  $(-\varphi_+; -\varphi_-)$  и  $(\varphi_-; \varphi_+)$  соответствуют заштрихованные сектора. Для каждого из стержневых элементов протектора изображены: деформированная форма (1.11) (сплошная линия) и недеформированная ось (мелкий пунктир). Проекция конца недеформированной оси стержня на дорогу соответствует точке первоначального контакта данного стержня с поверхностью. Таким образом, из рис. 9 видим, что концы стержней из «заштрихованных секторов» сместились относительно точек первоначального контакта; для остальных стержней деформации не сопровождалась горизонтальным перемещением точки контакта.

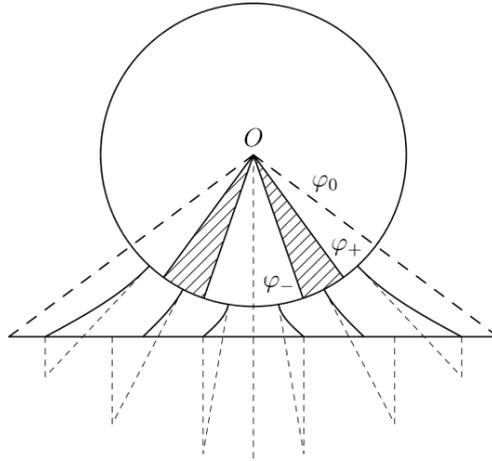


Рис. 9. Зона контакта при  $f \neq 0$ : области проскальзывания и прилипания  
( $f = 0.7$ ,  $\zeta = 4$ ,  $r = h = 1$ ,  $x = 0.4$ )

Зоны проскальзывания концов стержня не возникнут, если выполняется условие  $4f^2 > \frac{(1-\zeta)^2}{\zeta}$ , при котором неравенство (1.31), согласно (1.32), не имеет решений. В противном случае возникают две зоны проскальзывания, когда  $\varphi_- < |\varphi| < \varphi_+$ , если область контакта достаточно велика ( $\varphi_0 > \varphi_-$ ). Например, для коэффициента трения  $f = 0.7$  зоны проскальзывания возникнут в случае, если  $0 < \zeta < 0.271$  или  $\zeta > 3.69$ .

Дадим приближенную оценку размеров области в зоне контакта, где не будет проскальзывания, полагая угол  $\varphi$  малым. Неравенство (1.31) в этом случае примет вид

$$|1 - \zeta| \cdot |\varphi| \leq f$$

Непроскальзывающие стержни удовлетворяют условию:  $|\varphi| < \varphi_-$ , следовательно границы областей проскальзывания при малом  $\varphi$  могут быть найдены по формуле:

$$\varphi_- \approx \frac{f}{|1 - \zeta|}$$

Таким образом, мы определили условия возникновения проскальзывания в зоне контакта, а также вывели формулы для определения границ областей сцепления и скольжения.

## **1.5. Последовательная нагрузка–разгрузка элемента протектора. Неоднозначность положения равновесия стержня. Гистерезис**

В данном параграфе будут рассмотрены изменения деформированной формы стержня протектора на цикле последовательного увеличения-уменьшения вертикального смещения центра колеса. Будет показано, что в случае наличия проскальзывания между стержнем и дорогой последовательная нагрузка-разгрузка сопровождается потерями энергии.

Анализ последовательной *статической* нагрузки-разгрузки упругого элемента протектора необходим для дальнейшего понимания процесса взаимодействия элемента протектора с дорогой при *качении* колеса, а также объяснения причин и механизма рассеяния энергии в контактной области. Действительно, в общем случае качения колеса с упругим протектором, элементы протектора, за время нахождения в зоне контакта с дорогой проходят полный цикл последовательной нагрузки-разгрузки. Перечислим стадии взаимодействия с дорогой, которые проходит элемент протектора при качении колеса:

1. Находясь вне зоны контакта, стержень не нагружен.
2. При входе в контакт с дорогой стержень нагружается,
3. затем, при движении вдоль пятна контакта от его переднего края до середины, нагрузка на стержень постепенно увеличивается,
4. далее, при перемещении стержня от центра пятна контакта к его задней границе, нагрузка на данный стержень ослабевает, и наконец,
5. нагрузка становится равной нулю к моменту выхода стержня из зоны контакта и его отрыва от поверхности дороги.

Таким образом, при качении колеса элементы его периферии испытывают последовательную нагрузку и разгрузку.

Качественно механизм потерь энергии при взаимодействии протектора и дороги может быть продемонстрирован посредством описания статической нагрузки-разгрузки колеса. Методы оценки сопротивления качению на основе данных о нагрузке-разгрузке образцов вертикальной силой обсуждаются в книге Ф. Боудена и Д. Тейбора [3].

Изучим поведение стержневого элемента протектора с координатой  $\varphi$  при увеличении и последующем уменьшении вертикального смещения центра колеса.

Сначала определим область возможных положений равновесия стержня с координатой  $\varphi$  (другими словами, область возможных величин смещения конца стержня вдоль дороги) в зависимости от значения перемещения  $z = x - 1 + \cos \varphi$  конца этого стержня вдоль вертикальной оси. Границы области на полуплоскости ( $z > 0, y$ ) задаются двумя прямыми, проходящими через начало координат

$$y_{\pm} = k_{\pm}z, \quad k_{\pm} = \frac{(1-\zeta)\operatorname{tg}\varphi \pm f(1+\zeta \operatorname{tg}^2\varphi)}{\operatorname{tg}^2\varphi + \zeta \pm f(1-\zeta)\operatorname{tg}\varphi}. \quad (1.34)$$

Прямые (1.34) получены в результате раскрытия модуля в левой части неравенства (1.28) и замены знака неравенства на равенство.

Рассмотрим процесс перемещения конца стержня вдоль оси  $OX_2$  при увеличении  $z = x - 1 + \cos \varphi$  и последующем его уменьшении. Отметим, что в силу того что  $\varphi$  постоянно для выбранного стержня, изменение  $z$  равносильно изменению смещения центра колеса  $x$ .

Если коэффициент трения  $f = 0$ , то две прямые в (1.34) сливаются в одну, определяемую формулой (1.30). Перемещения конца стержня происходят вдоль этой прямой. При каждом фиксированном  $z$  существует только одно положение равновесия.

Если  $f \neq 0$  и конец стержня находится в той части зоны контакта, где выполняется неравенство (1.28), то перемещение точки контакта в процессе изменения  $z$  равно нулю, хотя при каждом фиксированном  $z$  область возможных значений  $y$  в положениях равновесия является отрезком  $[y_1, y_2]$ , включающим ноль. Здесь  $y_1 = \min(k_+, k_-)z < 0$ ,  $y_2 = \max(k_+, k_-)z > 0$ .

Если  $f \neq 0$  и конец стержня находится в той части зоны контакта, где неравенство (1.28) не выполняется, то перемещение точки контакта в процессе изменения  $z$  не равно нулю и происходит вдоль прямых, задаваемых уравнениями (1.34). При возрастании  $z$  величина проскальзывания  $y$  изменяется вдоль прямой, составляющей наименьший угол с осью  $Oz$ , затем при разгрузке (уменьшении  $z$ ) проскальзывания конца стержня не наблюдается, до момента, когда  $y$  попадает на вторую кривую (1.34), составляющую наибольший угол с осью  $Oz$ , и в дальнейшем переменная  $y$  попадает в ноль вдоль этой прямой, когда  $z$  обратится в ноль. Таким образом, появляется зона застоя, обусловленная наличием сухого трения, которой принадлежат возможные положения равновесия конца стержня. Зона застоя  $[z_1, z_2]$  соответствует изменению  $z$  (или, в эквивалентной формулировке, изменению перемещения центра колеса  $x$ ), при котором величина проскальзывания  $y$  рассматриваемого стержня с координатой  $\varphi$  остается постоянной. Границы зоны застоя определяются из формул

$$\begin{aligned} \min(k_+, k_-) z_1 = \max(k_+, k_-) z_2 > 0, & \text{ если } (1 - \zeta)\text{tg}\varphi > 0 \\ \max(k_+, k_-) z_1 = \min(k_+, k_-) z_2 < 0, & \text{ если } (1 - \zeta)\text{tg}\varphi < 0 \end{aligned} \quad (1.35)$$

В формулах (1.35) следует задать величину перемещения  $z_1$ , и затем найти  $z_2$ .

На плоскости  $Ozy$  при нагрузке-разгрузке стержня, сопровождающейся проскальзыванием, изменение  $y(z)$  происходит по треугольнику, расположенному либо в нижней полуплоскости, если  $(1 - \zeta)\text{tg}\varphi < 0$ , либо в верхней полуплоскости при  $(1 - \zeta)\text{tg}\varphi > 0$ , см. рисунок 10.

Таким образом, при наличии проскальзывания, процесс нагрузки и разгрузки стержня обладает гистерезисом и сопровождается потерей энергии.

Зависимости нормальной и горизонтальной реакций от перемещения  $z(x)$ , когда конец стержня находится в зоне проскальзывания, представлены на рисунке 11. Они вычисляются с помощью формул (1.15) после подстановки в них  $y$  и  $z$  в соответствии с (1.34) и (1.35).

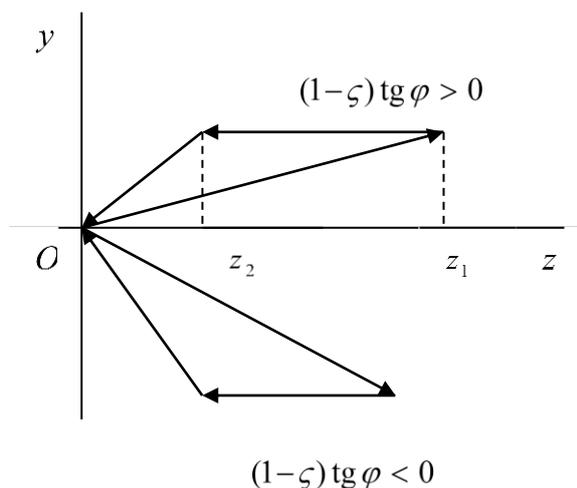


Рис. 10. Изменение горизонтального смещения (проскальзывания) конца стержня  $y$  на цикле нагрузки-разгрузки

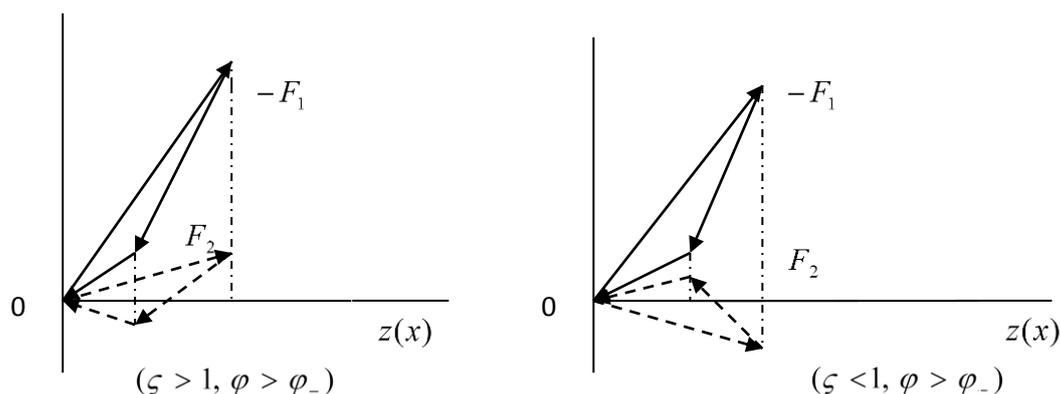


Рис. 11. Изменение компонент реакции на цикле нагрузки-разгрузки для проскальзывающих стержней различной жесткости

Нормальная реакция в точке контакта стержня с дорогой равна  $-F_1(x, \varphi)$  и неоднозначна в области контакта с проскальзыванием. Неоднозначность возникает при смене нагрузки процессом разгрузки стержня. Касательная реакция  $F_2$  представлена пунктирной линией и меняет знак при переходе от нагрузки к разгрузке стержня. Этот переход соответствует постоянному значению величины перемещения конца стержня  $y$ , как это показано на рисунке 11.

Если угол, определяющий наклон стержня, мал ( $\varphi \leq \varphi_-$ ), то проскальзывание конца стержня отсутствует, и треугольники на рисунке 11 вырождаются в отрезки прямых линий.

## 1.6. Потери энергии на цикле нагрузки–разгрузки колеса

Найдем работу внешних сил и реакций связей при циклическом процессе нагрузки-разгрузки колеса. Нагрузка выражается через увеличение, а разгрузка - через уменьшение вертикального смещения центра колеса.

Если максимальная величина перемещения центра колеса  $\max x < 1 - \cos \varphi_-$ , то проскальзывания концов стержней нет, и, следовательно, равна нулю работа сил реакций связей в точках контакта стержней. Вертикальная сила, действующая на колесо, является потенциальной, а её работа на замкнутом цикле нагрузки-разгрузки равна нулю.

Если  $\max x > 1 - \cos \varphi_-$ , то появляются области в зоне контакта, где наблюдается проскальзывание концов стержней, что изменяет зависимость вертикальной силы от перемещения на участках нагрузки-разгрузки и порождает работу сил трения.

Непотенциальная часть вертикальной силы, действующей на стержень с координатой  $\varphi$ , получается из первого равенства (1.15) если в нем оставить только член, содержащий величину  $y$ :

$$F_1 = \frac{NR}{h} y(1 - \zeta) \sin \varphi \cos \varphi, \quad \varphi_- < \varphi < \varphi_0 \quad (1.36)$$

Обозначив выражения для этой силы на участках нагрузки и разгрузки как  $F_{11}$  и  $F_{12}$  соответственно, найдем работу силы  $F_1$  на цикле как площадь графика на рисунке 11:

$$\begin{aligned} \Delta A_1 &= \frac{1}{2} F_{11}(z_1) \cdot R z_1 - \frac{1}{2} [R(z_1 - z_2)(F_{11}(z_1) + F_{12}(z_2))] - \frac{1}{2} F_{12}(z_2) \cdot R z_2 = \\ &= \frac{1}{2} R(F_{11}(z_1) \cdot z_2 - F_{12}(z_2) \cdot z_1) \end{aligned}$$

Учитывая формулу (1.36) и подставляя выражения (1.34) и (1.35) для  $y$ , получим

$$\Delta A_1 = \frac{NR^2}{h} \cdot \frac{\min(|k_+|, |k_-|)}{\max(|k_+|, |k_-|)} |(k_+ - k_-)(1 - \zeta) \sin \varphi| z^2 \cos \varphi$$

Таким образом, работа силы  $\Delta F_1$  на цикле равна

$$\Delta A_1 = \frac{NR^2}{2h} D_1,$$

где

$$D_1 = \frac{\min(|k_+|, |k_-|)}{\max(|k_+|, |k_-|)} |(k_+ - k_-)(1 - \zeta) \sin \varphi| (x - 1 + \cos \varphi)^2 \cos \varphi,$$

$$\varphi_- < \varphi < \varphi_0.$$

Сила трения  $F_2$  совершает работу только при проскальзывании конца стержня вдоль дороги. Эта работа отрицательна, так как сила направлена против движения точки. Имеем:

$$\Delta A_2 = - \int_0^y F_{21} R dy + \int_y^0 F_{22} R dy,$$

где

$$F_{2k} = \frac{NR}{h} y_k (\sin^2 \varphi + \zeta \cos^2 \varphi), \quad k = 1, 2$$

В результате получим

$$\Delta A_2 = - \frac{NR^2}{2h} D_2,$$

где

$$D_2 = 2(\min(|k_+|, |k_-|))^2 (x - 1 + \cos \varphi)^2 (\sin^2 \varphi + \zeta \cos^2 \varphi).$$

Для определения работы в случае распределенной системы стержней необходимо вычислить интегралы по той части зоны контакта, где происходит проскальзывание стержней:

$$A = \frac{nR^3}{h} \int_{\varphi_-}^{\min(\varphi_0, \varphi_+)} (D_1 - D_2) d\varphi,$$

где  $n$  – это продольная жесткость единицы длины протектора в непрерывной модели. Связь величины  $n$  с продольной жесткостью стержня в дискретной

стержневой модели протектора выражается соотношением:  $n = \frac{Ni}{2\pi R}$  ( $i$  – общее количество стержней в дискретной модели). Подробно переход от дискретной к непрерывной модели протектора будет рассмотрен в п. 1.7.2.

Таким образом, в п. 1.5 и 1.6 показано, что эффект скольжения приводит к различным величинам восстанавливающих сил при нагрузке и разгрузке стержней, а также к потере энергии за счет работы сил сухого трения.

## **1.7. Суммарная нормальная реакция, действующая на колесо**

В этом разделе будут предложены несколько способов вычисления суммарной реакции, действующей на нагруженное колесо. Первый способ заключается в суммировании сил, действующих на отдельные стержни (для большого, но конечного числа стержней). Второй способ предполагает переход к модели непрерывного протектора и интегрирование распределенных усилий по области контакта.

### **1.7.1. Дискретная модель протектора**

Вычисление нормальной реакции, действующей на нагруженное колесо, в рамках дискретной модели протектора. Описание алгоритма.

В дискретном случае суммарная нормальная реакция находится как сумма нормальных реакций  $F_1$  отдельных стержней. Сначала для каждого из стержней в зоне контакта в зависимости от «координаты»  $\varphi$  определяется по формуле (1.15) действующая на этот стержень сила. Далее проводится суммирование найденных компонент  $F_1$  по всем стержням из зоны контакта.

Сложность здесь состоит в определении принадлежности в данный момент (то есть при фиксированном смещении центра колеса  $x$ ) конкретного стержня зоне контакта и, в частности, области проскальзывания, в зависимости от  $\varphi$ .

Для этого сначала сравниваем значение  $\varphi$ , соответствующее исследуемому стержню, со значением  $\varphi_0$  из (1.26), определяющим границы зоны контакта. Если

выполнено  $|\varphi| \leq \varphi_0$ , то стержень контактирует с дорогой; иначе, при данном  $x$  конец его свободен.

Далее, если установлено что стержень находится в зоне контакта, определяем, будет ли он проскальзывать, путем сравнения данного  $\varphi$  со значениями  $\varphi_-$  и  $\varphi_+$  из неравенства (1.32). Если стержень контактирует с дорогой, но не проскальзывает, в формуле силы (1.15) для него будет ненулевым только первое слагаемое (т.к. в этом случае  $y = 0$ ). Если же установлено, что стержень проскальзывает, следует вычислить для него величину горизонтального смещения  $y$ ; а точнее, оценить её как  $y_+$  или  $y_-$  по алгоритму, описанному в п.1.5, в зависимости от стадии цикла нагрузки-разгрузки.

Таким образом, мы описали способы вычисления нормальной реакции для всех групп стержней протектора – свободных; находящихся в контакте, но не проскальзывающих; находящихся в контакте и проскальзывающих.

Теперь найдем реакции, действующие на колесо на цикле последовательной нагрузки и разгрузки, считая заданным максимальное смещение центра колеса  $x_1$  (или  $z_1$  в формуле (1.35)). Значение суммарной силы в каждый момент времени (то есть при фиксированном  $x$ ) получим путем суммирования  $F_1$  для отдельных стержней из зоны контакта. Для каждого из стержней в зоне контакта (то есть для тех  $\varphi$ , для которых выполнено  $\varphi \leq |\varphi_0|$ ), определяем  $F_1$  по формуле (1.15). Если стержень не проскальзывает, второе слагаемое в формуле силы (1.15) обращается для него в ноль (так как  $y = 0$ ). Если же стержень проскальзывает, сперва вычисляем для него  $y_+$  и  $y_-$  по формулам (1.34) и затем, в зависимости от этапа цикла нагрузки-разгрузки, подставляем одно из этих значений в (1.15). При нагрузке колеса выбираем  $\min(|y_+|, |y_-|)$ , а при разгрузке  $\max(|y_+|, |y_-|)$ . График изменения суммарной силы, вычисленной таким способом, на цикле нагрузки-разгрузки колеса, представлен на рисунке 13 под обозначением  $P_\Sigma$ .

### 1.7.2. Непрерывная модель протектора

Найдем суммарную величину вертикальных составляющих реакций в точках контакта, полагая существование непрерывного множества стержней, расположенных вдоль радиусов диска колеса.

Величину восстанавливающей силы, действующей со стороны дороги на колесо, центр которого смещен вниз по вертикали на величину  $x$ , вычислим путем интегрирования  $F_1$  (формула (1.15)) по области контакта:

$$P = 2 \int_0^{\varphi_0} |F_1| d\varphi =$$

$$= \frac{2nR^2}{h} \int_0^{\varphi_0} [(\cos^2 \varphi + \zeta \sin^2 \varphi)(x - 1 + \cos \varphi) + y(\zeta - 1) \cos \varphi \sin \varphi] d\varphi \quad (1.37)$$

При переходе от (1.15) к формуле (1.37) продольная жесткость одного стержня  $N$  была заменена на удельную жесткость  $n = \frac{Ni}{2\pi R}$ , характеризующую продольную жесткость единицы длины стержневого протектора ( $i$  – общее количество стержней в дискретной модели). Изгибная жесткость протектора учитывается через величину  $\zeta$ .

Зависимость силы  $F_1$  и, следовательно, суммарной силы  $P$  от коэффициента трения  $f$  выражается через зависимость от  $f$  величины  $y$  (горизонтального смещения конца стержня при проскальзывании). В общем случае  $y$  зависит от истории нагружения (это обсуждается в п.1.5), вследствие чего  $y(f, \varphi, x, \zeta)$  не определяется однозначно для фиксированных значений параметров  $f, \varphi, x, \zeta$ ; однако может быть найден диапазон  $[y_-, y_+]$  (или  $[y_+, y_-]$ , если  $y_+ < y_-$ ) возможных значений смещения  $y$ . При фиксированных  $f, \varphi, x, \zeta$  выполнено:  $\forall y$  такого что  $y \in [y_-, y_+]$ , стержень находится в равновесии.

Границы указанного диапазона зависят от  $f$  и выражаются формулами (1.34). Явный вид зависимости  $y_{\pm}(f, \varphi, x, \zeta)$  согласно (1.34):

$$y_{\pm} = \frac{(1-\zeta)\operatorname{tg}\varphi \pm f(1+\zeta \operatorname{tg}^2\varphi)}{\operatorname{tg}^2\varphi + \zeta \pm f(1-\zeta)\operatorname{tg}\varphi} (x - 1 + \cos \varphi). \quad (1.38)$$

В формуле (1.37) второе слагаемое под знаком интеграла будет отлично от нуля только для тех стержней из зоны контакта, для которых имеет место проскальзывание (т.е.  $y \neq 0$ ). Для этих стержней  $y$  задается: при нагрузке колеса – как  $\min(|y_-|, |y_+|)$ , при разгрузке – как  $\max(|y_-|, |y_+|)$ . (Подробнее о зависимости  $y$  от истории нагружения говорилось в п.1.5; об определении принадлежности стержня области проскальзывания – в п.1.4.)

Проведем анализ выражения (1.37) для силы  $P$  в следующих случаях:

- 1) При отсутствии проскальзывания между протектором и дорогой ( $y = 0$ )
- 2) При отсутствии трения между протектором и дорогой ( $f = 0$ )
- 3) При частичном проскальзывании в зоне контакта ( $f \neq 0, y \neq 0$ )

### ***Суммарная реакция при отсутствии проскальзывания***

Отсутствие проскальзывания выражается в отсутствии смещения концов стержней вдоль дороги, а именно, в выполнении условия  $y = 0$  для всех стержней в зоне контакта. Положим в первом равенстве (1.15)  $y = 0$  и найдем величину суммарной восстанавливающей силы, интегрируя полученное выражение для  $F_1$  по области контакта:

$$P_{no\_slip} = \frac{2nR^2}{h} \int_0^{\varphi_0} (\cos^2 \varphi + \zeta \sin^2 \varphi)(x - 1 + \cos \varphi) d\varphi. \quad (1.39)$$

Интеграл (1.39) может быть взят аналитически:

$$\begin{aligned} & \frac{2nR^2}{h} \int_0^{\varphi_0} (\cos^2 \varphi + \zeta \sin^2 \varphi)(x - 1 + \cos \varphi) d\varphi = \\ & = \frac{2nR^2}{h} \left[ \left( (1 - \zeta) \frac{\sin(2 \arccos(1 - x))}{2} + (\zeta + 1) \arccos(1 - x) \right) \frac{x - 1}{2} + \right. \\ & \left. + \frac{(\zeta - 1)}{3} \sin^3(\arccos(1 - x)) + \sin(\arccos(1 - x)) \right] \end{aligned} \quad (1.40)$$

Чтобы получить более простую, полиномиальную форму выражения зависимости силы  $P_{no\_slip}$  от вертикального смещения центра колеса  $x$ , вычислим приближенное значение интеграла (1.39), полагая  $x \ll 1$ . Отметим, что в выражении (1.39)  $x$  является константой, а для угла  $\varphi_0$  верна аппроксимация (1.26):

$$\varphi_0 = \arccos(1 - x) \approx \sqrt{2x}.$$

Будем искать приближенное значение интеграла (1.39) с точностью до членов порядка малости  $5/2$  по  $x$ . Поэтому при разложении подынтегральных функций в ряды Тейлора сохраним члены до порядка  $\varphi^4$  и  $x\varphi^2$  включительно.

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} + O(\varphi^6), \\ \cos^2 \varphi &= 1 - \varphi^2 + O(\varphi^4), \\ \sin \varphi &= \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + O(\varphi^5), \\ \sin^2 \varphi &= \varphi^2 + O(\varphi^4), \end{aligned}$$

Учитывая

для интеграла (1.39) получим:

$$\begin{aligned} \frac{P_{no\_slip} h}{2nR^2} &= \int_0^{\sqrt{2x} + O(x^2)} (1 - \varphi^2 + \zeta \varphi^2 + O(\varphi^4)) \left( x - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{4!} + O(\varphi^6) \right) d\varphi \approx \\ &\approx \int_0^{\sqrt{2x}} \left( x + (\zeta - 1)x\varphi^2 - \frac{\varphi^2}{2} - (\zeta - 1)\frac{\varphi^4}{2} + \frac{\varphi^4}{4!} \right) d\varphi = \\ &= \left( x\varphi + (\zeta - 1)x\frac{\varphi^3}{3} - \frac{\varphi^3}{6} - (\zeta - 1)\frac{\varphi^5}{10} + \frac{\varphi^5}{120} \right) \Big|_0^{\sqrt{2x}} = \\ &= \sqrt{2x}x^{3/2} + (\zeta - 1)\frac{2\sqrt{2x}x^{5/2}}{3} - \frac{2\sqrt{2x}x^{3/2}}{6} - (\zeta - 1)\frac{4\sqrt{2x}x^{5/2}}{10} + \frac{4\sqrt{2x}x^{5/2}}{120} = \\ &= \frac{2\sqrt{2x}x^{3/2}}{3} \left( 1 + (\zeta - 1)x - \frac{6}{10}(\zeta - 1)x + \frac{x}{20} \right) = \\ &= \frac{2\sqrt{2x}x^{3/2}}{3} \left( 1 - \frac{7 - 8\zeta}{20}x \right). \end{aligned}$$

Таким образом, приближенная формула для вычисления суммарной силы нормальной реакции в случае отсутствия проскальзывания будет иметь вид:

$$P_{no\_slip} \approx \frac{4nR^2\sqrt{2}}{3h} x^{3/2} \left(1 - \frac{7-8\zeta}{20} x\right). \quad (1.41)$$

### **Суммарная реакция при отсутствии трения**

Для случая  $f = 0$  сначала определим нормальную реакцию, действующую со стороны дороги на отдельный элемент протектора, затем – суммарную силу, действующую на колесо.

В случае  $f = 0$  смещение конца стержня, при котором будет достигнуто равновесие стержня (для фиксированных  $\varphi, x, \zeta$ ), определяется однозначно ( $y = y_0$ ). Согласно (1.29):

$$y_0 = \frac{(1-\zeta)\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}^2\varphi+\zeta} (x - 1 + \cos\varphi) \quad (1.42)$$

Выражение (1.42) для  $y_0$  получается из формул (1.38) при подстановке  $f = 0$ . Таким образом, при отсутствии трения диапазон  $[y_-, y_+]$  сжимается до одной точки:  $y_- = y_+ = y_0$ .

Далее, подставив в первую формулу (1.15) значение  $y = y_0$  из (1.42) получим выражение для силы  $F_1$  при отсутствии трения между стержнем и дорогой:

$$F_{1\_no\_friction} = -\frac{NR}{h} \left[ (1 + \zeta \operatorname{tg}^2\varphi) - \frac{(\zeta-1)^2 \operatorname{tg}^2\varphi}{\operatorname{tg}^2\varphi+\zeta} \right] z(\varphi, x) \cos^2\varphi \quad (1.43)$$

Суммарная нормальная реакция:

$$\begin{aligned} P_{no\_friction} &= \frac{2nR^2}{h} \left[ \int_0^{\varphi_0} (\cos^2\varphi + \zeta \sin^2\varphi)(x - 1 + \cos\varphi) d\varphi \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\varphi_0} y_0(\zeta - 1) \cos\varphi \sin\varphi d\varphi \right] = \\ &= P_{no\_slip} + \frac{2nR^2}{h} \int_0^{\varphi_0} y_0(\zeta - 1) \cos\varphi \sin\varphi d\varphi = \end{aligned}$$

$$= P_{no\_slip} - \frac{2nR^2}{h} \int_0^{\varphi_0} \frac{(\zeta - 1)^2 \sin^2 \varphi}{\operatorname{tg}^2 \varphi + \zeta} (x - 1 + \cos \varphi) d\varphi$$

Введем обозначение для последнего слагаемого:

$$\Delta P = \frac{2nR^2}{h} \int_0^{\varphi_0} \frac{(\zeta - 1)^2 \sin^2 \varphi}{\operatorname{tg}^2 \varphi + \zeta} (x - 1 + \cos \varphi) d\varphi \quad (1.44)$$

Тогда:

$$P_{no\_friction} = P_{no\_slip} - \Delta P \quad (1.45)$$

Найдем оценку для  $\Delta P$  в предположениях малости  $x$  и  $\varphi$ . Учитывая аппроксимацию  $\varphi_0 \approx \sqrt{2x}$  и разлагая подынтегральные функции в выражении (1.44) в степенные ряды в окрестности  $\varphi = 0$  и отбрасывая члены, порядок малости которых по  $x$  превышает  $5/2$ , получим:

$$\begin{aligned} \Delta P &= \frac{2nR^2}{h} (\zeta - 1)^2 \int_0^{\varphi_0} \sin^2 \varphi \left( \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \varphi + \zeta} \right) (x - 1 + \cos \varphi) d\varphi = \\ &= \frac{2nR^2}{h} (\zeta - 1)^2 \int_0^{\varphi_0} \left( \varphi^2 - \frac{\varphi^4}{3} + O(\varphi^6) \right) \left( \frac{1}{\zeta} - \frac{\varphi^2}{\zeta^2} + \frac{(3-2\zeta)}{3\zeta^3} \varphi^4 + O(\varphi^6) \right) \left( x - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} + O(\varphi^6) \right) d\varphi \approx \\ &\approx \frac{2nR^2}{h} (\zeta - 1)^2 \int_0^{\sqrt{2x}} \varphi^2 \left( \frac{1}{\zeta} - \frac{\varphi^2}{\zeta^2} \right) \left( x - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} \right) d\varphi \approx \\ &\approx \frac{2nR^2}{h} \frac{(\zeta - 1)^2}{\zeta} \int_0^{\sqrt{2x}} \left( \varphi^2 - \frac{\varphi^4}{\zeta} \right) \left( x - \frac{\varphi^2}{2!} \right) d\varphi \approx \\ &\approx \frac{2nR^2}{h} \frac{(\zeta - 1)^2}{\zeta} \int_0^{\sqrt{2x}} \left( x\varphi^2 - \frac{\varphi^4}{2!} \right) d\varphi = \frac{2nR^2}{h} \frac{(\zeta - 1)^2}{\zeta} \left( \frac{x\varphi^3}{3} - \frac{\varphi^5}{10} \right) \Big|_0^{\sqrt{2x}} = \\ &= \frac{2nR^2}{h} \frac{(\zeta - 1)^2}{\zeta} \left( \frac{2\sqrt{2}}{3} x^{5/2} - \frac{2\sqrt{2}}{5} x^{5/2} \right) = \frac{nR^2}{h} \cdot \frac{8\sqrt{2}(\zeta - 1)^2}{15\zeta} x^{5/2} \end{aligned}$$

Таким образом, при малых  $x$  и  $\varphi$  имеем:

$$\Delta P \approx \frac{nR^2}{h} \cdot \frac{8\sqrt{2}(\zeta - 1)^2}{15\zeta} x^{5/2} \quad (1.46)$$

Оценку  $P_{no\_friction}$  при малых  $x$  и  $\varphi$  найдем из (1.45) с учетом (1.41) и (1.46):

$$\begin{aligned}
 P_{no\_friction} &\approx \frac{4\sqrt{2}nR^2}{3h} x^{3/2} \left(1 - \frac{7-8\zeta}{20} x\right) - \frac{nR^2}{h} \cdot \frac{8\sqrt{2}(\zeta-1)^2}{15\zeta} x^{5/2} = \\
 &= \frac{4\sqrt{2}nR^2}{3h} x^{3/2} \left(1 - \frac{8-9\zeta}{20\zeta} x\right) \quad (1.47)
 \end{aligned}$$

### *Сравнение с теорией Герца*

Соотношение (1.47) качественно согласуется с результатами контактной задачи Герца, если отбросить малый по сравнению с единицей член в скобках, пропорциональный  $x$ . Поясним данное утверждение.

Согласно классической теории Г. Герца [59] при контакте без трения двух упругих тел:

1. Сближение контактирующих тел пропорционально нагрузке в степени  $2/3$ .
2. Размер площадки контакта меняется пропорционально корню кубическому из нагрузки.

Сопоставим перечисленные положения с результатами, найденными при описании контакта с помощью модели стержневого протектора. Итак, для колеса со стержневым протектором:

1.  $P_{no\_friction} \sim x^{3/2}$  согласно формуле (1.47), т.е.  $x \sim P_{no\_friction}^{2/3}$ .
2. Размер зоны контакта определяем из (1.25):  $a = 2 \sin \varphi_0 \approx 2\varphi_0 \approx 2\sqrt{\frac{2x}{R \cos \alpha}}$ , т.е.  $a \sim x^{1/2}$  или  $a^2 \sim x$ . Отсюда, учитывая связь между  $P$  и  $x$  (1.47), следует, что  $P \sim a^3$ , а следовательно  $a \sim P^{1/3}$ .

Таким образом, результаты разработанной теории контактного взаимодействия согласуются с выводами классической теории Герца.

В задаче Герца не учитывается трение (т.е.  $f = 0$ ). В действительности же, возникающие касательные силы влияют на величину нормальной реакции в зоне

контакта. Исследование контактного взаимодействия с помощью модели стержневого протектора позволяет учитывать влияние трения в зоне контакта на величину возникающих реакций.

Итак, если вертикальное смещение центра колеса фиксировано и равно  $x$ , связь между  $P_{no\_friction}$  (величиной нормальной реакции, действующей на деформированное колесо со стороны дороги при отсутствии трения между протектором и дорогой) и  $P_{no\_slip}$  (величиной нормальной реакции, действующей на деформированное колесо со стороны дороги при таком коэффициенте трения, что проскальзывание концов стержней отсутствует во всей зоне контакта), выражается формулой (1.45):

$$P_{no\_friction} = P_{no\_slip} - \Delta P.$$

$P_{no\_friction}$ ,  $P_{no\_slip}$ , и  $\Delta P$  положительны, откуда следует, что

$$P_{no\_friction} < P_{no\_slip} \quad (1.48)$$

при одинаковой «просадке» колеса  $x$ .

Если же считать фиксированной величину вертикальной нагрузки  $P$ , приложенной к диску колеса, и сравнивать его просадку в случаях отсутствия трения и отсутствия проскальзывания (т.е. при достаточно большом трении), из сравнения (1.41) и (1.47) получим:

$$x_{no\_friction} > x_{no\_slip}. \quad (1.49)$$

Данный результат означает, что при фиксированном весе колеса, наличие трения в зоне контакта уменьшает его вертикальную просадку.

При малых  $x$ , согласно (1.41), (1.47), (1.46):  $P_{no\_slip} \sim x^{3/2}$ ,  $P_{no\_friction} \sim x^{3/2}$ , при этом  $\Delta P \sim x^{5/2}$ . Эти соотношения позволяют сделать вывод о том, что добавка за счет сил трения имеет более высокий порядок малости, чем вклад в силу реакции за счет упругости.

### **Вычисление суммарной реакции при частичном проскальзывании в зоне контакта**

Зависимость вертикальной нагрузки от перемещения центра колеса  $Rx$  вдоль оси  $OX_1$  в области проскальзывания зависит от величины  $y(x)$ , которая в свою очередь определяется предысторией процесса нагрузки-разгрузки.

Согласно первому равенству в (1.15) получим:

$$P = \frac{2nR^2}{h} \left[ \int_0^{\varphi_0} (\cos^2 \varphi + \zeta \sin^2 \varphi) (x - 1 + \cos \varphi) d\varphi + \int_{\varphi_-}^{\varphi_0} y(\zeta - 1) \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \right]. \quad (1.50)$$

Первый интеграл в (1.50) совпадает с выражением (1.39), а второй – вносит отрицательную поправку, поскольку произведение  $y(\zeta - 1)$  отрицательно. Если величина перемещения  $Rx$  такова, что угол  $\varphi_0$  оказывается больше угла  $\varphi_+$ , то верхний предел во втором интеграле следует заменить углом  $\varphi_+$ . Обозначим интеграл

$$I = \int_{\varphi_-}^{\varphi_0} y(\zeta - 1) \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \quad (1.51)$$

и найдем его приближенное значение, учитывая *малость* углов  $\varphi$  и заменяя  $y$  функциями (1.38). Заметим, что  $y(\varphi_-) = 0$ . Если разложить подинтегральную функцию в (1.51) в ряд Тейлора в окрестности точки  $\varphi_-$  и сохранить первый член разложения, то после интегрирования получим:

$$\begin{aligned} I_{\pm} &= \int_{\varphi_-}^{\varphi_0} y_{\pm}(\varphi) (\zeta - 1) \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \\ &\approx \int_{\varphi_-}^{\varphi_0} \frac{dy_{\pm}(\varphi_-)}{d\varphi} (\varphi - \varphi_-) (\zeta - 1) \cos \varphi_- \sin \varphi_- d\varphi = \\ &= \frac{dy_{\pm}(\varphi_-)}{4d\varphi} (\varphi_0 - \varphi_-)^2 (\zeta - 1) \sin 2\varphi_- \leq 0. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Производная  $\frac{dy_{\pm}}{d\varphi}$  равна:

$$\frac{dy_{\pm}}{d\varphi} = - \frac{((1-\zeta)\operatorname{tg}\varphi \pm f(\zeta\operatorname{tg}^2\varphi + 1)) \sin\varphi}{\zeta \pm f(1-\zeta)\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}^2\varphi} -$$

$$- \frac{(x-1+\cos\varphi)(2\operatorname{tg}\varphi \pm f(1-\zeta))((1-\zeta)\operatorname{tg}\varphi \pm f(\zeta\operatorname{tg}^2\varphi + 1))}{(\zeta \pm f(1-\zeta)\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}^2\varphi)^2 \cos^2\varphi} +$$

$$+ \frac{(x-1+\cos\varphi)((1-\zeta) \pm 2f\zeta\operatorname{tg}\varphi)}{(\zeta \pm f(1-\zeta)\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}^2\varphi) \cos^2\varphi}.$$

Величины  $I_+$  и  $I_-$  отрицательны. Обозначим через  $I_1 = \min(I_+, I_-)$ ,  $I_2 = \max(I_+, I_-)$ . При нагрузке колеса, когда  $\dot{x} > 0$ , следует в формуле (1.50) принять второй интеграл равным  $I_2$ , а при разгрузке колеса, когда  $\dot{x} < 0$ , - равным  $I_1$ . Это означает, что при нагрузке колеса система обладает большей жесткостью, чем при разгрузке. Это обстоятельство имеет место, когда величина перемещения центра колеса  $x > 1 - \cos\varphi_-$ .

Поскольку картина деформаций распределенных стержней симметрична относительно нулевого значения угла  $\varphi$ , то суммарная касательная сила равна нулю.

В полученной формуле (1.52) поведение подинтегральной функции полностью определяется углом наклона касательной к функции  $y$  в начальной точке ( $\varphi_-$ ), что при *больших величинах зоны проскальзывания* может приводить к значительным отклонениям приближенного значения от истинного значения приближаемой функции. В связи с этим рассмотрим ниже и другие методы приближенного вычисления интеграла  $I$ .

Альтернативным вариантом может быть использование методов численного интегрирования, учитывающих отличие интегрируемой функции от линейной и позволяющих приближать функции более высоких порядков, например формулы Симпсона. Учитывая, что подинтегральное выражение в  $I$  обращается в ноль на обеих границах зоны проскальзывания, получим

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left( f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) = 2 \frac{b-a}{3} f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Данное выражение имеет нулевую погрешность для функции второго порядка, принимающей нулевые значения в крайних точках промежутка интегрирования. На рисунке 12 представлены графики следующих функций:  $f_1$  – подынтегральная функция из (1.51);  $f_2$  – её линейное приближение;  $f_3$  – её квадратичное приближение, эквивалентное используемому при вычислении интеграла при помощи квадратурной формулы Симпсона.

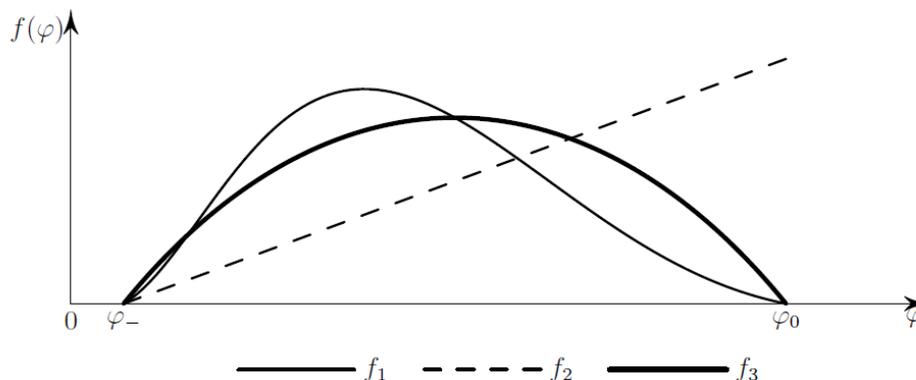


Рис. 12. График подынтегральной функции (1.51) и её приближений

Для проверки качества приведенных выше приближений, изобразим графически зависимость восстанавливающей силы от вертикального смещения центра диска при нагружении и последующей разгрузке колеса. При этом вертикальную реакцию вычислим тремя способами (рис. 13). Силу  $P_\Sigma$  определим в рамках дискретной модели (п.1.7.1) как сумму реакций со стороны конечного числа стержней.  $P$  и  $P_{Simp}$  соответствуют непрерывной модели и представляют собой интегральные силы реакции континуума стержней с удельной жесткостью  $n$ , вычисленные по формуле (1.50) с использованием различных способов приближения второго слагаемого (линейного приближения (1.52) в случае  $P$  и формулы Симпсона в случае  $P_{Simp}$ ). Рисунок 13 соответствует следующим параметрам системы:  $h/R = 2/3$ ;  $\zeta = 1/8$ ;  $x = 0.6$ ;  $f = 0.075$ ; общее число стержней равно 100. На данном рисунке умышленно нарушены предположения малости размеров стержней, формирующих протектор, и малости зоны контакта. Это сделано с целью более детального изучения погрешности предложенных

приближенных формул в зависимости от величины вертикального смещения колеса, а также для лучшего отображения деформаций стержней.

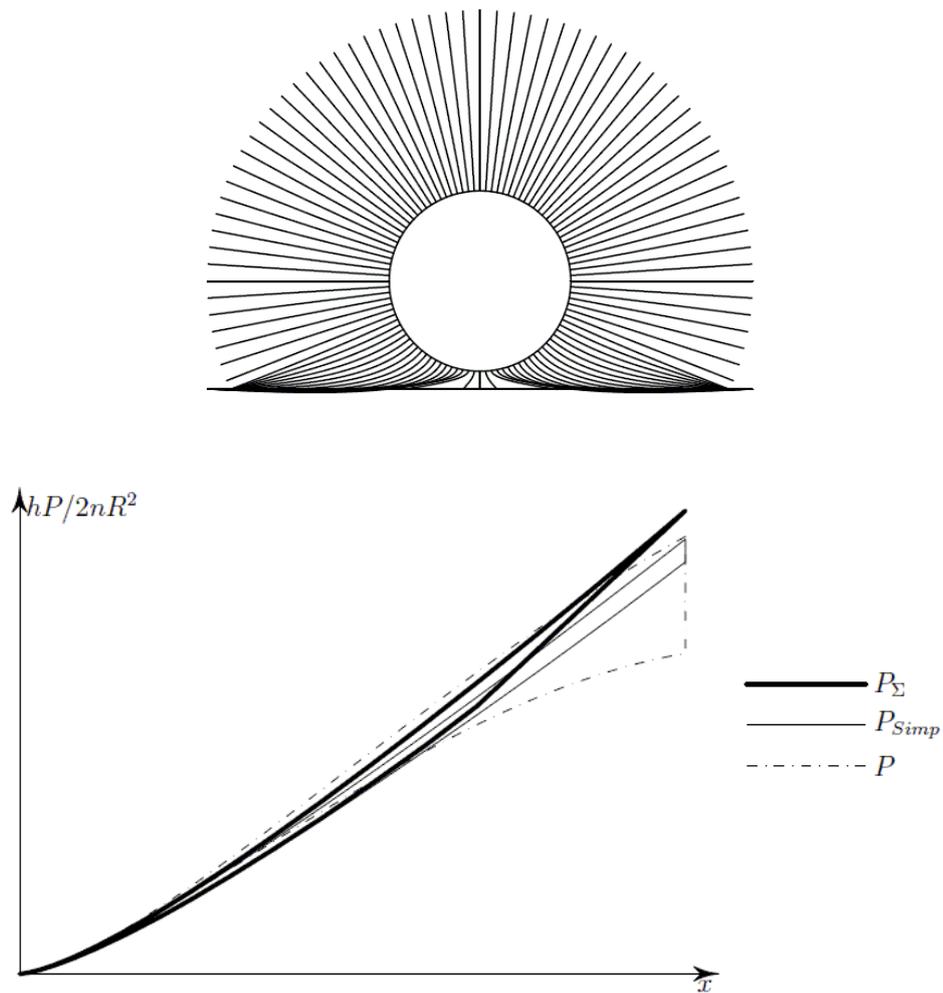


Рис. 13. Модель колеса и график изменения суммарной реакции, вычисленной различными способами, на цикле нагрузки-разгрузки колеса

Анализируя полученные графики, заметим, что в случае, когда выполнены предположения о малости зоны проскальзывания (при малых  $x$ ), силы, вычисленные различными способами, отличаются незначительно. То есть, при малых размерах зоны проскальзывания (например, при большом коэффициенте трения), влияние горизонтального смещения концов стержней на вертикальную силу реакции пренебрежимо мало, и в формуле (1.50) модуль второго слагаемого много меньше модуля первого.

Однако при наличии обширной зоны проскальзывания, погрешность приближения интеграла (1.51) возрастает. В частности, на графике интегральной силы  $P$  присутствует вертикальный участок, соответствующий моменту перехода от нагружения колеса к разгрузке, в то время как на графике силы  $P_{\Sigma}$ , вычисленной в рамках дискретной модели, вертикальный участок отсутствует, за счет чего площадь, ограничиваемая этой петлей гистерезиса, значительно меньше. Эти различия обусловлены тем, что непрерывная модель, в отличие от дискретной, не учитывает зону застоя, в пределах которой  $u$  остается постоянным некоторое время после перехода от нагружения к разгрузке (рис. 13). В непрерывной модели в момент перехода от нагружения к разгрузке  $I_1$  заменяется на  $I_2$ , а поскольку в общем случае  $I_1 \neq I_2$ , возникает скачок значения рассчитываемой силы.

За счет использования более точного приближения интеграла  $I$ , на графике для силы  $P_{Simp}$  скачок значения в момент начала разгрузки колеса выражен слабее, чем для силы  $P$ , что делает петлю гистерезиса для  $P_{Simp}$  сравнимой по площади с петлей для  $P_{\Sigma}$  (рис. 13). Поскольку площадь фигуры, заключенной внутри петли гистерезиса, соответствует оценочному значению потерь энергии на цикле нагрузки-разгрузки, становится оправданным поиск модели интегральной силы, для которой достигается лучшее соответствие с  $P_{\Sigma}$  по этому параметру. Таким образом, применение формулы Симпсона при численном интегрировании  $I$  позволяет улучшить соответствие непрерывной модели с дискретной при наличии обширных зон проскальзывания в пятне контакта.

Итак, мы сравнили различные подходы к вычислению восстанавливающей силы. При малости зоны проскальзывания в пятне контакта эти подходы оказались почти идентичными, но при наличии обширных областей скольжения, соответствие непрерывной и дискретной моделей восстанавливающей силы достигалось лишь при использовании достаточно точных методов численного интегрирования.

## 1.8. Нагрузка колеса крутящим моментом

В качестве продолжения рассмотрения статической задачи изучим равновесие ведущего колеса перед началом движения. Пусть теперь колесо, помимо веса, статически нагружено также крутящим моментом. Будем описывать равновесное состояние деформированного протектора при наличии небольшого поворота колеса вокруг оси.

Пусть диск колеса дополнительно поворачивается на малый угол  $\Delta\varphi$ . При этом стержень, положение которого на диске изначально определялось углом  $\varphi$ , перейдет в положение  $\varphi + \Delta\varphi$ . Горизонтальное положение первоначальной точки контакта при этом будет по-прежнему определяться формулой  $R \sin \varphi$ . Воспользовавшись малостью угла поворота  $\Delta\varphi$ , перепишем уравнение (1.12), определяющее положение конца стержня, в виде:

$$\begin{aligned} \vec{R}(h) &= R(1-x)\vec{e}_1 + R(\sin \varphi + y)\vec{e}_2 = \\ &= R(1-x)\vec{e}_1 + R(\sin \varphi + \sin(\varphi + \Delta\varphi) - \sin(\varphi + \Delta\varphi) + y)\vec{e}_2 = \\ &= R(1-x)\vec{e}_1 + R(\sin(\varphi + \Delta\varphi) - \Delta\varphi \cos \varphi + y)\vec{e}_2. \end{aligned} \quad (1.53)$$

( При переходе к последнему равенству использовалось соотношение:  $\sin(\varphi + \Delta\varphi) = \sin \varphi \cos \Delta\varphi + \cos \varphi \sin \Delta\varphi \approx \sin \varphi + \Delta\varphi \cos \varphi$  . )

Введем новые обозначения:  $\varphi_1 = \varphi + \Delta\varphi$ , обозначающее новое положение основания стержня, и  $y_1 = y - \Delta\varphi \cos(\varphi_1 - \Delta\varphi)$ , соответствующее сумме смещений конца стержня относительно точки касания поверхности дороги и относительно недеформированной оси стержня в новом положении. Уравнение положения конца стержня (1.53) в новых обозначениях примет вид:

$$\vec{R}(h) = R(1-x)\vec{e}_1 + R(\sin \varphi_1 + y_1)\vec{e}_2,$$

что повторяет вид уравнения (1.12). Найдем уравнения для компонент силы, действующей на конец стержня, в новых обозначениях:

$$F_r = -\frac{NR}{h} [z(\varphi_1, x) \cos \varphi_1 - y_1 \sin \varphi_1],$$

$$F_\varphi = \frac{NR}{h} \zeta [z(\varphi_1, x) \sin \varphi_1 + y_1 \cos \varphi_1].$$

или

$$F_1 = -\frac{NR}{h} [(1 + \zeta \operatorname{tg}^2 \varphi_1)z(\varphi_1, x) + y_1(\zeta - 1)\operatorname{tg} \varphi_1] \cos^2 \varphi_1,$$

$$F_2 = \frac{NR}{h} [z(\varphi_1, x)(\zeta - 1)\operatorname{tg} \varphi_1 + y_1(\operatorname{tg}^2 \varphi_1 + \zeta)] \cos^2 \varphi_1.$$

Условие отсутствия проскальзывания в точке контакта стержня с шероховатой плоскостью в модели сухого трения (1.27) примет вид:

$$|z(\varphi_1, x)(\zeta - 1)\operatorname{tg} \varphi_1 + y_1(\operatorname{tg}^2 \varphi_1 + \zeta)| \leq f[(1 + \zeta \operatorname{tg}^2 \varphi_1)z(\varphi_1, x) + y_1(\zeta - 1)\operatorname{tg} \varphi_1]. \quad (1.54)$$

Заметим, что здесь нельзя проводить полную аналогию с ранее полученными результатами, так как  $y_1$  не обязательно равняется нулю при отсутствии проскальзывания, что позволяет неравенству (1.54) нарушаться для любых положений стержня  $\varphi_1$  при достаточно больших значениях угла  $\Delta\varphi$  поворота колеса.

Границы положений равновесия стержня с координатой  $\varphi_1$  (другими словами, области возможных величин смещения конца стержня вдоль дороги (рис. 14)) в зависимости от значения параметра вертикального перемещения  $z = x - 1 + \cos \varphi_1$  конца этого стержня удовлетворяют уравнениям того же вида, что и ранее:

$$y_{1\pm} = k_{\pm}z, \quad k_{\pm} = \frac{(1 - \zeta)\operatorname{tg} \varphi_1 \pm f(1 + \zeta \operatorname{tg}^2 \varphi_1)}{\operatorname{tg}^2 \varphi_1 + \zeta \pm f(1 - \zeta)\operatorname{tg} \varphi_1}.$$

Положение конца стержня в каждый момент времени определяется историей нагружения колеса.

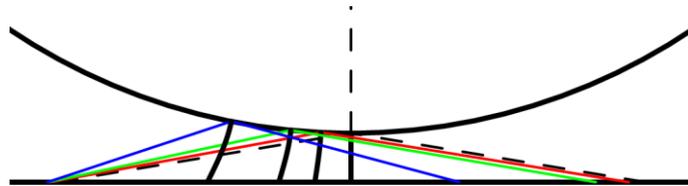


Рис. 14. Границы положений равновесия стержней протектора при  $h/R = 1/6$ ,  $\zeta = 1/8$ ,  $x = 0.1$ ,  $f = 0.5$

Если начать поворачивать колесо по часовой стрелке из положения, описанного в разделе 1.7 (колесо нагружено вертикальной силой, протектор уже неким образом деформирован), то первыми в режим проскальзывания перейдут стержни, расположенные в левой («задней») части зоны контакта, так как они уже находятся на правых («передних») границах своих возможных положений равновесия. Для каждого из стержней эта граница будет смещаться влево («назад») при повороте колеса. Затем в режим проскальзывания перейдут стержни из области прилипания (центральной части зоны контакта). Потом проскальзывание распространится и на правую («переднюю») часть зоны контакта, то есть на все колесо.

На рисунке 15 изображено изменение положения центрального стержня в процессе поворота колеса. Пунктиром и различными цветами показаны границы зоны равновесия этого стержня при данном угле поворота. Изначально стержень находится в зоне покоя и до определенного момента его конец остается в первоначальном положении (при этом границы зоны равновесия этого стержня непрерывно смещаются влево с увеличением угла поворота колеса). Так происходит до момента, пока правая граница зоны равновесия не совпадет с текущим положением стержня. Далее стержень начинает скользить, смещаясь вслед за правой границей зоны равновесия.

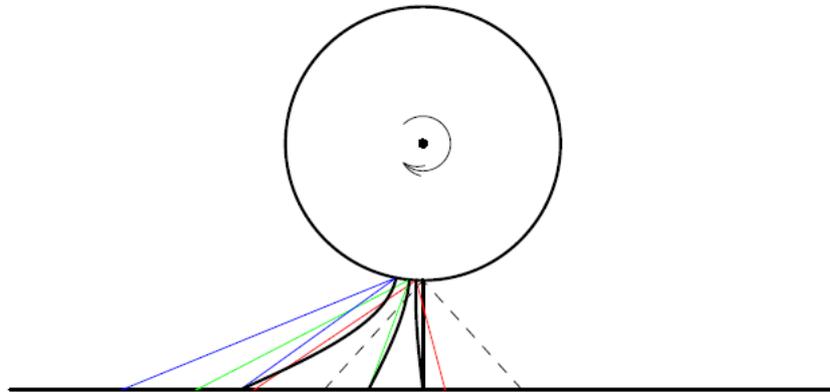


Рис. 15. Изменение положения центрального стержня (черные линии) и границ его положения равновесия (пунктир и цветные линии) в процессе поворота колеса при  $h/R = 2/3$ ,  $\zeta = 1/8$ ,  $x = 0.4$ ,  $f = 0.075$

На рисунках 16 и 17 показано изменение положения центрального стержня и границ его зоны равновесия при повороте колеса для других параметров системы.

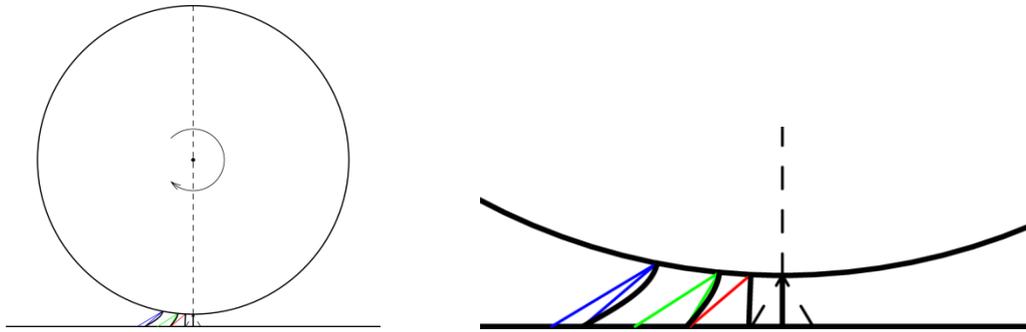


Рис. 16. Изменение положения центрального стержня и границ его положения равновесия в процессе поворота колеса при  $h/R = 1/6$ ,  $\zeta = 1/8$ ,  $x = 0.1$ ,  $f = 0.05$

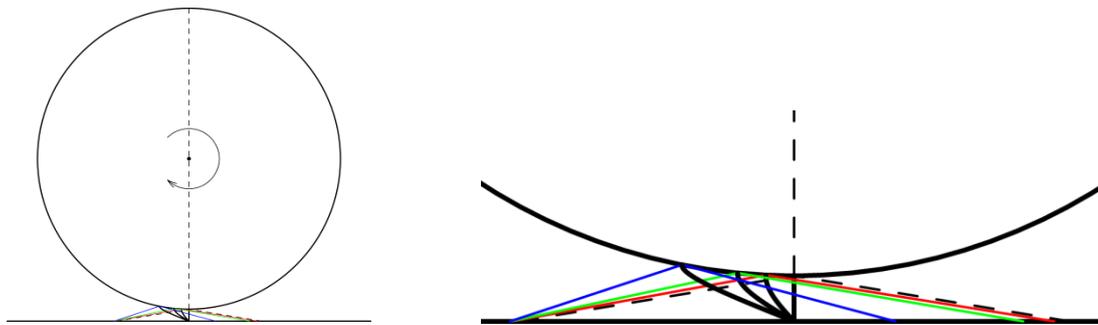


Рис. 17. Изменение положения центрального стержня и границ его положения равновесия в процессе поворота колеса при  $h/R = 1/6$ ,  $\zeta = 1/8$ ,  $x = 0.1$ ,  $f = 0.5$

Хотя описание процесса проскальзывания зависит от первоначального положения концов стержней, можно описать *предельное состояние*, характеризующее переход к проскальзыванию. Такое состояние будет характеризоваться положением всех стержней на правых («передних») границах своих областей положений равновесия. Исключение составит небольшой участок в правой («передней») части зоны контакта, где правые границы областей равновесия стержней выходят за границы зоны контакта. На этом участке концы стержней будут находиться на границе зоны контакта. Горизонтальные силы реакции на поверхности контакта с дорогой будут при этом направлены в одну и ту же сторону для всех стержней в зоне контакта.

Примеры описанного положения равновесия приведены на рисунках 18 и 19. На рисунках хорошо видна асимметрия деформаций протектора относительно центра зоны контакта.

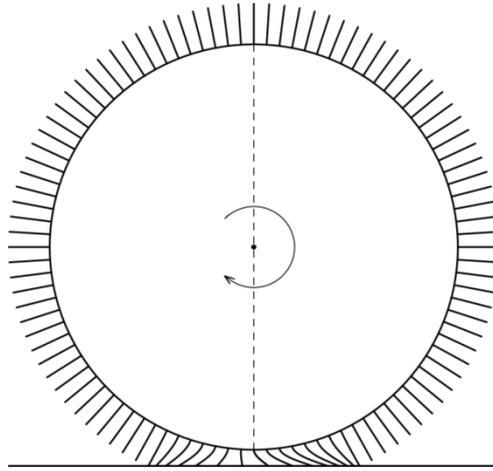


Рис. 18. Деформация протектора при нагрузке колеса вертикальной силой и крутящим моментом.  
 $h/R = 1/6$ ,  $\zeta = 1/8$ ,  $x = 0.1$ ,  $f = 0.075$ ,  $i = 100$

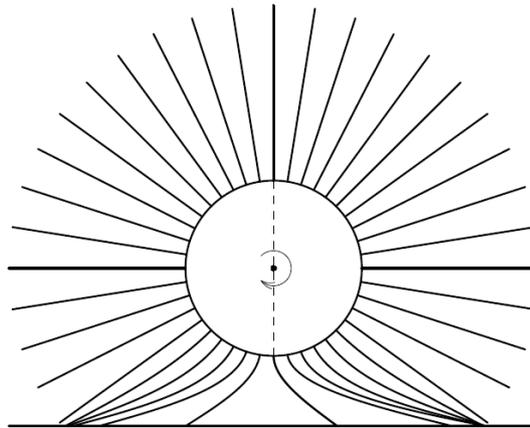


Рис. 19. Деформация протектора при нагрузке колеса вертикальной силой и крутящим моментом.  
 $h/R = 2/3$ ,  $\zeta = 1/8$ ,  $x = 0.4$ ,  $f = 0.075$ ,  $i = 40$

В случае приложения поворота к конфигурации, описанной в разделе 1.7 (колесо, нагруженное вертикальной силой), угол поворота  $\Delta\varphi$ , необходимый для перехода стержня с координатой  $\varphi$  к проскальзыванию может быть найден как решение одного из следующих уравнений (относительно  $\Delta\varphi \in (-\pi, \pi)$ , при условии что  $\Delta\varphi < 0$ , а  $k_+$  соответствует правой границе области покоя конца стержня):

$$1) \sin \varphi + k_-(\varphi)z(\varphi) = \sin(\varphi + \Delta\varphi) + k_+(\varphi + \Delta\varphi)z(\varphi + \Delta\varphi) \quad (1.55)$$

в случае  $|\varphi| \in (\varphi_-, \varphi_+)$  (т.е. когда в начальной конфигурации стержень принадлежал области проскальзывания)

$$2) \sin \varphi = \sin(\varphi + \Delta\varphi) + k_+(\varphi + \Delta\varphi)z(\varphi + \Delta\varphi) \quad (1.56)$$

в случае  $|\varphi| \in [0, \varphi_0]/(\varphi_-, \varphi_+)$  (т.е. когда стержень не проскальзывал в начальной конфигурации)

Эти уравнения определяют угол поворота  $\Delta\varphi$ , необходимый для того, чтобы стержень с координатой  $\varphi$  сместился с одной границы области возможных положений равновесия на другую при данном вертикальном смещении колеса  $Rx$ .

Если сравнить полученные решения  $\Delta\varphi$  для всех значений  $\varphi$  из области контакта, то максимальное по модулю  $\Delta\varphi$  будет соответствовать стержню, который начнет скользить последним. Следовательно, найденное таким способом значение угла поворота соответствует переходу всей зоны контакта к проскальзыванию.

Для качественного исследования угла поворота, необходимого для перехода стержней к проскальзыванию, построим графики  $\Delta\varphi(\varphi)$ , получаемые при численном решении уравнений (1.55) и (1.56) для различных значений коэффициента трения. Эти графики изображены на рисунках 20 и 21. Рисунки 20 и 21 соответствуют разным значениям параметра  $x$ .

Как и ожидалось, угол поворота, необходимый для перехода стержня к проскальзыванию, возрастает при увеличении коэффициента трения.

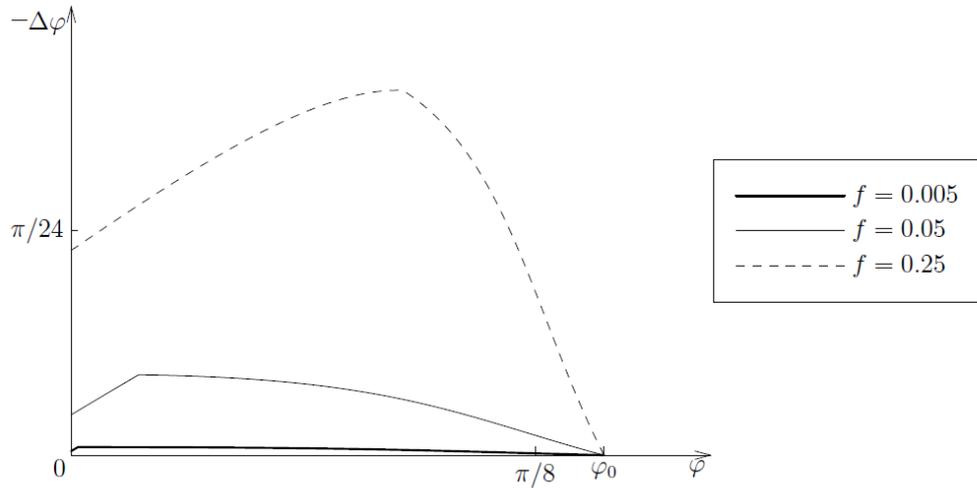


Рис. 20. Угол поворота  $\Delta\varphi$ , необходимый для перехода стержня, изначально имевшего координату  $\varphi$ , к проскальзыванию (для  $x = 0.1$ ,  $\zeta = 1/8$  и различных  $f$ )

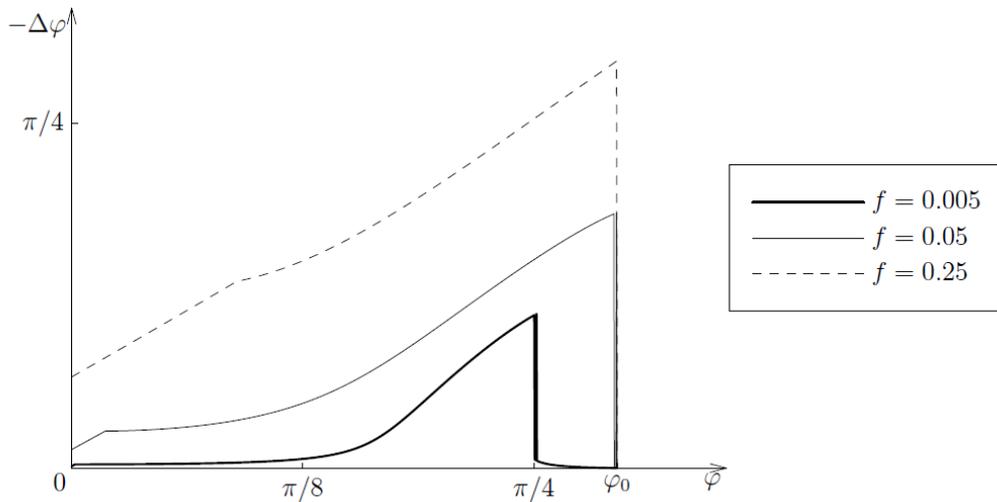


Рис. 21. Угол поворота  $\Delta\varphi$ , необходимый для перехода стержня, изначально имевшего координату  $\varphi$ , к проскальзыванию (для  $x = 0.4$ ,  $\zeta = 1/8$  и различных  $f$ )

Из сравнения рисунков 20 и 21 видно, что при увеличении  $x$  поведение графиков принципиально меняется. Это связано с определением зоны покоя (области возможных положений равновесия) конца стержня, которая для стержня с координатой  $\varphi$  лежит в пределах от  $R[\sin \varphi + y_-]$  до  $R[\sin \varphi + y_+]$ , а именно со сложным характером зависимости  $y_-$  и  $y_+$  от  $x$  (рис. 22).

Ширина области возможных положений равновесия для стержня с координатой  $\varphi$  определяется разницей между  $y_+$  и  $y_-$  для этого стержня. Таким образом, из рисунка 22 видно, что для стержней, находящихся в центре зоны контакта, область возможных положений равновесия шире, чем для стержней,

находящихся на краях зоны контакта. При уменьшении коэффициента трения  $f$  ширина зон покоя уменьшается для всех стержней в ЗК. Увеличение параметра  $x$  приводит, во-первых, к расширению всей зоны контакта, во-вторых, к увеличению зон покоя для центральных стержней. Стержень с координатой  $\varphi$ : проскальзывает, если для него  $y_+$  и  $y_-$  имеют один знак; не проскальзывает, если знаки  $y_+$  и  $y_-$  для данного  $\varphi$  различные.

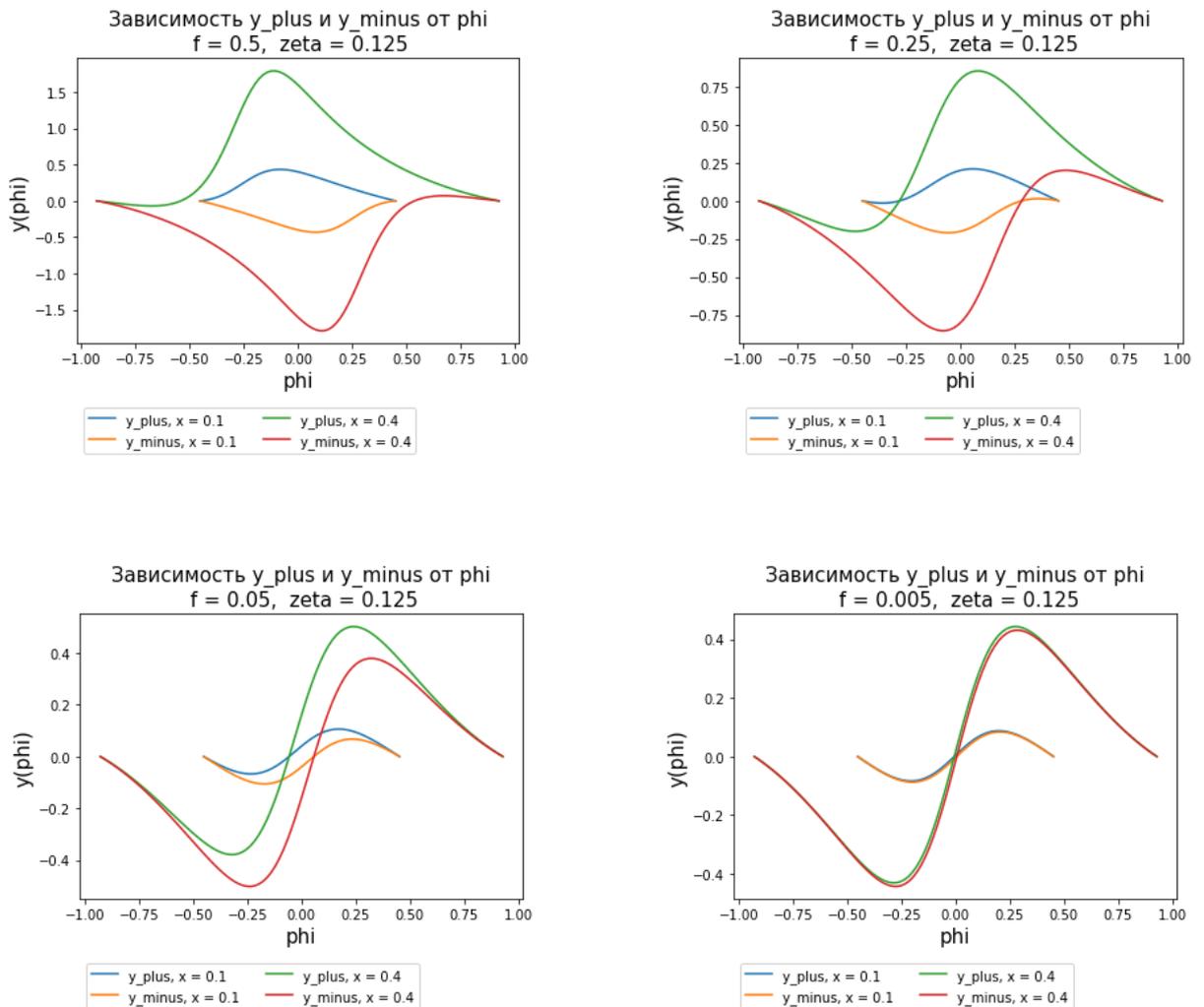


Рис. 22. Зависимость  $y_+$  и  $y_-$  от  $\varphi$  при различных  $x$  и  $f$

Буксование (т.е. проскальзывание всех стержней в ЗК) возникнет, когда горизонтальная сила реакции, действующая на протектор, превысит некое предельное значение. Предельная горизонтальная сила может быть вычислена как сумма горизонтальных сил реакции для всех стержней, либо как аналогичный интеграл для модели сплошного протектора, в момент, когда поворот колеса  $\Delta\varphi$

достигнет значения, при котором начнется скольжение последнего стержня, находившегося в равновесии ( $\max(|\Delta\varphi|)$ ); его можно определить, например, из рисунков 20 и 21). Предельная горизонтальная сила в случае непрерывной модели протектора может быть оценена по формуле:

$$F_{crit} = \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} F_2(\varphi_1) d\varphi_1 =$$

$$= \frac{nR^2}{h} \left[ \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} (\zeta - 1) \sin \varphi_1 \cos \varphi_1 (x - 1 + \cos \varphi_1) d\varphi_1 + \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} y_1 (\sin^2 \varphi_1 + \zeta \cos^2 \varphi_1) d\varphi_1 \right].$$

Здесь интеграл, стоящий слева в квадратных скобках, будет равен нулю в силу симметрии зоны контакта. Интеграл, стоящий справа, зависит от  $y_1$ , которое зависит от истории нагружения (и равняется либо  $y_+$ , либо  $y_-$ ). Оценим значение силы как:

$$F_{crit} = \frac{nR^2}{h} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} y_1 (\sin^2 \varphi_1 + \zeta \cos^2 \varphi_1) d\varphi_1 =$$

$$= \frac{nR^2}{h} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} y_+ (\sin^2(\varphi + \Delta\varphi) + \zeta \cos^2(\varphi + \Delta\varphi)) d(\varphi + \Delta\varphi) \quad (1.57)$$

где  $\Delta\varphi$  определяется как  $\max(-\Delta\varphi)$  по всем  $\varphi$  из ЗК для выбранных значений параметров  $x$ ,  $\zeta$  и  $f$ . Отметим, что, поскольку  $k_+(-\varphi) = -k_-(\varphi)$ , не имеет значения, за исключением знака, брать ли в качестве крайнего положения стержня в формуле под интегралом  $y_-$  или  $y_+$ .

До достижения горизонтальной силой предельной величины будут существовать элементы протектора, не перешедшие к проскальзыванию, и колесо будет находиться в покое.

Предельный момент, приложенный к центру колеса, при котором наступает полное проскальзывание, будет равен:

$$M_{crit} = F_{crit} R (1 - x). \quad (1.58)$$

## Компенсация вращающего момента реакцией щетинок протектора

Заметим, что величина силы вертикальной реакции стержня, в соответствии с формулой (1.15), зависит от горизонтального смещения конца стержня  $y$ . При этом величина  $y$  в случае колеса под действием предельного крутящего момента, отличается от  $y$  того же стержня в случае приложения только вертикальной нагрузки к колесу.

Хотя положения стержней зависят от истории нагружения, можно отметить общее влияние внешнего момента на силу вертикальной реакции. При приложении предельного крутящего момента к колесу, находящемуся в [описанном ранее] положении равновесия под вертикальной нагрузкой, стержни в области проскальзывания при положительном значении угла  $\varphi$  перейдут из положений  $y_-$  в положения  $y_+$ , что при реалистичных значениях  $\zeta < 1$  приведет к уменьшению вертикальной силы реакции для каждого из этих стержней. Величина суммарной силы вертикальной реакции рассматриваемого множества стержней при этом также уменьшится. Поскольку вес колеса остается прежним, уменьшение суммарной силы вертикальной реакции рассматриваемых стержней должно быть компенсировано вступлением в контакт с дорогой дополнительных стержней, что приведет к увеличению «просадки» колеса при «закручивании» (т.е. увеличению области контакта колеса с дорогой и участка протектора, вносящего вклад в силу вертикальной реакции). Величина «просадки» может быть найдена при приравнивании суммарной силы реакции, рассчитанной при новых (с учетом  $\Delta\varphi$ ) положениях равновесия элементов протектора, к вертикальной нагрузке (весу колеса).

При  $\zeta > 1$  приложение крутящего момента будет вызывать некоторый подъем колеса.

На рисунке 23 изображены графики распределения нормальной реакции в пятне контакта (зависимость  $F_1$  от  $\varphi$ ) для: колеса, нагруженного только вертикальной силой (черная кривая), нагруженного колеса, закрученного на некий угол  $\Delta\varphi$  (красная кривая). При построении графиков считалось, что суммарная нормальная реакция по области контакта остается неизменной.

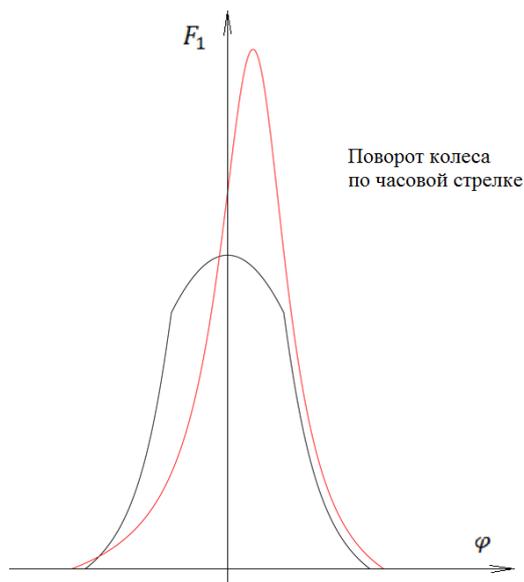


Рис. 23. Распределение нормальной реакции стержней в области контакта для колеса под действием: вертикальной нагрузки (черная линия), вертикальной нагрузки и крутящего момента (красная линия) для  $h/R = 1/6$ ,  $\zeta = 1/8$ ,  $x = 0.1$ ,  $f = 0.075$

Из графиков на рисунке 23 видно, что вследствие поворота нагруженного вертикальной силой  $P$  колеса на угол  $\Delta\varphi$  :

- зона контакта расширяется (при  $\zeta < 1$ )
- равнодействующая силы вертикальной реакции смещается вперед по ходу движения относительно центра зоны контакта

Таким образом, компенсация приложенного к колесу вращающего момента происходит за счет возникающего при «закручивании» колеса момента силы вертикальной реакции.

На рисунке 24 изображены положения элементов протектора и графики распределения силы вертикальной реакции в зоне контакта для колеса под действием: только вертикальной нагрузки (тонкая линия), вертикальной нагрузки и критического крутящего момента (жирная линия). Отметим, что графики на рис. 24 выражают зависимость  $F_1$  от горизонтальной координаты  $x_2$  концов стержней (в то время как на рис. 23 была представлена зависимость  $F_1$  от «координаты стержня на диске»  $\varphi$ ).

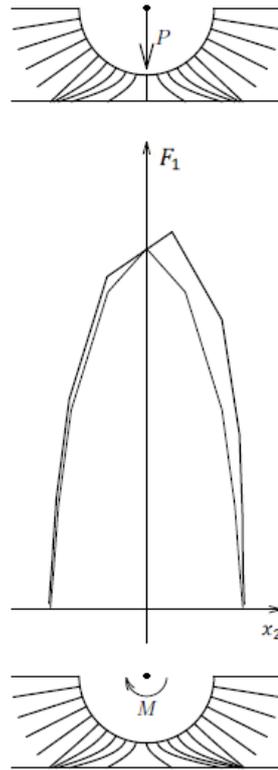


Рис. 24. Деформация элементов протектора в состоянии покоя (сверху), при приложении крутящего момента (снизу) и графики распределения силы вертикальной реакции в зоне контакта (жирная линия соответствует случаю приложения момента) для  $h/R = 1/2$ ,  $\zeta = 1/8$ ,  $x = 0.3$ ,  $f = 0.075$

Итак, приложение внешнего крутящего момента к колесу, кроме увеличения «просадки», приводит к смещению равнодействующей силы вертикальной реакции в переднюю часть зоны контакта. Вследствие этого смещения в системе появляется внутренний крутящий момент (пара сил: вес и [смещенная] равнодействующая нормальной реакции), препятствующий повороту колеса. На рисунке 25 показана система сил, действующих на ведущее колесо перед началом движения. Черным цветом обозначены внешние нагрузки ( $P$  и  $M$ ), красным – вызванная ими реакция опорной поверхности. Серая стрелка соответствует внутреннему моменту, создаваемому парой сил  $P$  и  $F_1$ .

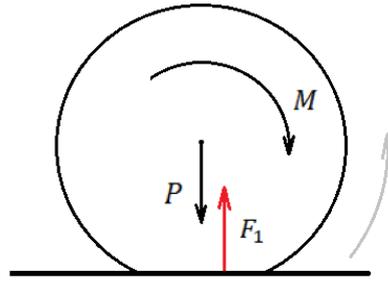


Рис. 25. Силы, действующие на ведущее колесо

Движение колеса начнется когда внешний момент  $M$  превысит влияние пары сил  $P$  и  $F_1$ . До этого (при меньших, но ненулевых значениях  $M$ ) колесо будет находиться в покое. Таким образом, в отличие от случая жесткого колеса, которое при приложении внешнего момента сразу начинает катиться, для деформируемого колеса существует трение покоя.

## Глава 2

# Статическое нагружение колесной пары с развалом<sup>2</sup>

Во второй главе изучается влияние наклона колеса (отклонения его плоскости от вертикальной) на перераспределение сил в области контакта с дорогой.

Рассматривается задача о статическом нагружении системы двух колес с деформируемой периферией, закрепленных на общей оси с ненулевым углом развала. Изучается влияние развала в колесной паре на проскальзывание в зоне контакта и величину реакций со стороны дороги. Рассмотрен аналог непрерывной модели стержневого протектора, найдены величины нормальных и касательных реакций в зависимости от вертикального перемещения центра системы.

### 2.1. Модель колесной пары. Трехмерная постановка задачи о деформировании колеса

Для статически нагруженной колесной пары рассматривается задача о нахождении реакций со стороны дороги. Система состоит из двух колес с деформируемой периферией, закрепленных на общей оси под углом к ней (с ненулевым углом развала). Протекторы колес моделируются множеством изотропных линейно упругих стержней, расположенных по периметру дисков (рис. 26). Под действием вертикальной нагрузки колеса «проседают» на величину  $R_x$ , при этом стержни протекторов испытывают деформации сжатия и изгиба. Считается, что элементы протектора взаимодействуют с опорной плоскостью по закону сухого трения Кулона. Цель работы состоит в определении зависимости реакций, возникающих в пятне контакта, от величины вертикального перемещения системы. В данной главе развиваются идеи главы 1, в которой была

---

<sup>2</sup> Раздел изложен в соответствии со статьей [135], написанной лично соискателем.

изучена задача о нагружении колеса со стержневым протектором в двумерной постановке (когда плоскость колеса перпендикулярна дороге).

В трехмерном случае становится возможным деформирование стержней в произвольных направлениях вне плоскости колеса. Это оказывает влияние на форму зоны контакта, а также на направление и суммарное значение реакций со стороны дороги. С целью определения этого влияния будет рассмотрена задача о нахождении формы изогнутого стержня в пространстве.

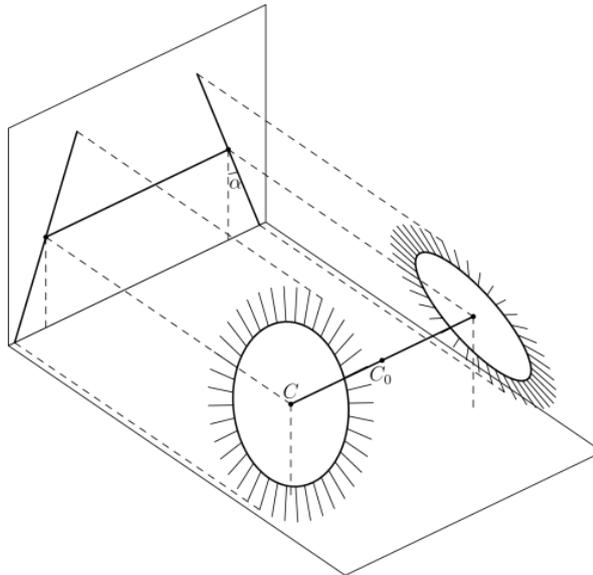


Рис. 26. Модель колесной пары со стержневым протектором

Представим колесную пару в виде системы, состоящей из двух абсолютно твердых дисков, жестко закрепленных на общей оси. По периметру дисков расположены ряды деформируемых стержней, составляющих протекторы. Плоскость диска колеса образует с плоскостью, ортогональной оси колесной пары, угол  $\alpha$ , который назовем «углом развала». Считаем систему симметричной относительно плоскости, перпендикулярной оси колесной пары и проходящей через центр данной оси - точку  $C_0$ .  $r$  - радиус диска,  $h$  - длина стержней. В недеформированном состоянии каждое из колёс является плоским, стержни жестко закреплены на дисках и перпендикулярны последним в точках закрепления. При приложении нагрузки к системе, стержни протектора изгибаются и выходят из плоскости диска.

В рамках описываемой трехмерной постановки возможно также рассмотрение случая закрепления стержней на дисках с помощью пружинок. Рассуждения,

соответствующие этому случаю, не будут приводиться в данной главе, однако отметим, что они аналогичны п.1.2.2.

Пусть на колёсную пару действует вертикальная нагрузка  $P$ , приложенная к центру системы (точке  $C_0$ ), вследствие чего происходит смещение оси вместе с дисками колес вниз по вертикали на величину  $R\chi$ . Опишем характер деформаций элемента протектора, гибкого растяжимого стержня длины  $h$ , под действием силы  $P$ .

## 2.2. Определение положения равновесия стержня протектора в 3D

Силу реакции, возникающую в точке контакта стержня с плоскостью, представим в виде суммы вертикальной составляющей  $\vec{F}_n$  и горизонтальной составляющей  $\vec{F}_\tau$ . Проекции  $F_n$  и  $F_\tau$  на соответствующие направления будем считать положительными. Связь между  $F_n$  и  $F_\tau$  определяется законом трения. За  $\varphi$  обозначим угол между недеформированной осью стержня и нормалью к плоскости дороги,  $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$ ; за  $\psi$  – угол в плоскости дороги между направлением  $\vec{F}_\tau$  и горизонтальной проекцией недеформированного стержня (рис.27).

Чтобы определить, как именно направлена сила  $\vec{F}_\tau$  в горизонтальной плоскости, найдем значение угла  $\psi$  (рис. 27), при котором достигается минимум потенциальной энергии деформированного стержня.

Обозначим за  $s$  координату точки на стержне,  $0 \leq s \leq h$ . Пусть  $u, v, w$  – соответственно продольное и два вида поперечных перемещений точки стержня с координатой  $s$  в момент времени  $t$  в сферической системе координат с началом в основании стержня. Тогда функционал потенциальной энергии изогнутого и сжатого стержня будет иметь вид [8]:

$$\Pi = \frac{N}{2} \int_0^h (u')^2 ds + \frac{T}{2} \int_0^h [(v'')^2 + (w'')^2] ds, \quad (2.1)$$

где штрихом обозначена производная по координате  $s$ . Здесь  $N$  – продольная,  $T$  – изгибная жесткость стержня.

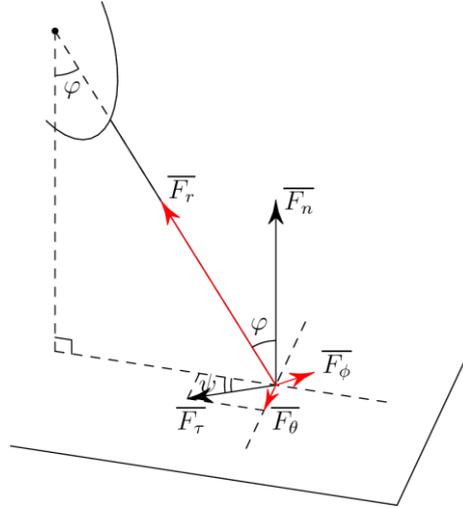


Рис. 27. Силы, действующие на элемент протектора; углы  $\varphi$  и  $\psi$

Уравнения равновесия точек деформированного стержня выводим из принципа возможных перемещений, аналогично плоскому случаю (п. 1.2.)

$$\left\{ \begin{array}{l} Nu''(s) = 0, \quad 0 \leq s \leq h; \\ Tv^{IV}(s) = 0, \quad 0 \leq s \leq h; \\ Tw^{IV}(s) = 0, \quad 0 \leq s \leq h; \\ Nu'(h) = F_r; \\ Tv''(h) = 0; \\ Tw''(h) = 0; \\ Tv'''(h) = -F_\varphi; \\ Tw'''(h) = -F_\theta; \\ u(0) = 0; \\ v(0) = v'(0) = 0; \\ w(0) = w'(0) = 0. \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Здесь  $F_r, F_\varphi, F_\theta$  – проекции сил реакции  $\vec{F}_n$  и  $\vec{F}_\tau$  на оси системы координат, где единичный вектор  $e_r$  направлен по оси недеформированного стержня, вектор  $e_\varphi$  ортогонален  $e_r$  и лежит в вертикальной плоскости, вектор  $e_\theta$  расположен в горизонтальной плоскости и дополняет  $e_r$  и  $e_\varphi$  до правой ортогональной тройки (рис. 27).

$$\begin{aligned}
F_r &= -F_n \cos \varphi - F_\tau \sin \varphi \cos \psi \\
F_\varphi &= F_n \sin \varphi - F_\tau \cos \varphi \cos \psi \\
F_\theta &= F_\tau \sin \psi
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Решения уравнений равновесия (2.2):

$$u(s) = \frac{F_r s}{N}, \quad v(s) = \frac{F_\varphi}{T} \left( \frac{hs^2}{2} - \frac{s^3}{6} \right), \quad w(s) = \frac{F_\theta}{T} \left( \frac{hs^2}{2} - \frac{s^3}{6} \right). \tag{2.4}$$

Далее, подставим в выражение потенциальной энергии (2.1) решения уравнений равновесия (2.4), вычислив предварительно

$$\begin{aligned}
u' &= \frac{\partial u}{\partial s} = \frac{F_r}{N}, & v' &= \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{F_\varphi}{T} \left( hs - \frac{s^2}{2} \right), & w' &= \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{F_\theta}{T} \left( hs - \frac{s^2}{2} \right), \\
v'' &= \frac{\partial v'}{\partial s} = \frac{F_\varphi}{T} (h - s), & w'' &= \frac{\partial w'}{\partial s} = \frac{F_\theta}{T} (h - s).
\end{aligned}$$

При этом выражение (2.1) примет вид:

$$\Pi = \frac{N}{2} \int_0^h \left( \frac{F_r}{N} \right)^2 ds + \frac{T}{2} \int_0^h \left[ \left( \frac{F_\varphi}{T} (h - s) \right)^2 + \left( \frac{F_\theta}{T} (h - s) \right)^2 \right] ds = \frac{F_r^2}{2N} h + \frac{F_\varphi^2 + F_\theta^2}{6T} h^3. \tag{2.5}$$

Теперь подставим в (2.5) значения  $F_r, F_\varphi, F_\theta$  из (2.3) и получим:

$$\begin{aligned}
\Pi &= \frac{h}{2N} (-F_n \cos \varphi - F_\tau \sin \varphi \cos \psi)^2 + \frac{h^3}{6T} (F_n \sin \varphi - F_\tau \cos \varphi \cos \psi)^2 \\
&\quad + \frac{h^3}{6T} (F_\tau \sin \psi)^2.
\end{aligned}$$

Чтобы найти значение  $\psi$ , при котором достигается минимум потенциальной энергии, вычислим  $\partial \Pi / \partial \psi$  и исследуем нули этой производной

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \psi} = \frac{h^3}{3T} \left( 1 - \frac{3T}{Nh^2} \right) F_\tau^2 \sin^2 \varphi \sin \psi \left( \frac{F_n}{F_\tau} \operatorname{ctg} \varphi + \cos \psi \right)$$

Введем обозначение  $\zeta = 3T/Nh^2$ , тогда

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \psi} = \frac{F_\tau^2 h^3}{3T} \sin^2 \varphi \sin \psi (1 - \zeta) \left( \frac{F_n}{F_\tau} \operatorname{ctg} \varphi + \cos \psi \right) \tag{2.6}$$

Величина  $F_n/F_\tau$ , входящая в выражение  $\partial\Pi/\partial\psi$ , имеет смысл отношения нормальной силы реакции к силе трения и в общем случае превышает единицу. Функция  $\text{ctg } \varphi$  стремится к бесконечности при значениях аргумента, стремящихся к нулю. В силу этого будем считать, что справедливо условие

$$\frac{F_n}{F_\tau} \text{ctg } \varphi > 1.$$

Тогда выражение, стоящее в правой части соотношения (2.6) обращается в ноль, если выполнено одно из условий:

1)  $\sin \psi = 0$ .

Проверим, являются ли точки  $\psi = 0$  и  $\psi = \pi$  экстремумами функции  $\Pi$ .

Анализируя выражение

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \psi^2} = \frac{F_\tau^2 h^3}{3T} \sin^2 \varphi (1 - \zeta) \left( \frac{F_n}{F_\tau} \text{ctg } \varphi \cos \psi + \cos 2\psi \right)$$

заметим, что скобка, содержащая  $\cos \psi$  и  $\cos 2\psi$ , положительна в окрестности  $\psi = 0$  и отрицательна в окрестности  $\psi = \pi$ . Таким образом,

- при  $\zeta > 1$  минимуму потенциальной энергии соответствует значение  $\psi = 0$ , а максимуму - значение  $\psi = \pi$ . То есть сила  $\vec{F}_\tau$ , действующая на стержень в горизонтальной плоскости, направлена к «центру зоны контакта» (назовем так точку  $H$  – проекцию центра колеса на плоскость дороги (рис. 29)).
- при  $\zeta < 1$  ситуация меняется на противоположную.  $\psi = 0$  соответствует максимуму, а  $\psi = \pi$  – минимуму потенциальной энергии, и сила  $\vec{F}_\tau$  направлена от «центра зоны контакта», оставаясь при этом в плоскости наклона стержня.

Данный результат согласуется с выводами, полученными при рассмотрении плоской задачи в п.1.3.

2)  $\zeta = 1$

Этот случай соответствует отсутствию проскальзывания концов стержня вне зависимости от величины коэффициента трения. Плоская аналогия данного случая подробно рассматривалась в главе 1.

Таким образом, в плоскости дороги конец стержня будет смещаться вдоль прямой, проходящей через конец стержня и проекцию центра колеса.

### 2.3. Зона контакта. Области проскальзывания

Вычислим границы зоны контакта для колеса с развалом. Обозначим угол между плоскостью колеса и вертикальной плоскостью (угол развала) за  $\alpha$ , и будем считать его постоянным. Введем неподвижную систему координат  $OX_1X_2X_3$  с началом в точке  $O$ , совпадающей с центром диска колеса в недеформированном состоянии, то есть до его смещения под действием нагрузки. Пусть ось  $OX_1$  направлена вертикально вниз,  $OX_2$  горизонтальна и лежит в плоскости недеформированного колеса,  $OX_3$  образует вместе с  $OX_1$  и  $OX_2$  правую ортогональную тройку и параллельна оси колесной пары (рис.28). Также введем подвижную систему координат  $Cx_1x_2x_3$  с началом в центре диска, связанную уже не с колесом в целом, а с отдельным элементом протектора. Ось  $Cx_1$  считаем направленной вертикально вниз,  $Cx_2$  горизонтальной и параллельной прямой, соединяющей в плоскости дороги проекцию точки  $O$  с точкой, в которой недеформированный стержень касается дороги. Ось  $Cx_3$  образует с  $Cx_1$  и  $Cx_2$  правую ортогональную тройку (рис.29).

Таким образом, система координат  $OX_1X_2X_3$  связана с начальной конфигурацией системы «диск-протектор», система координат  $Cx_1x_2x_3$  – с актуальным состоянием элемента протектора.

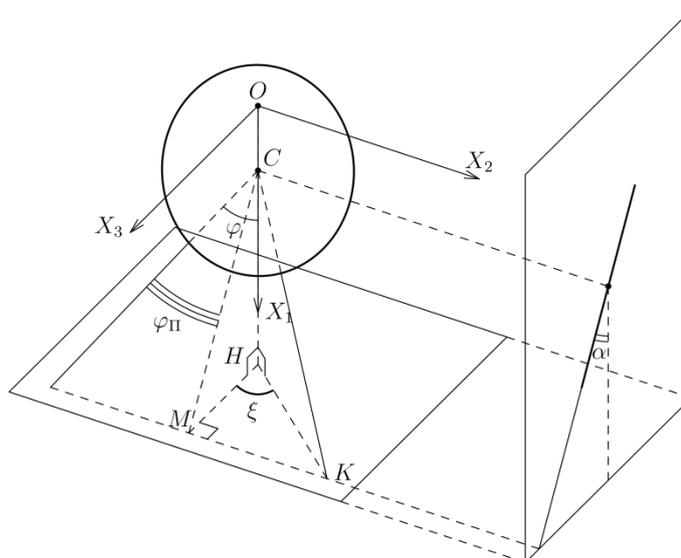


Рис. 28. Неподвижная система координат  $OX_1X_2X_3$  и углы, задающие положение стержня в пространстве

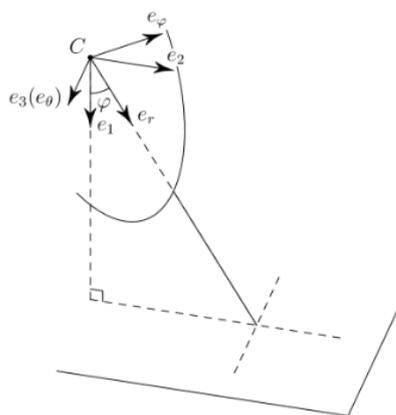


Рис. 29. Система координат  $Cx_1x_2x_3$ , связанная со стержнем  
(начало СК - в актуальном положении центра колеса)

Пусть центр колеса переместился на величину  $Rx$  вдоль вертикальной оси  $OX_1$  (что соответствует отрезку  $OC$  на рисунке 28). Условие того, что стержень протектора находится в контакте с дорогой, запишется в виде

$$R \cos \alpha \cos \varphi_{\Pi} \geq R \cos \alpha - Rx, \quad (2.7)$$

где за  $\varphi_{\Pi}$  обозначен угол в плоскости колеса, задающий положение стержня на диске;  $0 \leq \varphi_{\Pi} \leq 2\pi$ . Заметим также, что  $\varphi_{\Pi}$  является проекцией угла  $\varphi$  на плоскость колеса. Пусть значение  $\varphi_{\Pi} = \varphi_{\Pi 0}$  соответствует крайним стержням в

зоне контакта, и зона контакта определяется неравенствами  $-\varphi_{\Pi_0} \leq \varphi_{\Pi} \leq \varphi_{\Pi_0}$ .

Определим  $\varphi_{\Pi_0}$  из (2.7), заменив знак неравенства знаком равенства

$$R \cos \alpha \cos \varphi_{\Pi_0} = R \cos \alpha - Rx,$$

получим

$$\varphi_{\Pi_0} = \arccos \left( 1 - \frac{x}{\cos \alpha} \right).$$

Положение конца стержня при условии, что он проскальзывает в процессе нагрузки, определяется в системе координат  $Cx_1x_2x_3$  вектором

$$\vec{R}(h) = (R \cos \alpha - Rx)\vec{e}_1 + (R \sin \varphi + Ry)\vec{e}_2, \quad (2.8)$$

где  $\varphi$  – это угол между стержнем и нормалью к плоскости,  $R = r + h$ ;  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  – орты осей  $Cx_1, Cx_2$ ;  $Ry$  – величина проскальзывания вдоль оси  $Cx_2$ . С другой стороны,

$$\vec{R}(h) = (R + u)\vec{e}_r + v\vec{e}_\varphi = \left( R + \frac{h F_r}{N} \right) \vec{e}_r + \frac{h^3 F_\varphi}{3T} \vec{e}_\varphi. \quad (2.9)$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \vec{e}_r \cos \varphi - \vec{e}_\varphi \sin \varphi, \\ \vec{e}_2 &= \vec{e}_r \sin \varphi + \vec{e}_\varphi \cos \varphi \end{aligned}$$

приравняем правые части соотношений (2.8) и (2.9):

$$\begin{aligned} (R \cos \alpha - Rx)(\vec{e}_r \cos \varphi - \vec{e}_\varphi \sin \varphi) + (R \sin \varphi + Ry)(\vec{e}_r \sin \varphi + \vec{e}_\varphi \cos \varphi) \\ = \left( R + \frac{h F_r}{N} \right) \vec{e}_r + \frac{h^3 F_\varphi}{3T} \vec{e}_\varphi, \end{aligned}$$

далее из равенства коэффициентов при  $\vec{e}_r$  и  $\vec{e}_\varphi$  получим:

$$\begin{aligned} (R \cos \alpha - Rx) \cos \varphi + (R \sin \varphi + Ry) \sin \varphi &= R + \frac{h F_r}{N} \\ -(R \cos \alpha - Rx) \sin \varphi + (R \sin \varphi + Ry) \cos \varphi &= \frac{h^3 F_\varphi}{3T} \end{aligned}$$

откуда найдем выражения для  $F_r$  и  $F_\varphi$ :

$$\begin{aligned} F_r &= -\frac{NR}{h} [(x - \cos \alpha + \cos \varphi) \cos \varphi - y \sin \varphi], \\ F_\varphi &= \frac{3TR}{h^3} [(x - \cos \alpha + \cos \varphi) \sin \varphi + y \cos \varphi]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

После введения обозначения  $z(\varphi, \alpha, x) = x - \cos \alpha + \cos \varphi$ , имеющего смысл безразмерного вертикального смещения конца стержня (если говорить более точно, смещению конца стержня соответствует  $Rz$ , но характер изменения этой величины заложен в функции  $z$ ), выражения для сил (2.10) переписутся в виде:

$$\begin{aligned} F_r &= -\frac{NR}{h} [z(\varphi, \alpha, x) \cos \varphi - y \sin \varphi], \\ F_\varphi &= \frac{3TR}{h^3} [z(\varphi, \alpha, x) \sin \varphi + y \cos \varphi] = \frac{NR}{h} \cdot \frac{3T}{Nh^2} [z(\varphi, \alpha, x) \sin \varphi + y \cos \varphi]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Заметим, что представление сил (2.11) совпадает с формулами  $F_r$  и  $F_\varphi$ , полученными в главе 1 для плоского колеса. Отличие состоит лишь в том, что обозначено буквой  $z$ . Для плоского случая, при фиксированном значении перемещения центра колеса  $Rx$ , функция смещения конца стержня  $z$  зависит только от координаты стержня на диске  $\varphi_{\text{п}}$ ; в трехмерном случае добавляется зависимость  $z$  от угла развала  $\alpha$ .

Используя соотношения (2.11) и обозначение  $\zeta = \frac{3T}{Nh^2}$ , найдем проекции  $F_n$  и  $F_\tau$  реакции в точке контакта на оси  $Cx_1$  и  $Cx_2$ . Учитывая

$$\begin{aligned} F_n &= F_r \cos \varphi - F_\varphi \sin \varphi \\ F_\tau &= F_r \sin \varphi + F_\varphi \cos \varphi \end{aligned}$$

имеем

$$\begin{aligned} F_n &= -\frac{NR}{h} [(1 + \zeta \operatorname{tg}^2 \varphi) z(\varphi, \alpha) + y(\zeta - 1) \operatorname{tg} \varphi] \cos^2 \varphi < 0, \\ F_\tau &= \frac{NR}{h} [(\zeta - 1) z(\varphi, \alpha) \operatorname{tg} \varphi + y(\operatorname{tg}^2 \varphi + \zeta)] \cos^2 \varphi. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Заметим, что нормальная компонента реакции  $F_n$  является четной функцией угла  $\varphi$ , а касательная компонента  $F_\tau$  – нечетной. Отметим, что  $F_n$  и  $F_\tau$ , определяемые формулами (2.12), вообще говоря, могут не совпадать по знаку с  $F_n$  и  $F_\tau$  из раздела 2.2 данной главы, где мы считали эти величины положительными. Так

происходит вследствие несовпадения направления вертикальной и горизонтальной осей, на которые происходит проецирование реакции.

Таким образом, мы нашли компоненты реакции, действующей на конец стержневого элемента протектора.

Рассмотрим теперь задачу, где взаимодействие конца стержня с плоскостью дороги описывается *законом сухого трения* с коэффициентом  $f$ . Условие равновесия стержня (и, как следствие, отсутствия проскальзывания) в области контакта будет иметь вид

$$|F_{\tau}| \leq -f \cdot F_n$$

или, с учетом формул (2.12)

$$|z(\zeta - 1)\operatorname{tg} \varphi + y(\operatorname{tg}^2 \varphi + \zeta)| \leq f \cdot [z(1 + \zeta \operatorname{tg}^2 \varphi) + y(\zeta - 1)\operatorname{tg} \varphi] \quad (2.13)$$

Значения  $y$ , удовлетворяющие неравенству (2.13), определяют возможные положения равновесия конца стержня при заданной величине  $z(\varphi, \alpha, x)$ . Таким образом, для стержня с наклоном  $\varphi$ , при заданном перемещении центра колеса  $R_x$  и фиксированном угле развала  $\alpha$ , неравенство (2.13) позволяет определить множество горизонтальных смещений  $R_y$  конца стержня, при которых возможно равновесие системы.

Рассмотрим несколько важных следствий неравенства (2.13).

Если *сухое трение в точке контакта с дорогой отсутствует* ( $f = 0$ ), то, согласно (2.13), область возможных положений равновесия конца стержня сводится к одной точке, а его горизонтальное смещение  $y_0$  определяется уравнением:

$$z(\zeta - 1)\operatorname{tg} \varphi + y_0(\operatorname{tg}^2 \varphi + \zeta) = 0,$$

откуда

$$y_0 = \frac{(1 - \zeta)\operatorname{tg} \varphi}{(\operatorname{tg}^2 \varphi + \zeta)} z,$$

или

$$y_0 = k_0(\zeta, \varphi) \cdot z, \quad k_0(\zeta, \varphi) = \frac{(1-\zeta)\operatorname{tg} \varphi}{(\operatorname{tg}^2 \varphi + \zeta)}.$$

Заметим, что перемещение  $y_0$  конца стержня неотрицательно при  $(1 - \zeta)\operatorname{tg} \varphi > 0$  и неположительно при  $(1 - \zeta)\operatorname{tg} \varphi < 0$ , откуда следует, что концы стержней, аналогично плоскому случаю (п. 1.3), перемещаются либо от «центра зоны контакта» (т.  $H$  на рис. 28), когда  $\zeta < 1$ , либо к «центру зоны контакта», когда  $\zeta > 1$ . Отметим, что здесь имеется в виду перемещение конца стержня относительно первоначальной точки контакта. При этом, независимо от значения  $\zeta$ , деформированная ось стержня находится с внешней стороны от оси недеформированного стержня.

Теперь определим области проскальзывания и прилипания внутри зоны контакта при наличии сухого трения в точке контакта. Сравним результат, полученный для колеса с развалом, с приведенным в первой главе решением аналогичной задачи для вертикально расположенного колеса (п. 1.4).

Если проскальзывание отсутствует, то  $y = 0$ , и неравенство (2.13) принимает вид

$$|(\zeta - 1)\operatorname{tg} \varphi| \leq f \cdot (1 + \zeta \operatorname{tg}^2 \varphi) \quad (2.14)$$

Отметим, что для вертикально расположенного колеса (в этом случае  $\varphi = \varphi_{\Pi}$ ) неравенство (2.14) всегда выполняется в некоторой окрестности  $\varphi = 0$ , т.е. в центре зоны контакта обязательно существует область, в которой отсутствует проскальзывание. В трехмерном случае, когда плоскость колеса отклонена от вертикали на угол  $\alpha$ , область «прилипания» в центре зоны появляется не при любых условиях. Это связано с тем, что угол  $\varphi$  зависит от угла развала  $\alpha$ :

$$\cos \varphi = \cos \varphi_{\Pi} \cdot \cos \alpha. \quad (2.15)$$

Из-за присутствия постоянного множителя  $\cos \alpha$ , левая часть неравенства (2.14) не обязательно стремится к нулю при малых  $\varphi_{\Pi}$ . То есть неравенство (2.14) может нарушаться даже в центре зоны контакта при определенных соотношениях  $\zeta$ ,  $f$  и  $\alpha$ . Для того чтобы определить границы зоны проскальзывания в зависимости от

угла на диске  $\varphi_{\Pi}$ , подставим выражение (2.15) в неравенство (2.14). Сначала перепишем (2.14) в виде

$$|\zeta - 1| \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1} \leq f \cdot \left( (1 - \zeta) + \frac{\zeta}{\cos^2 \varphi} \right),$$

затем, после подстановки (2.15) получим:

$$|\zeta - 1| \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \varphi_{\Pi} \cdot \cos^2 \alpha} - 1} \leq f \cdot \left( (1 - \zeta) + \frac{\zeta}{\cos^2 \varphi_{\Pi} \cdot \cos^2 \alpha} \right). \quad (2.16)$$

При фиксированной величине угла развала  $\alpha$ , значения  $\varphi_{\Pi}$ , удовлетворяющие неравенству (2.16), определяют стержни, концы которых не проскальзывают.

Таким образом, в трехмерной задаче, в отличие от плоской, границы области проскальзывания будут зависеть также и от угла развала.

Отметим, что величина зоны контакта, где проскальзывание отсутствует, не зависит от вертикального смещения диска колеса  $x$  после того, как нарушается неравенство (2.16).

Из анализа неравенства (2.16) следует, что существует условие, при котором проскальзывание будет отсутствовать в любой точке зоны контакта, а именно,  $\zeta = 1$ . Выполнение этого условия обеспечивает отсутствие проскальзывания в точках контакта при любом коэффициенте трения, а значит соблюдение его при конструировании шины позволило бы уменьшить износ протектора.

Зоны проскальзывания определяются значениями углов  $\varphi_{\Pi}$ , при которых нарушается неравенство (2.16). То есть

$$|(\zeta - 1)| \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \varphi_{\Pi} \cdot \cos^2 \alpha} - 1} \geq f \cdot \left( (1 - \zeta) + \frac{\zeta}{\cos^2 \varphi_{\Pi} \cdot \cos^2 \alpha} \right).$$

## 2.4. Суммарные нормальная и касательная реакции, действующие на нагруженное колесо

Найдем для колеса с развалом  $\alpha$  суммарную величину вертикальных составляющих реакций в точках контакта, полагая существование непрерывного множества стержней, расположенных вдоль радиусов диска колеса, в случае отсутствия проскальзывания концов стержней. Заменяем продольную жесткость одного стержня  $N$  на удельную жесткость  $n = \frac{Ni}{2\pi R}$ , характеризующую продольную жесткость единицы длины стержневого протектора (здесь  $i$  – общее количество стержней в дискретной модели). Положим в первом равенстве (2.12)  $y = 0$  (следствие отсутствия проскальзывания) и найдем величину нагрузки как сумму нормальных реакций всех стержней

$$P_n = 2 \int_0^{\varphi_{\Pi_0}} |F_n| d\varphi_{\Pi} =$$

$$= \frac{2nR^2}{h} \int_0^{\varphi_{\Pi_0}} [\cos^2 \varphi_{\Pi} \cdot \cos^2 \alpha (1 - \zeta) + \zeta] (x - \cos \alpha + \cos \varphi_{\Pi} \cdot \cos \alpha) d\varphi_{\Pi} \quad (2.17)$$

Суммарная касательная сила для вертикального колеса равна нулю в силу симметрии зоны контакта. Для колеса с развалом вычисление суммарной касательной силы представляет интерес, так как  $F_{\tau}$  имеет ненулевую проекцию на ось  $OX_3$ , и определяет, таким образом, силу, действующую на ось колесной пары.

$$P_{\tau} = 2 \int_0^{\varphi_{\Pi_0}} F_{\tau} \cdot \cos \xi d\varphi_{\Pi},$$

где за  $\xi$  обозначен угол на горизонтальной плоскости между проекциями оси стержня и оси  $OX_3$ .

Угол  $\xi$  определим из тетраэдра  $CMHK$  (рис. 28).  $CK = R$ ,  $\angle HCK = \varphi$ ,  $\angle MCH = \alpha$ ,  $\angle MCK = \varphi_{\Pi}$ ,  $\angle MNK = \xi$ ,  $CH \perp KH$  и  $CH \perp MH$ ,  $MK \perp MN$  и  $MK \perp MC$ .

$$MH = R \cos \varphi_{\Pi} \sin \alpha$$

$$\cos \xi = \frac{MH}{KH} = \frac{R \cos \varphi_{\Pi} \sin \alpha}{R \sin \varphi} = \frac{\cos \varphi_{\Pi} \sin \alpha}{\sin \varphi}$$

Тогда, в случае отсутствия проскальзывания ( $y = 0$ ), имеем:

$$\begin{aligned} P_{\tau} &= 2 \int_0^{\varphi_{\Pi_0}} F_{\tau} \cdot \cos \xi \, d\varphi_{\Pi} = \\ &= \frac{nR^2(\zeta - 1) \sin 2\alpha}{h} \int_0^{\varphi_{\Pi_0}} (x - \cos \alpha + \cos \varphi_{\Pi} \cos \alpha) \cos^2 \varphi_{\Pi} \, d\varphi_{\Pi} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Полагая малым вертикальное смещение  $x$ , получим приближенные значения интегралов для  $P_n$  и  $P_{\tau}$ . Для этого, разложим подынтегральные выражения в ряды Тейлора и отбросим члены порядка малости выше  $\varphi_{\Pi}^4$ .

Отметим, что в случае  $x \ll 1$  для угла  $\varphi_{\Pi_0}$  верна аппроксимация

$$\varphi_{\Pi_0} = \arccos \left( 1 - \frac{x}{\cos \alpha} \right) \approx \sqrt{\frac{2x}{\cos \alpha}} \quad (2.19)$$

Используя под знаком интеграла формулы разложения тригонометрических функций  $\cos \varphi_{\Pi}$ ,  $\cos^2 \varphi_{\Pi}$  и  $\cos^3 \varphi_{\Pi}$  в ряды Тейлора в окрестности  $\varphi_{\Pi} = 0$ , а затем вычисляя определённый интеграл с учетом аппроксимации (2.19), представим формулу (2.17) для вертикальной составляющей силы реакции  $P_n$  в виде:

$$\begin{aligned} P_n &\cong \frac{4\sqrt{2}nR^2}{3h\sqrt{\cos \alpha}} \left( (\cos^2 \alpha + \zeta \sin^2 \alpha) x^{\frac{3}{2}} + \frac{8\zeta - 7(\cos^2 \alpha + \zeta \sin^2 \alpha)}{20 \cos \alpha} x^{\frac{5}{2}} + \frac{2 \cos^2 \alpha (1 - \zeta)}{5 \cos \alpha} x^{7/2} + \right. \\ &\left. o(x^{7/2}) \right) \end{aligned}$$

Отбросив в полученной формуле члены порядка малости больше  $5/2$ , получим приближенное значение интеграла (2.17) для суммарной вертикальной силы реакции в случае отсутствия проскальзывания:

$$P_n \cong \frac{4\sqrt{2}nR^2}{3h\sqrt{\cos \alpha}} x^{3/2} \left( (\cos^2 \alpha + \zeta \sin^2 \alpha) + \frac{8\zeta - 7(\cos^2 \alpha + \zeta \sin^2 \alpha)}{20 \cos \alpha} x \right) \quad (2.20)$$

Отметим, что в случае, когда угол развала  $\alpha = 0$ , то есть плоскость диска колеса перпендикулярна плоскости дороги, выражение (2.20) приобретает вид

$$P_n \cong \frac{4\sqrt{2}nR^2}{3h\sqrt{\cos \alpha}} x^{3/2} \left( 1 + \frac{8\zeta - 7}{20} x \right),$$

что совпадает с результатом, полученным в главе 1 для плоской задачи.

Далее определим величину суммарной касательной реакции  $P_\tau$ , действующей на протектор со стороны плоскости. Из выражения (2.18), разложив подынтегральные функции  $\cos \varphi_\Pi$ ,  $\cos^2 \varphi_\Pi$  в ряды Тейлора в окрестности  $\varphi_\Pi = 0$  и вычислив определенный интеграл, с учетом аппроксимации (19) получим:

$$\begin{aligned} P_\tau &\cong \frac{nR^2(\zeta-1) \sin 2\alpha}{h} \left( \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{\cos \alpha}} x^{3/2} - \frac{7\sqrt{2}}{30(\cos \alpha)^{3/2}} x^{5/2} + \frac{4\sqrt{2}}{15(\cos \alpha)^{5/2}} x^{7/2} + o(x^{7/2}) \right) \cong \\ &\cong \frac{4nR^2(\zeta-1)}{3h} \sqrt{2 \cos \alpha} \cdot \sin \alpha \cdot x^{3/2} \left( 1 - \frac{7}{20 \cos \alpha} x \right) \end{aligned}$$

Таким образом, при отсутствии проскальзывания в зоне контакта, приближенное значение суммарной касательной силы реакции равно:

$$P_\tau \cong \frac{4nR^2(\zeta-1)}{3h} \sqrt{2 \cos \alpha} \cdot \sin \alpha \cdot x^{3/2} \left( 1 - \frac{7}{20 \cos \alpha} x \right) \quad (2.21)$$

Отметим, что в случае вертикального колеса ( $\alpha = 0$ ), суммарная касательная реакция  $P_\tau$  будет равна нулю.

В случае, когда в зоне контакта присутствует проскальзывание, формулы для  $P_n$  и  $P_\tau$  усложняются. В этом случае интегрирование должно вестись отдельно по области проскальзывания и области прилипания.

## **2.5. Влияние углов развала и схождения на перераспределение сил в зоне контакта с дорогой. Нагрузки, передающиеся на ось колесной пары**

Касательная реакция, возникающая в области контакта колеса, установленного с развалом, и дороги, является существенным силовым фактором, воздействующим на элементы конструкции колесной пары. От направления действия касательной реакции зависит какие именно напряжения (растяжение или сжатие) испытывают ось колесной пары и узлы крепления колес.

Из рассуждений п. 2.2, а также формулы (2.21) следует, что направление касательной реакции не определяется однозначно углом развала  $\alpha$ , а зависит также от параметра  $\zeta$ , характеризующего жесткость протектора. На рисунке 30 показаны направления сил реакции при различных значениях  $\alpha$  и  $\zeta$ .

Как видно из рисунка 30, влияние жесткости протектора на перераспределение усилий в контактной области оказывается значительным и не может не учитываться при проектировании транспортного средства. Результирующая сила реакции может либо прижимать колесо к ступице, способствуя увеличению прочности соединения колеса и оси (что важно при движении на больших скоростях), либо, наоборот «пытаться отделить» колесо от оси, увеличивая тем самым нагрузку на узлы крепления.

Если же колесо установлено так, что присутствует не только развал, но и схождение (поворот плоскости колеса вокруг вертикальной оси), происходит перераспределение сил в области контакта: нагрузка на ось уменьшается, и одновременно с этим становится ненулевой проекция реакции на направление движения колесной пары (рис. 31). Направление указанных компонент реакции зависит также от параметра  $\zeta$ , характеризующего жесткость протектора. Проиллюстрируем различные случаи.

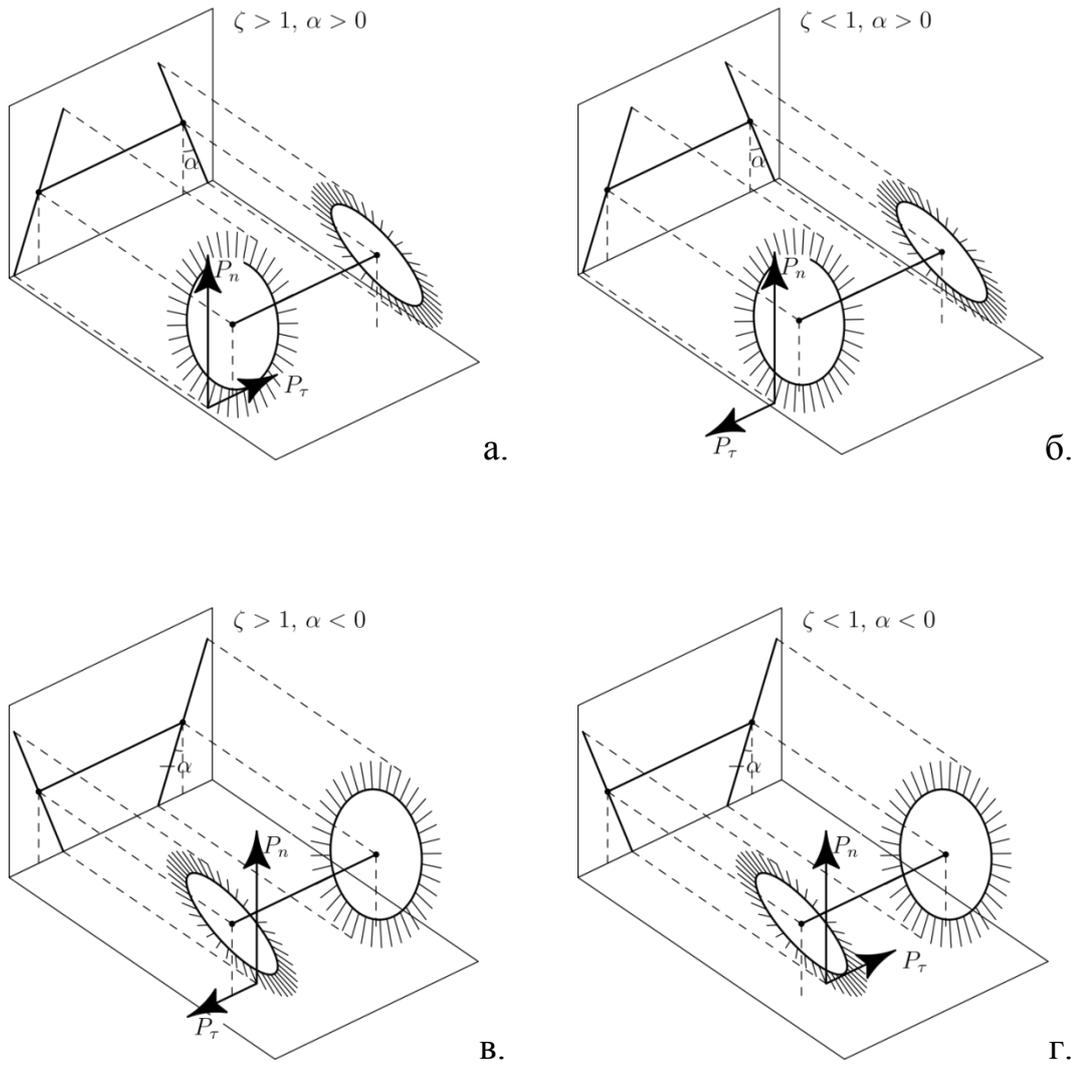


Рис. 30. Влияние развала  $\alpha$  и жесткости протектора  $\zeta$  на направление реакций

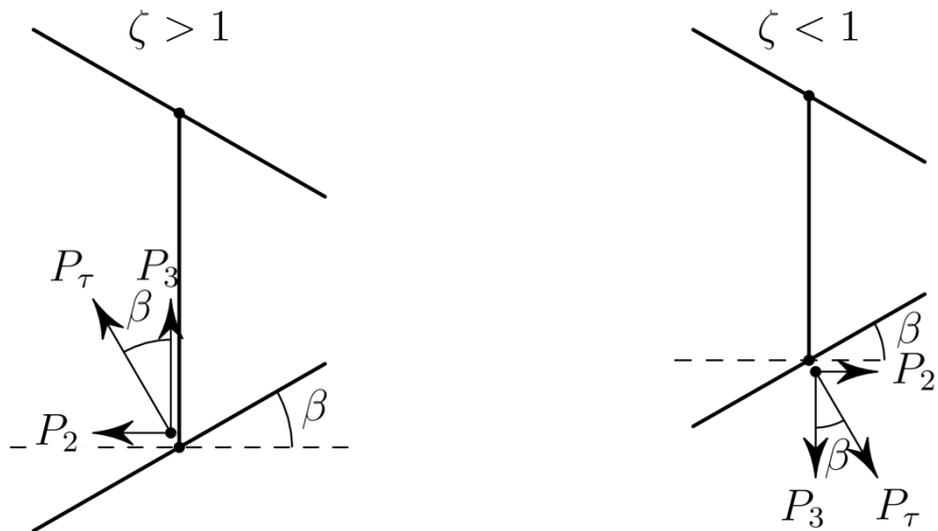


Рис. 31. Влияние схождения  $\beta$  на перераспределение сил в области контакта

На рисунке 31 показан вид сверху двух колесных пар с предыдущего рисунка (30а слева и 30б справа) после того, как в их конструкцию было добавлено схождение (угол  $\beta$ ). Различие в направлении касательной реакции  $P_t$ , а также ее проекций, при одинаковых значениях развала и схождения обусловлено значениями параметра  $\zeta$ .

Таким образом, анализ жесткости протектора чрезвычайно важен при выборе углов установки колес.

## Глава 3

# Качение колеса со стержневым протектором по шероховатой плоскости<sup>3</sup>

В третьей главе будут получены уравнения движения колеса со стержневым протектором. Определена зона контакта и условия, когда она разбивается на части, в которых либо имеет место проскальзывание концов стержней, либо оно отсутствует, в зависимости от величины продольного перемещения центра колеса или его поворота относительно горизонтальной оси. Найдены условия существования стационарных движений.

В главе 3, аналогично главе 1, задачи рассматриваются в двумерной постановке. Качение колеса происходит в вертикальной плоскости.

### 3.1. Постановка задачи. Квазистатическая теория малых деформаций. Неупругий удар

Пусть на колесо действует сила  $P(t)\vec{e}_1 + Q(t)\vec{e}_2$  и момент  $M(t)\vec{e}_3$  (рис.32). Положение центра колеса  $C$  в неподвижной системе координат  $OX_1X_2$  зададим координатами  $Rx, Ry$ , а его поворот относительно оси  $Cx_3$  – углом  $\psi$ . Направления осей в СК  $OX_1X_2X_3$  и  $Cx_1x_2x_3$  соответствуют рис.6.

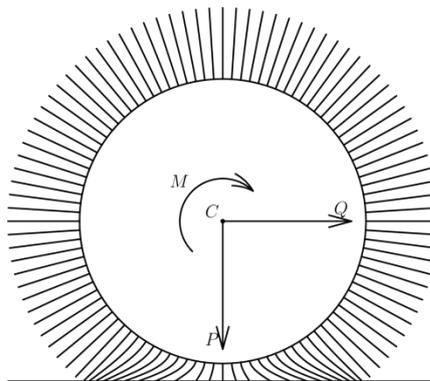


Рис. 32. Колесо под действием сил и момента

<sup>3</sup> Раздел изложен в соответствии со статьей [134], написанной в соавторстве с В.Г. Вильке, которому принадлежит постановка задачи.

Предполагая в дальнейшем использовать квазистатическую теорию малых деформаций стержней, пренебрежем кинетической энергией относительного движения (колебаний) стержней в зоне контакта с дорогой. Представим кинетическую энергию колеса с протектором в виде

$$T = \frac{1}{2} [mR^2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + J\dot{\psi}^2], \quad (3.1)$$

где  $m, J$  – масса колеса и его момент инерции относительно оси  $Cx_3$ . Функционал потенциальной энергии колеса равен

$$\Pi[x, y, \psi, u, v, t] = -P(t)Rx - Q(t)Ry - M(t)\psi + \frac{R^2}{2} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \int_0^h (nu'^2 + \tau v''^2) ds d\varphi. \quad (3.2)$$

Здесь  $Ru(s, \varphi, t), Rv(s, \varphi, t)$  – продольное и поперечное перемещения точек стержней протектора,  $n, \tau$  – удельные значения продольной и изгибной жесткостей стержня, а штрихи обозначают частные производные по переменной  $s$ . Первые три слагаемых в формуле (3.2) отвечают потенциальной энергии диска колеса. В последнем слагаемом внутренний интеграл соответствует потенциальной энергии изогнутого стержня, а внешний является суммированием по всем стержням из зоны контакта.

Величина зоны контакта  $[-\varphi_0, \varphi_0]$  связана с перемещением центра колеса вдоль оси  $OX_1$ , а именно  $\cos \varphi_0 = 1 - x$ .

В зоне контакта колеса с дорогой выполняется условие:

$$x + (1 + u_h) \cos \varphi - v_h \sin \varphi = 1, \quad u_h = u(h, \varphi, t), \quad v_h = v(h, \varphi, t), \quad |\varphi| \leq \varphi_0. \quad (3.3)$$

Равенство (3.3) – это геометрическое условие на вертикальную координату конца стержня с координатой  $\varphi$ , которое означает, что при заданном вертикальном смещении центра колеса конец данного стержня контактирует с дорогой, однако не проникает в поверхность. Поясним данное соотношение с помощью рис. 33.

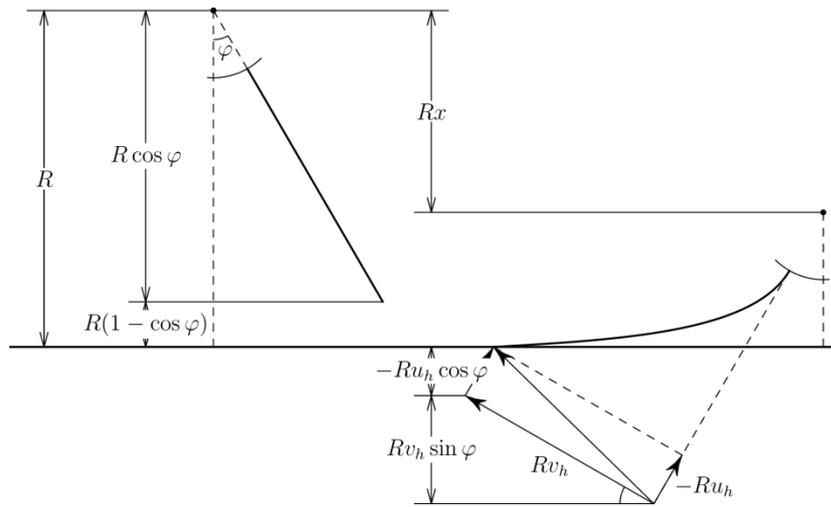


Рис. 33. Перемещения конца стержня при контакте с дорогой

Вертикальная координата конца недеформированного стержня в СК  $Sx_1x_2$ :  $R \cos \varphi$ . Смещение конца стержня по вертикали, обусловленное его деформацией вследствие соприкосновения с поверхностью дороги:  $Rv_h \sin \varphi - Ru_h \cos \varphi$ . Изменение вертикальной координаты конца стержня равно вертикальному смещению центра колеса:

$$R - R \cos \varphi + Rv_h \sin \varphi - Ru_h \cos \varphi = Rx,$$

откуда получим (3.3).

Условие (3.3) означает также, что в момент соприкосновения конца стержня с дорогой происходит абсолютно неупругий удар (стержни «приклеиваются»), в результате которого становится равной нулю вертикальная составляющая скорости, равная до удара  $-R\dot{\psi} \sin \varphi_0 > 0$ .

В общем случае в результате удара в стержне возникают продольные и поперечные перемещения малой амплитуды, что влечет сход конца стержня с односторонней связи (разрыв контакта с дорогой). Очевидно, что через достаточно малый промежуток времени конец стержня вторично выходит на связь и в дальнейшем повторяется описанный выше сценарий. Поскольку колебания стержней имеют высокую частоту, обусловленную большими значениями жесткостей стержней, то в качестве побочного явления в системе могут возникать звуковые волны (шум при качении колеса с пневматической шиной). Будем считать, что этот переходный процесс достаточно быстро затухнет

из-за рассеяния энергии в материале стержня, трения о воздух и последовательности неупругих ударов конца стержня о дорогу. Исследование этого процесса достаточно сложно и выходит за рамки данной диссертации.

В дальнейшем будем считать, что после первого контакта стержня с дорогой его конец не покидает связь, то есть остается в контакте с дорогой до момента, когда угол, характеризующий положение стержня относительно вертикали, не станет равным  $-\varphi_0 = -\arccos(1-x)$ . Таким образом, с учетом обозначения  $\omega$  для угловой скорости колеса, контакт стержня с дорогой происходит на интервале времени  $[0, -2\varphi_0\omega^{-1}]$ , который, вообще говоря, разбивается на интервалы времени, характеризуемые проскальзыванием конца стержня вдоль дороги или его отсутствием.

### 3.2. Уравнения движения

Освободим систему от связей (3.3) в зоне контакта и введем поле нормальных и касательных сил:

$$\vec{f}(\varphi, t) = f_1(\varphi, t)\vec{e}_1 + f_2(\varphi, t)\vec{e}_2 = f_r(\varphi, t)\vec{e}_r + f_\varphi(\varphi, t)\vec{e}_\varphi, \quad |\varphi| \leq \varphi_0 \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} f_r(\varphi, t) &= f_1 \cos \varphi + f_2 \sin \varphi, \\ f_\varphi(\varphi, t) &= -f_1 \sin \varphi + f_2 \cos \varphi \end{aligned}$$

Положение концов стержней в зоне контакта определяется векторным полем

$$\vec{R} = R[x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + (1 + u_h)\vec{e}_r + v_h\vec{e}_\varphi], \quad (3.5)$$

где первые два слагаемых отвечают перемещению центра колеса, а два последних – перемещению конца стержня. Вариация векторного поля равна

$$\delta\vec{R} = R\{\delta x\vec{e}_1 + \delta y\vec{e}_2 + \delta\psi\vec{e}_3 \times [(1 + u_h)\vec{e}_r + v_h\vec{e}_\varphi] + \delta u_h\vec{e}_r + \delta v_h\vec{e}_\varphi\} \quad (3.6)$$

Хотя переменная  $\psi$  не входит явно в выражение (3.5) для  $\vec{R}$ , вариация  $\delta\psi$  появляется в выражении (3.6) вследствие того, что  $\vec{e}_r$  и  $\vec{e}_\varphi$  зависят от  $\psi$ .

Подставляя теперь

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= \vec{e}_1 \cos \varphi + \vec{e}_2 \sin \varphi, & \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 &= \vec{e}_3, \\ \vec{e}_\varphi &= -\vec{e}_1 \sin \varphi + \vec{e}_2 \cos \varphi, & \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 &= \vec{e}_2, \\ & & \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 &= -\vec{e}_1,\end{aligned}$$

преобразуем (3.6) к виду

$$\begin{aligned}\delta \vec{R} &= R\{(\delta x + (\delta u_h - v_h \delta \psi) \cos \varphi - (\delta v_h + (1 + u_h) \delta \psi) \sin \varphi) \vec{e}_1 + \\ &+ (\delta y + (\delta u_h - v_h \delta \psi) \sin \varphi + (\delta v_h + (1 + u_h) \delta \psi) \cos \varphi) \vec{e}_2\} \quad (3.7)\end{aligned}$$

Найдем работу поля реакций связей (3.4) на возможных перемещениях точек системы, освобожденной от связей

$$\delta A = \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \vec{f} \delta \vec{R} d\varphi = \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned}&= R \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} f_1 \{ \delta x + (\delta u_h - v_h \delta \psi) \cos \varphi - (\delta v_h + (1 + u_h) \delta \psi) \sin \varphi \} d\varphi + \\ &+ R \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} f_2 \{ \delta y + (\delta u_h - v_h \delta \psi) \sin \varphi + (\delta v_h + (1 + u_h) \delta \psi) \cos \varphi \} d\varphi\end{aligned}$$

Коэффициенты при независимых вариациях  $\delta x, \delta y, \delta \psi, \delta u_h, \delta v_h$  в (3.8) являются соответствующими обобщенными силами. Движение всего колеса характеризуется тремя переменными  $x, y, \psi$ , а работа всех сил, действующих на колесо, равна

$$\delta A_\Sigma = \delta A + R \cdot P \delta x + R \cdot Q \delta y + M \delta \psi \quad (3.9)$$

Уравнения Лагранжа второго рода  $\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$  получим, учитывая соотношения (3.1), (3.2). Добавив к ним уравнения и граничные условия, описывающие квазистатические формы равновесия стержней в зоне их контакта с дорогой, получим систему соотношений, описывающую движение деформируемого колеса:

$$\left\{ \begin{array}{l} mR\ddot{x} = P + \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} f_1 d\varphi \\ mR\ddot{y} = Q + \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} f_2 d\varphi \\ J\ddot{\psi} = M + R \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \{-f_1[(1+u_h)\sin\varphi + v_h\cos\varphi] + f_2[(1+u_h)\cos\varphi - v_h\sin\varphi]\}d\varphi \\ u''(s, \varphi, t) = 0, \quad 0 \leq s \leq h \\ v^{IV}(s, \varphi, t) = 0, \quad 0 \leq s \leq h \\ u(0, \varphi, t) = 0 \\ nRu'(h, \varphi, t) = f_r \\ v(0, \varphi, t) = v'(0, \varphi, t) = v''(h, \varphi, t) = 0 \\ \tau Rv'''(h, \varphi, t) = -f_\varphi \end{array} \right. \quad (3.10)$$

Последние два уравнения и граничные условия системы (3.10) аналогичны дифференциальным уравнениям (1.10).

Решая эти уравнения, найдем

$$u(s, \varphi, t) = \frac{f_r s}{nR}, \quad v(s, \varphi, t) = \frac{f_\varphi}{\tau R} \left( \frac{hs^2}{2} - \frac{s^3}{6} \right) \quad (3.11)$$

откуда для конца стержня, имеющего координату  $h$ ,

$$u_h(\varphi, t) = \frac{h}{nR} f_r, \quad v_h(\varphi, t) = \frac{h^3}{3\tau R} f_\varphi \quad (3.12)$$

Касательная и нормальная компоненты поля реакций связаны друг с другом, поскольку найденные перемещения (3.12) должны удовлетворять соотношению (3.3). Используя соотношения (3.4), (3.12), выразим

$$\begin{aligned} f_1 &= f_r \cos\varphi - f_\varphi \sin\varphi = \frac{nR}{h} \left( u_h \cos\varphi - \frac{3\tau}{nh^2} v_h \sin\varphi \right) \\ f_2 &= f_r \sin\varphi + f_\varphi \cos\varphi = \frac{nR}{h} \left( u_h \sin\varphi + \frac{3\tau}{nh^2} v_h \cos\varphi \right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Теперь, введя обозначения  $\kappa = \frac{nR}{h}$  и  $\zeta = \frac{3\tau}{nh^2}$ , представим уравнения (3.10) в виде

$$\begin{aligned} mR\ddot{x} &= P + \kappa \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} (u_h \cos\varphi - \zeta v_h \sin\varphi) d\varphi \\ mR\ddot{y} &= Q + \kappa \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} (u_h \sin\varphi + \zeta v_h \cos\varphi) d\varphi \\ J\ddot{\psi} &= M + R\kappa \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} [\zeta v_h + u_h v_h (\zeta - 1)] d\varphi \end{aligned} \quad (3.14)$$

где  $\cos\varphi_0 = 1 - \chi$ .

Система, состоящая из четырех уравнений (3.3), (3.14), содержит пять неизвестных  $x, y, \psi, u_h, v_h$  и должна быть дополнена соотношением, связывающим нормальную и касательную компоненты реакций в точках контакта стержней с дорогой. Это соотношение представляется законом сухого трения

$$|f_2(\varphi, t)| \leq -f \cdot f_1(\varphi, t) \quad \Rightarrow$$

$$|u_h \sin \varphi + \zeta v_h \cos \varphi| \leq -f \cdot (u_h \cos \varphi - \zeta v_h \sin \varphi) \quad (3.15)$$

где  $f$  – коэффициент сухого трения материалов протектора и дороги. Соотношение (3.15) обращается в равенство, если скорость точки контакта не равна нулю, или заменяется равенством нулю скорости точки контакта.

Для исследования динамики конца стержня найдем переменные  $u_h, v_h$ , используя соотношения (3.5) и вводя обозначение  $R\beta(\varphi)$  для перемещения (проскальзывания) конца стержня вдоль дороги в момент времени, когда он составляет с вертикалью угол  $\varphi$ :

$$\begin{aligned} u_h \sin \varphi + v_h \cos \varphi &= y_0 - y + \beta(\varphi) + \sin \varphi_0 - \sin \varphi \\ u_h \cos \varphi - v_h \sin \varphi &= 1 - x - \cos \varphi \end{aligned} \quad (3.16)$$

Здесь  $y_0$  – координата центра колеса в момент  $t_0$ , когда конец стержня вступает в контакт с дорогой;  $\varphi_0$  – угол, который стержень составляет с вертикалью в этот момент. Функция  $\beta(\varphi_0) = 0$  и остается равной нулю, если проскальзывание конца стержня отсутствует при уменьшении угла  $\varphi$  до величины близкой  $(-\varphi_0)$ , когда конец стержня перестает контактировать с дорогой. Это обстоятельство связано с тем, что для выделенного стержня величины  $x(t), y(t), \varphi(t) = \varphi_0 + \psi(t) - \psi(t_0)$  изменяются в процессе его контакта с дорогой.

Допустим, что время контакта выделенного стержня достаточно мало по сравнению с периодом времени, на котором рассматривается поставленная задача. Заметим, что в случае качения без проскальзывания абсолютно жесткого диска, время контакта фиксированной точки на диске равно нулю. Поскольку время контакта стержня с дорогой мало, то можно принять

$$\begin{aligned} y &\cong y_0 + V(t_0)(t - t_0) \\ \psi &\cong \psi(t_0) + \omega(t_0)(t - t_0) \\ \varphi &\cong \varphi_0 + \omega(t_0)(t - t_0) \end{aligned} \quad (3.17)$$

где  $t_0$  – момент начала контакта, а  $\Delta t = -\frac{2\varphi_0}{\omega}$  – длительность контакта. Отсюда следует, что  $y - y_0 \cong V(t_0) \frac{(\varphi - \varphi_0)}{\omega(t_0)}$ . Изменение величины  $x$  за время контакта выделенного стержня также незначительно, что позволяет принять  $1 - x = \cos \varphi_0$  и представить формулы (3.16) в виде

$$\begin{aligned} u_h \sin \varphi + v_h \cos \varphi &= p(\varphi - \varphi_0) + \beta(\varphi) + \sin \varphi_0 - \sin \varphi, \quad p = -\frac{V(t_0)}{\omega(t_0)} \\ u_h \cos \varphi - v_h \sin \varphi &= \cos \varphi_0 - \cos \varphi \end{aligned} \quad (3.18)$$

Величины  $p, \varphi_0$  в формулах (3.18) представляются функциями «медленного времени», то есть их можно считать постоянными на временах порядка времени контакта выделенного стержня с дорогой [4]. Из уравнений (3.18) найдем функции  $u_h(\varphi, t), v_h(\varphi, t)$

$$\begin{aligned} u_h &= a \sin \varphi + b \cos \varphi, & a &= p(t)(\varphi - \varphi_0(t)) + \beta(\varphi(t)) + \sin \varphi_0(t) - \sin \varphi \\ v_h &= a \cos \varphi - b \sin \varphi, & b &= \cos \varphi_0(t) - \cos \varphi \leq 0 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Зависимость от «быстрого времени» определяется через угол  $\varphi$ , а зависимость величин  $u_h(\varphi, t), v_h(\varphi, t)$  от второго аргумента  $t$  («медленного времени») проявляется через зависимость от времени переменных  $p$  и  $\varphi_0$ .

При известном значении параметра «быстрого времени»  $\varphi$ , значение параметра «медленного времени»  $t$  находится из (3.17).

Закон сухого трения (3.15) принимает вид:

$$\begin{aligned} &|a(\varphi, t)(\sin^2 \varphi + \zeta \cos^2 \varphi) + b(\varphi, t)(1 - \zeta) \sin \varphi \cos \varphi| \leq \\ &\leq -f[a(\varphi, t)(1 - \zeta) \sin \varphi \cos \varphi + b(\varphi, t)(\cos^2 \varphi + \zeta \sin^2 \varphi)] \end{aligned} \quad (3.20)$$

### 3.3. Определение областей проскальзывания в зоне контакта

Рассмотрим случай, когда параметр  $\zeta = 1$  (при этом значении  $\zeta$  отсутствует проскальзывание в статическом решении). Неравенство (3.20) преобразуется к виду  $|a(\varphi, t)| \leq -f \cdot b$  или

$$|p(\varphi - \varphi_0) + \beta(\varphi) + \sin \varphi_0 - \sin \varphi| \leq f(\cos \varphi - \cos \varphi_0) \quad (3.21)$$

Отсутствие проскальзывания конца стержня вдоль дороги означает выполнение неравенства (3.21) при  $\beta(\varphi) = 0$ . Считая величину  $(\varphi - \varphi_0)$  малой, разлагая входящие в неравенство (3.21) функции в ряды Тейлора и сохраняя члены до второго порядка малости относительно  $(\varphi - \varphi_0)$

$$\begin{aligned} \sin \varphi &= \sin \varphi_0 + \cos \varphi_0 (\varphi - \varphi_0) - \frac{1}{2} \sin \varphi_0 (\varphi - \varphi_0)^2 + \dots o((\varphi - \varphi_0)^2) \\ \cos \varphi &= \cos \varphi_0 - \sin \varphi_0 (\varphi - \varphi_0) - \frac{1}{2} \cos \varphi_0 (\varphi - \varphi_0)^2 + \dots o((\varphi - \varphi_0)^2) \end{aligned} \quad (3.22)$$

представим неравенство (3.21) в виде

$$\left| p - \cos \varphi_0 + \frac{1}{2} \sin \varphi_0 (\varphi - \varphi_0) \right| \leq f \left[ \sin \varphi_0 + \frac{1}{2} \cos \varphi_0 (\varphi - \varphi_0) \right] \quad (3.23)$$

Если неравенство (3.21) при  $\beta(\varphi) = 0$  выполняется для всех значений  $\varphi \in [-\varphi_0; \varphi_0]$ , то проскальзывание стержней во всей зоне контакта отсутствует. Используя соотношения (3.16), (3.19) вычислим интегралы, стоящие в правых частях уравнений (3.14). При  $\zeta = 1$  формулы (3.14) примут вид

$$\begin{aligned} mR\ddot{x} &= P + \kappa \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} (u_h \cos \varphi - v_h \sin \varphi) d\varphi \\ mR\ddot{y} &= Q + \kappa \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} (u_h \sin \varphi + v_h \cos \varphi) d\varphi \\ J\ddot{\psi} &= M + \kappa R \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} v_h d\varphi \end{aligned} \quad (3.24)$$

Для вычисления интегралов из первых двух строк воспользуемся формулой (3.16) при  $\beta = 0$ :

$$\begin{aligned} u_h \sin \varphi + v_h \cos \varphi &= y_0 - y + \sin \varphi_0 - \sin \varphi = p(\varphi - \varphi_0) + \sin \varphi_0 - \sin \varphi, \\ u_h \cos \varphi - v_h \sin \varphi &= 1 - x - \cos \varphi, \end{aligned}$$

а также разложением подынтегральных тригонометрических функций в ряды Тейлора.

Интеграл из первой формулы (3.24), имеющий смысл вертикальной компоненты равнодействующей реакции стержней, примет вид:

$$\begin{aligned} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} (u_h \cos \varphi - v_h \sin \varphi) d\varphi &= 2 \int_0^{\varphi_0} (1 - x - \cos \varphi) d\varphi \approx 2 \int_0^{\varphi_0} \left(-x + \frac{\varphi^2}{2}\right) d\varphi = \\ &= \left(-2\varphi x + \frac{\varphi^3}{3}\right) \Big|_0^{\sqrt{2x}} = -x^{3/2} \left(2\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{3} x^{3/2}. \end{aligned}$$

Интеграл из второй формулы (3.24) соответствует горизонтальной компоненте равнодействующей реакции стержней:

$$\begin{aligned} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} (u_h \sin \varphi + v_h \cos \varphi) d\varphi &= \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} (p(\varphi - \varphi_0) + \sin \varphi_0 - \sin \varphi) d\varphi \approx \\ &\approx \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} (p(\varphi - \varphi_0) + \varphi_0 - \varphi) d\varphi = \frac{(\varphi - \varphi_0)^2}{2} (p - 1) \Big|_{-\varphi_0}^{\varphi_0} = \\ &= 2\varphi_0^2 (1 - p) \Big|_{\varphi_0 = \sqrt{2x}} = 4x(1 - p) = 4x \left(1 + \frac{\dot{y}}{\dot{\psi}}\right), \quad \text{так как } p = -\frac{V}{\omega} = -\frac{\dot{y}}{\dot{\psi}} \end{aligned}$$

Интеграл из третьей формулы (3.24) выражает момент реакции, действующей на колесо со стороны дороги:

$$\begin{aligned} \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} v_h d\varphi &= \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} (a \cos \varphi - b \sin \varphi) d\varphi \approx \\ &\approx \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} \left( (p(\varphi - \varphi_0) + \sin \varphi_0 - \sin \varphi) \left(1 - \frac{\varphi^2}{2}\right) - \varphi \frac{\varphi^2 - \varphi_0^2}{2} \right) d\varphi \\ &\approx \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} (p(\varphi - \varphi_0) + \varphi_0 - \varphi) d\varphi \end{aligned}$$

Этот интеграл равен второму. Для получения данного результата отброшены члены второго и более высоких порядков малости по  $\varphi$ .

Подставив найденные значения интегралов в уравнения (3.24), получим уравнения движения колеса со стержневым протектором

$$\begin{aligned} mR\ddot{x} &= P - \frac{4\sqrt{2}}{3}\kappa x^{3/2} \\ mR\ddot{y} &= Q + 4\kappa x \left(1 + \frac{\dot{y}}{\dot{\psi}}\right) \\ J\ddot{\psi} &= M + 4R\kappa x \left(1 + \frac{\dot{y}}{\dot{\psi}}\right) \end{aligned} \quad (3.25)$$

В формулах (3.25) отброшены члены, порядок малости которых по  $x$  превышает  $3/2$ . Решения уравнений (3.25) определяются начальными условиями и должны удовлетворять неравенству (3.21), гарантирующему качение колеса без проскальзывания концов стержней в зоне контакта.

Оценку для  $f$ , при котором в ЗК будут сохраняться области сцепления, найдем из анализа неравенства (3.23). С целью упрощения вычислений положим  $p = \cos \varphi_0$ . В этом случае (3.23) примет вид:

$$|\varphi - \varphi_0| \leq 2f + f \operatorname{ctg} \varphi_0 (\varphi - \varphi_0), \quad \varphi \in [-\varphi_0; \varphi_0]. \quad (3.26)$$

Последнее соотношение справедливо, если

$$f \geq \frac{|\varphi - \varphi_0|}{2 + \operatorname{ctg} \varphi_0 (\varphi - \varphi_0)}$$

или, с учетом того, что  $|\varphi - \varphi_0|$  принимает наибольшее значение на отрезке  $[-\varphi_0; \varphi_0]$  в точке  $(-\varphi_0)$ , при

$$f \geq \frac{\varphi_0}{1 - \varphi_0 \operatorname{ctg} \varphi_0}. \quad (3.27)$$

Из неравенства (3.27) видно, что чем меньше вертикальная нагрузка  $P$  (т.е.  $\varphi_0 \rightarrow 0$ ), тем больше должен быть коэффициент трения  $f$ , чтобы проскальзывание отсутствовало на правой границе зоны контакта при указанном выше соотношении между  $p$  и  $\varphi_0$ .

Поскольку предполагается, что угол  $\varphi_0$  мал ( $\cos \varphi_0 \rightarrow 1$ ), то из (3.27) следует, что в случае близости к единице отношения  $p = -\frac{V}{\omega} = -\frac{\dot{y}}{\dot{\psi}}$  возможен режим качения колеса с сохранением сцепления.

Если для выбранного значения параметра  $p$  неравенство (3.23) нарушается, то в зоне контакта появляются области, где возникает скольжение концов стержней по дороге, а при дальнейшем увеличении значения  $p$  вся зона контакта становится областью скольжения концов стержней. В этом случае колесо движется «юзом».

На рисунке 34 приведены три вида графиков функции

$$G(\varphi) = f(\cos \varphi - \cos \varphi_0) - |p(\varphi - \varphi_0) + \sin \varphi_0 - \sin \varphi|, \quad (3.28)$$

полученной из неравенства (3.21) при  $\beta(\varphi) = 0$  и следующих значениях параметров:  $f = 0.8$ ,  $\varphi_0 = 0.1$ ,  $p_1 = 0.9983$ ,  $p_2 = 1.01$ ,  $p_3 = 1.1$ .

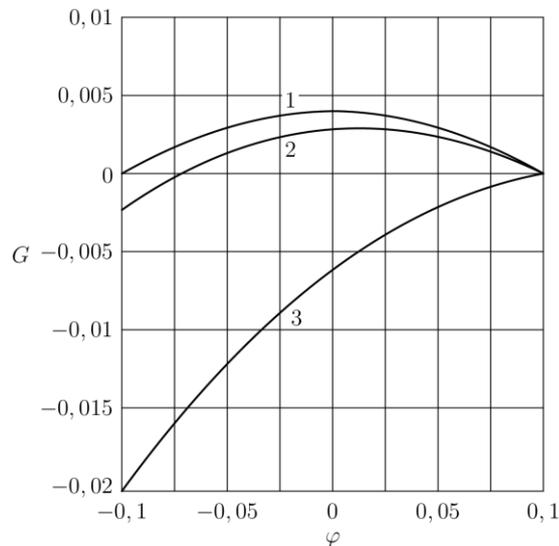


Рис. 34. Области сцепления и скольжения при различных  $V/\omega$

Как следует из вида графиков, в первом случае функция  $G(\varphi) \geq 0$ , что свидетельствует об отсутствии проскальзывания. На втором графике в задней части зоны контакта функция  $G(\varphi)$  отрицательна и в ней имеет место проскальзывание концов стержней. На третьем графике функция  $G(\varphi) \leq 0$ , то

есть колесо движется «юзом», когда проскальзывание имеет место во всей зоне контакта. Уравнения (3.25) следует использовать только для первого случая.

Отметим, что использование приближенного неравенства (3.23) для определения области проскальзывания в зоне контакта может служить источником погрешности.

При наличии области проскальзывания в зоне контакта система уравнений (3.14) при  $\zeta = 1$  принимает вид

$$\begin{aligned} mR\ddot{x} &= P + \kappa \int_{-\varphi_0}^{\varphi_0} (\cos \varphi_0 - \cos \varphi) d\varphi = P - \frac{4\sqrt{2}}{3} \kappa x^{3/2} \\ mR\ddot{y} &= Q - f\kappa \int_{-\varphi_0}^{\varphi_*} (\cos \varphi_0 - \cos \varphi) d\varphi \cdot \operatorname{sgn} \left( 1 + \frac{\dot{y}}{\dot{\psi}} \right) + \kappa \int_{\varphi_*}^{\varphi_0} [p(\varphi - \varphi_0) + \sin \varphi_0 - \sin \varphi] d\varphi \\ J\ddot{\psi} &= M + R\kappa \int_{-\varphi_0}^{\varphi_*} (\cos \varphi_0 - \cos \varphi) \left[ -f \cos \varphi \cdot \operatorname{sgn} \left( 1 + \frac{\dot{y}}{\dot{\psi}} \right) - \sin \varphi \right] d\varphi + \\ &+ R\kappa \int_{\varphi_*}^{\varphi_0} \{ [p(\varphi - \varphi_0) + \sin \varphi_0 - \sin \varphi] \cos \varphi - (\cos \varphi_0 - \cos \varphi) \sin \varphi \} d\varphi \end{aligned} \quad (3.29)$$

Знак выражения  $\left( 1 + \frac{\dot{y}}{\dot{\psi}} \right)$  определяет, в какую сторону скользит конец стержня.

Величина  $\varphi_*$  является значением угла  $\varphi$ , при котором неравенство (3.21) обращается в равенство при условии, что  $\beta(\varphi) = 0$ . Другими словами, угол  $\varphi_*$  разделяет зону контакта на области, где имеется проскальзывание концов стержней, и где его нет. Может оказаться, что угол  $\varphi_* = \varphi_0$ , что означает проскальзывание концов стержней во всей зоне контакта.

### 3.4. Стационарное движение (качение с постоянными $V$ и $\omega$ )

Простейшим случаем движения колеса является его качение, когда центр колеса имеет постоянную скорость, направленную по оси  $OX_2$ , и постоянную угловую скорость. Необходимым условием движений этого типа является равновесие сил и момента, приложенных к колесу.

Если в зоне контакта выполняется условие (3.21) при  $\beta(\varphi) = 0$ , то имеет место качение без проскальзывания. Стационарное движение получим из уравнений (3.25), положив  $\dot{x} = 0$ ,  $\dot{y} = V$ ,  $\dot{\psi} = \omega$ :

$$\begin{aligned}
P &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \kappa x^{3/2} \\
Q &= -4\kappa x \left(1 + \frac{V}{\omega}\right) \\
M &= -4R\kappa x \left(1 + \frac{V}{\omega}\right) = RQ
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Если неравенство (3.21) при  $\beta(\varphi) = 0$  не выполняется при всех  $\varphi \in (-\varphi_0, \varphi_0)$ , то колесо движется «юзом». Угол  $\varphi_* = \varphi_0$ , а уравнения (3.29) на стационарном движении принимают вид:

$$\begin{aligned}
P &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \kappa x^{3/2} \\
Q &= -\frac{4\sqrt{2}}{3} f\kappa x^{3/2} \cdot \operatorname{sgn}\left(1 + \frac{V}{\omega}\right) = -fP \cdot \operatorname{sgn}\left(1 + \frac{V}{\omega}\right) \\
M &= -\frac{4\sqrt{2}}{3} fR\kappa x^{3/2} \cdot \operatorname{sgn}\left(1 + \frac{V}{\omega}\right) = RQ
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Рассмотрим случай, когда существует угол  $\varphi_* \in (-\varphi_0, \varphi_0)$ , разделяющий интервал  $(-\varphi_0, \varphi_0)$  на две части  $(-\varphi_0, \varphi_*) \cup [\varphi_*, \varphi_0)$ , в одной из которых неравенство (3.21) справедливо, а в другой не справедливо. Этот случай соответствует качению с частичным проскальзыванием. Система уравнений (3.29) на стационарном движении примет вид (отброшены члены выше 3-го порядка малости по  $\varphi$ ):

$$\begin{aligned}
P &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \kappa x^{3/2} \\
Q &= \frac{1}{6} f\kappa(\varphi_*^3 - 3\varphi_*\varphi_0^2 - 2\varphi_0^3) \cdot \operatorname{sgn}\left(1 + \frac{V}{\omega}\right) - \frac{1}{2} \kappa(\varphi_0 - \varphi_*)^2 \left(1 + \frac{V}{\omega}\right) \\
M &= \frac{1}{6} Rf\kappa(\varphi_*^3 - 3\varphi_*\varphi_0^2 - 2\varphi_0^3) \cdot \operatorname{sgn}\left(1 + \frac{V}{\omega}\right) - \frac{1}{2} R\kappa(\varphi_0 - \varphi_*)^2 \left(1 + \frac{V}{\omega}\right) = RQ
\end{aligned} \tag{3.32}$$

В (3.32) зависимость  $Q$  от  $P$  выражается через зависимость  $\varphi_0$  от  $P$ .

Заметим, что формулы (3.30) могут быть получены из (3.32) при  $\varphi_* = -\varphi_0$ , а выражения (3.31) получаются из (3.32) при  $\varphi_* = \varphi_0$ .

Во всех трех случаях (3.30)–(3.32) (т.е. вне зависимости от наличия или отсутствия проскальзывания в ЗК) момент  $M$ , необходимый для поддержания стационарного режима движения колеса, оказался равен произведению значения силы  $Q$  на радиус колеса  $R$ . Это является следствием предположения о малости

зоны контакта, в рамках которого в формулах отбрасывались члены высших порядков малости по  $\varphi$ .

В системах уравнений (3.30), (3.31), (3.32) вертикальная сила  $P$  и отношение  $\frac{V}{\omega}$  задаются произвольным образом. Из первых соотношений определяется вертикальное перемещение центра колеса  $x$  и  $\cos \varphi_0 = 1 - x$ . Далее следует понять, какой тип уравнений необходимо использовать, анализируя неравенство (3.23). В зависимости от результатов этого анализа выбирается одна из систем уравнений (3.30), (3.31), (3.32) и определяются необходимые для существования стационарного режима значения величин  $Q$  и  $M$ .

Мощность активных сил, необходимых для поддержания стационарного режима качения колеса с постоянными скоростями  $V$  и  $\omega$ , равна

$$W = QRV + M\omega = -4kxR\omega \left(1 + \frac{V}{\omega}\right)^2 \geq 0 \quad (3.33)$$

для стационарного режима, описываемого соотношениями (3.30).

В случае движения «юзом» (соотношения (3.31)) величина мощности активных сил равна

$$W = QRV + M\omega = -fPR\omega \left(1 + \frac{V}{\omega}\right) \cdot \operatorname{sgn} \left(1 + \frac{V}{\omega}\right) \geq 0 \quad (3.34)$$

В случае малой зоны контакта, когда  $M = RQ$ , для всех типов стационарного движения (3.30)–(3.32) общий вид формулы для мощности активных сил:

$$W = RQ(V + \omega) = M(V + \omega).$$

Определение касательных и нормальных сил и режимов скольжения в зоне контакта осложняется в случае, когда жесткости стержней в продольном и поперечном направлениях таковы, что безразмерный параметр  $\zeta \neq 1$ .

#### **Замечание о случае качения без проскальзывания:**

Отметим эффект, к которому приводит использование неравенства (3.21) для определения границ области проскальзывания. Рассмотрим, при каких

значениях  $p$  для колеса заданного веса  $P$  будет реализовываться режим качения без проскальзывания.

Согласно сформулированному выше условию, если для функции  $G(\varphi)$  из (3.28) выполняется:  $G(\varphi) \geq 0$  для всех  $\varphi \in [-\varphi_0; \varphi_0]$ , то все стержни в ЗК не скользят. Вычислив функцию  $G(\varphi)$  в точке  $\varphi = -\varphi_0$ , получим:

$$G(-\varphi_0) = -|-2\varphi_0 \cdot p + 2 \sin \varphi_0|$$

(в силу четности функции  $\cos \varphi$ , первое слагаемое в правой части (3.28) всегда обращается в ноль на левом конце интервала). Как видно из выражения для  $G(-\varphi_0)$ , функция  $G$  обращается в ноль в точке  $-\varphi_0$  при значении  $p$ , равном  $p = \frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0}$ . В рамках предложенного метода определения границы участка проскальзывания, это значение  $p$  будет единственным, при котором для колеса заданного веса ( $\varphi_0$  однозначно определяется по  $P$ ) возможно качение без проскальзывания. При других значениях  $p$  в левой части ЗК будет участок скольжения.

Итак, мы установили, что, согласно (3.21), для колеса фиксированного веса  $P$  будет существовать единственное соотношение линейной и угловой скоростей  $p = -\frac{v}{\omega} = \frac{\sin \varphi_0}{\varphi_0}$ , при котором реализуется качение без проскальзывания. Если же используется предположение о малости зоны контакта, при котором  $\sin \varphi_0$  заменяется на  $\varphi_0$ , условие качения без проскальзывания приобретает вид:  $p = 1$ .

Отметим, что при указанном единственном значении  $p$  под интегралом во втором уравнении системы (3.24) будет стоять нечетная функция угла  $\varphi$ , вследствие чего интеграл по симметричной области контакта будет равен нулю, откуда следует, что если все стержни не проскальзывают, то суммарная касательная сила равна нулю.

Таким образом, при подстановке указанного значения  $p$ , уравнения движения колеса (3.25) примут вид:

$$\begin{aligned} mR\ddot{x} &= P - \frac{4\sqrt{2}}{3} \kappa x^{3/2}, \\ mR\ddot{y} &= Q, \\ J\ddot{\psi} &= M, \end{aligned}$$

а стационарное движение колеса без проскальзывания, вместо соотношений (3.30) будет описываться формулами:

$$\begin{aligned} P &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \kappa x^{3/2}, \\ Q &= 0, \\ M &= 0. \end{aligned}$$

Обращение силы реакции (трения) в ноль в рассматриваемом случае является прямым следствием использования приближенного неравенства (3.21), а именно, определения базового положения стержней из решения статической задачи, согласно которому концы стержней изначально смещены симметрично относительно центра зоны контакта. Горизонтальные силы реакции при этом взаимно сокращаются. Получить более точный результат (значения  $p$ , при которых не будет проскальзывания) позволило бы использование положений, описанных в конце первой главы (п. 1.8) при рассуждениях о предельной горизонтальной силе реакции покоя. Эта сила не равнялась нулю, что позволило бы учесть в модели ряд дополнительных физических эффектов.

Рассмотрение несимметричной площадки контакта в динамической задаче выходит за рамки диссертационной работы, однако является одним из возможных направлений дальнейшего развития предложенной теории.

Завершая замечание, отметим, что решение, полученное по предложенным в третьей главе упрощенным формулам, соответствует теории Картера, положения которой используются также в работах [16, 17]. Таким образом, полученное решение соответствует современному научному взгляду на проблему.

### 3.5. Зависимость силы трения от относительного проскальзывания колеса и дороги при стационарном движении

Рассмотрим, как соотношение величин линейной  $V$  и угловой  $\omega$  скоростей при стационарном движении деформируемого колеса влияет на силы, возникающие в области контакта с дорогой.

Сначала осветим некоторые из известных результатов, полученных для схожих с рассматриваемой задач. Далее перейдем к нахождению суммарной силы трения в рамках модели колеса со стержневым протектором.

В литературе при описании качения с проскальзыванием используется понятие «относительное проскальзывание» [17, 46], определяемое [в обозначениях диссертации] как

$$\delta = -\frac{\omega + V}{V}, \quad (3.35)$$

где  $\omega$  – угловая скорость катящегося тела,  $V$  – его безразмерная линейная скорость (т.е.  $V = \frac{V_{\text{разм}}}{R}$ , где  $R$  – радиус катка).

Взаимосвязь тангенциальной реакции  $Q$  (силы трения) и относительного проскальзывания  $\delta$  в контактной области железнодорожного колеса и рельса была аналитически найдена Картером [86]. Согласно теории качения Картера при небольших величинах силы  $Q$  выполняется:  $Q \sim \delta$ . Однако при дальнейшем увеличении силы  $Q$  данная зависимость нарушается, и при достижении некоторого предельного значения  $Q_*$  скольжение распространяется на всю зону контакта. При этом сила  $Q$  переходит в силу трения скольжения:  $Q = -fP$ , где  $P$  – вертикальная нагрузка,  $f$  – коэффициент трения (рис. 35). В дальнейшем теория Картера получила экспериментальное подтверждение [46].

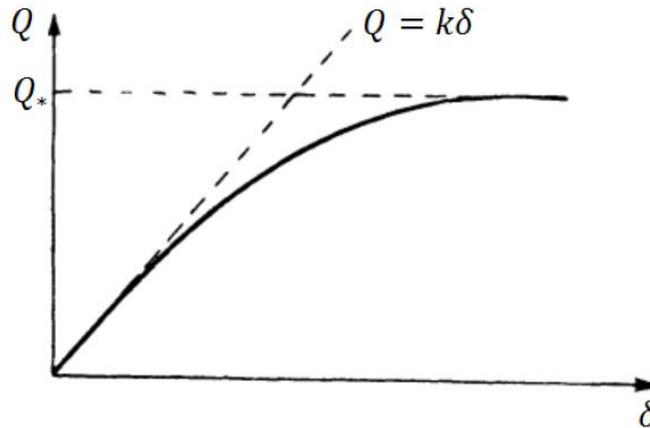


Рис. 35. Зависимость горизонтальной силы  $Q$ , действующей на железнодорожное колесо со стороны рельса, от относительного проскальзывания  $\delta$ , найденная Картером [46]

В теоретической работе Картера [86] колесу и рельсу ставились в соответствие цилиндры из одинакового упругого материала, рассматривалось качение одного цилиндра по другому в двумерной постановке (оси цилиндров считались параллельными). Обобщение задачи, исследовавшейся Картером, на случай вязкоупругости материалов катящегося цилиндра и опорного основания было проведено в работе [16]. Примером применения аналитических выражений теории Картера для нахождения реакций в контактной области служит работа [17], посвященная анализу динамики упругого цилиндра на упругом основании.

Найдем зависимость тангенциальной реакции от относительного проскальзывания при движении колеса со стержневым протектором.

Формулы (3.30)-(3.32) позволяют определить величину внешней горизонтальной силы  $Q$  (силы тяги), обеспечивающей движение колеса с заданными постоянными  $V$  и  $\omega$ . Поскольку при стационарном движении силы, действующие на колесо, уравновешены, горизонтальная сила  $Q$  будет равна по величине и противоположна по направлению касательной силе, действующей на колесо со стороны дороги в зоне контакта (силе трения).

Перейдем от переменных  $V$  и  $\omega$  к переменной  $\delta$ . Учитывая (3.35), получим:

$$\left(1 + \frac{V}{\omega}\right) = \left(1 - \frac{1}{1+\delta}\right). \quad (3.36)$$

Итак, с учетом (3.36), а также  $x = \left(\frac{3hP}{4\sqrt{2}nR}\right)^{2/3}$  (из первых соотношений (3.30)-(3.32)), сила  $Q$  определяется одним из трех выражений:

- при качении деформируемого колеса *без проскальзывания* :

$$Q = -\left(\frac{18nR}{h}\right)^{1/3} P^{2/3} \left(1 - \frac{1}{1+\delta}\right) \quad (3.37)$$

- при *полном скольжении* в ЗК :

$$Q = -fP \operatorname{sgn}\left(1 - \frac{1}{1+\delta}\right) \quad (3.38)$$

- при качении с *частичным проскальзыванием*:

$$Q = \frac{1}{6} f \frac{nR}{h} (\varphi_*^3 - 3\varphi_*\varphi_0^2 - 2\varphi_0^3) \operatorname{sgn}\left(1 - \frac{1}{1+\delta}\right) - \frac{1}{2} \frac{nR}{h} (\varphi_0 - \varphi_*)^2 \left(1 - \frac{1}{1+\delta}\right) \quad (3.39)$$

В (3.39) зависимость  $Q$  от  $P$  выражается через зависимость  $\varphi_0$  от  $P$ :

$\varphi_0 = \arccos(1 - x) = \arccos\left(1 - \left(\frac{3hP}{4\sqrt{2}nR}\right)^{2/3}\right)$  или, для малых  $x$ :

$$\varphi_0 \cong \sqrt{2x} = \left(\frac{3hP}{2nR}\right)^{1/3}.$$

Значение  $\varphi_*(f, \delta)$ , разделяющее зону контакта  $(-\varphi_0, \varphi_0)$  на участки: проскальзывания  $(-\varphi_0, \varphi_*)$  и прилипания  $[\varphi_*, \varphi_0)$ , находим из равенства:

$$f(\cos \varphi_* - \cos \varphi_0) - \left| \frac{1}{1+\delta} (\varphi_* - \varphi_0) + \sin \varphi_0 - \sin \varphi_* \right| = 0, \quad (3.40)$$

полученного из соотношения (3.21) с учетом  $p = -\frac{V}{\omega} = \frac{1}{1+\delta}$ .

Ситуация отсутствия или наличия проскальзывания в зоне контакта идентифицируется, аналогично (3.28), путем анализа функции

$$G(\varphi) = f(\cos \varphi - \cos \varphi_0) - \left| \frac{1}{1+\delta} (\varphi - \varphi_0) + \sin \varphi_0 - \sin \varphi \right|. \quad (3.41)$$

Имеем:

- $G(\varphi) > 0$  для всех  $\varphi \in (-\varphi_0, \varphi_0) \Leftrightarrow$  качение *без проскальзывания*
- $G(\varphi) < 0$  для всех  $\varphi \in (-\varphi_0, \varphi_0) \Leftrightarrow$  *полное скольжение* в ЗК
- $G(\varphi)$  меняет знак на интервале  $(-\varphi_0, \varphi_0)$ , обращаясь в 0 в точке  $\varphi_* \Leftrightarrow$  качение с *частичным проскальзыванием*.

Учитывая вышесказанное, получим зависимость вида  $Q(P, f, \delta, R, n, h)$ . То есть, зависимость горизонтальной силы  $Q$  от вертикальной нагрузки  $P$ , коэффициента трения  $f$ , относительного проскальзывания  $\delta$ , радиуса колеса вместе с протектором  $R$ , удельной жесткости протектора  $n$ , толщины протектора  $h$ . Отметим, что в этом списке параметров  $P$  можно заменить на  $x$  (вертикальную просадку).

Считая  $R, n, h$  и  $x$  фиксированными и пользуясь предположениями малости углов  $\varphi$  и  $\varphi_0$ , построим графики силы трения  $-Q(\delta)$  для нескольких различных значений  $f$ . (Замеч.: в обозначениях диссертации  $Q$  – это сила тяги, а  $(-Q)$  – сила трения, в отличие от приведенного выше описания теории Картера и рис. 35, где обозначение  $Q$  соответствовало силе трения.)

Полученный график зависимости горизонтальной силы  $Q$  от относительного проскальзывания  $\delta$  представлен на рисунке 36 (вертикальная просадка  $x = 0.1$ ;  $\kappa = \frac{nR}{h}$  – постоянный коэффициент).

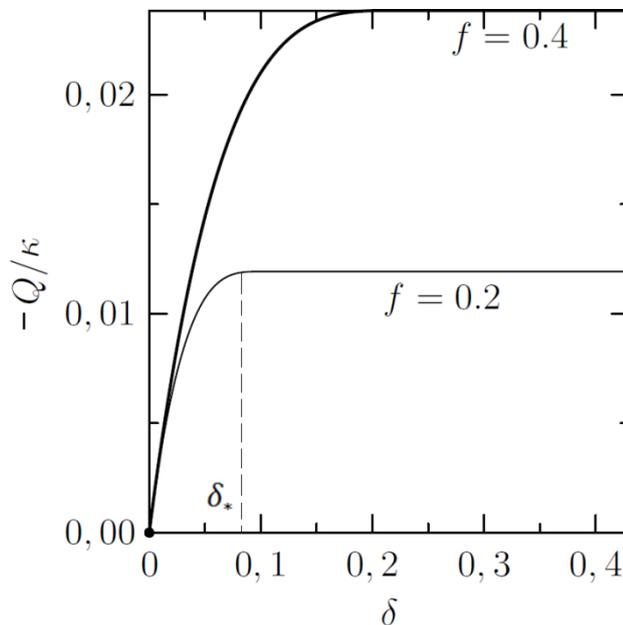


Рис. 36. Зависимость силы трения от относительного проскальзывания  $\delta$  для колеса со стержневым протектором (при  $x = 0.1$  и различных коэффициентах трения) в предположении малости  $\varphi_0$  и  $\varphi_*$

$Q$  – это сложная функция; поясним, как формулы (3.37)-(3.39) соответствуют участкам графика на рисунке 36.

- Качению без проскальзывания соответствует одна точка —  $(0,0)$ . В предположении малости углов  $\varphi_0$  и  $\varphi_*$  случай качения без проскальзывания реализуется только при  $\delta = 0$  (см. замечание в конце п. 3.4), а выражение (3.37), согласно которому должна быть вычислена сила  $Q$  в этом случае, принимает вид:  $Q = 0$ .
- Качению с частичным проскальзыванием соответствует кривая на участке от 0 до  $\delta_*$ , где  $\delta_*(f)$  — это предельное значение параметра  $\delta$ , при котором происходит переход к полному скольжению в ЗК. Для вычисления  $Q$  в этом случае применяется формула (3.39).
- Полному скольжению соответствует прямая на участке  $\delta > \delta_*$ . В этом случае  $Q$  вычисляется по формуле (3.38).

Таким образом, сила трения в зоне контакта увеличивается с увеличением относительного проскальзывания  $\delta$  до тех пор пока не достигнет предельного значения, равного силе трения скольжения. Переход к предельному значению силы происходит когда значение  $\delta$  превышает предельное значение  $\delta_*(f)$  и в зоне контакта наступает полное скольжение.

На основании вида графиков на рисунке 36 можно заключить, что зависимость силы трения от относительного проскальзывания в зоне контакта, найденная с помощью модели стержневого протектора, имеет хорошее качественное соответствие с теорией качения Картера.

Из вышесказанного следует, что моделирование упругого слоя на поверхности соприкосновения катка и опорного основания посредством стержневого протектора, для определенного круга задач хорошо согласуется с теоретическими моделями Герца и Картера, а также с подтверждающими их экспериментальными данными [46].

## Заключение

В диссертации разработана модель взаимодействия деформируемого колеса и жесткой дороги. Колесо со стержневым протектором представляет из себя жесткий диск с множеством расположенных по периметру упругих стержней.

В рамках предложенной модели для случая сухого трения между колесом и дорогой решены следующие задачи:

1. Определена зона контакта для нагруженного колеса.
2. Вычислены компоненты реакции, действующей на элемент протектора. Изучены особенности деформирования стержней в зависимости от их жесткостных характеристик.
3. Сформулированы условия возникновения проскальзывания, определены границы областей проскальзывания и прилипания внутри зоны контакта. Найдено условие, при котором проскальзывание в зоне контакта отсутствует при любом коэффициенте трения.
4. Найдена суммарная реакция, действующая со стороны дороги на колесо, нагруженное вертикальной силой. Предложены несколько способов вычисления суммарной реакции, проведен их сравнительный анализ и определены оптимальные границы применимости. Для случая отсутствия трения между колесом и дорогой, полученные результаты согласуются с выводами теории Герца.
5. Модель стержневого протектора, в отличие от классической задачи Герца, позволяет учитывать и количественно оценивать влияние трения в зоне контакта на характеристики контактного взаимодействия. Показано, что вертикальная просадка колеса, статически нагруженного фиксированным весом, отличается для случаев отсутствия и наличия трения между колесом и опорной плоскостью. Трение в зоне контакта уменьшает вертикальную просадку колеса.

6. Качественно и количественно описано явление гистерезиса при последовательной нагрузке и разгрузке элемента протектора в случае контакта с проскальзыванием. Выявлены причины возникновения данного явления и вычислена работа сил трения на цикле нагрузки-разгрузки.
7. Описана методика вычисления суммарных потерь энергии за счет трения на цикле последовательной нагрузки-разгрузки колеса со стержневым протектором.
8. Показано, что приложение к колесу, помимо вертикальной нагрузки, дополнительного крутящего момента, увеличивает вертикальную просадку колеса и вызывает смещение равнодействующей нормальной реакции в переднюю часть зоны контакта.
9. Изучено влияние развала в колесной паре на проскальзывание в зоне контакта и величину суммарной реакции. Найдена нагрузка на ось, возникающая в колесной паре с ненулевым углом развала за счет деформации периферии колес.
10. Составлены уравнения движения колеса со стержневым протектором в зависимости от сил и моментов, приложенных к центру колеса.
11. Предложен алгоритм нахождения областей проскальзывания в зоне контакта для движущегося колеса, а также определения ожидаемого типа движения (качение без проскальзывания, качение с проскальзыванием, движение юзом) в зависимости от исходных параметров системы.
12. Исследован стационарный режим – движение колеса с заданными постоянными линейной и угловой скоростями. Определены силы и мощность, необходимые для поддержания режима.
13. Найдена зависимость силы трения в контактной области от относительного проскальзывания колеса и дороги. Проведено сравнение полученного результата с теорией качения Картера.

Стержневая модель как модель упругого слоя представляет широкое поле для исследований, а ее потенциал не ограничивается кругом решенных в диссертации

задач. В дальнейшем можно рассмотреть другие механизмы поглощения энергии колесом, например, за счет внутреннего трения в стержнях. Представляет интерес задача о статическом нагружении колеса горизонтальной силой, из которой могут быть определены реакции, действующие на ведомое колесо со стороны дороги перед началом движения. В задачах динамики могут быть заданы различные виды трения между стержнями и дорогой. Рассмотрение колебаний элементов стержневого протектора позволило бы моделировать явления колебаний пневматических шин.

## Список литературы

1. Агапов Д.Г. Моделирование динамики автомобильного колеса методом дискретных элементов // Тр. XII Всеросс. съезда по пробл. теор. и прикл. мех. Уфа. 2019. Т.1. С.423-424.
2. Аронович Г.В. К теории шимми автомобиля и самолета // ПММ. 1949. Т.13. №5. С.477-488.
3. Боуден Ф., Тейбор Д. Трение и смазка твердых тел. – М.: Машиностроение. 1968. 544с.
4. Вильке В.Г. Разделение движений и метод усреднения в механике систем с бесконечным числом степеней свободы // Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. Математика. Механика. 1983. №5. С.54-59.
5. Вильке В.Г. О качении вязкоупругого колеса // Изв. РАН. МТТ. 1993. №6. С.11–15.
6. Вильке В.Г. Качение колеса с пневматической шиной // Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. Математика. Механика. 1998. №5. С.30–39.
7. Вильке В.Г. Условия качения колеса с армированной шиной без проскальзывания // Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. Математика. Механика. 2002. №5. С.38-42.
8. Вильке В.Г. Аналитическая механика систем с бесконечным числом степеней свободы. Ч.1,2. – М.: Изд-во МГУ. 1997. Ч1: 216с., Ч2: 160с.
9. Вильке В.Г. Теоретическая механика. – М.: Лань. 2003. 302с.
10. Вильке В.Г., Дворников М.В. Качение колеса с пневматиком по плоскости // ПММ. 1998. Т.62. №3. С.393-404.
11. Вильке В.Г., Кожевников И.Ф. Качение колеса с армированной шиной по плоскости без проскальзывания // ПММ. 2001. Т.65. №6. С.944-957.

12. Вильке В.Г., Кожевников И.Ф. Качение колеса с армированной шиной по плоскости с проскальзыванием // ПММ. 2004. Т.68. №6. С.1022-1036.
13. Вильке В.Г., Кожевников И.Ф. Об одной модели колеса с армированной шиной // Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. Математика. Механика. 2004. №4. С.37-45.
14. Глух Б.А. Теория шимми автомобиля // Изв. НАТИ. 1935. №1. С.39-49.
15. Гоздек В.С. Устойчивость качения заблокированных ориентирующихся колес шасси самолета // Труды ЦАГИ. 1970. №1196. С.3-17.
16. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. – М.: Наука, 2001. 478с.
17. Горячева И.Г., Зобова А.А. Динамика упругого цилиндра на упругом основании // ПММ. 2019. Т.83. № 1. С.39-46.
18. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир. 1989. 510с.
19. Дюво Г., Лионс Ж.Л. Неравенства в механике и физике. – М.: Наука. 1980. 384с.
20. Ечеистов Ю.А. Исследование увода мотоциклетных шин // Сборник статей «Вопросы машиноведения». Изд. АН СССР. 1950. С.269-280.
21. Жуковский Н.Е. Трение бандажей железнодорожных колес о рельсы. – М.–Л.: Гостехиздат. 1950. Т.7. С.426–478.
22. Журавлёв В.Ф. О модели сухого трения в задаче качения твердых тел // ПММ. 1998. Т.62. №5. С.762-767.
23. Журавлёв В.Ф. Закономерности трения при комбинации скольжения и верчения // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 4. С.81-88.
24. Журавлев В.Ф. О модели сухого трения в задачах динамики твердых тел // Успехи механики. 2005. Т. 3, №3. С.58–76.
25. Журавлев В.Ф. 500 лет истории закона сухого трения // Вестн. МГТУ им. Баумана. Сер. «Естественные науки». 2014. №2. С.21-31.

26. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. О динамике волчка Томсона (тип-топ) на плоскости с реальным сухим трением // Изв. РАН. МТТ. 2005. №6. С.157–168.
27. Журавлев В.Ф., Климов Д.М. О механизме явления шимми // Доклады академии наук. 2009. Т.428. №6. С.761–764.
28. Журавлев В.Ф., Климов Д.М., Плотников П.К. Новая модель шимми // Труды Математического института имени В.А. Стеклова. 2013. Т.281. С.32–41.
29. Журавлев В.Ф., Фуфаев Н.А. Механика систем с неударяющими связями. – М.: Наука. 1993. 240с.
30. Зегжда С.А., Солтаханов Ш.Х., Юшков М.П. Неголономная механика. Теория и приложения. — М.: Физматлит. 2009. 344с.
31. Ишлинский А.Ю. Трение качения // ПММ. 1938. Т.2. №2. С.245-260.
32. Ишлинский А.Ю. Теория сопротивления перекачиванию (трение качения) и смежных явлений // Всесоюз. конф. по трению и износу в машинах. Изд-во АН СССР. 1940. Т.2. С.255–264.
33. Ишлинский А.Ю. О проскальзывании в области контакта при трении качения // Изв. АН СССР. ОТН. 1956. №6. С.3-15.
34. Ишлинский А.Ю. Механика. Идеи, задачи, приложения. – М.: Наука. 1985. 624с.
35. Калкер И.И., Патер А.Д. Обзор теории локального скольжения в области упругого контакта с сухим трением // Прикладная механика. 1971. Т.7. №5. С.9-20.
36. Келдыш М.В. Шимми переднего колеса трехколесного шасси // Труды ЦАГИ. 1945. №564. С.33–42.

37. Кожевников И.Ф. Колебания свободной и нагруженной шины // ПММ. 2006. Т.70. №2. С.250-256.
38. Кожевников И.Ф. Динамика колес с деформируемой периферией. Обзор // Задачи исследования устойчивости и стабилизации движения. – М.: ВЦ им. Дородницына РАН. 2009. С.53–84.
39. Конвисаров Д.В., Покровская А.А. Влияние радиусов кривизны цилиндрических тел на их сопротивление перекатыванию при различных нагрузках // Тр. Сиб. физ.-техн. инст-та. 1955. Т.34. С.62–79.
40. Косенко И.И. Реализация компьютерной модели динамики систем твердых тел с освобождающими связями // Математическое моделирование. 2006. Т.18. №2 С.95–106.
41. Ларин А.А. Компьютерное моделирование пневматической шины с учетом ее внутренней многослойной структуры и ортотропии механических свойств // Вестник НТУ ХПИ. 2010. Т.1. № 69. С.72-78.
42. Ларькин Е.И., Ягольницкий Е.В. Качение упругой пневматической шины с проскальзыванием // Ученые записки ЦАГИ 1986 Т.17. №6. С.69-77.
43. Левин М.А., Фуфаев Н.А. Теория качения деформируемого колеса. – М.: Наука. 1989. 272с.
44. Лопухин К. А., Шешенин С.В. Применение многосеточного метода для решения задачи о шине // Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. Математика. Механика. 2010. №1. С.62-66.
45. Метелицын И.И. Устойчивость движения автомобиля // Укр. матем. журн. 1952. Т.4. №3. С.323-338.
46. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Динамика неавтономных систем. – М.: Наука. 1967. 520с.
47. Новожилов И.В. Условия застоя в системах с кулоновским трением // Изв. АН СССР. МТТ. 1973. №1. С.8–14.

- 48.Новожилов И.В. Модель движения деформируемого колеса // Изв. РАН. МТТ. 1995. №6. С.19–26.
- 49.Новожилов И.В. Фракционный анализ. – М.: Изд-во МГУ. 1995. 224с.
- 50.Новожилов И.В., Кручинин П.А., Магомедов М.Х. Контактные силы взаимодействия колеса с опорной поверхностью. // Сб. научно-методических статей. – М.: Изд-во МГУ. 2000. Вып.23. С.86-95.
- 51.Новоселов В.С. Вариационные методы в механике. — Л.: Изд-во ЛГУ. 1966. 72с.
- 52.Ольшевский А.А., Ольшевский А.А. Решение контактных задач методом конечных элементов в программном комплексе DSMFEM // Тр. XII Всеросс. съезда по пробл. теор. и прикл. мех. Уфа. 2019. Т.3. С.944-946.
- 53.Ольшевский А.А., Ольшевский А.А. Эффективный алгоритм решения контактных задач с трением, использующий метод сил // Тр. XII Всеросс. съезда по пробл. теор. и прикл. мех. Уфа. 2019. Т.3. С.941-943.
- 54.Остроградский М.В. Избранные труды. – М.: Изд-во АН СССР. 1958. 583с.
- 55.Пинегин С.В., Орлов А.В. Сопротивление движению при некоторых видах свободного качения // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1961. №3. С.91-97.
- 56.Победря Б.Е. Численные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Изд-во МГУ. 1981. 281с.
- 57.Победря Б.Е., Георгиевский Д.В. Основы механики сплошной среды. Курс лекций. – М.: Физматлит. 2006. 272с.
- 58.Погорелов Д.Ю., Родиков А.Н. Уравнения движения упругого тела в абсолютных узловых координатах и их применение для моделирования динамики шины // Тр. XII Всеросс. съезда по пробл. теор. и прикл. мех. Уфа. 2019. Т.1. С.493-495.
- 59.Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука. 1988. 712с.

- 60.Рокар И. Неустойчивость в механике. Автомобили. Самолеты. Висячие мосты. – М.: Изд-во иностранной литературы. 1959. 288 с.
- 61.Саркисов П.И., Попов С.Д. Обзор моделей нестационарного качения колеса с упругой шиной по недеформируемому опорному основанию // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. №12. С.1–18.
- 62.Смирнов И.А. Математическое моделирование заноса автомобиля. – Диссертация к.ф.-м.н. М.: 2011. 169с.
- 63.Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. – М.: Мир. 1980. 512с.
- 64.Тарновский В.Н., Гудков В.А., Третьяков О.Б. Автомобильные шины: устройство, работа, эксплуатация, ремонт. – М.: Транспорт. 1990. 272с.
- 65.Томашевский С.Б., Михеев Г.В. Моделирование динамики автомобильных шин на основе метода конечных элементов // Тр. XII Всеросс. съезда по пробл. теор. и прикл. мех. Уфа. 2019. Т.1. С.504-506.
- 66.Томашевский С.Б., Михеев Г.В. Развитие методов компьютерного моделирования динамики механических систем с учетом упругости деталей // Тр. XII Всеросс. съезда по пробл. теор. и прикл. мех. Уфа. 2019. Т.1. С.501-503.
- 67.Фуфаев Н.А. К теории качения колеса с упругой деформируемой шиной // Изв. АН СССР. МТТ. 1981. №3. С.134-142.
- 68.Чудаков Е. А. Качение автомобильного колеса при наклонном расположении его средней плоскости // Доклады АН СССР. 1953. Т.90. №3. С.108-111.
- 69.Чудаков Е.А Качение автомобильного колеса. – М.: Изд-во АН СССР. 1948. 72 с.
- 70.Чудаков Е.А. Избранные труды. Т.1. Теория автомобиля. – М.: Изд-во АН СССР. 1961. 464 с.

71. Шешенин С.В. Трехмерное моделирование шины // Изв. РАН. МТТ. 2007. №3. С.13-21.
72. Шешенин С.В. Бахметьев С.Г. Модель эффективного слоя для резинокордного материала // Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. Математика. Механика. 2014. №5. С.41-45.
73. Эллис Д.Р. Управляемость автомобиля. – М.: Машиностроение. 1975. 216с.
74. Baecker M., Gallrein A., Haga H. A tire model for very large tire deformations and its application in very severe events // SAE International Journal of Materials and Manufacturing. 2010. V.3. №1. P.142-151.
75. Bakker E., Nyborg L., Pacejka H. Type modeling for use in vehicle dynamics studies // SAE Transactions. 1987. V.96. P.190-204.
76. Bakker E., Pacejka H.B., Lidner L. A new tyre model with applications in vehicle dynamics studies // SAE Transactions. 1989. V.98. P.101-113.
77. Becker G., Fromm H., Maruhn H. Schwingungen in Automobillenkungen (“shimmy”). – Bericht der Versuchsanstalt für Kraftfahrzeuge und des Festigkeitslaboratoriums der Technischen Hochschule zu Berlin. 1931.
78. Bergman W. Theoretical prediction of the effect of traction on cornering force // SAE Transactions. 1961. V.69. P.614-640.
79. Bernard J.E., Segel L., Wild R.E. Tire shear force generation during combined steering and braking manoeuvres // SAE Transactions. 1977. P.2953-2969.
80. Böhm F. Der Rollvorgang des Automobil-Rades // ZAMM. 1963. V.43. P.56-60.
81. Böhm F. Mechanik des Gurtelreifens // Ingenieur Archiv. 1966. V.35. P.82-101.
82. Böhm F. Grundlagen der Rolldynamik von Luftreifen // Fahrzeug Dynamik. – Springer. 1988. P.3-34.
83. Böhm F. Elastodynamik der Fahrzeugbewegung // Schwingungen in der Fahrzeugdynamik. – Springer. 1991. P.113-137.
84. Borgmann W. Theoretische und experimentelle Untersuchungen an Luftreifen bei Schraglauf. – Dissertation. Technische Hochschule Braunschweig. 1963.

85. Brouilhet G. The suspension of automobile steering mechanism: shimmy and tramp // Bull Soc. Ing. Civ. Fr. 1925. V.78. P.540-554.
86. Carter F.M. On the action of a locomotive driving wheel // Proc. Roy. Soc. London. Ser A. 1926. V.112. №760. P.151-157.
87. Coulomb C.A. Théorie des machines simples en ayant égard au frottement de leurs parties et à la roideur des cordages // Mém. Math. et Phys. l'Acad. Sci. 1785. V.10. P.161-342.
88. Dugoff H., Fancher P.S., Segel L. An analysis of tire traction properties and their influence on vehicle dynamics performance // SAE Transactions. 1970. P.1219-1243.
89. Dupuit M.J. Essai et expériences sur le tirage des voitures et sur le frottement de seconde espèce. – Paris: Ponts et Chaussées. 1837. 167p.
90. Fiala E. Seitenkräfte am rollenden Luftreifen // VDI Zeitschrift. 1954. V.96. P.973-979.
91. Flom D.G. Dynamic mechanical losses in rolling contacts // Rolling contact phenomena. – L.: Elsevier. 1962. P.97-112.
92. Frank F. Grundlagen zur Berechnung der Seitenführungskennlinien von Reifen // Kautchuk und Gummi. Kunststoffe. 1965. V.8. P.515-535.
93. Frank F. Theorie des Reifenschraglaufs. – Dissertation. Braunschweig. 1965.
94. Freudenstein G. Luftreifen bei Schräg- und Kurvenlauf: experimentelle und theoretische Untersuchungen an Lkw-Reifen. – VDI-Verlag. 1961. 152p.
95. Futoshi W., Yoshiaki T. Numerical Simulation of Tire Behavior on Soft Ground // Journal of System Design and Dynamics. 2011. V.5. №3. P.486-500.
96. Gipser M. FTire - the tire simulation model for all applications related to vehicle dynamics // Vehicle System Dynamics. 2007. V.45. P.139-151.
97. Gipser M., Hofer R., Lugner P. Dynamical tire forces response to road unevennesses // Vehicle System Dynamics. 1997. V.27. P.94-108.

98. Greenwood J.A., Minshall H., Tabor D. Hysteresis losses in rolling and sliding friction // Proc. R. Soc. Lond. Ser. A. 1961. V.259. P.480–507.
99. Greidanus J.H. Besturing en stabiliteit van het neuswiel-onderstel. – Amsterdam. NLL raport. V.1038. 1942.
100. Guo K.H. The effect of longitudinal force and vertical load distribution on tire slip properties // SAE Paper 945087. 1994.
101. Guo K.H., Liu Q. Modelling and simulation of non-steady state cornering properties and identification of structure parameters of tyres // Vehicle System Dynamics. 1997. V.27. P.80-93.
102. Hadekel R. The mechanical characteristics of pneumatic tyres // S&T Memo. British Ministry of Supply. 1952. V.10.
103. Hertz H. Über die Berührung fester elastische Körper // J. reine und angewandte Math. 1881. V.92. P.156-171.
104. Hertz H. Über die Berührung fester elastische Körper und über die Härte // Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbefleißes. Leipzig. Nov. 1882.
105. Kalker J.J. Three-dimensional elastic bodies in rolling contact. – Springer Netherlands. 1990. 314p.
106. Kim K.O., Tanner J.A., Noor A.K., Robinson M.P. Computational methods for frictionless contact with application to space shuttle orbiter nose-gear tires // NASA technical paper 3073. May 1991.
107. Mastinu G., Gaiazzi S., Montanaro F., Pirola D. A semi-analytical tyre model for steady-and transient-state simulations // Vehicle System Dynamics. 1997. V.27. P.2-21.
108. Morin A.J. Nouvelles expériences sur le frottement, faites à Metz en 1833 // Mém. l'Acad. Sci. 1835. V.4. P.641–783.

109. Noor A.K., Tanner J.A. Advances and trends in the development of computational models for tires // *Computers and Structures*. 1985. V.20. P.517-533.
110. Noor A.K., Kim K.O., Tanner J.A. Analysis of aircraft tires via semi-analytic finite elements // *Finite elements in analysis and design*. 1990. V.6. P.217-233.
111. Pacejka H.B. Study of the lateral behaviour of an automobile moving upon a flat level road. – Cornell Aeronautical Laboratory Report. 1958.
112. Pacejka H.B. The wheel shimmy phenomenon. – Dissertation. Delft University of Technology. 1966.
113. Pacejka H.B. Analysis of tire properties (Chapter 9) // *Mechanics of pneumatic tires*. – US Department of Transportation. 1981.
114. Pacejka H.B. Lateral dynamics of road vehicles. // *Vehicle System Dynamics*. 1987. V.16. P.75-120.
115. Pacejka H.B. Tyre and vehicle dynamics. – L.: Elsevier. 2005. 621p.
116. Pacejka H.B., Fancher P.S. Hybrid simulation of shear force development of a tire experiencing longitudinal and lateral slip // *Proc. of XIV FISITA Int. Auto. Tech. Congr. London*. 1972. V.7885.
117. Pacejka H.B., Sharp R.S. Shear force development by pneumatic tyres in steady state conditions: a review of modeling aspects // *Vehicle System Dynamics*. 1991. V.20. P.121-176.
118. Pacejka H.B., Bakker E. The magic formula tyre model // *Vehicle System Dynamics*. 1992. V.21. P.1-18.
119. Pascal J.P., Sauvage G. The available method to calculate wheel/rail forces in non Hertzian contact patches and rail damaging // *Vehicle System Dynamics*. 1993. V.22. P.263-275.

120. Piotrovski J. Contact loading of a high rail in curves. Physical simulations to investigate shelling // *Vehicle System Dynamics*. 1988. V.17. P.57-79.
121. Reynolds O. On rolling friction // *Philos. Trans. Roy. Soc. London*. 1876. V.166. P.155–174.
122. Rocard Y. *Dynamique générale des vibrations*. – Paris.: Masson. 1943.
123. Sakai H. Theoretical and experimental studies on the dynamic cornering properties of tyres // *Int. J. of Vehicle Design*. 1981. V.2. P.78-110.
124. Sakai H. Study on cornering properties of tire and vehicle // *Tire Science and Technology*. 1990. V.18. P.136-169.
125. Sharp R.S., El-Nashar M.A. A generally applicable digital computer based mathematical model for the generation of shear forces by pneumatic tyres // *Vehicle System Dynamics*. 1986. V.15. P.187-209.
126. Sharp R.S., Bettella M. On the construction of a general numerical tyre shear force model from limited data // *Proc. of the Inst. of Mech. Engin. Part D: J. of Automobile Engineering*. 2003. V. 217. №3. P.165-172.
127. Svendenius J. Tire models for use in braking applications. – Licentiate thesis: Dept. Automatic Control, Lund University, Sweden. 2003.
128. Tabor D. The mechanism of rolling friction // *Philos. Mag. Ser. 7*. 1952. V.43. P.1055-1059.
129. Tabor D. The mechanism of rolling friction: 2. The elastic range // *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*. 1955. V.229. P.198–220.
130. Wang Y.Q., Gnadler R., Schieschke R. Vertical load-deflection behaviour of a pneumatic tire subjected to slip and camber angles // *Vehicle System Dynamics*. 1996. V.25. P. 137-146.
131. Willumeit H.P. *Theoretische Untersuchungen an einem Modell des Luftreifens unter Seiten-und Umfangskraft*. – Dissertation. Technische Universität Berlin. 1969.

132. Winkler E. Die Lehre von der Elasticitaet und Festigkeit mit besonderer Rucksicht auf ihre Anwendung in der Technik: fur polytechnische Schulen, Bauakademien, Ingenieure, Maschinenbauer, Architecten, etc. – Prague: Dominicus. 1867. V.1. 388p.
133. Yamashita H., Matsutani Y., Sugiyama H. Longitudinal Tire Dynamics Model for Transient Braking Analysis: ANCF-LuGreTire Model // ASME Journal of Computational and Nonlinear Dynamics. 2015. V.10. №3. P.1-11.

## Публикации автора

134. Вильке В.Г., Гусак Г.В. Об одной модели армированной шины со стержневым протектором // ПММ. 2011. Т.75. №3. С.435-448. = A model of a reinforced tyre with a rod protector // Journal of Applied Math. and Mechanics. 2011. Vol.75. no.3. P.308-316. (WoS IF 0.517)
135. Гусак Г.В. Силы реакции при статическом нагружении колесной пары с развалом // Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. Математика. Механика. 2018. №4. С.40-47. = Reaction forces under static loading of a wheel pair with camber // Moscow University Mechanics Bulletin. Vol.73. P.84-90. (Scopus IF 0.3)
136. Гусак Г.В. Гистерезисные потери при нагрузке-разгрузке колеса со стержневым протектором // Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. Математика. Механика. 2020. №2. С.28-34. = Hysteresis losses during loading-unloading a wheel with a rod protector // Moscow University Mechanics Bulletin. Vol.75. P.25-31. (Scopus IF 0.7)
137. Гусак Г.В., Вильке В.Г. Об одной модели армированной шины со стержневым протектором // Тр. 55-й научной конф. МФТИ. Т.1. Аэрофизика и космические исследования. 2012. С.96-97.

138. Гусак Г.В., Вильке В.Г. Качение колеса со стержневым протектором по шероховатой плоскости // Тр. X Всеросс. научной конф. «Нелинейные колебания механических систем». Нижний Новгород, 2016. С.298-305.
139. Гусак Г.В. Силы реакции при статическом нагружении колесной пары с развалом // Тр. XII Всеросс. съезда по пробл. теор. и прикл. мех. Уфа, 2019. Т.1. С.458-460.
140. Гусак Г.В. О стержневой модели деформируемой периферии колеса // Тр. Всеросс. конф. молодых ученых-механиков YSM-2020. М.: Изд-во МГУ, 2020. С.59.
141. Гусак Г.В. Математическое моделирование контактного взаимодействия деформируемого колеса и дороги // IX Поляховские чтения: Материалы междунар. научной конф. по механике, 9-12 марта 2021 г., Санкт-Петербург, Россия. — СПб.: Изд-во ВВМ, 2021. С.89-90.