Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
Московский физико-технический институт (ГУ)
Южный Федеральный университет
Донской государственный технический университет
Государственный морской университет им. адм. Ф. Ф. Ушакова
МОО «Женщины в науке и образовании»
НОУ Учебный центр «Знание»

XXIV Международная конференция Математика. Экономика. Образование.

IX Международный симпозиум Ряды Фурье и их приложения.

Международная конференция по стохастическим методам

27 мая – 3 июня 2016 г.
Пансионат «Моряк» Новороссийского
морского пароходства

Материалы

http://conf-symp.sfedu.ru
E-mail: conf-symp@mail.ru

УДК 330.4+504+37 1Л4
XXIV Международная конференция «Математика. Экономика. Образование». IX Международный симпозиум «Ряды Фурье и их приложения». Международная конференция по стохастическим методам. Материалы. Изд-во Фонд науки и образования. Ростов н/Д, 2016. — 219 с.
ISBN 978-5-9908134-9-6

Рассматриваются фундаментальные проблемы современной математики и их приложения к экономике, экологии, естественным наукам. Исследуются аспекты современного образования, без которых невозможно решение этих проблем. Сборник представляет интерес для научных работников, преподавателей, аспирантов, студентов вузов.

Спонсор Международного симпозиума «Ряды Фурье и их приложения» —
Российский фонд фундаментальных исследований,
проект 16-01-06025 г_2_2016
Спонсор Международной конференции по стохастическим методам —
Российский фонд фундаментальных исследований,
проект 16-01-20190 г_2_2016

Международный симпозиум
Ряды Фурье и их приложения

С. М. Айзикович (Ростов-на-Дону), С. С. Волков (Нижний Новгород), Б. И. Митрин (Ростов-на-Дону)
saizikovich@gmail.com

РЕШЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА ПАРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ В ВИДЕ РЯДА ФУРЬЕ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЕ К РЕШЕНИЮ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД [1]

С использованием двусторонне асимптотического метода построено полуаналитическое решение парного интегрального уравнения, порождаемого плоскими и антиплоскими контактными задачами для неоднородных оснований, с правой частью в виде ряда Фурье. Эффективность метода проиллюстрирована на примере решения плоской контактной задачи об изгибе балки, лежащей на функционально-градиентной полосе. Предполагается, что полоса жестко сцеплена с однородной упругой полуплоскостью. Упругие свойства по толщине полосы изменяются по произвольному закону.

Ш. А. Балгимбаева, Т. И. Смирнов (Алматы)
sc_s@mail.ru; sholpan.balgyn@gmail.com

НЕЛИНЕЙНАЯ ВСПЛЕСК-АППРОКСИМАЦИЯ КЛАССОВ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ЗАДАННОЙ МАЖОРАНТОЙ СМЕШАННОГО МОДУЛЯ ГЛАДКОСТИ [1]

Пусть $L_p(\mathbb{T}^d)$ $(1 \le p < \infty)$ — пространство функций $f : \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}$, суммируемых в степени p, с нормой $\|f\|_p$; здесь $\mathbb{T}^d = (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^d$ — d–мерный тор. Пусть

$$\sigma_m(f, \Phi, L_p) = \inf_{\Lambda\subset\mathbb{N}, \sharp\Lambda=m, c_k\in\mathbb{R}} \{\|f - \sum_{k\in\Lambda} c_k\phi_k\|_p\} \quad (m \in \mathbb{N})$$

— наилучшее m–членное приближение функции $f \in L_p$ по системе $\Phi = \{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset L_p$;

Ω — заданный смешанный модуль гладкости порядка $l = (l_1, \ldots, l_d)$ специального вида $\Omega(t) = \omega\left(\prod_{j=1}^d t_j^{\gamma_j}\right)$, удовлетворяющий условиям Бари–Стечкина, где вектор $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d) \in \mathbb{R}^d_+$ такой, что

[1] Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (грант 15-19-10056).
[1] Работа выполнена при поддержке гранта 5130/ГФ4 МОиН РК.

$1 = \gamma_1 = \dots = \gamma_\nu < \gamma_j, j \in e_d \setminus e_\nu$, с некоторым фиксированным $\nu \in e_d$.

Определение. *Пусть $1 < p < \infty, 1 \le \theta \le \infty$. Тогда пространство Лизоркина–Трибеля $SF^{l,\Omega}_{p\,\theta}(\mathbb{T}^d)$ состоит из всех функций $f \in L_p$ с конечной нормой*

$$\|f \,|\, SF^{l,\Omega}_{p\,\theta}\| = \big\|\big\{\delta^\varepsilon_s(f)/\Omega(2^{-s})\big\} \,\big|\, L_p(\ell_\theta)\big\|,$$

где $\delta^\varepsilon_s(f) = \sum_{k\in\rho(s,\varepsilon)} \widehat{f}(x)e^{i(k,x)}$— двоичные пачки ряда Фурье функции $f \in L_1$; здесь $\rho(s,\varepsilon) := \varepsilon_1[2^{s_1}, 2^{s_1+1}-1) \times \dots \times \varepsilon_d[2^{s_d}, 2^{s_d+1}-1)$, $\varepsilon) \in \{-,+\}^d, s = (s_1, \dots, s_d) \in \mathbb{N}^d_0$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.
Пусть U^d — ортонормированная система типа кратных периодических всплесков, образованная сдвигами кратных ядер Дирихле (определение см. в [1]).

В докладе устанавливаются точные в смысле порядка оценки величины $\sigma_m(\mathrm{SF}^{l,\Omega}_{p\,\theta}, U^d, L_q)$, где $\mathrm{SF}^{l,\Omega}_{p\,\theta}$ — единичный шар пространства $SF^{l,\Omega}_{p\,\theta}$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Temlyakov V. N.* Greedy algorithms with regard to multivariate systems with special structure // Constr. approx. 2000. V. 16, № 3. P. 399–425.

Г. С. Бердников (Саратов)
evrointelligent@gmail.com

КЛАССИФИКАЦИЯ МАСШТАБИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ НА ГРУППАХ ВИЛЕНКИНА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ПОРОЖДАЮЩИХ ГРАФОВ [1]

Пусть $(G_n, \dot{+})$ – локально компактная группа Виленкина, элементами которой являются бесконечные в обе стороны последовательности

$$x = (\dots, 0_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \dots),\ x_j = \overline{0, p-1},$$

где p – любое простое число. Операция сложения $\dot{+}$ определяется как покоординатное сложение по модулю p, т.е. $x\dot{+}y = (x_j\dot{+}y_j)(x_j + y_j \bmod p)$. Пусть

$$G_n = \{x \in G:\ x = (\dots, 0_{n-1}, x_n, X_{n+1}, \dots)\}, n \in \mathbb{Z}$$

основная цепочка подгрупп, $G_n^\perp$ – совокупность аннуляторов.

На группах Виленкина возможно построить ортогональный кратномасштабный анализ. Задача построения кратномасштабного анализа сводится к нахождению масштабирующей функции φ, которая удовлетворяет

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 13-01-00102-а).

равенству $\hat{\varphi}(\chi) = m_0(\chi)\hat{\varphi}(\chi\mathcal{A}^{-1})$, где $\mathcal{A}$ - оператор растяжения, а функция $m_0(\chi)$ называется маской. В работе [1] рассмотрены ступенчатые функции с компактным носителем и найден алгоритм, позволяющий строить такие масштабирующие функции на локальных полях положительной характеристики по особым образом построенному графу. Аддитивная группа таких полей при $s = 1$ является группой Виленкина. Таким образом найдено достаточное условие масштабирующей функции на группах Виленкина, при условии, что такая функция является финитной и ступенчатой. Также было определено, что некоторые графы с контурами порождают масштабирующую функцию, преобразование Фурье которой имеет некомпактный носитель.

Алгоритм построения функции по графу описан в работе [2].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Berdnikov G., Kruss Iu., Lukomskii S. On orthogonal systems of shifts of scaling function on local fields of positive characteristic.* — http://arxiv.org/abs/1503.08600

2. *Lukomskii, S. F., Berdnikov, G. S.* N-Valid trees in wavelet theory on Vilenkin groups, International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing, vol. 13, 2015.

С. А. Бондарев, В. Г. Кротов (Минск)
krotov@bsu.by

ТОНКИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССОВ СОБОЛЕВА M^p_α ПРИ $p > 0$

Пусть (X, d, μ) — метрическое пространство с борелевской мерой μ и метрикой d со свойством удвоения: для некоторых $a, \gamma > 0$

$$\mu(B(x,R)) \le a(R/r)^\gamma \mu(B(x,r)), \quad x \in X,\ 0 < r \le R.$$

Для функции $f \in L^p(X)$ обозначим через $D_\alpha[f]$ класс всех неотрицательных μ-измеримых функций g, для каждой из которых существует такое множество $E \subset X$, $\mu(E) = 0$, что

$$|f(x) - f(y)| \le d^\alpha(x,y)[g(x) + g(y)], \quad x, y \in X \setminus E.$$

Введем шкалу классов Хайлаша–Соболева $M^p_\alpha(X)$, $0 < p < \infty$, $\alpha > 0$,

$$M^p_\alpha(X) = \{f \in L^p(X) : D_\alpha[f] \cap L^p(X) \ne \varnothing\}.$$

Для шара $B \subset X$ и $p > 0$ обозначим $I^{(p)}_B f$ наилучшее приближение функции f в $L^p(B)$ постоянными.

Теорема. *Пусть $\alpha > 0$, $0 < p < \gamma/\alpha$ и $f \in W^p_\alpha(X)$. Пусть также задана внешняя мера ν, удовлетворяющая условию*

$$\nu(B) \le \mu(B) \left(\frac{\varphi(r_B)}{r_B^\alpha} \right)^p, \quad \sum_{i=0}^{\infty} \varphi(2^{-i}) < \infty.$$

Тогда существует такое множество $E \subset X$, что $\nu(E) = 0$ и для любого $x \in X \setminus E$ существует предел $\lim\limits_{r \to +0} I^{(p)}_{B(x,r)} f = f^*(x)$ и

$$\lim_{r \to +0} \fint_{B(x,r)} |f - f^*(x)|^q \, d\mu = 0, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{\gamma}.$$

«Средние» $I^{(p)}_B f$ в теореме можно заменить на δ-медианы

$$m^\delta_f(B) = \inf\{a \in \mathbb{R} : \mu(\{x \in B : f(x) > a\}) < \delta\mu(B)\}, \quad 0 < \delta \le \frac{1}{2},$$

а при $p \ge \gamma(\gamma + p)^{-1}$ — на интегральные средние по шарам.

Н. С. Габбасов(Набережные Челны)
gabbasovnazim@rambler. ru

ОБ ОДНОМ ПРИМЕНЕНИИ ОБОБЩЕННОГО ОПЕРАТОРА ФУРЬЕ

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение в особом случае:

$$Ax \equiv t^m x(t) + \sum_{j=0}^{p} \int_{-1}^{1} K_j(t,s) x^{(j)}(s) ds = y(t) \quad (-1 \le t \le 1), \tag{1}$$

в котором $m \in N$, K_j $(j = \overline{0,p})$ и y – известные "гладкие" функции, а x — искомая функция.

Конечномерное приближение к решению $x^* = A^{-1}y$ образуем в виде

$$x_n \equiv x_n(t; \{c_j\}) \equiv \sum_{i=0}^{n+p-1} c_i t^i + \sum_{i=0}^{m-1} c_{i+n+p} \delta^{\{i\}}(t), \tag{2}$$

где δ и $\delta^{\{i\}}$ — соответственно дельта-функция Дирака и ее «тейлоровские» производные. Неизвестные параметры $\{c_j\}$ найдем, согласно нашему методу, из условий

$$\int_{-1}^{1} \rho(t)(DT\eta^A_n)(t) T_j(t) dt = 0 \quad (j = \overline{0, n-1}),$$

$$(T\eta_n^A)^{(j)}(-1) = 0 \quad (j = \overline{0, p-1}),\ (\eta_n^A)^{\{i\}}(0) = 0 \quad (i = \overline{0, m-1}), \qquad (3)$$

где $\eta_n^A(t) \equiv (Ax_n - y)(t)$ — невязка приближенного решения, $Dg \equiv g^{(p)} \in C$; $T : C\{m; 0\} \to C$ – «характеристический» оператор класса $C\{m; 0\}$ функций $f \in C$, имеющих в точке $t = 0$ тейлоровскую производную $f^{\{m\}}(0)$ порядка m, а $\{T_j\}$ — полная ортонормированная на $[-1, 1]$ по весу $\rho(t) \equiv (1-t^2)^{-1/2}$ система полиномов Чебышева первого рода. Несложно показать, что система (2), (3) эквивалентна линейному уравнению $F_n A x_n = F_n y$, в котором F_n — обобщенный оператор Фурье по системе $\{T_j\}$.

При обосновании вычислительного алгоритма (1)–(3) существенно используются один вариант общей теории приближенных методов анализа и соответствующие аппроксимативные свойства оператора F_n.

З. Х. Галимова (Набережные Челны)
zulshik@mail.ru

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ОБОБЩЕННОГО ОПЕРАТОРА ФУРЬЕ

Исследуется интегральное уравнение третьего рода с неподвижными особенностями в ядре:

$$Ax \equiv t^m x(t) + \int_{-1}^{1} K(t,s)(1-s)^{-p} x(s) ds = y(t) \quad (-1 \le t \le 1), \qquad (1)$$

где $m \in N$, $p \in \mathbb{R}^+$; K и y — известные непрерывные функции, обладающие определенными свойствами «гладкости» точечного характера, а x — искомая функция.

Пусть $C\{m; 0\}$ — класс функций $f \in C$, имеющих в точке $t = 0$ тейлоровскую производную $f^{\{m\}}(0)$ порядка m. Аналогично определяется семейство $C\{p; 1\}$, используя целую часть $[p]$ числа p. Далее, пусть $T : C\{m; 0\} \to C$ и $S : C\{p; 1\} \to C$ — «характеристические» операторы классов $C\{m; 0\}$ и $C\{p; 1\}$ соответственно.

Приближенное решение уравнения (1) будем искать в виде

$$x_n \equiv (1-t)^p \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i + \sum_{i=0}^{\lambda} c_{i+n} (t-1)^i + \sum_{i=0}^{m-1} c_{i+\lambda+n+1} t^{-i-1}, \qquad (2)$$

где $\lambda = \lambda(p) \equiv [p] - (1 + sign([p] - p))$. Неизвестные коэффициенты $\{c_j\}$ определим из условий

$$\rho_n^{\{i\}}(0) = 0,\ (T\rho_n)^{\{j\}}(1) = 0,\ \int_{-1}^{1} \eta(t)(ST\rho_n)(t) T_k(t) dt = 0, \qquad (3)$$

$$(i=\overline{0,m-1},\ j=\overline{0,\lambda},\ k=\overline{0,n-1}),$$

в которых $\rho_n(t) \equiv \rho_n^A(t) \equiv (Ax_n - y)(t)$ — невязка приближенного решения, а $\{T_k\}$ — полная ортонормированная на $[-1,1]$ система полиномов Чебышева первого рода по весу $\eta(t) \equiv (1-t^2)^{-1/2}$. Можно показать, что система (2), (3) равносильна уравнению $\Phi_n A x_n = \Phi_n y$, где Φ_n — обобщенный оператор Фурье по системе $\{T_k\}$.

При обосновании вычислительной схемы (1)–(3) существенно применяются один вариант общей теории приближенных методов, некоторые результаты теории приближения функций и аппроксимативные свойства оператора Φ_n.

Л. Гоголадзе и В. Цагарейшвили (Тбилиси, Грузия)
lgogoladze@hotmail.com, cagare@ymail.com

СХОДИМОСТЬ ОБЩИХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Известно что (см. [1]), для любой ненулевой функции из $\mathrm{Lip}\,1$ существует ОНС $(\varphi_n(x))$ такая, что ряд Фурье этой функций относительно системы $(\varphi_n(x))$ рассходится п. в. на $[0,1]$. Следовательно, если требуется сходимость ряда Фурье функции из $\mathrm{Lip}\,1$, тогда функции системы $(\varphi_n(x))$ должны удовлетворять некоторым условиям.

Пусть ОНС $(\varphi_n(x))$ и $\widehat{\varphi}_n(x) = \int_0^1 f(x)\varphi_n(x)dx$, $n=1,2,\ldots$, коэффициенты Фурье функций $f(x) \in L(0,1)$. Положим $D_n(a) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\left|\int_0^{\frac{i}{n}} P_n(a,x)\,dx\right|$, где $P_n(a,x) = \sum_{k=1}^{n} a_k\delta_k\varphi_k(x)$ и (a_k) и (δ_k) последовательности чисел. Далее $L_n(x) = \int_0^1 \left|\sum_{k=1}^{n}\varphi_k(x)\varphi_k(t)\right| dt$ - функции Лебега.

Теорема 1. *Пусть $(\varphi_n(x))$ ОНС на $[0,1]$ и неубывающая последовательность чисел (δ_n) удовлетворяет условиям:* a) $\lim_{n\to\infty}\delta_n = +\infty$, $L_n(x) = O(\delta_n)$. b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^1 \varphi_n(x)\,dx\right)^2 \delta_n < +\infty$. c) $\frac{\delta_n}{(\log n)^2} < 1$.

Если для любой последовательности чисел $(a_n) \in \ell_2$ соблюдается условие $D_n(a) = O(1)\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\delta_k\Big)^{\frac{1}{2}}$, тогда для каждой функции $f(x) \in$ $\mathrm{Lip}\,1$ справедливо $\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{\varphi}_n^2(f)\delta_n < +\infty$.

Замечание. Из утверждения теоремы 1 и из известного результата (см. [2], с. 180) следует что в условиях теоремы 1 ряд Фурье любой функции из $\mathrm{Lip}\,1$ сходится п.в. на $[0,1]$.

Теорема 2. *Пусть $(\varphi_n(x))$ ОНС на $[0,1]$ и $\delta_n \uparrow +\infty$. Если для некоторой последовательности $(b_n) \in \ell_2$ выполняется условие $\varlimsup_{n\to\infty}\frac{S_n(b)}{A_n} = +\infty$, где $A_n = \Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\delta_k\Big)^{\frac{1}{2}}$, тогда существует функция $f_0(x) \in$*

Lip 1 *такая, что* $\sum_{n=1}^{\infty} \widehat{\varphi}_n^2(f_0)\delta_n = +\infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Banach S. // Sur la divergence des series orthogonales, Studia Math. 1940, V. 9. C. 139–155.

2. Качмаж С., Штейнгауз Г. Теория ортогональных рядов. М. Госиздат физ-мат. лит., 1958.

Б. И. Голубов (Москва)
golubov@mail.mipt.ru

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ИЗ ДВОИЧНОГО АНАЛИЗА

В 1923 г. Дж. Л. Уолш построил ортонормированную систему функций, получившую название системы Уолша. Функции этой системы являются ступенчатыми на отрезке $[0;1]$ и каждая из них принимает всего два значения, а именно 1 и -1 на промежутках, концы которых являются двоично-рациональными числами. В 1950 г. Дж. Файн определил преобразование Уолша функций, интегрируемых по Лебегу на полуоси $[0;+\infty]$. Ряды Фурье-Уолша и преобразование Уолша нашли широкое применение в различных областях математики, физики и других наук. В настоящее время теория рядов Фурье-Уолша и преобразования Уолша, составляющие так называемый двоичный гармонический анализ, получили большое развитие (см. [1], [2] и [3]). С конца 60-х годов прошлого века начал развиваться так называемый двоичный анализ. Подобно тому, как основу математическо-го анализа составляют дифференцирование и интегрирование, основу двоичного анализа составляет двоичное дифференцирование и интегрирование. Определение точечной двоичной производной впервые появилось в 1967 г. в работе Дж. Е. Гиббса [4]. С тех пор оно обобщалось и изменялось в различных направлениях. Библиография по теории и приложениям двоичных производных и связанных с ними двоичных интегралов в настоящее время содержит более 200 наименований, в том числе две монографии [5], [6]. Итоги развития двоичного анализа подведены в двух недавно вышедших монографиях [7], [8]. Во второй из них сформулированы некоторые нерешенные задачи.

В докладе будут сформулированы некоторые из этих задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. М., Наука, 1987. 344 с.

2. *Golubov B., Efimov A. and Skvortsov V.* Walsh series and transforms. Theory and applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1991. 368 p.

3. *Schipp F., Wade W.R. and Simon P.* Walsh series. An Introduction to dyadic harmonic analysis. Akademiai Kiado, Budapest, 1990. 560 p.

4. *Gibbs G. E.* Walsh spectrometry, a form of spectral analysis well suited to binary digital computation // Teddington: National Phys. Lab., 1967. 24 p.

5. *Wagner J. H.* Ein differential und integralkalkl in der Walsh-Fourier analysis mit anwendungen // Westdeutscher Verlag, Kln-Opladen, 1974.

6. *Голубов Б. И.* Элементы двоичного анализа. Издание второе // URSS, 2007. 203 с.

7. *Stankovic R. S., Butzer P. L., Schipp F., Wade W. R., Su W., Endow Y., Fridli S., Golubov B. I., Pichler F.* Dyadic Walsh analysis from 1924 onwards Walsh-Gibbs-Butzer dyadic differentiation in science. Vol. 1. Foundations // Paris, Atlantis Press /Springer, 2015. 455 p.

8. *Stankovic R. S., Butzer P. L., Schipp F., Wade W. R., Su W., Endow Y., Fridli S., Golubov B. I., Pichler F.* Dyadic Walsh analysis from 1924 onwards Walsh-Gibbs-Butzer dyadic differentiation in science. Vol. 2. Extensions and generalizations // Paris, Atlantis Press / Springer, 2015. 360 p.

Д. В. Горбачев, В. И. Иванов (Тула),
С. Ю. Тихонов (Барселона)
dvg4mail@gmail.com, ivaleryi@mail.ru, stikhonov@crm.cat

ТОЧНОЕ НЕРАВЕНСТВО ДЖЕКСОНА В L_p С ВЕСОМ ДАНКЛЯ [1]

Пусть $v_k(x) = \prod\limits_{a\in R_+} |(a,x)|^{2k(a)}$ — вес Данкля в $\mathbb{R}^d$, определяемый положительной подсистемой системы корней $R \subset \mathbb{R}^d$ и функцией кратности $k\colon R \to \mathbb{R}_+$, инвариантной относительно группы отражений, порожденной R, $d\mu_k(x) = v_k(x)\,dx$, $1 \le p < \infty$, L_p — банахово пространство комлекснозначных функций с конечной нормой $\|f\|_p = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^d} |f|^p\,d\mu_k\right)^{1/p}$, $\mathcal{F}_k(f)$ — преобразование Данкля, $\lambda \ge -\frac{1}{2}$, $j_\lambda(t)$ — нормированная функция Бесселя, t_λ — ее наименьший положительный нуль, $\lambda_k = \frac{d}{2} - 1 + \sum\limits_{a\in R_+} k(a)$.

Гармонический анализ Данкля изложен в [1]. При $k \equiv 0$ преобразование Данкля совпадает с преобразованием Фурье.

Пусть $E_\sigma(f)_p$ — величина наилучшего приближения функции $f \in L_p$ целыми функциями экспоненциального сферического типа не выше $\sigma > 0$,

$$\omega(\delta, f)_p = \sup\Big\{\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^d} T^t|f(\cdot) - f(x)|^p(x)\,d\mu(x)\Big)^{1/p}\colon\ 0 < t \le \delta\Big\}$$

— ее модуль непрерывности, определяемый с помощью положительного оператора обобщенного сдвига $T^t\colon L_p \to L_p$, $\|T^t\|_{p\to p} = 1$, для которого

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 16-01-00308, № 16-01-00350), Минобрнауки России (госздания № 5414ГЗ, 1.1333.2014К), MTM 2014-59174 P, 2014 SGR 289.

$\mathcal{F}_k(T^t f)(y) = j_{\lambda_k}(t|y|)\mathcal{F}_k(f)(y)$ на функциях из пространства Шварца. При $k \equiv 0$ имеем оператор среднего значения по сфере.

Теорема. *Если $\sigma > 0$, $1 \le p \le 2$, p' — сопряженный показатель, то для любой $f \in L_p$ справедливы точные неравенства Джексона*

$$E_{2\sigma}(f)_p \le \frac{1}{2^{1/p'}}\omega\Big(\frac{2t_{\lambda_k}}{\sigma}, f\Big)_p \,(1 \le p < 2),\;\; E_\sigma(f)_2 \le \frac{1}{\sqrt{2}}\omega\Big(\frac{2t_{\lambda_k}}{\sigma}, f\Big)_2.$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Rösler M.* Dunkl operators: Theory and applications // Lecture Notes in Math. 2002. V. 1817. P. 93–135.

М. Г. Григорян (Ереван, Армения)
gmarting@ysu.am

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ [1]

Верны следующие теоремы

Теорема 1. *Существует функция $f_0(x) \in L^1[0,1]$ с $c_k(f_0) \searrow 0$, $c_k(f_0) > 0$, ряд Фурье-Уолша которой является унивесальным относительно знаков и подрядов для класса $L^0[0,1]$ ($L^0[0,1]$ — класс почти везде конечных измеримых функций, $c_k(f_0)$ — коэффициенты Фурье функции $f_0(x)$ по системе Уолша.*

Теорема 2. *Существует функция $g(x) \in L^1[0,1]$ с $c_k(g) \searrow 0$, $c_k(g) > 0$, которая является унивесальной в $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$ относительно (знаков) коэффициентов по системе Уолша, т. е. для каждой функции $f(x) \in L^p[0,1]$ можно найти числа $\delta_k = \pm 1$,*

такие, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \delta_k a_k W_k(x)$ сходится к $f(x)$ в метрике $L^p[0,1]$.(см. M.G. Grigoryan, A. A. Sargsyan, Universal function for classes $L^p[0,1]$, $p \in (0,1)$,Journal of Functional Analysis, 270, (2016), 3111-3133.).

Теорема 3. *Существует функция $f_0(x) \in L^1[0,1]$ с $c_k(\,f_0) \searrow 0$, $c_k(\,f_0) > 0$, такая, что для функции $f(x)$ и для любого числа $0 < \epsilon < 1$ можно найти функцию $g \in L^\infty[0,1)$,с $|\{x; g \ne f_0(x)\}| < \epsilon$, так что $|c_k(g)| = c_k(f_0), \forall n \in spec(g)$ и ее ряд Фурье по системе Уолша сходится равномерно на [0,1].*

Замечание. Эти теоремы верны и для системы Виленкина.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта ном. SCS _13-1A313.

А. Ж. Жубанышева, А. А. Ырзамбердиева (Астана)
axaulezh@mail.ru, asem_505@mail.ru

ЗАДАЧА ЧИСЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ФУНКЦИЙ ИЗ ОБОБЩЕННЫХ КЛАССОВ СОБОЛЕВА В КОНТЕКСТЕ КОМПЬЮТЕРНОГО (ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО) ПОПЕРЕЧНИКА (К(В)П)

В рамках К(В)П решена задача восстановления производных $f^{(\alpha_1,...,\alpha_s)}$ функций из обобщенных классов Соболева $W_2^{\left(\delta \ln \frac{2}{\delta}\right)^r}(0,1)^s$ по информации, полученной от тригонометрических коэффициентов Фурье (постановку задачи К(В)П, используемые здесь определения и обозначения см. в [1], определение $W_2^{\left(\delta \ln \frac{2}{\delta}\right)^r}(0,1)^s$- в [2]). Справедлива

Теорема. *Пусть даны целое положительное число* s *и неотрицательные числа* $r, \alpha_1, ..., \alpha_s$ *такие, что* $r > (\alpha_1 + ... + \alpha_s) \cdot \frac{e}{e-2}$. *Тогда*

К(В)П-1: $\delta_N(0)_{L^2(0,1)^s} \equiv$

$$\equiv \inf_{m^{(1)},...,m^{(N)} \in Z^s; \varphi_N} \sup_{f \in W_2^{\left(\delta \ln \frac{2}{\delta}\right)^r}(0,1)^s} \Delta \asymp N^{-\frac{r}{s} + \frac{\alpha_1 + ... + \alpha_s}{s}} \ln^r N,$$

где $\Delta = \left\| f^{(\alpha_1,...,\alpha_s)}(.) - \varphi_N(\hat{f}\left(m^{(1)}\right), ..., \hat{f}\left(m^{(N)}\right); \cdot) \right\|_{L^2(0,1)^s}$.

К(В)П-2: *Для производной* $S_N^{(\alpha_1,...,\alpha_s)}(f;x)$ *частичной суммы по кубам ряда Фурье функции* f *величина* $\tilde{\varepsilon}_N = N^{-\frac{r}{s} - \frac{1}{2}} \ln^r N$ *является предельной погрешностью.*

К(В)П-3: *Всякий вычислительный агрегат*

$$\varphi_N\left(\hat{f}\left(m^{(1)}\right), ..., \hat{f}\left(m^{(N)}\right); \ x\right),$$

построенный по тригонометрическим коэффициентам Фурье с произвольным спектром из N *гармоник, не может иметь предельную погрешность большую (по порядку) предельной погрешности* $S_N^{(\alpha_1,...,\alpha_s)}(f;x)$.

При $\alpha_1 = \ldots = \alpha_s = 0$ *и для класса* $W_2^r(0,1)^s$ *это теорема доказана в [3].*

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Жубанышева А. Ж., Темиргалиев Н.* // ЖВМ и МФ, 2015, том 55, № 9, С. 1474–1485.

2. *Темиргалиев Н., Кудайбергенов С. С., Шоманова А. А.* // Изв. РАН. Сер. матем., 73:2 (2009), 183–224.

3. *Темиргалиев Н., Шерниязов К. Е., Берикханова М. Е.*// Математика и информатика, 2, К 75-летию со дня рождения Анатолия Алексеевича Карацубы, Совр. пробл. матем., 17, МИАН, М., 2013, 179–207

С. В. Зотиков (Симферополь)
sergey.zotikov@yandex.ru

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И ИНТЕГРАЛОВ ФУРЬЕ-РАДЕМАХЕРА ФУНКЦИЙ, ИНТЕГРИРУЕМЫХ В КВАДРАТЕ

В докладе рассматривается класс ортонормированных систем функций (о. н. с.) типа Радемахера, содержащий в себе классическую систему Радемахера.

Каждая система этого класса определяется заданной последовательностью натуральных чисел. На основе конструкции скрещенного произведения двух о.н.с. определяются континуальные аналоги систем типа Радемахера и вводятся понятия преобразований и интегралов Фурье-Радемахера функций, интегрируемых в квадрате на правой числовой полуоси. Затем, используя континуальный аналог теоремы Меньшова-Радемахера, устанавливаются условия сходимости почти всюду интеграла, определяющего преобразование Фурье-Радемахера данной функции.

Далее изучаются некоторые свойства интегралов Фурье-Радемахера функций из рассматриваемого пространства. В случае, когда система типа Радемахера определяется ограниченной числовой последовательностью, доказывается континуальный аналог известного утверждения о том, что всякая система типа Радемахера является системой сходимости. В случае, когда система типа Радемахера определяется неограниченной числовой последовательностью, найдены достаточные условия того, чтобы интеграл Фурье-Радемахера данной функции сходился почти всюду.

В заключение определяются интегралы Радемахера функций из рассматриваемого пространства и формулируются условия их сходимости почти всюду. Особо рассматривается ситуация, когда вторая компонента скрещенного произведения, определяющего континуальный аналог системы типа Радемахера, является полной о. н.ċ.

Г. Г. Казарян (Ереван, Армения)
gayane.ghazaryan77@gmail.com

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ФУРЬЕ-УОЛША

В настоящей работе мы изучим некоторые вопросы о поведении коэффициентов Фурье по системе Уолша после исправления функции.

Сначала приведем определение системы Уолша-Пэли $\Phi = \{\varphi_k\}$ (см. [1], [2]):

$$\varphi_0(x) = 1,\ \varphi_n(x) = \prod_{s=1}^{k} r_{m_s}(x),\ n = \sum_{s=1}^{k} 2^{m_s},$$

$$r_0(x+1) = r_0(x),\ r_k(x) = r_0(2^k x),\quad k = 1, 2, \dots .$$

где $\{r_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ - система Радемахера.

Верна следующая

Теорема 1. *Для любого* $0 < \epsilon < 1$ *существует измеримое множество* $E \subset [0,1]$ *с мерой* $|E| > 1-\varepsilon$ *такое, что для каждой функции* $f \in L^1[0,1)$ *можно найти функцию* $\tilde{f} \in L^1[0,1)$*, совпадающую с* f *на* E*, такое, что ее ряд Фурье-Уолша сходится к ней по* $L^1[0,1)$*-норме и все ненулевые члены в последовательности коэффициентов Фурье* $c_k\left(\tilde{f}\right) = \int\limits_0^1 \tilde{f}(x)\varphi_k(x)\,dx$ *вновь полученной функции* $\tilde{f}$ *по системе Уолша по модулю расположены в убывающем порядке и* $\left\{c_k\left(\tilde{f}\right)\right\}_{k=1}^{\infty} \in l_p$*,* $\forall p > 2$.

Отметим, что эта теорема является усилением одного результата работы [3] М. Г. Григоряана (см. также [4]). Ряд работ [3]-[7] был посвяшен теоремам исправления, в которых модули ненулевых коэффициентов Фурье вновь полученной функции (по системам Хаара, Уолша, Фабера-Шаудера) корректированной функции монотонно убывали.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Голубов Б. И., Ефимов А. Ф., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. М.: Наука, 1987.

2. *Paley R. E. A. C.* A remarkable set of orthogonal functions // Proc. London Math. Soc., 1932, 34, 241–279.

3. *Григорян М. Г.* Модификации функций, коэффициенты Фурье и нелинейная аппр. // Мат. сб. 2012, N 3, стр. 49–78.

4. *Grigorian M. G.* On the convergence of Fourier series in the metric of L^1 // Analysis Math., 1991, 17, 211–237.

5. *Григорян М. Г., Навасардян К. А.* О поведении коэффициентов Фурье-Уолша // Изв. НАН Армении, 2016, 42:5, 3–20.

6. *Grigorian M. G., Sargsyan A. A.* On the coefficients of expansion of elements from $C[0,1]$ space by the Faber–Schauder system // Jornal of Function Spaces and Applications, 2011, 2, 34–42.

7. *Григорян М. Г., Кротов В. Г.* Теорема исправления Лузина и коэффициенты разложений Фурье по системе Фабера-Шаудера // Математические заметки, 2013, т. 93, № 2, стр. 172–178.

Ю. С. Крусс (Саратов)

KrussUS@gmail.com

N-ВАЛИДНЫЕ ДЕРЕВЬЯ В ТЕОРИИ ВСПЛЕСКОВ НА ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЯХ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ [1]

Локальное поле $F^{(s)}$ положительной характеристики p изоморфно пространству бесконечных в обе стороны последовательностей $(\ldots, \mathbf{0}_{i-1}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}, \ldots)$, $\mathbf{x}_j \in GF(p^s)$, где $GF(p^s)$ конечное поле [1].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00152).

При $s=1$: $F^{(1)+}$ (- аддитивная группа поля $F^{(1)}$) есть группа Виленкина с постоянной образующей последовательностью $p_n = p$. А при $s>1$ аддитивная группа $F^{(s)+}$ изоморфна произведению групп Виленкина [1].

Для групп Виленкина известен алгоритм построения всплесковых базисов [2], использующий понятие N-валидного дерева. Данный алгоритм был обобщен на локальные поля положительной характеристики.

В ходе алгоритма строятся функции

$$\psi_{\mathbf{l}}(x) = \sum_{h\in H_0^{(N+1)}} \beta_h^{\mathbf{l}} \phi(\mathcal{A}x\dot{-}h),$$

где $\beta_h^{\mathbf{l}}$ - комплексные числа, $\mathbf{l} = (l^{(0)}, l^{(1)}, \ldots, l^{(s-1)})$, $l^{(i)} = \overline{0, p-1}$, ϕ – масштабирующая функция, $\mathcal{A}$ - оператор растяжения, H_0 - множество сдвигов.

Обозначим через $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ ($V_j \subset V_{j+1}$) – кратномасштабный анализ в $L_2(F^{(s)})$, порожденный масштабирующей функцией ϕ, а через W_0 ортогональное дополнение V_0 в V_1.

Теорема 1. *Функции $\psi_{\mathbf{l}}(x\dot{-}h)$, где $h \in H_0$ образуют ортонормированный базис в W_0.*

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Lukomskii S., Vodolazov A.* Non-Haar MRA on local fields of positive characteristic // J. Math. Anal. Appl. 2016. Vol. 433, iss. 2, pp. 1415–1440.

2. *Lukomskii S., Berdnikov G.* N-Valid trees in wavelet theory on Vilenkin groups // Int. J. Wavelets Multiresolut Inf. Process. 2015. Vol. 13, iss.5, 1550037.

3. *Berdnikov G., Kruss Iu., Lukomskii S.* On orthogonal systems of shifts of scaling function on local fields of positive characteristic. – arxiv.org/abs/1503.08600.

Р. А. Ласурия (Сухум, Абхазия)

rlasuria67@yandex.ru

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ В ОБОБЩЕННОМ ГЕЛЬДЕРОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть $\omega^*(t)$ — некоторая неубывающая и положительная при $t>0$ функция. Обозначим через $H_{\omega^*,1} = H_{\omega^*,1}(0,2\pi)$ пространство суммируемых 2π-периодических функций, удовлетворяющих условию

$$\|f(\cdot+x) - f(\cdot+y)\|_1 \le K\omega^*(|x-y|),\ \forall x,y\in\mathbb{R},\ K=K(f),$$

с нормой

$$\|f\|_{\omega^*,1} := \|f\|_1 + \sup_{\substack{-\infty<x,y<\infty \\ x\neq y}} \Delta^{\omega^*,1} f(x,y), \|f\|_1 := \int_0^{2\pi} |f(x)|\,dx.$$

$$\Delta^{\omega^*,1} f(x,y) := \frac{\|f(\cdot + x) - f(\cdot + y)\|_1}{\omega^*(|x-y|)},\ \Delta^{\circ,1} f(x,y) := 0.$$

Пусть далее

$$U_n(f;x;\Lambda) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^{(n)} S_k(f;x), \Delta\lambda_k^{(n)} := \lambda_k^{(n)} - \lambda_{k+1}^{(n)},$$

$S_n(f;x)$ — суммы Фурье порядка n.

Теорема 1. *Пусть* $\Lambda = \left\|\lambda_k^{(n)}\right\|$, $k = 0, ...n-1$*;* $n = 1, 2, ...$ *— бесконечная треугольная матрица чисел элементы которой удовлетворяют условиям*

$$\lambda_k^{(n)} \geq 0,\ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^{(n)} = 1,\ n = 0, 1, ...$$

Тогда, если $0 \leq \beta < \eta \leq 1$*, то* $\forall f \in H_{\omega,1} \subset H_{\omega^*,1}$ *и для каждого* $n = 0, 1, ...$ *справедливо соотношение*

$$\|U_n(f;\Lambda) - f\|_{\omega^*,1} = O(1) \sup_{\substack{-\infty < x,y < \infty \\ x \neq y}} \frac{(\omega(|x-y|))^{\frac{\beta}{\eta}}}{\omega^*(|x-y|)} \times$$

$$\times \left\{ (\omega(1/n\ +1))^{1-\frac{\beta}{\eta}} + \sum_{r=0}^{n} \left|\Delta\lambda_r^{(n)}\right| \sum_{k=0}^{n} (\omega(1/k\ +1))^{1-\frac{\beta}{\eta}} \right\}.$$

Некоторые частные случаи этого результата содержатся в работе [1].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Ласурия Р.А.* Приближение функций в обобщенной гёльдеровой метрике. — С.: Изд-во АГУ. 62 с.

Д. С. Лукомский (Саратов), П. А. Терехин (Саратов)
lukomskiids@info.sgu.ru, terekhinpa@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМЫ ХААРА К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ [1]

В работе [1] и других были рассмотрены методы численного решения дифференциальных уравнений с использования системы Хаара. При этом искомая функция представлялась приближенно в виде частной суммы ряда Фурье по системе Хаара. Так как в уравнении присутствуют производные неизвестной функции, то приходилось вводить оператор дифференцирования ступенчатой функции, что сразу делает проблематичной оценку

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00152).

погрешности рассматриваемого метода. В работе [2] была рассмотрена задача Коши для линейного уравнения второго порядка и многочленом Хаара заменялась не сама искомая функция, а ее вторая производная и был указан алгоритм получения решения. Оценки погрешности этого метода были приведены без доказательств в работе [3].

В данном докладе будут приведены оценки погрешности для приближенного решения задачи Коши для линейного уравнения первого порядка с использованием функций Хаара. По результатам исследования написана программа, реализующая численный эксперимент. Результаты работы программы показывают эффективность предложенного алгоритма в сравнении с методом Рунге-Кутта.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *M. Razzaghi, Y. Ordokhani* An application of rationalized Haar functions for variational problems // Applied Mathematics and Computation, 2001. V. 122. № 3. C. 353–364.

2. *Лукомский Д. С.* Применение системы Хаара для решения задачи Коши // Математика. Механика, Саратов, Изд-во Сарат. ун-та, 2012. Т. 14. С. 47–50.

3. *Лукомский Д. С., Терехин П. А.* Об оценке погрешности решения задачи Коши с помощью систем сжатий и сдвигов // Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского, 2015. Т. 51. С. 295–297.

С. Ф. Лукомский (Саратов)
LukomskiiSF@info.sgu.ru

ПОСТРОЕНИЕ ВСПЛЕСКОВЫХ БАЗИСОВ НА ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЯХ [1]

Пусть $K = F^{(2)}$-локальное поле характеристики $p \geq 2$, $g_n = (.., 0, (1,0)_n, 0, ..)$-базисная последовательность, $\mathbf{r}_n$-функции Радемахера, $\mathcal{A}$-оператор растяжения, $H_0^{(2)} = \{\mathbf{a}_{-1}g_{-1}\dot{+}\mathbf{a}_{-2}g_{-2} : \mathbf{a}_j \in GF(p^2)\}$. Пусть $T(V)$-дерево с множеством вершин $V = GF(p^2)$ с корнем в нуле ориентированное от корня. По каждой вершине $\overline{\alpha}_{-1} = (\alpha_{-1}^{(0)}, \alpha_{-1}^{(1)})$ строим путь $(0,0) \to \bar{\alpha}_l \neq \mathbf{0} \to \bar{\alpha}_{l-1} \to \cdots \to \bar{\alpha}_0 \to \bar{\alpha}_{-1} = (\alpha_{-1}^{(0)}, \alpha_{-1}^{(1)})$. Для дуги $\mathbf{j} \to \mathbf{i}$ выбираем число $\lambda_{\mathbf{i},\mathbf{j}}$ так, чтобы $|\lambda_{\mathbf{i},\mathbf{j}}| = 1, \lambda_{0,0} = 1$, определяем маску $m_0(K_{-1}^{+}\mathbf{r}_{-1}^{\mathbf{i}}\mathbf{r}_0^{\mathbf{j}}) = \lambda_{\mathbf{i},\mathbf{j}}$ и вычисляем преобразование фурье $\hat{\varphi}(\chi) = \prod_k m_0(\mathcal{A}^{-k}\chi)$. Вычисляем коэффициенты

$$\beta_h = \beta_{\mathbf{a}_{-1},\mathbf{a}_{-2}} = \frac{1}{p^2} \sum_{\mathbf{i},\mathbf{j} \in GF(p^2)} \lambda_{\mathbf{i},\mathbf{j}} e^{\frac{2\pi i}{p}((\mathbf{j},\mathbf{a}_{-1})+(\mathbf{i},\mathbf{a}_{-2}))}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00152).

и определяем вейвлеты $\psi_{\mathbf{l}}$ равенством

$$\psi_{\mathbf{l}}(x)=\sum_{h\in H_0^{(2)}}\beta_h(\mathbf{r}_0^{\mathbf{l}},\mathcal{A}^{-1}h)\varphi(\mathcal{A}x\dot{-}h)\quad \mathbf{l}=(l^{(0)},l^{(1)})\in GF(p^2).$$

Теорема 1. *Функции*

$$\frac{1}{\sqrt{p}},\psi_{\mathbf{l}}(\mathcal{A}^{-1}x)\frac{1}{\sqrt{p}},\psi_{\mathbf{l}}(x\dot{-}\mathbf{a}_{-1}g_{-1}),\psi_{\mathbf{l}}(\mathcal{A}x\dot{-}\mathbf{a}_{-1}g_{-1}\dot{-}\mathbf{a}_{-2}g_{-2})p^{\frac{1}{2}},\dots,$$

$$\psi_{\mathbf{l}}(\mathcal{A}^{M-1}x\dot{-}\mathbf{a}_{-1}g_{-1}\dot{-}\dots\dot{-}\mathbf{a}_{-M}g_{-M})p^{\frac{M-1}{2}},\dots$$

образуют ортонормированную систему на подгруппе K_{-1}^{+}.
Пусть $\mathfrak{D}_M(K_{-1}^{+})$ множество ступенчатых функций, постоянных на смежных классах по подгруппе K_{-1}^{+} с носителем в K_M.
Теорема 2. *Ступенчатая функция* $f\in\mathfrak{D}_M(K_{-1}^{+})$ *есть линейная комбинация сжатий и сдвигов* $\psi_{\mathbf{l}}(\mathcal{A}^{k-1}x\dot{-}\mathbf{a}_{-1}g_{-1}\dot{-}\dots\dot{-}\mathbf{a}_{-k}g_{-k})$, *где* $\mathbf{l}\in GF(p^2)$, $\mathbf{a}_{-1},\dots,\mathbf{a}_{-k}\in GF(p^2); 0\le k\le M$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *S.F.Lukomskii, A.M.Vodolazov* Non-Haar MRA on local fields of positive characteristic J. Math. Anal. Appl. 2016, № 433, p. 1415–1440.

Р. Г. Меликбекян (Ереван, Армения)
melikbekyan@yahoo.com

СХОДИМОСТЬ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Пусть $\{W_k(x)\}_{k=0}^{\infty}-$система Уолша(см.[1]).
Положим

$$c_{k,c}(f)=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)W_k(x)W_k(y)dxdy,\ \text{где}\ f(x,y)\in L^1[0,1]^2,\ k,=0,1,\dots,$$

$$spec(f)=\{k,s\in\mathbb{N}\cup\{0\},c_{k,s}(f)\ \neq 0\}.$$

Доказывается следующая

Теорема 1.Пусть дана последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, $a_k\searrow 0$ с $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}\notin l_2$. Тогда для любых чисел $0<\epsilon<1, p\in[1,2)$ и для каждой функции $f(x,y)\in L^p(0,1)^2$ можно найти функцию $\tilde{f}(x,y)\in L^p(0,1)^2$, $mes\{f\neq\tilde{f}\}<\epsilon$, такую, что

$$|c_{k,s}(\tilde{f})|=a_ka_s,\ (k,s)\in spec(\tilde{f}).$$

и двойной ряд Фурье по системе Уолша функции $\tilde{f}(x,y)$ сходится по сферам.

Напомним, что идея об исправлении функции с целью улучшения ее свойств принадлежит Н. Лузину (см.[2]).

Далее в этом направлении получены ряд интересных результаов (см. [3]–[7]).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Голубов Б. И., Ефимов А.Ф., Скварцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша // М.: Наука, 1987.

2. *Лузин Н. Н.* К основной теореме интегрального исчисления // Мат. сб., 28:2 (1912), 266–294.

3. *Меньшов Д. Е.* О равномерной сходимости рядов Фурье // Мат. сб., 53:2 (1942), 67–96.

4. *Grigorian M. G.* On the convergence of Fourier series in the metric of L^1 // Analysis Math., 17(1991), 211-237.[24].

5. *Григорян М. Г., Галоян Л. Н., Кобелян А. Х.* О сходимости рядов Фурье по классическим системам // Мат. сб., 2015, 206, № 7, 55–94.

6. *Григорян М. Г.* Модификации функций, коэффициенты Фурье и нелинейная аппроксимация // Мат. сб., 2012, т. 203, № 3, стр. 49–78.

7. *Grigorian M. G., Galoyan L. N.* On the uniform convergence of negative order Cesaro means of Fourier series // J. Math. Anal. Appl. (2016), http://dx.doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.09.001.

В. Р. Мисюк, А. А. Пекарский (Гродно, Минск, Беларусь)
misiuk@grsu.by, pekarskii@gmail.com

СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ НАИЛУЧШИХ РАВНОМЕРНЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ СОПРЯЖЕННЫХ ФУКЦИЙ НА ОТРЕЗКЕ [1]

В теории приближения периодических функций посредством тригонометрических полиномов хорошо известны результаты Н.К. Бари и С.Б. Стечкина о связи наилучших равномерных приближений функции и её сопряжённой. Нами решена аналогичная задача в случае приближения функций, заданных на отрезке, посредством алгебраических многочленов. Через $C(I)$ обозначим банахово пространство функций, непрерывных на отрезке $I = [-1, 1]$ и наделённых стандартной нормой. $\mathcal{P}_n$ – множество алгебраических многочленов степени не выше n ($n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \bigcup \{0\}$). Для функции $g \in C(I)$ введём $E_n(g) = \inf\left\{ \|f - p_n\|_{C(I)} \,:\, p_n \in \mathcal{P}_n \right\}$ – наилучшее равномерное приближение множеством $\mathcal{P}_n$.

Пусть функция $g(t)$ определена на отрезке I и интегрируема на нём с весом $1/\sqrt{1-t^2}$. Тогда $\hat{g}$, функция сопряжённая g, определяется следующим образом: $\hat{g}(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int\limits_I \frac{g(t)}{t-x} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, $x \in I$. Здесь интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке ГПНИ «Конвергенция-2020».

Теорема 1. *Пусть функция $g \in C(I)$ такова, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} E_k(g) < \infty$. Тогда $\hat{g} \in C(I)$ и для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство*

$$E_n(\hat{g}) \le \frac{c_1}{n} \sum_{k=0}^{n} E_k(g) + c_2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k} E_k(g) \ ,$$

где c_1 и c_2 абсолютные положительные постоянные.

Следствие 1. *Пусть $g \in C(I)$, $\alpha > 0$ и $E_n(g) = O(n^{-\alpha})$ при $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\hat{g} \in C(I)$ и при $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ имеет место соотношение $E_n(\hat{g}) = \{O(1/n^{\alpha}) \ , \ 0 < \alpha < 1 \, ; O(\ln n/n) \ , \ \alpha = 1 \, ; O(1/n) \ , \ \alpha > 1\}$*

Теорема 2. *Пусть $g \in C(I)$, $s \in \mathbb{N}$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k^{s-1} E_k(g)$ сходится. Тогда функция $\hat{g}$ непрерывно дифференцируема s раз на интервале $(-1,\, 1)$ и $\hat{g}^{(s)}(x) = O\left(1/\left(1-x^2\right)^{s-1/2}\right)$ при $x \in (-1,\, 1)$.*

В. В. Новиков (Энгельс)
vvnovikov@yandex.ru

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ И ОБОБЩЕННАЯ ВАРИАЦИЯ В СМЫСЛЕ ВАТЕРМАНА

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — неубывающая последовательность положительных чисел такая, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} = +\infty$. Говорят, что f есть функция ограниченной Λ–вариации ($f \in \Lambda BV$) на $[-\pi, \pi]$, если

$$V(\Lambda, f) := \sup_{\Pi} \sum_k |f(t_{2k}) - f(t_{2k-1})| \lambda_k^{-1} < +\infty,$$

где верхняя грань берется по всем системам Π неналегающих замкнутых интервалов вида $I_k := [t_{2k-1}, t_{2k}] \subset [-\pi, \pi]$, $k = 1, 2, \ldots$ Говорят, что f есть функция ограниченной упорядоченной Λ–вариации ($f \in O\Lambda BV$) на $[-\pi, \pi]$, если $\tilde{V}(\Lambda, f) := \sup\limits_{\tilde{\Pi}} \sum\limits_k |f(t_{2k}) - f(t_{2k-1})| \lambda_k^{-1} < +\infty$, где супремум берется по всем системам $\tilde{\Pi}$ интервалов $I_k = [t_{2k-1}, t_{2k}] \subset [-\pi, \pi]$, $k = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющих условию $I_k < I_{k+1}$ или $I_k > I_{k+1}$ (запись $I_k < I_{k+1}$ означает, что I_k расположен левее, соответственно, правее, чем I_{k+1}). При $\Lambda = \{1/k\}_{k=1}^{\infty}$ соответствующие классы обозначаются HBV или $OHBV$ (гармоническая вариация).

Пусть $\Lambda^m := \{\lambda_k\}_{k=m+1}^{\infty}$. Функция f называется непрерывной по Λ–вариации ($f \in \Lambda BV_C$), если $\lim\limits_{m \to \infty} V(\Lambda^m, f) = 0$, и непрерывной по упорядоченной Λ–вариации ($f \in O\Lambda BV_C$), если $\lim\limits_{m \to \infty} \tilde{V}(\Lambda^m, f) = 0$. Классы ΛBV, $O\Lambda BV$ и ΛBV_C были введены Ватерманом (см., например, [1]). Очевидно, что $\Lambda BV_C \subseteq \Lambda BV$ ($O\Lambda BV_C \subseteq O\Lambda BV$) для любой последовательности Λ указанного вида.

Теорема 1. *Справедливо равенство* $OHBV_C = OHBV$.

В [2] установлено, что условие $f \in C_{2\pi} \cap OHBV_C$ влечет равномерную сходимость интерполяционного процесса Лагранжа $\{L_n(f,x)\}$ с узлами $\{x_{k,n} = 2\pi k/(2n+1)\}_{k=-n}^{n}$ к функции f всюду. Из этого утверждения и теоремы 1 непосредственно следует

Теорема 2. *Если* $f \in C_{2\pi} \cap OHBV$, *то последовательность* $\{L_n(f,x)\}$ *сходится к* f *равномерно на* $\mathbb{R}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Waterman D.* Λ-bounded variation: recent results and unsolved problems // Real Anal. Exchange. 1978–79. V. 4. P. 69–75.

2. *Новиков В. В.* Интерполирование функций, непрерывных по упорядоченной H-вариации // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2015. Т. 15, № 4. С. 418–422.

Н. Л. Пачулиа, Н. Н. Пачулиа (Сухум, Абхазия)
nias-pachulia@rambler.ru

О КОНСТРУКТИВНЫХ ХАРАКТЕРИСТИКАХ СИЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ РЯДОВ ФУРЬЕ

Пусть $C_{2\pi}$ множество 2π-периодических непрерывных функций на $[-\pi,\pi]$, $f \in C_{2\pi}$, $S[f]$ — ее ряд Фурье по тригонометрической системе функций, $S_n(f,x)$ — частные суммы порядка n ряда $S[f]$, $\mathfrak{N}_\sigma$ — множество последовательностей натуральных чисел (n_j), для которых выполняются неравенства $1+\sigma^{-1} \leq n_{j+1}(n_j)^{-1} \leq \sigma$ при любом $j \in N_0 = \{0,1,\dots\}$.

Пусть $(n_j) \in \mathfrak{N}_\sigma$ и $\Delta_\tau(\mathfrak{N}_\sigma)$ — множество неотрицательных последовательностей чисел (λ_k) таких, что при $\tau > 1$, $\forall j \in N = \{1,2,\dots\}$ выполняются неравенства

$$\left\{\sum_{k=n_j}^{n_{j+1}-1} (\lambda_k)^\tau\right\}^{\frac{1}{\tau}} \leq A(n_{j+1}-n_j)^{\frac{1}{\tau}-1} \sum_{k=n_{j-1}}^{n_j-1} \lambda_k,$$

где A — здесь и в дальнейшем положительное постоянное число.

При $n_j = 2^j$ множества $\Delta_\tau(\mathfrak{N}_2)$ введены в работе [1]. Величину

$$H(f,x,\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \left|S_k(f,x) - f(x)\right|^q, \ q > 0,$$

назовем степенным сильным преобразованием функции f в H.

Приведем характерный результат работы.

ТЕОРЕМА. *Пусть функция* $f \in C_{2\pi}$, $(n_j) \in \mathfrak{N}_\sigma$, $(\lambda_k) \in \Delta_\tau(\mathfrak{N}_\sigma)$, $\tau > 1$, для $q > 0$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda_k (E_k(f))^q < \infty$. Тогда $H \in C_2\pi$ и если $q \geq 1$, то

$$\omega\left(H^{\frac{1}{q}}, \delta\right) \leq A\left[\omega(f,\delta)\left(\sum_{k=0}^{[\frac{1}{\delta}]} \lambda_k\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{k=[(\sigma\delta)^{-1}]}^{\infty} \lambda_k (E_k(f))^q\right)^{\frac{1}{q}}\right].$$

Если же $0 < q < 1$, то

$$\omega(H,\delta) \leq A\left[(\omega(f,\delta))^q \sum_{k=0}^{\frac{1}{\delta}} \lambda_k + \sum_{k=(\sigma\delta)^{-1}}^{\infty} \lambda_k (E_k(f))^q\right],$$

где $\omega(g,\delta) = \sup\limits_{|x-y|\leq\delta} \{|f(x) - f(y)|\}$, $E_n(f) = \|f(x) - t_n(x)\|_C$,

$t_n(x)$ — тригонометрический полином наилучшего приближения функции f порядка не выше n.

В условиях теоремы, если ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \lambda_k$ сходится, то при $q \geq 1$ $\omega\left(H^{\frac{1}{q}}, \delta\right) \leq A\omega(f,\delta)$, если же $0 < q < 1$, то $\omega(H,\delta) \leq A(\omega(f,\delta))^q$. Отметим, что аналог теоремы в случае, когда последовательность (λ_k) не возрастает, рассмотрена в [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гоголадзе Л. Д.* О суммировании кратныхтригонометрических рядов и сопряженных функциях. // Диссер. на соиск. уч. ст. доктора ф-м наук. Тбилиси. 1984 г.

2. *Пачулиа Н. Л., Пачулиа Н. Н.* О конструктивных характеристиках степенных сильных преобразований рядов Фурье // Сб. работ Ин-та математики НАН Украины. Киев. 2007.

Е. А. Ровба, П. Г. Поцейко (Гродно, Беларусь)
rovba.ea@gmail.com pahamatby@gmail.com

О РАЦИОНАЛЬНЫХ РЯДАХ ФУРЬЕ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Хорошо известно, что полиномы Чебышева $T_n(x) = \cos n \arccos x$, $n = 0, 1, ...$ обладают рядом замечательных свойств, в том числе ортогональностью по весу $\rho(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ на отрезке $[-1,1]$.

Рациональные дроби Чебышева-Маркова, см.[1], являющиеся обобщением полиномов Чебышева обладают похожими свойствами, однако свойство ортогональности, вообще говоря, не сохраняется. В 1964 году Джрбашян М.М., Китбалян А.А.[2] построили ортогональную по весу $\rho(x) =$

$1/\sqrt{1-x^2}$ систему рациональных функций на отрезке $[-1,1]$. Рациональные ряды Фурье к настоящему времени получают широкое применение в прикладных задачах, см., например, [3].

В докладе предполагается освятить вопросы, относящиеся к представлению некоторых элементарных функций рядами по обоим вышеупомянутым системам.

Во-первых, если выбирать только два геометрически различных полюса, то соответствующая система рациональных косинус-дробей Чебышева-Маркова будет ортогональной на отрезке $[-1,1]$ по несколько подправленному весу. Получен в явном виде ряд Фурье для функции $|x|$ по такой системе.

Во-вторых, для этой же функции получен в явном виде ряд Фурье по системе рациональных функций Джрбашяна-Китбаляна. С помощью численного анализа подтверждена эффективность приближения частичными суммами таких рядов Фурье.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Марков А. А.* Избранные труды / А.А. Марков. – Москва: Гостехиздат, 1948.

2. *Джрбашян М. М., Китбалян А. А.* Об одном обобщении полиномов Чебышева // Докл. АН Арм.ССР.-1964.-Т.38,№5,-С.263-270.

3. *Huseyin Akcay, Brett Ninness* Rational Basis Functions for Robust Identification from Frequency and Time Domain Measurements. // Technical Report EE9718, Department of Electrical and Computer Engineering, University of Newcastle, AUSTRALIA.

Е. А. Родионов (Москва)
evgeny_980@list.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ВЕЙВЛЕТОВ ЛЭНГА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ АГРЕГИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

В докладе будет рассказано о применениях вейвлетов Лэнга [1] для построения вейвлет-агрегированных сигналов с целью выявления предвестников землетрясений.

Вейвлет-агрегированные сигналы [2,§ 2.5] являются скалярными и в максимальной степени вбирают в себя наиболее общие вариации, присущие сразу всем анализируемым процессам, одновременно с тем подавляются составляющие, характерные только для одного временного ряда. На первом этапе построения вейвлет-агрегированного сигнала из исходных временных рядов удаляется линейный тренд и осуществляется переход к приращениям. После нормализации для каждого временного ряда вычисляются его канонические вейвлет-коэффициенты, которые сохраняют общие сигналы и освобождены от локальных. Канонические вейвлет-коэффициенты вычисляются как приближение детализирующих коэффициентов выбранного временного ряда при помощи детализирующих коэффициентов остальных рядов. Непосредственно вейвлет-агрегированный сигнал получается в результате построение первой главной компоненты канонических вейвлет-коэффициентов и применения обратного дискретного вейвлет-преобразования.

Анализировались два набора данных: мониторинг гидрогеохимических показателей подземных вод на Камчатке (1986–1992) и мониторинг геофизических показателей в Северо-Восточном Китае (1972—1979). За период измерений на Камчатке произошло два крупных землетясения, M=6.6 и M=7.1. В Северо-Восточном Китае произошло Тяншаньское землетрясение, M=7.8. Графики всплесковых агрегированных сигналов, построенные при помощи вейвлетов Лэнга иллюстрируют преимущество этих вейвлетов по сравнению с вейвлетами Хаара и Добеши для рассматриваемых данных, так как они отражают предвестниковый эффект землетрясений лучше и значительно раньше.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Lang W. C.* Fractal Multiwavelets Related to the Cantor Dyadic Group. Int. J. Math. and Math. Sci. 1998. V. 21. No. 2. P. 307–317.

2. *Любушин А. А.* Анализ данных систем геофизического и экологического мониторинга. М.: Наука, 2007. 228 с.

А. М. Савчук (Москва)

artem_savchuk@mail.ru

О БАЗИСАХ, СОСТАВЛЕННЫХ ИЗ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА ДИРАКА, ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ [1]

Рассмотрим оператор Дирака $\mathcal{L}_{P,U}$, порожденный в пространстве $\mathbb{H} = L_2[0,\pi] \oplus L_2[0,\pi] \ni \mathbf{y}$ дифференциальным выражением $l_P(\mathbf{y}) = B\mathbf{y}' + P\mathbf{y}$, где

$$B = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \qquad P(x) = \begin{pmatrix} 0 & p_2(x) \\ p_3(x) & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Функции p_j, $j = 2, 3$, предполагаются суммируемыми на отрезке $[0,\pi]$ и комплекснозначными. Краевые условия $U(\mathbf{y}) = 0$, где

$$U(\mathbf{y}) = C\mathbf{y}(0) + D\mathbf{y}(\pi) = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{13} & u_{14} \\ u_{23} & u_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(\pi) \\ y_2(\pi) \end{pmatrix},$$

предполагаются регулярными по Биркгофу. Пусть $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — система собственных и присоединенных функций оператора $\mathcal{L}_{P,U}$, а $\{\mathbf{z}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — биортогональная в $\mathbb{H}$ система. Положим $W^1_{\mu,U} = \{\mathbf{y} \in W^1_\mu | U(\mathbf{y}) = 0\}$. Обозначим

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 14–01–00754).

$W^{\theta}_{\mu,p,U} := (L_\mu, W^1_{\mu,U})_{\theta,p}$, $\mu \in (1,\infty)$, $\theta \in [0,1]$, $p \in [1,\infty)$, — шкала пространств Бесова, построенных при помощи вещественного метода интерполяции. Гильбертовы пространства $W^{\theta}_{2,2,U}$ обозначим $\mathbb{H}^{\theta}_U$ (они образуют шкалу пространств Соболева с дробным показателем гладкости).

Теорема. *Пусть $\mathcal{L}_{P,U}$ — сильно регулярный оператор Дирака с потенциалом $P \in L_\varkappa[0,\pi]$, $\varkappa \in (1,2)$. Тогда система $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ образует базис Рисса в пространстве $\mathbb{H}^{\theta}_U$ при любом $\theta \in [0, 3/2 - 1/\varkappa)$. При $\varkappa = 2$ имеет место базисность Рисса во всей шкале $\mathbb{H}^{\theta}_U$, $\theta \in [0,1]$. В случае регулярных, но не сильно регулярных условий утверждение сохраняется с заменой базисности Рисса на базисность Рисса системы двумерных подпространств $\{\mathbf{y}_{2n}, \mathbf{y}_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Далее, для любого $\mu \in (1,\varkappa]$, где $\varkappa \in (1,2]$, система $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ образует базис Шаудера (соответственно, базис Шаудера из двумерных подпространств) в любом пространстве $W^{\theta}_{\mu,p,U}$, $\theta \in [0,1]$, $p \in [1,\infty)$. В случае $\mu \in (\varkappa,\infty)$ утверждение сохраняется при условии $\theta \in [0, 1 - 1/\varkappa + 1/\mu)$, $p \in [1,\infty)$.*

И. В. Садовничая (Москва)
ivsad@yandex.ru

РАВНОСХОДИМОСТЬ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИРАКА [1]

Изучается оператор Дирака $\mathcal{L}_{P,U}$, порожденный в пространстве $\mathbb{H} = L_2[0,\pi] \oplus L_2[0,\pi] \ni \mathbf{y}$ дифференциальным выражением $l_P(\mathbf{y}) = B\mathbf{y}' + P\mathbf{y}$, где

$$B = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \qquad P(x) = \begin{pmatrix} 0 & p_2(x) \\ p_3(x) & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Функции p_j, $j = 2,3$, предполагаются суммируемыми на отрезке $[0,\pi]$ и комплекснозначными. Общий вид краевых условий для оператора $\mathcal{L}_{P,U}$ задается системой линейных уравнений $U(\mathbf{y}) = 0$, где

$$U(\mathbf{y}) = C\mathbf{y}(0) + D\mathbf{y}(\pi) = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_{13} & u_{14} \\ u_{23} & u_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(\pi) \\ y_2(\pi) \end{pmatrix},$$

причем строки матрицы $\mathcal{U} := (C,\, D)$ линейно независимы. Пусть

$$S_m(\mathbf{f}) = \sum_{|n|\le m} \Big[\langle \mathbf{f}, \mathbf{z}_{2n} \rangle \mathbf{y}_{2n} + \langle \mathbf{f}, \mathbf{z}_{2n+1} \rangle \mathbf{y}_{2n+1} \Big],$$

где $\{\mathbf{y}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — система собственных и присоединенных функций оператора $\mathcal{L}_{P,U}$, $\{\mathbf{z}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — биортогональная система. Положим также

$$S^0_m(\mathbf{f}) = \sum_{|n|\le m} \Big[\langle \mathbf{f}, \mathbf{z}^0_{2n} \rangle \mathbf{y}^0_{2n} + \langle \mathbf{f}, \mathbf{z}^0_{2n+1} \rangle \mathbf{y}^0_{2n+1} \Big],$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (грант № 14–01–00754).

где $\{\mathbf{y}_n^0\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — система собственных и присоединенных функций оператора $\mathcal{L}_{0,U}$, $\{\mathbf{z}_n^0\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — биортогональная система.

Теорема. *Пусть $\mathcal{L}_{P,U}$ — регулярный оператор Дирака с потенциалом $P\in L_\varkappa[0,\pi]$, $\varkappa\in(1,\infty]$. Пусть $\mathbf{f}\in L_\mu[0,\pi]$, где $\mu\in[1,\infty]$. Тогда*

$$\|S_m(\mathbf{f})-S_m^0(\mathbf{f})\|_{L_\nu[0,\pi]}\longrightarrow 0 \quad \text{при } m\to+\infty,$$

если индекс $\nu\in[1,\infty]$ таков, что $1/\varkappa+1/\mu-1/\nu\le 1$, за исключением случая $\varkappa=\nu=\infty$, $\mu=1$.

Б. И. Сметанин (Ростов-на-Дону)
bismetanin@sfedu.ru

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Применение интегрального преобразования Ханкеля при исследовании некоторых задач математической физики приводит к интегральному оператору вида

$$\Lambda\varphi(r)=\int_0^1 w(y)\varphi(y)dy\int_0^\infty J_\nu(uy)J_\nu(ur)du \quad (r\in[0,1]),$$

где $J_\nu(z)$ – функция Бесселя, $w(y)=y(1-y^2)^{-1/2}$. При $\nu=0,1,2,...$ собственные функции этого оператора могут быть представлены в виде $\varphi_n^{(\nu)}(r)=r^\nu M_{2n}^{(\nu)}(r)$ $(n\in N_0)$, где $M_{2n}^{(\nu)}(r)$ – ортогональные многочлены по четным степеням $r\in[0,1]$. Условие ортогональности этих многочленов имеет вид (δ_{mn}– символ Кронекера)

$$\int_0^1 r^{2\nu}w(r)M_{2m}^{(\nu)}(r)M_{2n}^{(\nu)}(r)dr=D_n\delta_{mn} \quad (m,n\in N_0).$$

При построении многочленов $\{M_{2n}^{(\nu)}(r)\}$ первые два многочлена можно взять в виде: $M_0^{(\nu)}(r)=1$, $M_2^{(\nu)}(r)=1-(2\nu+3)(2\nu+2)^{-1}r^2$. Для определения последующих многочленов может быть получена рекуррентная формула

$$M_{2n}^{(\nu)}(r)=(A_nr^2+B_n)M_{2n-2}^{(\nu)}(r)+(1-B_n)M_{2n-4}^{(\nu)}(r) \quad (n=2,3,4,...).$$

Непосредственные вычисления по приведенным здесь формулам с использованием программы аналитических вычислений Maple позволили получить следующие результаты:

$$M_{2n}^{(\nu)}(r)=C_{2n}^{(\nu+1/2)}(\sqrt{1-r^2}), \quad \lambda_n^{(\nu)}=\frac{\pi(2n-1)!!(2n+2\nu-1)!!}{2(2n)!!(2n+2\nu)!!}.$$

Здесь $C_{2n}^{(\nu)}(r)$ – многочлены Гегенбауэра, $\lambda_n^{(\nu)}$ – собственные значения оператора $\Lambda\varphi_n^{(\nu)}(r)$. При $\nu = 0$ и $\nu = 1$ эти формулы совпадают с соответствующими формулами монографии [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М.: Наука, 1982. 344 с.

К. А. Смотрицкий (Гродно, Беларусь)
k_smotritski@mail.ru

О СИСТЕМЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ, ОБОБЩАЮЩИХ МНОГОЧЛЕНЫ ЧЕБЫШЁВА ВТОРОГО РОДА

Одним из важнейших объектов исследования в теории приближений являются системы ортогональных функций. Этот факт обусловлен широчайшим применением таких систем, например, при построении рядов Фурье или при выборе узлов интерполяционных операторов. Классическими ортогональными системами в полиномиальном случае выступают многочлены Чебышёва первого и второго рода. Их рациональные аналоги менее изучены. В настоящей работе исследуется ортогональная система рациональных функций Джрбашяна – Китбаляна, обобщающая многочлены Чебышёва второго рода (см. [1]):

$$N_0(x) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad N_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{e^{i\theta}\eta_n(e^{i\theta}) - e^{-i\theta}\eta_n(e^{-i\theta})}{2i\sin\theta}, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$x = \cos\theta,$$

где

$$\eta_n(z) = \frac{\sqrt{1-|\alpha_n|^2}}{1-\overline{\alpha_n}z}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}z}, \quad n \in \mathbb{N},$$

при этом $\{\alpha_k\}_{k=0}^{n}$ — произвольная последовательность комплексных чисел такая, что $\alpha_0 = 0$, $|\alpha_k| < 1$, $k \in \mathbb{N}$.

В работе описывается интегральное представление частичных сумм рядов Фурье по этой системе, а также проводится численное исследование некоторых свойств функций этой системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Джрбашян М. М., Китбалян А. А.* Об одном обобщении полиномов Чебышева // Докл. АН Арм.ССР. 1964. Т. 38, № 5. С. 263–270.

А. П. Старовойтов, Г. Н. Казимиров, М. В. Сидорцов
(Гомель, Беларусь)
svoitov@gsu.by, grigory.kazimirov@gmail.com

О РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ МНОГОЧЛЕНОВ ЭРМИТА – ПАДЕ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ [1]

Многочленами A_n^p, $deg\, A_n^p \leqslant n-1$, $p = 0, 1, ..., k$, одновременно тождественно не равные нулю и удовлетворяющие условию

$$\sum_{p=0}^{k} A_n^p(z)\, e^{\lambda_p z} = O\left(z^{kn+n-1}\right)\,,\ \ z \to 0\,,$$

введены в рассмотрение Эрмитом в связи с исследованием арифметических свойств числа e. Их принято называть *диагональными многочленами Эрмита – Паде I рода* для системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^{k}$.

Рассмотрим систему $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^{k}$, где $\lambda_0 = 0$, а остальные λ_p являются корнями уравнения $\xi^k - 1 = 0$. Тогда для нормированных многочленов Эрмита – Паде $\tilde{A}_n^p(z) = A_n^p(z)/A_n^p(0)$, $p = 1, 2, ..., k$ доказана равномерная сходимость на компактах в $\mathbb{C}$ к явно заданным функциям. Для простаты формулировок далее ограничимся случаем, когда $k = 3$.

Пусть

$$\lambda_0 = 0,\ \lambda_p = e^{i\,2\pi(p-1)/3},\ z_p = \sqrt[3]{1/4}\, e^{i\,2\pi(p-1)/3},\ p = 1, 2, 3.$$

Теорема 1. *При $n \to \infty$ равномерно на любом компакте из $\mathbb{C}$*

$$\widetilde{A}_n^p(z) \rightrightarrows e^{(z_p - \lambda_p)z}\,,\ \ p = 1, 2, 3\,.$$

Полагаем $\widetilde{A}_{3n-2}^0(z) = A_{3n-2}^0(z)/A_{3n-2}^0(0)$.

Теорема 2. *При $n \to \infty$ равномерно на любом компакте в $\mathbb{C}$*

$$\widetilde{A}_{3n-2}^0(z) \rightrightarrows \frac{1}{3}\ \sum_{j=1}^{3} e^{(z_j - \lambda_j)z}\,.$$

Утверждения, аналогичные теореме 2, имеют место и для подпоследовательностей

$$\widetilde{A}_{3n-1}^0(z) = A_{3n-1}^0(z)/\left[A_{3n-1}^0(z)\right]'_{z=0}\,,\ \widetilde{A}_{3n}^0(z) = A_{3n}^0(z)/\left[A_{3n}^0(z)\right]''_{z=0}\,.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь.

А. П. Старовойтов, Е. П. Кечко (Гомель, Беларусь)
svoitov@gsu.by, ekechko@gmail.com

МНОГОЧЛЕНЫ ЭРМИТА – ПАДЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ [1]

Для заданного натурального числа k рассмотрим произвольный фиксированный набор $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ различных комплексных и произвольный набор $\{n_p\}_{p=0}^k$ натуральных чисел.

Многочленами $A_{n_p}^p$, $deg\, A_{n_p}^p \leqslant n_p - 1$, $p = 0, 1, ..., k$, одновременно тождественно не равные нулю и удовлетворяющие условию

$$R_{n_0,\, n_1, ...,\, n_k}(z) = \sum_{p=0}^{k} A_{n_p}^p(z)\, e^{\lambda_p z} = O\left(z^{n_0+n_1+...+n_k-1}\right)\,, \quad z \to 0\,,$$

введены в рассмотрение Эрмитом [1] в связи с исследованием арифметических свойств числа e. Их принято называть *многочленами Эрмита – Паде I рода* для системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$.

Следующие теоремы об асимптотике функции $R_{n_0,\, n_1, ...,\, n_k}$ и о локализации нулей $A_{n_p}^p$ дополняют и обобщают известные результаты Г. Сегё, Э. Саффа и Р. Варги, П. Борвейна, Ф. Вилонского, Г. Шталя.

Теорема 1. *Пусть* $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ *– произвольный фиксированный набор различных комплексных чисел. Тогда при* $\min\{n_0, n_1, ..., n_k\} \to \infty$ *локально равномерно по* z

$$R_{n_0,\, n_1, ...,\, n_k}(z) \sim \frac{z^{n_0+n_1+...+n_k-1}}{(n_0+n_1+...+n_k-1)!} e^{\frac{n_0\lambda_0+n_1\lambda_1+...+n_k\lambda_k}{n_0+n_1+...+n_k} z}\,.$$

Теорема 2. *Пусть* $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ *– произвольные различные комплексные числа. Тогда при* $n_p \geqslant 2$, $p = 0, 1, ..., k$, $k \geqslant 1$ *нули многочлена* $A_{n_p}^p$, $0 \leqslant p \leqslant k$, *находятся в круге* $\{z : |z| < R_{n_p}^p\}$, *где*

$$R_{n_p}^p = \sum_{\substack{j=0\\ j\neq p}}^{k} \frac{n_p + n_j - 2/3}{|\lambda_p - \lambda_j|}\,.$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Hermite C.* Sur la généralisation des fractions continues algébriques // Ann. Math. Pura. Appl. Ser. 2A. 1883. V. 21. P. 289–308.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь.

П. А. Терехин (Саратов)
terekhinpa@mail.ru

АФФИННЫЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ ТИПА УОЛША [1]

Пусть функция $f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяет условиям

$$f(t+1) = f(t), \qquad f \in L^2(0,1), \qquad \int_0^1 f(t)\,dt = 0.$$

Обозначим L_0^2 пространство всех таких функций f. Определим в пространстве L_0^2 операторы

$$W_0 f(t) = f(2t), \qquad W_1 f(t) = r(t) f(2t),$$

где $r(t) = \operatorname{sign}\sin 2\pi t$ — функция Радемахера. Для натурального числа $n = \sum_{\nu=0}^{k-1} \alpha_\nu 2^{k-\nu} + 2^k$ положим

$$f_n(t) = W_{\alpha_0} \dots W_{\alpha_{k-1}} f(t) = f(2^k t) \prod_{\nu=0}^{k-1} r^{\alpha_\nu}(2^\nu t).$$

Последовательность функций $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ называется аффинной системой функций типа Уолша.

Теорема 1. *Для каждой ненулевой функции f существует и притом единственная с точностью до унимодулярной постоянной функция φ такая, что аффинная система функций типа Уолша $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ является ортонормированной и $\overline{span}\,[f_n] = \overline{span}\,[\varphi_n]$.*

Теорема 2. *Для каждой ненулевой функции f существует и притом единственная с точностью до унимодулярной постоянной функция F такая, что аффинная система функций типа Уолша $\{F_n\}_{n=1}^\infty$ является полной в L_0^2 и $f_n = QF_n$, $n = 1, 2, \dots$, где Q - изометрия пространства L_0^2.*

Теорема 3. *Если функция f удовлетворяет условию Липшица $|f(t) - f(t')| \le L|t - t'|$, то аффинная система функций типа Уолша $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ является системой Бесселя, т.е.*

$$\sum_{n=1}^\infty |(h, f_n)|^2 \le B\|h\|_2, \qquad \forall h \in L^2(0,1).$$

Существует непрерывная функция f, для которой аффинная система $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ не является системой Бесселя.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00152).

М. Тоқбай (Астана, Казахстан)
moldir-tokpaeva@mail.ru

ПРАВИЛЬНЫЕ ПОРЯДКИ ПОГРЕШНОСТЕЙ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССОВ СОБОЛЕВА $SW_2^{\delta^r\left(\ln\frac{2}{\delta}\right)^{\aleph}}(0,1)^s$

Задача восстановления в гильбертовой метрике функций по информации, полученной от тригонометрических коэффициентов Фурье, заключается в нахождении оценок снизу и оценок сверху величины (необходимые определения и обозначения см. в [1])

$$\delta_N(0)_{L^2(0,1)^s} \equiv \inf_{m^{(1)},\ldots,m^{(N)}\in Z^s;\varphi_N} \sup_{f\in SW_2^{\delta^r\left(\ln\frac{2}{\delta}\right)^{\aleph}}(0,1)^s} \|f(\cdot)-$$

$$-\varphi_N(\hat{f}\left(m^{(1)}\right),...,\hat{f}\left(m^{(N)}\right);\cdot)\Big\|_{L^2(0,1)^s},$$

где $\hat{f}(m)$ — тригонометрические коэффициенты Фурье-Лебега, $\varphi_N(z_1,...,z_N;x)$ — алгоритм переработки информации, $SW_2^{\delta^r\left(\ln\frac{2}{\delta}\right)^{\aleph}}(0,1)^s$ - обобщенный класс Соболева состоящий, по определению, из всех суммируемых 1-периодических по каждой переменной функций $f(x_1,...,x_s)$, тригонометрические коэффициенты Фурье–Лебега $\hat{f}(m)$ которых удовлетворяют условию ($\bar{m}_j = \max\{1,|m_j|\}, j=1,...,s$)

$$\sum_{m=(m_1,\ldots,m_s)\in Z^s} \left|\hat{f}(m)\right|^2 \prod_{j=1}^{s}\left(\bar{m}_j^{2r}\left(\log\left(\bar{m}_j+1\right)\right)^{2\aleph}\right) \le 1.$$

В рамках приведенных определений и обозначений справедлива следующая двусторонняя оценка ($r>0,\ \aleph>0$)

$$\delta_N(0)_{L^2(0,1)^s} \asymp \frac{(\log N)^{r(s-1)-\aleph\cdot s}}{N^r}.$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Жубанышева А. Ж., Темиргалиев Н.*// ЖВМ и МФ, 2015, том 55, № 9, С. 1474–1485.

А. Ю. Трынин (Саратов)
tayu@rambler.ru

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАВНОМЕРНОЙ СХОДИМОСТИ ОБОБЩЕНИЙ СИНК-АППРОКСИМАЦИЙ [1]

В тесной связи с синк-приближениями находятся интерполяционные процессы Лагранжа, построенные по собственным функциям задачи Штурма-Лиувилля

$$U'' + [\lambda - q]U = 0,\ U'(0) - hU(0) = 0,\ U'(\pi) + HU(\pi) = 0 \qquad (1)$$

с непрерывным потенциалом q ограниченной вариации на $[0,\pi]$ и граничными условиями $h \neq \pm\infty$, $\quad H \neq \pm\infty$. Оператором Лагранжа-Штурма-Лиувилля назовём $L_n^{SL}(f,x) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_{k,n}) \frac{U_n(x)}{U_n'(x_{k,n})(x-x_{k,n})}$, где U_n есть $n-$ая собственная функция задачи (1). Здесь через $0 < x_{1,n} < x_{2,n} < \cdots < x_{n,n} < \pi$ обозначены нули функции U_n. Положив $x_{0,n} = 0$ и $x_{n+1,n} = \pi$, для достаточно больших n определим индексы m_1, m_2 из неравенств

$$x_{k_1-1,n} < a \leq x_{k_1,n}, x_{k_2,n} \leq b < x_{k_2+1,n}, \quad m_1 = \left[\frac{k_1}{2}\right] + 1, m_2 = \left[\frac{k_2}{2}\right].$$

Теорема 1. *Пусть функция $f \in C[0,\pi]$, $0 \leq a < b \leq \pi$, $0 < \varepsilon < \frac{b-a}{2}$. Тогда для всех $x \in (a,b)$ имеет место соотношение*

$$\left| f(x) - L_n^{SL}(f,x) \right| =$$

$$\frac{|U_n(x)|}{2\pi} \max_{m_1 \leq p \leq m_2} \left| \sum_{m=m_1}^{m_2}{}' \frac{f(x_{2m-1,n}) - 2f(x_{2m,n}) + f(x_{2m+1,n})}{p-2m} \right| +$$

$$O_x\left(\omega\left(f, \frac{\ln n}{n}\right) + \|f\| \frac{\ln n}{n}\right). \qquad (2)$$

Константа в о-символике зависит от $x \in (a,b)$. Тем не менее, оценка остаточного члена в формуле (2) раномерна на отрезке $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ и выбор константы равномерности в о-символике (2) в этом случае зависит только от ε и параметров q, h, H задачи Штурма-Лиувилля (1).

[1] «Работа подготовлена в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект № 1.1520.2014/K).

Л. П. Фалалеев (Алматы, Казахстан)
v_gulmira@mail.ru

О СВОЙСТВАХ ОПЕРАТОРОВ С ЛАКУНАМИ ПОЛУСТЕПЕННОГО ТИПА [1]

Для линейных матричных операторов

$$u_N(f,\Lambda,X)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{N}\lambda_k^{(n)}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

где a_k, b_k — коэффициенты Фурье функции $f(x)$, построенных по подпоследовательностям сумм Фурье с лакунами $n_k=[\frac{k^\gamma}{\ln^\beta(k+1)}]$, $[y]$ — целая часть y, $\beta\geq 0,\ \gamma\geq 1,\ \lambda_k^n\equiv\lambda_k$ — ограниченные в совокупости множители суммирования, приведено достаточное условие ограниченности норм $\|u_N\|$

$$\|u_N\|_{C_{2\pi}}\leq c\{n_N^{\frac{1}{\gamma}}\sum_{k=0}^{N}(\Delta\lambda_k)^2\ln^{\beta/\gamma}(k+1)[1+(N-k)^{1-1/\gamma}k^{1/\gamma-1}]\},$$

N — число отличных от 0 разностей $\Delta\lambda_k=\lambda_{n_k}-\lambda_{n_k+1},\ c>0,\ c=const.$

Исследованы аппроксимативные свойства дискретных бигармонических операторов.

Ю. А. Фарков (Москва)
farkov@list.ru

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВСПЛЕСКИ В АНАЛИЗЕ УОЛША ДЛЯ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

В статье [1] с помощью модифицированных ядер Дирихле определены всплесковые базисы в пространствах тригонометрических полиномов. Аналогичные всплесковые конструкции были построены для классических ортогональных полиномов Чебышева, Лежандра, Эрмита, Якоби и Лагерра (см., например, [2]). Основные результаты о построении кратномасштабного анализа для периодических всплесков приведены в главе 9 монографии [3]. Автором [4] с помощью ядер типа Дирихле–Уолша построены периодические всплесковые базисы на p-адической группе Виленкина и соответствующие им алгоритмы разложения и восстановления сигналов. В докладе будут приведены примеры применения этих алгоритмов для кодирования фрактальных сигналов и для анализа временных рядов. Отметим, что применяемые алгоритмы разложения и восстановления существенно проще (как по структуре, так и по числу арифметических операций) по сравнению с соответствующими алгоритмами из [1].

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке грант 5130/ГФ4 Комитета науки МОН РК.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Chui C. K., Mhaskar H. N.* On trigonometric wavelets // Constr. Approx. 1993. V. 9. P. 167–190.

2. *Fisher B., Prestin J.* Wavelets based on orthogonal polynomials // Math. Computation. 1997. V. 66. № 220. P. 1593–1618.

3. *Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А.* Теория всплесков. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 616 с.

4. *Farkov Yu. A.* Periodic wavelets in Walsh analysis // Communic. Math. Appl. 2012. V. 3. № 3. P. 223–242.

Д. В. Фуфаев (Москва)
fufaevdv@rambler.ru

ОПЕРАТОРЫ СЛАБОГО ТИПА И ТЕНЗОРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ [1]

Пусть (X,μ) — пространство с мерой, оператор T действует из $L^1(X,\mu)$ в себя. Скажем, что оператор T — слабого типа $(1,1)$ с константой C, если для любого $\lambda>0$ и для любой функции $f\in L^1(X,\mu)$ выполнено неравенство: $\mu\{x\in X: |Tf(x)|>\lambda\}\le \frac{C}{\lambda}||f||_{L^1(X,\mu)}$.

Порой в гармоническом анализе возникают приближения семейством операторов, образующих лишь частично упорядоченное множество. Пример — кратные ряды Фурье. Чтобы работать с такими семействами, используем понятие направленности (см. [1, стр.12]).

Пусть $\{T_n\}_{n\in A}$ — счетная направленность линейных операторов, переводящих $L^1(X,\mu)$ в себя. Максимальным оператором данного семейства операторов называется оператор $T: f(x)\mapsto \sup\limits_{n\in A}|T_nf(x)|$.

Если интегральные операторы T^i с ядрами $K_i(\cdot,\cdot)$ заданы на $L^1(X^i,\mu^i)$, $i=1,2$, то определим их тензорное произведение как интегральный оператор $T^1\hat{\otimes}T^2$, действующий в $L^1(X^1\times X^2,\mu^1\otimes\mu^2)$ с ядром $K_1(\cdot,\cdot)\cdot K_2(\cdot,\cdot)$. Для двух направленностей A^1 и A^2 их произведением назовем направленность $A=A^1\times A^2$, причем $(n^1,n^2)>(m^1,m^2)$ тогда и только тогда, когда $n^1>m^1$ и $n^2>m^2$.

Обобщением [2, теорема 5.1.3] оказывается следующий результат.

Теорема. *Пусть (X^i,μ^i), $i=1,2$ — измеримые пространства конечной меры, $X=X^1\times X^2$, $\mu=\mu^1\otimes\mu^2$, $\{T^i_{n^i}\}_{n^i\in A^i}$, — направленности линейных интегральных операторов, действующих в $L^1(X^i,\mu^i)$, таких, что каждый максимальный оператор T^i — слабого типа (1,1) и, кроме того, для любого и любой ограниченной функции $\phi\in L^1(X^i,\mu^i)$ выполнено $\lim\limits_{n^i\in A^i} T^i_{n^i}\phi(x)=\phi(x)$ μ^i-почти всюду. Тогда для любой $f\in L^1(X)$ такой, что $f\cdot\ln(|f|+1)\in L^1(X)$, выполнено $\lim\limits_{\boldsymbol{n}\in A} T_{\boldsymbol{n}}f(x)=f(x)$ $\mu-$почти всюду,*

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-00417).

где A — произвольная поднаправленность произведения направленностей $\{T^i_{n^i}\}_{n^i\in A^i}$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Богачев В. И.* Основы теории меры, т.2. М.-Ижевск: НИЦ Регулярная и Хаотическая динамика, 2006. 680 с.

2. *Голубов Б. И.,Ефимов А. В.,Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. М.: Изд. ЛКИ, 2008. 352 с.

Ю. Х. Хасанов (Душанбе, Таджикистан)
yukhas60@mail.ru

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ЛЕЙНДЛЕРА ДЛЯ КРАТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ

По тригонометрической системе для периодической периода 2π функции $f(x)\in \mathbf{L_2}$, Л. Лейндлером [1] установлены достаточные условия абсолютной чезаровской суммируемости рядов Фурье функций в терминах поведения их коэффициентов Фурье для различных значений α $(-1<\alpha<\frac{1}{2})$

Пусть $B_p^{(k)}$ $(1\le p<\infty)$ есть линейное пространство, состоящее из функций $f(x_1,\dots x_k)$, для которых $|f(x_1,\dots x_k)|^p$ $(1\le p<\infty)$ интегрируема по Лебегу на любом k – мерном кубе пространства R^k.

Теорема. *Если $f(x_1,\dots,x_k)\in B_2^{(k)}$ и выполнены условия*

$$\sum_{n_{\nu_1}=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_{\nu_i}=0}^{\infty}\prod_{\mu=1}^{i}2^{\frac{n_{\nu_\mu}(1-2\alpha_{\nu_\mu})}{2}}(P_{n_\nu})^{1/2}<\infty,$$

где $-1<\alpha_\nu<\frac{1}{2}$ $(\nu=1,2,\cdots,k)$;

$$\sum_{n_{\nu_1}=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_{\nu_i}=0}^{\infty}\left(\prod_{\mu=1}^{i}n_{\nu_\mu}\right)^{1/2}(P_{n_\nu})^{1/2}<\infty,$$

где $\alpha_\nu=\frac{1}{2}$ $(\nu=1,2,\cdots,k)$;

$$\sum_{n_{\nu_1}=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_{\nu_i}=0}^{\infty}(P_{n_\nu})^{1/2}<\infty,$$

где $\alpha_\nu>\frac{1}{2}$ $(\nu=1,2,\cdots,k)$ при любом $i\le k$, то ряд Фурье функции $f(x_1,\dots,x_k)\in B_2^{(k)}$ почти всюду $|C;\alpha_1,\cdots,\alpha_k|$–суммируем, где

$$P_{n_\nu}=\sum_{k_1=2^{n_{\nu_1}}}^{2^{n_{\nu_1}+1}-1}\cdots\sum_{k_i=2^{n_{\nu_i}}}^{2^{n_{\nu_i}+1}-1}\rho^2_{0,\cdots,0,n_{\nu_1},0,\cdots,0,n_{\nu_i},0,\cdots,0}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Leindler L. Uber die absolute summierbarkeit der orthogonalreihen // Acta sci. math., (Szeged). 1961. T. 22. S. 243–268.

И. Г. Царьков (Москва)
tsar@mech.math.msu.su

N-МОНОТОННЫЕ ФУНКЦИИ И НЕПРЕРЫВНАЯ ε-ВЫБОРКА.[1]

Будем говорить, что пара: линейное пространство X и полунорма $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_+$ — линейное полунормированное пространство. Через $B(x,r)$ и $\mathring{B}(x,r)$ обозначим соответственно замкнутый и открытый шар в линейном полунормированном пространстве $\mathcal{X} = (X, \|\cdot\|)$ с центром x радиуса r, т.е. соответственно множества $\{y \in X \mid \|y-x\| \leqslant r\}$ и $\{y \in X \mid \|y-x\| < r\}$. Для произвольных множества $M \subset X$ и точки $x \in X$ через $P_M x$ обозначим метрическую проекцию, т.е. множество $\{y \in M \mid \|y-x\| = \varrho(x,M)\}$.

В работе изучаются свойства множеств, обладающих непрерывными ε-выборками для всех $\varepsilon > 0$.

Определение. *Пусть $\varepsilon > 0$, $M \subset X$. Отображение $\varphi : X \to M$ называется аддитивной (мультипликативной) ε-выборкой, если для всех $x \in X$ выполняется неравенство*

$$\|x - \varphi(x)\| \leqslant \varrho(x,M) + \varepsilon$$

(соответственно $\|x - \varphi(x)\| \leqslant (1+\varepsilon)\varrho(x,M)$).

С различными свойствами множеств, обладающих ε-выборкой можно ознакомиться в работах [1,2].

Через $\mathcal{M}_N$ обозначим множество N-монотонных функций в пространстве $C[a,b]$, т.е. таких функций $f \in C[a,b]$, для которых существует разбиение $T_f = \{t_k\}_0^N : a = t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_N = b$, для которого f монотонна на каждом отрезке разбиения $[t_{k-1}, t_k]$ $(\overline{k=1,N})$.

Теорема 1. Множество $\mathcal{M}_N$ в пространстве $C[a,b]$ для всех $N \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ обладает непрерывной аддитивной (мультипликативной) ε-выборкой. При этом непустое пересечение $\mathcal{M}_N$ с любым открытым шаром множества $\mathcal{M}_N$ является гомотопией этого шара в себя.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алимов А. Р., Царьков И. Г.* Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения// Успехи мат. наук. 2016. Т. 71, № 1 (427), С. 3–84.

2. *Царьков И. Г.* Непрерывная ϵ-выборка// Мат. сб., Т. 207, № 2. С. 123–142.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (16-01-00295).

А. П. Чеголин (Ростов-на-Дону)

ПРОСТРАНСТВА ДРОБНОЙ ГЛАДКОСТИ, ПОСТРОЕННЫЕ ПО ГАРМОНИЧЕСКОМУ СИМВОЛУ

В работе рассматривается вопрос о возможности описания образа операторов типа потенциала с суммируемыми плотностями, задаваемых в образах Фурье на «достаточно хороших» функциях символом. Особый интерес в образах Фурье представляет собой многомерный случай с гармонической характеристической частью в символе. Описание образа операторов и соответствующих пространств дробной гладкости невозможно без явного восстановления ядра рассматриваемого оператора. На «достаточно хороших» функциях такое восстановление получено. На основании этого решен вопрос о действии оператора типа потенциала в пространствах суммируемых функций. В рамках метода аппроксимативных обратных операторов получено их обращение. Описаны классы фиксированной дробной гладкости, построенные по указанным операторам.

И. А. Шакиров (Набережные Челны)
iskander@tatngpi.ru

О НАИЛУЧШИХ ЗАМЕНАХ КОНСТАНТ ЛЕБЕГА ПОЛИНОМОВ ЛАГРАНЖА

В процессе оценки погрешности, допущенной при интерполировании периодической функции $x(t)$ полиномами Лагранжа, важную роль играют константы Лебега

$$\lambda_n^* = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} ctg\frac{2k-1}{4n}\pi \;\; \lambda_n = \frac{1}{2n+1}(1+2\sum_{k=1}^{n} cosec\frac{2k-1}{4n+2}\pi). \qquad (1)$$

В работе найдены аппроксимирующие их вполне определенные функции

$$\mu_n^* = \frac{2}{\pi}lnn + \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{\pi} + \frac{1}{\pi}ln\frac{8}{\pi},\;\; \mu_n = \frac{2}{\pi}lnn + \frac{5}{6} + \frac{\gamma}{\pi} + \frac{1}{\pi}ln\frac{16}{\pi}\;\; (n\in N), \quad (2)$$

которые являются решениями нижеследующих экстремальных задач:

$$\inf_{b\in[0,\infty)}\sup_{n\in N}|\lambda_n^* - \frac{2}{\pi}lnn - b| = \sup_{n\in N}|\lambda_n^* - \mu_n^*| = 0.018738586\cdots = \varepsilon^*, \qquad (3)$$

$$\inf_{b\in[0,\infty)}\sup_{n\in N}|\lambda_n - \frac{2}{\pi}lnn - b| = \sup_{n\in N}|\lambda_n - \mu_n| = 0.131436319\cdots = \varepsilon, \qquad (4)$$

где γ – константа Эйлера; $\varepsilon^*, \varepsilon$ – наилучшие приближения констант (1). Функции (2) получены на основе результатов работы [1] и обеспечивают наилучшее равномерное приближение соответствующих констант Лебега.

Замечание. Рассматривая задачи (3), (4) на различных подмножествах N_0 множества N и используя при этом свойство строгого убывания остаточных членов $\lambda_n^* - (2/\pi)lnn$, $\lambda_n - (2/\pi)lnn$, можно сколько угодно уменьшать значения погрешностей в (3) и (4). Например, для константы Лебега λ_n^* при $N_0 = \{5, 6, 7, 8, \cdots\} \subset N$ имеем: $\lambda_1^* = 1$, $\lambda_2^* = \sqrt{2}$, $\lambda_3^* = 5/3$, $\lambda_4^* = 2cos(\pi/8)$, $\lambda_n^* \approx \widetilde{\mu_n^*} \equiv (2/\pi)lnn + cos(\pi/8) + \gamma/\pi - (1/\pi)ln(\pi/2)$ $(n \geq 5)$, причем

$$\inf_{b\in[0,\infty)} \sup_{n\in N_0} |\lambda_n^* - \frac{2}{\pi}lnn - b| = \sup_{n\in N_0} |\lambda_n^* - \widetilde{\mu_n^*}| = 0.001346918\cdots .$$

Таким образом, выбором множества N_0 погрешность ε^* уменьшена примерно в 14 раз.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шакиров И.А. О влиянии выбора узлов лагранжевой интерполяции на точные и приближенные значения констант Лебега// Сибирский математический журнал. 2014. Т.55, № 6. С. 1404–1423.

А. А. Шоманова., Н. Ж. Наурызбаев, Н. Темиргалиев
(Астана, Казахстан)
anar93.71@mail.ru, nngmath@mail.ru, nngmath@mail.ru

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫМИ АГРЕГАТАМИ «ТИПА СМОЛЯКА» С ЯДРОМ ДИРИХЛЕ В ШКАЛЕ КЛАССОВ УЛЬЯНОВА

В порядке идей из статьи [1] и диссертации С.А.Смоляка [2], заменой тензорных произведений *классов функций* на тензорные произведения *функционалов*, в [3-4] была получена общая формула и на ее основе при $D_\nu(x) = \sum_{n=-2^{\nu-1}}^{2^{\nu-1}} \lambda_n^{(\nu)} e^{2\pi inx}$ был выписан оператор восстановления функций

$$\Lambda_\Omega(x, f; D) \equiv \sum_{(\nu_1,\ldots,\nu_s)\in\Omega\subset Z^s_{\nu_0}} \frac{1}{2^{\nu_1+\cdots+\nu_s}} \sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1}-1} \cdots \sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s}-1} \left\{ \prod_{j=1}^{s} \sum_{n_j=-2^{\nu_j-1}}^{2^{\nu_j-1}} \left[1 - \right.\right.$$

$$\left.\left. -sgn\left(\nu_j - \nu_j^{(0)}\right)\left(1 + (-1)^{k_j}\right) \lambda_{n_j}^{(\nu_j-1)}(j)\right] \cdot e^{2\pi in_j(x_j - \frac{k_j}{2^{\nu_j}})} \right\} f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}}, ..., \frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right).$$

В данной работе в шкале классов Ульянова (см. [3]) получены двусторонние оценки погрешностей вычислительного агрегата $\Lambda_\Omega(x, f; D)$

в случае, когда $D_\nu(x)$ есть ядро Дирихле. Для класса Коробова $E_s^r \equiv U_s\left(-\vec{1}, \vec{1}, \vec{1}, \vec{1}\right)$ и класса малой гладкости $F_s^\tau \equiv U_s\left(-\vec{1}, \vec{1}, \vec{1}, \overrightarrow{\log_2^{-\tau}(\cdot+1)}\right)$ справедлива

Теорема. Для всех q, $q > \nu_1^{(0)} + \cdots + \nu_s^{(0)}$

1. $\sup\limits_{f \in E_s^r} \|f(x) - \Lambda_q(x; f; D)\|_{C([0,1]^s)} \asymp \frac{(\ln N)^{(s-1)r}}{N^{r-1}}\ (r > 1)$,
2. $\sup\limits_{f \in F_s^\rho} \|f(x) - \Lambda_q(x; f; D)\|_{C([0,1]^s)} \asymp \frac{1}{(\ln N)^{(\rho-2)}}\ (\rho > 2)$,

где $N = N(q) \asymp 2^q q^{s-1}$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Смоляк С.А.* // ДАН СССР. 1963. Т. 148. № 5. С. 1042–1045.
2. *Смоляк С.А.* Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них: // Дисс. . . . канд. физ.- матем. наук. М.: 1965. Орг. п/я 2325. С. 118–119.
3. *Темиргалиев Н.* // Докл.РАН. 2003. Т. 393. №5. С.605–608.
4. *Темиргалиев Н.* // Докл. РАН, 2010. Т. 430. №4. С. 460–465.

В. И. Щербаков (Жуковский)
kafmathan@mail.ru (для В.И.Щербакова)

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО СИСТЕМАМ ВИЛЕНКИНА И ПО СИСТЕМАМ ТИПА ХААРА НА НУЛЬМЕРНЫХ ГРУППАХ

Пусть $p_0 = 1, \{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность, состоящая из простых чисел; $m_n = \prod\limits_{k=0}^{n} p_k\ (n = 0, 1, 2, \ldots)$ и G — нульмерная компактная абелева группа (группа Виленкина) с операцией $\oplus$, вложенными подгруппами $G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_n \supset \ldots$ и $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} G_n = \{0_G\}$ (0_G – нулевой элемент группы G) и фактор-группа $G_{n-1} \setminus G_n$ имеет порядок $p_n\ (n = 1, 2, \ldots)$. В каждом из множеств $G_{n-1} \setminus G_n$ зафиксируем элемент $e_n\ (n = 1, 2, \ldots)$, который назовем базисным.

Пусть $S(x) = S_E(x)$– определённая в [1] S-мажоранта (привязана к системе базисных элементов $E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$). Тогда справедлива

Теорема. *В случае* $\sup\limits_n p_n = \infty$ *найдётся непрерывная на группе* G *функция f(t), для которой при одной системе базисных элементов*

E_1 *выполнено условие*

$$\int\limits_G |f(x \oplus t) - f(x)| S_{E_1}(t)\, dt < \infty$$

и её ряд Фурье по системе типа Хаара сходится в точке x, однако есть и другой набор базисных элементов E_2, *относительно которого ряд Фурье по той же системе типа Хаара от той же самой функции f(t) и в той же точке x разойдётся.*

Аналогичный результат имеет место и для систем Виленкина. Таким образом, поточечный признак сходимости рядов Фурье по системам типа Хаара и системам Виленкина относительно определённой в [1] S-мажоранты, аналогичный признаку сходимости Дини, в случае $\sup\limits_n p_n = \infty$ зависит от выбора базисных элементов $E = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Другие интересные результаты сформулированы в [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Щербаков В. И.* Особенности поточечного признака сходимости Дини рядов Фурье по системам Виленкина и по обобщённым системам Хаара на нульмерных группах // Современные проблеммы теории функций и их приложения; тез. докл. XVIII Международной Саратовской зимней школы, Саратов, 2016. С. 341–345.

Секция I
Международная конференция по стохастическим методам

A. A. Abdushukurov, R. S. Muradov (Tashkent, Uzbekistan)
a_abdushukurov@rambler.ru, r_muradov@myrambler.ru

ESTIMATION OF BIVARIATE SURVIVAL FUNCTION BY RANDOM CENSORED DATA [1]

The problem of estimation of multivariate distribution (or survival) function from incomplete data is considered with beginning of 1980's (Campbell (1981), Campbell & Földes (1982), Hanley & Parnes (1983), Horváth (1983), Tsay, Leurgang & Crowley (1986), Burke (1988), Dabrowska (1988, 1989), Gill (1992), Huang (2000), Abdushukurov (2004), Abdushukurov & Muradov (2011, 2013) etc.). In the special bivariate case, there are the numerous examples of paired data representing the times to death of individuals (twins or married couples), the failure times of components of system and others which subject to random censoring with possible dependence between the two censoring variables. At present time there are several approaches to estimation of survival functions of vectors of life times. However, some of these estimators either are inconsistent or not fully defined in range of joint survival functions and hence not applicable in practice. Almost all of these estimators have an exponential or product structures. In this work we present other type of estimator of power structure for bivariate survival function $F(t,s)$ of bivariate lifetime vector, which is censored from the right by censoring vector of random variables. We prove weak convergence and strong consistency results for estimators. Moreover, we study estimator of bivariate survival function under random censored observations in the presence of covariate and we study the large sample properties of proposed estimators and present results of weak convergence.

Ю. В. Авербух (Екатеринбург)
ayv@imm.uran.ruu

ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ ИГР С НЕПРЕРЫВНЫМ ВРЕМЕНЕМ[1]

В работе рассматривается построение приближенно оптимального управления в конфликто управляемой стохастической системе с

[1]This work was supported by Republic of Uzbekistan (project F4-01).
[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-01-07909).

непрерывным временем. Приближенно оптимальная стратегия строится на основе решения задачи управления для моделирующей системы. Оно предполагается известным. Динамика каждой из систем задается генератором

$$L^i_t[u,v]\varphi(x) = \frac{1}{2}\langle G^i(t,x,u,v)\nabla,\nabla\rangle\varphi(x) + \langle f^i(t,x,u,v),\nabla\rangle\varphi(x) \\ + \int_{\mathbb{R}^d}[\varphi(x+y) - \varphi(x) - \langle y,\nabla\varphi(x)\rangle\mathbf{1}_{B_1}(y)]\nu^i(t,x,u,v,dy).$$

Здесь $t \in [0,T]$, $x \in \mathbb{R}^d$, $u \in U$, $v \in V$. Переменные u и v обозначают мгновенные управления первого и второго игроков соответственно.

Предполагается, что цель первого (второго) игрока состоит в минимизации (максимизации) величины $\mathbb{E}g(X(T))$.

Вводится понятие u-стабильной функции для системы, описываемой генератором L^2. Функция $c_+ : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ называется u-стабильной, если для произвольного заданного интервала $[s,r]$, начальной позиции y и известного постоянного управления второго игрока первый игрок может так выбрать свое управление (которое является прогрессивно измеримым процессом), что для соответствующего случайного процесса выполнено неравенство $\mathbb{E}c_+(r,X(r)) \leq c_+(s,y)$.

Основной результат работы состоит в оценке верхней функции цены $\mathrm{Val}_+(s,y)$ в исходной игре (с динамикой, задаваемой генератором L^1).

Теорема 1. *Если c_+ — u-стабильная функция для генератора L^2, то*

$$\mathrm{Val}_+(s,y) \leq c_+(s,y) + R\cdot C\sqrt{\varkappa + M^1_0 + M^2_0}.$$

Здесь R — константа Липщица для функции платы g, C определяется константами Липшица для функций динамики, $\varkappa$ задает «расстояние» между генераторами L^i, величина M^i_0 описывает степень «стохастичности» генератора L^i.

С. Ж. Айбатов, Л. Г. Афанасьева (Москва)
aybatov.serik@gmail.com, l.g.afanaseva@yandex.ru

УСЛОВИЯ СУБЭКСПОНЕНЦМАЛЬНОСТИ СТАЦИОНАРНОГО ВРЕМЕНИ ОЖИДАНИЯ В ОДНОКАНАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ОБСЛУЖИВАНИЯ С РЕГЕНЕРИРУЮЩИМ ВХОДЯЩИМ ПОТОКОМ

Рассматривается одноканальная система обслуживания с регенерирующим входящим потоком $X(t)$. Процесс $X(t)$ отображает суммарную работу, поступившую в систему за время $[0,t]$. Пусть θ_n — n-я точка регенерации $X(t)$, а $\tau_n = \theta_n - \theta_{n-1}$ — длина n-го периода регенерации, $\mathsf{E}\tau_n < \infty$. За n-й период регенерации поступает ξ_n требований, суммарная работа которых γ_n, $\mathsf{E}\gamma_n < \infty$. Так как процесс $X(t)$ регенерирующий, то $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$ состоит из независимых одинаково распределенных случайных величин с общей функцией распределения $G(x)$, обозначим $\bar{G}(x) = 1 - G(x)$, $g(x) = \int\limits_x^{\infty} \bar{G}(y)dy$.

Времена обслуживания требований описываются стационарной последовательностью случайных величин $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$, n-е требование поступает в момент t_n, $\zeta_n = t_{n+1} - t_n$.

Введем процесс виртуального времени ожидания $W(t)$ и вложенные процессы $W_n = W(\theta_n - 0)$, $w_n = W(t_n - 0)$. Считаем, что коэффициент загрузки системы $\rho = \frac{\mathsf{E}\gamma_n}{\mathsf{E}\tau_n} < 1$, тогда у процессов $W(t)$, W_n, w_n существуют предельные стационарные распределения $\Psi(x)$, $\Phi(x)$, $F(x)$ соответственно.

Теорема 1. *Пусть $G(x)$ сильно субэкспоненциальная функция распределения и при $x \to \infty$*

$$\bar{G}(x) \sim \mathsf{P}(\gamma_1 > x + \tau_1).$$

Тогда при $x \to \infty$

$$\bar{\Phi}(x) \sim a^{-1} g(x),$$

где $a = \mathsf{E}\tau_1 - \mathsf{E}\gamma_1$, а $f(x) \sim h(x)$ означает, что $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{h(x)} = 1$.

При некоторых дополнительных условиях Теорема 1 верна для функций $\Psi(x)$ и $F(x)$. Эту теорему мы применяем к случайному блужданию с отрицательным сносом, которое порождено стационарной обновляющейся эргодической последовательностью $\{\eta_n - \zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$. Таким образом, получаем асимптотику больших уклонений для случайной величины $M = \max\limits_{n\geq 0} S_n$, где $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (\eta_k - \zeta_k)$, $S_0 = 0$.

В. И. Аркин, Э. Л. Пресман, А. Д. Сластников (Москва)
presman@cemi.rssi.ru

О СТРУКТУРЕ МНОЖЕСТВА ПРОДОЛЖЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОЙ ОСТАНОВКИ ОБЩЕЙ ОДНОМЕРНОЙ ДИФФУЗИИ [1]

Рассматривается регулярная одномерная диффузия X_t $(t \geq 0)$, $X_0 = x$ со значениями в объединении интервала I и «кладбища». Если у диффузии меры скорости и убивания имеют плотности, а шкала дважды дифференцируема, получается диффузия Ито.

Задача оптимальной остановки состоит в нахождении «цены игры» $V(x) = \sup_\tau \mathrm{E}_x g(X_\tau)$ для измеримой функции выплат $g(x)$. В. И. Аркин предложил рассматривать необходимые и достаточные условия того, что множество продолжения $C = \{x : g(x) < V(x)\}$ имеет ту или иную структуру. Необходимые и достаточные условия пороговости множества продолжения (т.е. $C = \{x \in I : x<p\}$ для некоторого p) при дополнительных предположениях на функцию выплат и наличии дисконтирования (которое эквивалентно добавлению к мере убивания некоторой меры пропорциональной мере скорости) были получены в [1] для диффузии Ито, в [2] (условия другого типа) для общей диффузии без убивания, и сформулированы в [3] без дополнительных предположений на диффузию и функцию выплат.

В работе получены необходимые и достаточные условия островного характера множества продолжения: $C = \{x \in I : q < x < p\}$. Доказательство основано на предложенном Э. Л. Пресманом (см. [4]) методе модификации функции выплат и полученной Э. Л. Пресманом и А. Д. Сластниковым характеризации эксцессивных функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аркин В. И.* Пороговые стратегии в задачах оптимальной остановки одномерных диффузионных процессов // Теория вероятностей и ее применения, 2014, т. 59, вып. 2, р. 365–374.

2. *Crocce F., Mordecki E.* Explicit solutions in one-sided optimal stopping problems for one-dimensional diffusions // Stochastics, 2014,v.86,3, p.491–509.

3. *Пресман Э. Л., Сластников А. Д.* Пороговые стратегии в задачах оптимальной остановки // Обозрение прикладной и промышленной математики, 2014, т. 21, вып. 5.

4. *Presman E.* Solution of the optimal stopping problem for one-dimensional diffusion based on a modification of the payoff function // In: Prokhorov and Contemporary Probability Theory. Springer, 2013, p. 371–403.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-06-03723).

И. В. Атласов (Воронеж)
mathematic1@rambler.ru

РАБОТА ДВУХ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ С УЧЕТОМ ВРЕМЕНИ ИХ ЗАМЕНЫ

Рассматривается система, состоящая из двух элементов, начинающих работать одновременно. Это может быть две камеры следящие за чем-то, или камеры, снимающие футбольный матч. Также это могут быть два аппарата искусственной поддержки функций жизнедеятельности человека, когда одновременная поломка аппаратов грозит потерей функций жизнедеятельности. Имеется в виду ситуация, когда должно функционировать хотя бы одно устройство. Работу системы будем считать остановленной, если в ремонте находятся два устройства.

Если более подробно, то работа системы происходит следующим образом: одновременно начинают работать два устройства, затем одно из них ломается, но во время ремонта одного не должно прекращает работать другое устройство. Ломаться первое может несколько раз, если в это время работает другое устройство. Когда ломается другое устройство, во время его ремонта должно работать первое устройство. Окончанием времени работы системы будем считать тот момент времени, когда сломалось одно из устройств и второе до этого времени находилось в ремонте. Для однородных процессов [2], состоящих из времени ремонта и работы устройств, удалось построить аналитический вид характеристической функцию времени работы системы.

Далее, более подробно, было исследовано математическое ожидание времени работы системы для частного случая, когда времена работы и ремонта системы распределены по экспоненциальному закону. В результате получены рекомендации по увеличению среднего времени работы системы, которые являются не совсем очевидными. Доказано, что среднее время работы системы пропорционально сумме среднего времени работы и ремонта устройства.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. М.: УРСС, 2001.

2. *Боровков А. А.* Теории вероятностей. М.: Наука, 1986.

3. *Ширяев А. Н.* Вероятность. М.: Наука, 1980.

4. *Атласов И.В.* // Об эффективности работы нескольких взаимозаменяемых устройств. Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. 2015. № 4. С. 85–101.

Л. Г. Афанасьева, А. В. Ткаченко (Москва)
l.g.afanaseva@yandex.ru

ЭРГОДИЧНОСТЬ МНОГОКАНАЛЬНЫХ СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ С НЕНАДЕЖНЫМИ НЕИДЕНТИЧНЫМИ ПРИБОРАМИ

Системы обслуживания, в которых может происходить прерывание работы приборов, естественным образом возникают при моделировании компьютерных, телекоммуникационных и производственных систем. Обзор многих проблем и методов их решения для систем с прерыванием обслуживания представлен в (Krishnamoorthy и др., 2012). В данной работе изучается система с m неоднородными приборами и общей очередью в условиях непрерывного времени. Предполагается, что входящий поток $X(t)$ является регенерирующим с интенсивностью $\lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{X(t)}{t}$. Рассматриваются две дисциплины возобновления обслуживания требований, обработка которых была прервана поломкой приборов: дисциплина повторения обслуживания с новым временем (D_1) и дисциплина продолжение обслуживания с предыдущим временем (D_2). В первом случае обслуживание требования начинается сначала на том же приборе с новым временем обслуживания, которое не зависит от предыдущего. Во втором случае обслуживания продолжается с тем же временем обслуживания. Пусть $B_i(t)$, $i = \overline{1,m}$ функция распределения времен обслуживания для i-го прибора и $H_i(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_i^{n*}(t)$. Предположим, что времена восстановления i-го прибора составляют последовательность $\{u_{in}^{(1)}\}_{n=1}^{\infty}$ независимых одинаково распределенных случайных величин (н.о.р.с.в.) с математическим ожиданием $a_i^{(1)}$. Времена бесперебойной работы i-го прибора составляют последовательность $\{u_{in}^{(2)}\}_{n=1}^{\infty}$ н.о.р.с.в. с математическим ожиданием $a_i^{(2)}$. Пусть $Q^d(t)$ — число требований в системе в момент времени t для системы с дисциплиной D_d $(d = 1,2)$. Приведем основные результаты, которые имеют место при некоторых, достаточно широких, условиях.

Теорема. Процесс $Q^d(t)$ эргодичен тогда и только тогда, когда $\rho_d < 1$, $(d = 1,2)$, где

$$\rho_1 = \frac{\lambda}{\mu_1}, \quad \mu_1 = \sum_{i=1}^{m} \frac{EH_i(u_i^{(2)})}{(a_i^{(1)} + a_i^{(2)})}, \quad \text{for} \quad D_1;$$

$$\rho_2 = \frac{\lambda}{\mu_2}, \quad \mu_2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{a_i^{(2)}}{(a_i^{(1)} + a_i^{(2)})b_i}, \quad \text{for} \quad D_2.$$

Я. И. Белопольская (Санкт-Петербург)
yana@ yb1569.spb.edu

ДИФФУЗИОННЫЕ МОДЕЛИ ДЛЯ СИЛЬНО СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ [1]

В докладе обсуждаются связи между теорией марковских процессов и теорией обобщенных решений задачи Коши для систем нелинейных параболических уравнений с недиагональной главной частью, называемых системами с кросс-диффузией. Рассмотрим задачу Коши для системы квазилинейных параболических уравнений вида

$$\frac{\partial u^m}{\partial t} = \Delta(u^m[u^1+u^2]) + c_u^m u^m, \quad u^m(0,x) = u_0^m(x),\, m=1,2, \tag{1}$$

где $c_u^m = c_m - c_{m1}u^1 - c_{m2}u^2$. Пусть $M_u = \sqrt{[u^1+u^2}$ и $w(\theta)$ — винеровский процесс. Рассмотрим случайные процессы $\xi(\theta), \eta(t)$, удовлетворяющие СДУ

$$d\xi(\theta) = M_u(\xi(\theta)w(\theta), \quad \xi(0) = y, \tag{2}$$

$$d\eta^m(\theta) = \tilde{c}_u^m(\xi(\theta))\eta^m(\theta)d\theta + C_u^m(\xi(\theta)\eta^m(\theta)dw(\theta), \quad \eta^m(0) = 1, \tag{3}$$

где

$$\tilde{c}_u^m(\xi(\theta)) = c_u^m(\xi(\theta)) - l\nabla M_u(\xi(\theta))\|^2, \quad C_u^m(\xi(\theta)) = -\nabla M_u(\xi(\theta)).$$

Теорема 1. *Пусть существует обобщенное решение $u^m(t,x)$ системы (1) из соболевского класса H^1. Тогда справедливо представление*

$$u^m(t,x) = E[\hat{\eta}^m(t)u_0(\hat{\xi}_{0,x}(t))],$$

где $\hat{\xi}(\theta) = \xi(t-\theta), \hat{\eta}^m(\theta) = \eta(t-\theta)$ — обращенные по времени процессы относительно процессов $\xi(\theta), \eta(\theta)$, удовлетворяющих СДУ (2), (3).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Belopolskaya Ya. I.* Probabilistic Model for the Lotka-Volterra System with Cross-Diffusion 214(4), 2016, // J. of Math. Sci. 2016. V. 214, № 4. P. 425–442.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-01-01453).

В. А. Бовкун (Екатеринбург)
123456m@inbox.ru

О РЕШЕНИИ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ В АБСТРАКТНОЙ АЛГЕБРЕ КОЛОМБО[1]

Доклад посвящен исследованию абстрактной стохастической задачи Коши для квазилинейного уравнения

$$X'(t) = AX(t) + F(X(t)) + B\mathbb{W}(t), \qquad t \in [0;T], \quad X(0) = \zeta. \tag{1}$$

Здесь оператор A является генератором n-раз интегрированной экспоненциально ограниченной полугруппы в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R})$, F — нелинейное отображение в $L^2(\mathbb{R})$, $\{\mathbb{W}(t),\ t \geq 0\}$ — (обобщенный) процесс типа белого шума со значениями в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$. Начальное условие ζ — H_a-значная случайная величина, где H_a — некоторая алгебра в $L^2(\mathbb{R})$ и $B \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, H_a)$

Для решения задачи Коши (1) может быть использован подход, основанный на методах теории распределений, поскольку в этом случае процесс белого шума удается определить как обобщенную производную непрерывной функции. Однако, при постановке задачи (1) в пространстве абстрактных распределений, присутствие нелинейного отображения F приводит к проблеме умножения распределений. В этом случае, опираясь на теорию Коломбо умножения обобщенных функций (см., напр., [1]) и продолжая развивать методы, предложенные в работе [2], посвященной решению задачи с генератором полугруппы класса C_0 в абстрактной стохастической фактор-алгебре $G(\Omega, H_a)$, погрузим задачу (1) в $G(\Omega, H_a)$. Тогда для решения задачи (1) с генератором интегрированной полугруппы имеет место результат.

Теорема 1. *Пусть оператор A порождает n раз интегрированную полугруппу в $L^2(\mathbb{R})$, $DomA^2 \subset H_a \subset DomA$, отображение F является бесконечно дифференцируемым и $F(0) = 0$. Тогда существует единственное решение задачи (1) в фактор-алгебре $G(\Omega, H_a)$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Colombeau J. F.* Elementary Introduction to New Generalized Functions. Amsterdam. North Holland, 1985. 282 p.

2. *Мельникова И. В., Алексеева У. А.* Решение абстрактной задачи Коши с нелинейными и случайными возмущениями в алгебре Коломбо // Доклады Академии Наук. 2013. Т. 449, № 4. С. 393–397.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке постановления N 211 Правительства Российской Федерации, контракт N 02.A03.21.0006.

Е. В. Бурнаев (Москва)
burnaev@iitp.ru

О ВЫДЕЛЕНИИ ТРЕНДА ИЗ ШУМА С ДЛИННОЙ ПАМЯТЬЮ И ДЕТЕКТИРОВАНИИ АНОМАЛИЙ НА ЕГО ФОНЕ [1]

Мы рассматриваем задачу оценивания векторного параметра $\vec{\theta} = (\theta_0, \ldots, \theta_n)^{\mathrm{T}}$ коэффициента сноса фрактального броуновского движения. Коэффициент сноса представляется в виде разложения $\sum\limits_{i=0}^{n} \theta_i \varphi_i(t)$ по конечному числу известных функций $\varphi_i(t), i = 0, \ldots, n$. Для параметров коэффициента сноса получена оценка максимального правдоподобия, а также Байесовские оценки для нормального и равномерного априорных распределений. На основе полученных оценок разработан алгоритм выделения квазипериодического тренда и детектирования аномалий в сигналах на его фоне. Применение алгоритма проиллюстрировано на примере решения задачи предсказательного технического обслуживания программно-нагруженных систем.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Artemov A., Burnaev E.* Optimal sequential estimation of a signal, observed in a fractional gaussian noise // Theory Probab. Appl. 2016. Vol. 60, No. 1. P. 126–134.

2. *Artemov A., Burnaev E., Lokot A.* Nonparametric Decomposition of Quasi-periodic Time Series for Change-point Detection // Proc. SPIE 9875, Eighth International Conference on Machine Vision (ICMV 2015), 987520 (December 8, 2015); doi:10.1117/12.2228370.

3. *Artemov A., Burnaev E.* Ensembles of Detectors for Online Detection of Transient Changes // Proc. SPIE 9875, Eighth International Conference on Machine Vision (ICMV 2015), 98751Z (Dec. 8, 2015); doi:10.1117/12.2228369.

Yu. E. Gliklikh (Voronezh)
yeg@math.vsu.ru

ON DESCRIPTION OF MOTION OF A QUANTUM PARTICLE IN THE CLASSICAL GAUGE FIELD IN THE LANGUAGE OF STOCHASTIC MECHANICS [1]

Nelson's Stochastic Mechanics is a mathematical theory that is based on the classical physics but gives the same predictions as the quantum mechanics for a broad class of problems, for which both theories are applicable. The Stochastic Mechanics can be considered as a special method of quantization

[1] Исследование выполнено в ИППИ РАН исключительно за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-50-00150).

[1] The research is supported in part by RFBR (project 15-01-00620).

distinct from Hamiltonian and Lagrangian (in terms of path integrals) ones. An important feature of the Stochastic Mechanics is that it deals with quantization of the second Newton law, not Hamiltonian or Lagrangian equations. The analog of Newton's law, the equation of motion in Stochastic Mechanics, is known as the Newton-Nelson equation. It is given in terms of the so-called mean derivatives of stochastic processes.

Up to the present time a lot of quantum mechanical problems have been investigated in the language of Stochastic Mechanics. However the description of a quantum particle motion in the classical gauge field has not been translated in this language. We elaborate a special version of Stochastic Mechanics on the total space of a complex vector bundle over a Lorentz manifold, in particular, over a space-time of General Relativity. For a particular case of symmetry group $U(1)$ we investigate relations with quantum electrodynamics.

Then we construct and investigate an analogue of the Newton-Nelson equation on the total space of real vector bundle over a Riemannian manifold.

С. Д. Горбань (Москва)
gorban22@mail.ru, gorban.sd@mail.ru

ЗАДАЧА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ НА КОНЕЧНОМ ВРЕМЕННОМ ИНТЕРВАЛЕ ДЛЯ ФРАКТАЛЬНОГО БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ

Пусть есть наблюдаемый процесс $(X_t)_{t\geq 0}$ такой, что $X_t = \theta\mu t + \sigma B_t^H$, где $(B_t^H)_{t\geq 0}$ - фрактальное броуновское движение с показателем Хёрста H, $\mu \neq 0$, $\sigma^2 > 0$, а θ - случайная величина, независимая с B^H и принимающая два значения: $P(\theta = 1) = \pi$, $P(\theta = 0) = (1 - \pi)$. Таким образом, π и $(1 - \pi)$ играют роль априорных вероятностей статистических гипотез $H_1 : \theta = 1$ и $H_0 : \theta = 0$. Задача последовательной проверки гипотез заключается в том, чтобы найти оптимальное решающее правило (τ, d), где $0 \leq \tau \leq T$ - момент остановки относительно естественной фильтрации процесса X, а d — $\mathcal{F}_\tau^X$-измеримая случайная величина, принимающая значения 0 и 1. Решающее правило считается оптимальным, если оно минимизирует следующий функционал:

$$F(\tau, d) = E_\pi \left[\tau + aI(d = 0, \theta = 1) + bI(d = 1, \theta = 0)\right].$$

С помощью интегрального преобразования, предложенного А.А. Муравлёвым в [2], и замены времени удаётся свести задачу для фрактального броуновского движения к соответствующей задаче для винеровского процесса с нелинейным штрафом за наблюдение. Показано, что последовательная проверка гипотез сводится к задаче об оптимальной остановке и связанной с ней задаче со свободной границей. Также получено, что граница задается функциями, которые описываются через интегральное уравнение Вольтерры. Кроме того, аналогично случаю винеровского процесса (см. [1]) были получены свойства границы в терминальный момент времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Горбань С. Д.* Асимптотические свойства решения задачи последовательной проверки гипотез на конечном временном интервале // УМН, 2015, Т. 70, № 4. С. 205–206.

2. *Муравлёв А. А.* Методы последовательного различения гипотез о значении сноса фрактального броуновского движения // УМН, 2013, Т. 68, № 3. С. 193–194.

А. С. Гречко, О. Е. Кудрявцев (Ростов-на-Дону)
alex@itparadigma.ru

ОСОБЕННОСТИ ПОСТРОЕНИЯ ИНДЕКСА ВОЛОТИЛЬНОСТИ РОССИЙСКОГО СРОЧНОГО РЫНКА, УЧИТЫВАЮЩЕГО ВОЗМОЖНЫЕ СКАЧКИ ЦЕН [1]

В последние годы объемы торгов российского валютного, фондового и срочного рынка существенно выросли. Важнейшим количественным показателем риска на Московской бирже является российский индекс волатильности RVI, аналог американского индекса VIX.

Проведенный авторами анализ [1] показывает, что индексы, основанные на формуле волатильности свободной от модели [2]:

$$\sigma^2 = \frac{1}{T}E[\langle \ln(S)\rangle_T] = -\frac{Q_S}{T}\left[\ln\left(\frac{S_T}{E[S_T]}\right)\right], Q_S = 2, \tag{1}$$

плохо оценивают реализованную волатильность в случае российского финансового рынка. Существующая методика оценки RVI применима для диффузионных процессов или процессов с редкими скачками. Вместе с тем, как показало исследование, наиболее адекватны для описания индекса РТС являются процессы Леви с неограниченной вариацией. В случае процессов Леви в формуле (1) множитель Q_S отличается от 2 и вычисляется по формуле [3]:

$$Q_S = \frac{E\langle S_T\rangle}{\ln E[e^{S_T}] - E[S_T]} \tag{2}$$

В данной работе множитель Q_S удалось выразить через рыночные цены опционов, тем самым мы получили новую методику расчета индекса волатильности, учитывающую скачки в динамике индекса РТС.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РГНФ, проект №15-32-01390

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гречко А. С., Кудрявцев О. Е.* Исследование волатильности российского срочного рынка // Обозрение прикладной промышленной математики. 2015г., том. 22 выпуск 5.

2. *M. Fukasawa et. al.* Model-Free implied volatility: from surface to index. // International Journal of Theoretical and Applied Finance. 2011. V. 14, № 4, p. 433–463.

3. *Peter Carr, Roger Lee , Liuren Wu* Variance swaps on time-changed Levy processes // Finance and Stochastics. April 2012, V. 16, p. 335–355.

Н. В. Грибкова (Санкт-Петербург)
n.gribkova@spbu.ru

ВЕРОЯТНОСТИ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ УСЕЧЕННЫХ L-СТАТИСТИК

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения F, $X_{1:n} \leq \cdots \leq X_{n:n}$ обозначают порядковые статистики, соответст- вующие первым n наблюдениям. Рассмотрим усеченную L-статистику

$$T_n = n^{-1} \sum_{i=k_n+1}^{n-m_n} c_{i,n} X_{i:n},$$

где $c_{i,n} \in \mathbb{R}$, k_n, m_n – две целочисленные последовательности, такие что $0 \leq k_n < n - m_n \leq n$. Обозначим $\alpha_n := k_n/n$, $\beta_n := m_n/n$, и предположим, что $\alpha_n \to \alpha$, $\beta_n \to \beta$ при $n \to \infty$, где $0 < \alpha < 1 - \beta < 1$.

Положим $\mu_n = \int\limits_{\alpha_n}^{1-\beta_n} J(u) F^{-1}(u)\, du$ и пусть σ обозначает асимпто- тическую дисперсию T_n. Следующий результат из готовящейся к публикации работы [2] является усилением результата статьи [1].

Теорема 1. *Предположим, что F^{-1} удовлетворяет условию Гёльдкра порядка $0 < \varepsilon \leq 1$ в некоторых окрестностях α, $1-\beta$ и что $\max(|\alpha_n - \alpha|, |\beta_n - \beta|) = O\big(n^{-\frac{1}{2+\varepsilon}}\big)$. Кроме того, предположим, что $\sum\limits_{i=k_n+1}^{n-m_n} \big|c_{i,n} - n \int\limits_{(i-1)/n}^{i/n} J(u)\, du\big| = O(n^{\frac{1}{2+\varepsilon}})$ для некоторой функции J, определенной и удовлетворяющей условию Липшица на некотором открытом множестве $I \subseteq (0,1)$, содержащем $[\alpha, 1-\beta]$.*

Тогда для любой последовательности $a_n \to 0$ и любого $A > 0$

$$\mathbf{P}\big(n^{1/2}\sigma^{-1}(T_n - \mu_n) > x\big) = [1 - \Phi(x)](1 + o(1)), \tag{1}$$

при $n \to \infty$, равномерно в диапазоне $-A \leq x \leq a_n n^{\varepsilon/(2(2+\varepsilon))}$.

Следствие 1. *Предположим, что условия Теоремы 1 выполнены с* $\varepsilon = 1$. *Тогда для любой последовательности* $a_n \to 0$ *и* $A > 0$ *соотношения* (1) *имеют место равномерно в диапазоне* $-A \le x \le a_n n^{1/6}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Callaert, H., Vandemaele, M. and Veraverbeke, N.* A Cramér type large deviations theorem for trimmed linear combinations of order statistics// Comm. Statist. Th. Meth. 1982. V.11, P. 2689–2698.

2. *Gribkova N. V.* Cramér Type Large Deviations for Trimmed L-statistics // Probability and Mathematical Statistics. 2016. V. 36 (to appear).

Ю. В. Гусак (Москва)
jul_gusak@mail.ru

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ В ОДНОЙ МОДЕЛИ СТРАХОВАНИЯ

Рассматривается модель работы страховой компании в дискретном времени. Предполагается, что ежегодно поступающие требования образуют последовательность независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин $\{X_n\}_{n\ge1}$, таких что $X_n \sim law(X),\ n \ge 1$. Чтобы обеспечить бесперебойное функционирование компании, применяется перестрахование эксцедента убыточности и производится вливание капитала. Договор перестрахования подразумевает, что уровень собственного удержания на текущий год определяется в начале года. А дополнительные вливания производятся в конце года в случае падения капитала компании ниже фиксированного уровня a.

Находятся параметры перестрахования, минимизирующие ожидаемые совокупные вливания за n лет при условии, что премии страхования и перестрахования рассчитывались по принципу среднего с нагрузкой безопасности (см. [1]).

Оценивается устойчивость минимальных ожидаемых вливаний и оптимальных параметров модели к изменению в распределении страховых требований. А именно, если иски $\{X_n\}_{n\ge1}$ имеют распределение $law(Y)$, отличное от $law(X)$, то в предположении, что величины X и Y близки в метрике Канторовича (см. [2]), выводится оценка для $\sup_{u\ge a} |h_{n_X}(u) - h_{n_Y}(u)|$, где u - начальный капитал компании, $h_{n_X}(u)$ и $h_{n_Y}(u)$ - минимальные вливания при $X_n \sim law(X)$ и $X_n \sim law(Y)$, соответственно.

Так как на практике распределение исков обычно неизвестно, устойчивость решения и ключевых характеристик модели изучается при замене теоретического распределения на его эмпирическую оценку.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bulinskaya E. V, Gusak J. V. and Muromskaya, A. A.* Discrete-time Insurance Model with Capital Injections and Reinsurance.// Methodology and

Computing in Applied Probability, 2015. Volume 17, Issue 4, pp. 899–914.

2. *Rachev S. T., Klebanov L., Stoyanov S. V., Fabozzi F.* The Methods of Distances in the Theory of Probability and Statistics. Springer-Verlag New York, 2013. 619 pages.

В. Г. Задорожний (Воронеж)
zador@amm.vsu.ru

О СТАБИЛИЗАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ГАУССОВЫМ СЛУЧАЙНЫМ ШУМОМ

Изучается линейная система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon_1(t,\omega)Ax + \varepsilon_2(t,\omega)f(t) \qquad (1)$$

с начальным условием $x(t_0) = x_0$, где $t \in T = [t_0,\infty), x : T \to \mathbb{R}^n$ — искомая функция, $f : T \to \mathbb{R}^n$ — заданная векторная функция, A — матрица размера $n \times n, \varepsilon(t,\omega), \varepsilon_2(t,\omega)$ — случайные процессы, ω — случайное событие, x_0 — случайный вектор. Такая система называется мультипликативно возмущенной случайным шумом линейной неоднородной системой дифференциальных уравнений.

Предполагается, что ε_1 является гауссовым случайным процессом, определенным математическим ожиданием $M\varepsilon_1(t)$ и ковариационной функцией $b(s_1,s_2) = M(\varepsilon_1(s_1)\varepsilon_1(s_2)) - M(\varepsilon_1(s_1))M(\varepsilon_1(s_2))$.

Определение. Решение $x(t,x_0)$ уравнения (1) называется устойчивым в среднем, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любого $M(\xi)$, удовлетворяющего условию $\|M(\xi) - M(x_0)\| < \delta(\varepsilon)$, для математического ожидания $M(x(t,\xi))$ выполняется условие $\sup\limits_{t\ge t_0} \|M(x(t,\xi) - M(x(t,x_0))\| < \varepsilon$. Если при этом выполняется условие $\|M(x(t,\xi) - M(x(t,x_0))\| \to 0$ при $t \to +\infty$, то решение называется асимптотически устойчивым в среднем.

Теорема. *Мультипликативно возмущенная гауссовым шумом линейная система дифференциальных уравнений (1) устойчива, асимптотически устойчива, неустойчива в среднем тогда и только тогда, когда*

$$\|\exp(A\int\limits_{t_0}^{t} M(\varepsilon_1(t))dt + \frac{A^2}{2}\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{t_0}^{t} b(s_1,s_2)ds_1ds_2)\|$$

соответственно, ограничено при $t \in [t_0,+\infty)$ *, стремится к нулю при* $t \to +\infty$*, неограничено при* $t \in [t_0,+\infty)$.

Отсюда находятся условия, при которых мультипликативно возмущенная гауссовым случайным шумом линейная система является асимптотически устойчивой в среднем, хотя исходная система $\frac{dx}{dt} = Ax$ является неустойчивой.

А. А. Имомов, Э. Э.Тухтаев (Узбекистан)
imomov_azam@mail.ru

О ПРЕДЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЕ КРИТИЧЕСКИХ ВЕТВЯЩИХСЯ ПРОЦЕССОВ

Пусть $F(s) = \sum_{j\in\mathbb{N}_0} p_j s^j$ обозначает производящую функцию (ПФ) закона эволюции частиц в ветвящемся процессе с дискретным временем, где $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$ и $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$. Обозначим S_a класс медленно меняющихся функций (в смысле Караматы) в точке a. Рассмотрим случай когда $\sum_{j\in\mathbb{N}} jp_j = 1$, то есть процесс является критическим и, предположим, что ПФ $F(s)$ допускает представление

$$F(s) = s + (1-s)^{1+\nu}\mathcal{L}\left(\frac{1}{1-s}\right), \qquad [\Re_\nu]$$

где $0 < \nu \le 1$ и $\mathcal{L}(t) \in \mathsf{S}_\infty$. Обозначим $P_{ij}(n) = \mathsf{P}_i\{Z_n = j\}$, где $\mathsf{P}_i\{*\} := \mathsf{P}\{*|Z_0 = i\}$. Пусть $F_n(s) = \sum_{j\in\mathbb{N}_0} P_{ij}(n)s^j$.

Лемма. *Если выполнено условие* $[\Re_\nu]$, *то*

$$1 - F_n(s) = \frac{\mathcal{N}(n)}{(\nu n)^{1/\nu}} \cdot \left[1 - \frac{M_n(s)}{\nu n}\right],$$

где $\mathcal{N}(x) \in \mathsf{S}_\infty$ *и* $\mathcal{N}^{\,\nu}(n) \cdot \mathcal{L}\left((\nu n)^{1/\nu}\big/\mathcal{N}(n)\right) \to 1$, *а также функция* $M_n(s) \to \mathcal{M}(s)$ *при* $n \to \infty$, *здесь предельная ПФ* $\mathcal{M}(s) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu_j s^j$ *удовлетворяет функциональному уравнению Абеля и* $\sum_{j\in\mathbb{N}} \mu_j = \infty$.

Теорема. *Если выполнено условие* $[\Re_\nu]$, *то*

$$(\nu n)^{1+1/\nu} \cdot P_{11}(n) = \frac{\mathcal{N}_1(n)}{p_0},$$

где функция $\mathcal{N}_1(n) = O\left(\mathcal{N}(n)\right)$ *при* $n \to \infty$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Athreya K. B. and Ney P. E.* Branching processes. Springer, New York, 1972.

2. *Bingham N. H., Goldie C. M. and Teugels J. L.* Regular Variation. Cambridge, University Press, 1987.

3. *Formanov Sh. K. and Azimov Zh. B.* Markov branching processes with regularly varying generating function and immigration of a special form // Theory Prob. and Math. Stat., 2002, v. 65, pp. 181–188.

4. *Imomov A. A.* A differential analog of the main lemma of the theory of Markov branching processes and its applications // Ukrainian Mathematical Journal, 2005, v. 57(2), pp. 307–315.

О. Е. Кудрявцев (Ростов-на-Дону)
koe@donrta.ru

НОВЫЕ ПОДХОДЫ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ЦЕН ЭКЗОТИЧЕСКИХ ОПЦИОНОВ В МОДЕЛЯХ ЛЕВИ [1]

Вычисление цен экзотических опционов (барьерных, lookback и др.), включая оценку риска ликвидности или выхода цены базового актива за фиксированный уровень, опирается на поведение процессов супремума (инфимума) цены, характеристические функции которых в случае общих моделей Леви не имеют удобных для численной реализации формул. Пусть X_t – процесс Леви, рассмотрим преобразование Лапласа-Карсона характеристической функции процесса супремума $\overline{X}_t = \sup_{0\le s\le t} X_s$: $\phi_q^+(\xi) = E\left[e^{i\xi\overline{X}_T}\right]$, где $T \sim \operatorname{Exp} q$. Для широкого класса процессов Леви доказана следующая теорема [1].

Теорема 1. *Существует константа $\omega_- < 0$ такая, что $\phi_q^+(\xi)$ допускает аналитическое продолжение для $\Im\xi > \omega_-$ и может быть представлена в виде: $\phi_q^+(\xi) = \exp\left[i\xi F^+(0) - \xi^2\hat{F}^+(\xi)\right]$, где*

$$F^+(x) = I_{(-\infty,0]}(x)(2\pi)^{-1}\int_{-\infty+i\omega_-}^{+\infty+i\omega_-} e^{ix\eta}\frac{\ln(q+\psi(\eta))}{\eta^2}d\eta; \tag{1}$$

$$\hat{F}^+(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}F^+(x)dx. \tag{2}$$

Формулы (1) и (2) могут быть эффективно численно реализованы с помощью быстрого преобразования Фурье.

Применяя алгоритм Гавера-Стехфеста к функции $\phi_q^+(\xi)$, мы получаем характеристическую функцию процесса супремума. Результат можно использовать для построения методов Монте-Карло, позволяющих симулировать совместное распределение максимума и значения процесса Леви в фиксированный момент времени с помощью факторизации Винера-Хопфа.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Kudryavtsev O.* Advantages of the Laplace transform approach in pricing first touch digital options in Levy-driven models // J Boletin de la

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке РГНФ, проект №15-32-01390

Sociedad Matematica Mexicana. 2016., http://dx.doi.org/10.1007/s40590-016-0104-z

Д. И. Лисовский (Москва)
dilisovsij@gmail.com

ЗАДАЧА О РАЗЛАДКЕ ДЛЯ БРОУНОВСКОГО МОСТА

В работе рассматривается задача скорейшего обнаружения изменения сноса для процесса броуновского моста в байесовской постановке. Предполагается, что наблюдению подлежит случайный процесс $X = (X_t)_{0\leqslant t\leqslant 1}$, имеющий следующую структуру:

$$dX_t^\theta = \frac{\mu I_{\{t\geqslant\theta\}} - X_t^\theta}{1-t}dt + dB_t,$$

где $\mu > 0$ — известный числовой параметр, $B = (B_t)_{0\leqslant t\leqslant 1}$ — стандартное броуновское движение, заданное на отрезке $[0,1]$, θ — равномерно распределенная на этом отрезке случайная величина, которая интерпретируется, как ненаблюдаемый напрямую момент разладки.

Рассматривается следующая функция риска:

$$\inf_{\tau\in\mathfrak{M}} \mathbf{E}^\theta \left(I_{\{\tau<\theta\}} + c(\tau-\theta)^+ \right),$$

где константа $c > 0$ интерпретируется как плата за наблюдения, а $\mathfrak{M}$ — класс моментов остановки относительно фильтрации $(\mathscr{F}_t^{X^\theta})_{0\leqslant t\leqslant 1}$.

Теорема 1 (Сведение к задаче оптимальной остановки). *Верно следующее равенство*

$$\inf_{\tau\in\mathfrak{M}} \mathbf{E}^\theta \left(I_{\{\tau<\theta\}} + c(\tau-\theta)^+ \right) = \inf_{\tau\in\mathfrak{M}} \mathbf{E}^1 \left(1-\tau + c\int_0^\tau \psi_s ds \right), \qquad (1)$$

где процесс ψ_s — статистика Ширяева-Робертса, а именно:

$$d\psi_t = dt + \psi_t \frac{\mu}{1-t} dB_t, \quad \psi_0 = 0, \quad \forall t \in [0,\,1)$$

Инфимум в левой и правой частях равенства (1) достигается на том же самом моменте остановки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Житлухин М. В., Ширяев А. Н.* Байесовские задачи о разладке на фильтрованных вероятностных пространствах // Теория вероятностей и ее применения 2012. Т. 57, № 3 С. 453—470

2. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы). М.: Наука, 1974. 696 с.

3. *G. Peskir and A. Shiryaev* Optimal stopping and free-boundary problems. Birkhäuser, Basel, 2006. 514 p.

А. А. Лыков (Москва), В. А. Малышев (Москва), М. В. Меликян (Москва)
alekslyk@yandex.ru, malyshev@mech.math.msu.su, magaarm@list.ru

НОВЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ФИЗИКЕ

Теория вероятностей в физике в основном применяется (и очень широко) в классической статистической физике (как равновесной так и неравновесной). Основные применения таковы:

1. исследование свойств инвариантных мер гамильтоновых систем. А также когда, почему и как имеет место сходимость к этим инвариантным мерам. Здесь основной тенденцией было желание заменить случайность нелинейной сложностью. В докладе речь идет о совершенно новом подходе в задаче сходимости, где вероятность представляется нам абсолютно необходимой, но стараемся свести ее к минимуму. Именно, для квадратичного взаимодействия, для которого сходимость считалась невозможной, она полностью доказывается как для конечного числа частиц N, так и в термодинамическом пределе. Условие для этой сходимости только одно — одна из N частиц имеет контакт с внешним миром.

2. в неравновесной статфизике наоборот, преобладающей тенденцией было исследование произвольно взятой случайной динамики в системе большого числа частиц. В докладе обсуждаются примеры равновесных и неравновесных моделей разрыва цепочки молекул и оптимального управления транспортными потоками. При этом сравниваются вероятностные методы с методами, где вероятность не используется вообще.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Lykov A. A., Malyshev V. A.* Liouville Ergodicity of Linear Multi-Particle Hamiltonian System with One Marked Particle Velocity Flips // Markov Processes and Related Fields. 2015. V. 21, № 2. P. 381–412.

2. *Lykov A. A., Malyshev V. A.* Convergence to Gibbs equilibrium- unveiling the mystery // Markov Processes and Related Fields. V. 19, № 4. P. 643–666.

3. *Малышев В. А., Музычка С. А.* Динамический фазовый переход в простейшей модели цепочки молекул // Теоретическая и математическая физика. М.: Наука. Т. 179, № 1. С. 123–133.

А. В. Макарова (Воронеж)
allagm@mail.ru

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ С ТЕКУЩИМИ СКОРОСТЯМИ I [1]

Рассмотрим случайный процесс $\xi(t)$ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$ со значениями в $\mathbb{T}^n$- плоском n-мерном торе. $\mathbb{T}^n$ локально изометричен $\mathbb{R}^n$. Обозначим через E_t^ξ условное математическое ожидание относительно σ-подалгебры σ-алгебры $\mathcal{F}$, порождённой прообразам борелевских множеств при отображении $\xi(t) : \Omega \to \mathbb{T}^n$. Пусть $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{\alpha}$ –многозначные отображения из $[0, T] \times \mathbb{T}^n$ в $\mathbb{R}^n$ и во множество симметрических неотрицательно определённых квадратных матриц размера $n \times n$. Дифференциальным включением с текущими скоростями назовем систему вида:

$$\begin{cases} D_S\xi(t) \in \boldsymbol{v}(t, \xi(t)), \\ D_2\xi(t) \in \boldsymbol{\alpha}(t, \xi(t)). \end{cases}$$

Более подробное описание можно найти, например в [1].

Теорема 1. *Пусть многозначное векторное поле* $\mathbf{v}(m)$ *на* $\mathbb{T}^n$ *и многозначное* $(2, 0)$*-тензорное поле* $\boldsymbol{\alpha}$ *на* $\mathbb{T}^n$ *автономны, равномерно ограничены и имеют замкнутые образы. Пусть существует последовательность положительных чисел* $\varepsilon_k \to 0$ *такая, что для любого* ε_k *поле* $\mathbf{v}(m)$ *(*$\boldsymbol{\alpha}(m)$*, соответственно) имеет гладкую* ε_k*-аппроксимацию* $v_i(m)$ *(*$\alpha_i(m)$*, соответственно) и все эти аппроксимации имеют равномерно ограниченные одной и той же константой по совокупности* $t \in [0, T]$ *и* $m \in \mathbb{T}^n$ *первые частные производные* $\frac{\partial v^i}{\partial m^k}$ *(*$\frac{\partial \alpha^{ij}}{\partial q^k}$*, соответственно). Тогда для начального условия* $\xi(0) = \xi_0$*, введенное выше включение имеет решение, определенное на всем интервале* $t \in [0, T]$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гликлих Ю. Е.* Глобальный и стохастический анализ в задачах математической физики. М.: Комкнига, 2005. 416 с.

А. А. Муромская (Москва)
anastasia.muromskaya.msu@gmail.com

МОДЕЛЬ РАБОТЫ АКЦИОНЕРНОЙ СТРАХОВОЙ КОМПАНИИ, ИСПОЛЬЗУЮЩЕЙ ДИВИДЕНДНУЮ СТРАТЕГИЮ СО СТУПЕНЧАТОЙ ФУНКЦИЕЙ БАРЬЕРА

Рассмотрим классическую модель риска Крамера-Лундберга. В рамках данной модели капитал страховой компании, выплачивающей

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-01-00620).

дивиденды, в момент t выглядит следующим образом:

$$X(t) = x + ct - S(t) - D(t), \ t \geq 0.$$

Здесь $\{S(t)\}$ — это составной пуассоновский процесс с интенсивностью λ, $D(t)$ — совокупные дивиденды, выплаченные к моменту времени t.

Дивиденды выплачиваются в соответствии с барьерной стратегией. При этом уровень барьера b может меняться после каждого из первых $(n-1)$ моментов поступлений требований T_i. А именно, $b = b_i$ на полуинтервалах $[T_{i-1}, T_i)$, где $1 \leq i \leq n-1$ (в предположении $T_0 = 0$), и $b = b_n$ при $t \geq T_{n-1}$. Будем также считать, что ступенчатая функция барьера является неубывающей: $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$.

Для случая $n = \infty$ доказана изложенная ниже теорема, являющаяся обобщением неравенства Лундберга (справедливого для классической модели без дивидендных выплат, [1]):

Теорема 1. *Пусть существует экспонента Лундберга R. Тогда имеет место следующее неравенство для вероятности разорения $\psi(x)$ в модели со ступенчатой функцией барьера:*

$$\psi(x) \leq e^{-Rx} + \frac{Rc}{\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} e^{-Rb_i}.$$

Для случая $n < \infty$ была получена формула для рассчета математического ожидания времени до разорения.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Schmidli H.* Stochastic control in insurance. Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag London Ltd., London, 2008. XVI, 258 p.

I. V. Pavlov (Rostov-on-Don)
pavloviv2005@mail.ru

STOCHASTIC ANALYSIS ON DEFORMED STRUCTURES: SURVEY OF RESULTS AND MAIN LEADS FOR FURTHER RESEARCH[1]

This talk focuses on the processes with discrete time on structures much more general than classical stochastic bases. These structures are named by us deformed stochastic bases of the 1^{st} and the 2^{nd} kind. Namely, let $(\Omega, \mathbf{F})$ be a filtered space with discrete time where Ω is an arbitrary set, and $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ is an increasing sequence of σ-fields. Family $\mathbf{Q} = (Q^{(n)}, \mathcal{F}_n)_{n=0}^{\infty}$ of probability measures $Q^{(n)}$ defined on $\mathcal{F}_n$ is called D1 — deformation of the 1^{st} (resp.,

[1]This work was supported by the RFBR (projects 16-01-00184, 16-07-00888, 16-01-20190).

D2 — of the 2^{nd}) kind if $\forall n \in N = \{0, 1, 2, \dots\}$ $Q^{(n+1)}|\mathcal{F}_n << Q^{(n)}$ (resp., $Q^{(n+1)}|\mathcal{F}_n >> Q^{(n)}$).

The major role of classical martingales in various branches of mathematics (especially, financial mathematics) is well known. Using deformations we introduce the concepts of deformed martingales of the 1^{st} and the 2^{nd} kind. Let $\forall \in N$ r.v. Z_n belong to $L_1(\Omega, \mathcal{F}_n, Q^n)$ and $\mathbf{Q}$ be D1 (D2). The process $\mathbf{Z} = (Z_n, \mathcal{F}_n, Q^n)_{n=0}^{\infty}$ is called DM1 — deformed martingale of the 1^{st} (resp., DM2 — of the 2^{nd}) kind if $\forall n \in N$ $Q^{(n+1)}$ -a.s. (resp., $Q^{(n)}$ -a.s.) $Z_n = E^{Q^{(n+1)}}[Z_{n+1}|\mathcal{F}_n]$. By analogy we define also deformed supermartingales and submartingales (DSupM1, DSupM2, DSubM1, DSubM2), deformed local martingales (DLM1 and DLM2), and deformed potentials (DP1 and DP2).

In this talk we discusse some results published by the author in the last three years (in co-authorship with O.V. Nazarko): 1) Doob-type decomposition for DSub1; 2) Krikeberg-type decomposition for DM2 and Riesz-type decomposition for DSupM2; 3) Doob-type optional sampling theorem for DSubM1 and DSubM2; 4) characterization of DLM1 in terms of deformed martingale transforms and deformed generalized martingales. The formulations of all these results can be found in [1].

R E F E R E N C E S

1. *Pavlov I.V.* Some Processes and Models on Deformed Stochastic Bases. // Proceedings of the 2^{nd} International Symposium on Stochastic Models in Reliability Engineering, Life Science and Operations Management (SMRLO'16), Ilia Frenkel and Anatoly Lisnianski (eds.), Beer Sheva, Israel, February 15-18, 2016, pp. 432 - 437, IEEE, 978-1-4673-9941-8/16, DOI 10.1109/SMRLO.2016.75.

В. В. Родоченко, О. Е. Кудрявцев (Ростов-на-Дону)
vrodochenko@gmail.com

О ПРИМЕНЕНИИ ФАКТОРИЗАЦИИ ВИНЕРА-ХОПФА К ВЫЧИСЛЕНИЮ РИСКОВ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ЦЕНОВЫХ БАРЬЕРОВ В МОДЕЛИ ХЕСТОНА [1]

Важной и актуальной задачей управления рисками портфеля ценных бумаг является анализ и хеджирование рисков выхода цены за фиксированный барьер. Одной из популярных моделей финансовых рынков является модель Хестона.

В качестве примера разработанного метода, рассмотрим в рамках этой модели барьерный опцион put с барьером снизу. Применяя процедуру рандомизации Карра и подходящую замену [1] для устранения корреляции между процессами цены и вариации, мы получаем возможность свести вычисление безарбитражной цены этого актива к рекуррентному решению следующего семейства задач.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РГНФ (проект 15-32-01390).

Время до экспирации T разделим на N равных промежутков. Пусть $F_n(Y_{t_n}, V_{t_n})$ - приближение Карра цены опциона в момент времени t_n; Y_t, V_t и $g(y, v)$ - процессы цены, вариации и функция выплат после замены, $\Delta\tau = \frac{T}{N}$, $t_i = i\Delta\tau$, $\{\tau_i\}_{i=1}^{N}$ – независимые экспоненциально распределённые случайные величины со средним $\Delta\tau$. Обозначим $Z_t^n = Y_{t_n+t} + \frac{\rho}{\sigma}V_{t_n+t}$, где ρ и σ - параметры модели. Полагая $F_N = g$, получаем возможность записать:

$$F_n(Y_{t_n}, V_{t_n}) = M_{t_n}[e^{-r\Delta\tau} I_{\underline{Z_{\tau_n}^n}>0} F_{n+1}(Y_{t_n+\tau_n}, V_{t_n+\tau_n})], n = N-1, .., 0,$$

где $\underline{Z_\tau} = \inf\limits_{0\leq s\leq\tau}\{Z_s\}$ - процесс инфимума, I_A - функция-индикатор множества A.

Далее аналогично [1] построим аппроксимацию процесса вариации CIR при помощи марковской цепи. Для каждого фиксированного состояния вариации, указанные математические ожидания могут быть вычислены при помощи факторизации Винера-Хопфа [2]. Возможно обобщение метода на случай моделей, допускающих скачки.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *M. Briani, L. Caramellino, A. Zanette* A hybrid approach for the implementation of the Heston model. // IMA J Management Math. 2015.

2. *Kudryavtsev O.,Levendorskii S.* Fast and accurate pricing of barrier options under Levy processes. // J. Finance and Stochastics. 2009. Vol. 13 № 4. pp. 531—562.

Е. В. Серегина[α]**, М. А. Степович**[β]**, А. М. Макаренков**[γ] **(Калуга)**
[α]**evfs@yandex.ru,** [β]**m.stepovich@rambler.ru,**
[γ]**amm2005@rambler.ru**

ПРОЕКЦИОННАЯ АППРОКСИМАЦИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ОБЛАСТИ[1]

Для стационарного дифференциального уравнения тепломассопе-реноса в полубесконечной области [1] описан метод аппроксимации статистических характеристик (математического ожидания и авто-корреляционной функции) его решения. Разработанный подход осно-ван на использовании проекционного метода, для реализации кото-рого был выбран базис из модифицированных функций Лагерра. Рассмотрение проведено в предположении, что коэффициенты диф-ференциального уравнения являются

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Минобрнауки РФ (базовая часть государственного задания, задание № 340/2015, проект № 1416), РФФИ (проект № 16–03–00515), а также РФФИ и правительства Калужской области (проект № 14–42–03062).

случайными величинами, име-ющими усеченный нормальный закон распределения. Проведен ана-лиз влияния дисперсий величин этих коэффициентов на решение уравнения.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1.Серегина Е. В., Макаренков А. М., Степович М. А. *Статистический анализ модели коллективного движения неосновных носителей заряда с использованием проекционного метода* // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. – 2012. – №. 4. – С. 47–55.

С. М. Ситник (Воронеж)
mathsms@yandex.ru

ПРИМЕНЕНИЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ЛАУРИЧЕЛЛЫ К ЗАДАЧАМ СТАТИСТИЧЕСКОГО ОЦЕНИВАНИЯ

В докладе приводятся результаты по применению неравенств типа Турана для различных специальных функций в теории вероятностей, математической статистике, финансовой математике.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Karp D. B., Sitnik S. M.* Log–convexity and log–concavity of hypergeometric–like functions // J. Math. Anal. Appl. 2010. V. 364, № 2. P. 384–394.

2. *Karp D. B., Sitnik S. M.* Inequalities and monotonicity of ratios for generalized hypergeometric function // Journal of Approximation Theory. 2009. V. 161. P. 337–352.

3. *Ситник С. М.* Неравенства для остаточного члена ряда Тэйлора экспоненциальной функции // Препринт инст. ИАПУ ДВО РАН, Владивосток, 1993. 31 С.

4. *Sitnik S. M.* Conjectures on Monotonicity of Ratios of Kummer and Gauss Hypergeometric Functions // RGMIA Research Report Collection. 2014. V. 17, Article 107. 4 pp.

5. *Mehrez K., Sitnik S. M.* Inequalities for sections of exponential function series and proofs of some conjectures on monotonicity of ratios of Kummer, Gauss and generalized hypergeometric functions // RGMIA Res. Rep. Collect. 2014. V. 17, Article 132. 12 pp.

6. *Mehrez K., Sitnik S. M.* Proofs of some conjectures on monotonicity of ratios of Kummer and Gauss hypergeometric functions and related Turán-type inequalities // Analysis, De Gruyter. 2016. (accepted for publication).

7. *Mehrez K., Sitnik S. M.* On monotonicity of ratios of some q–hypergeometric functions // Matematicki Vesnik. 2016. (accepted for publication).

8. *Rockova V., George E. I.* Bayesian Penalty Mixing: The Case of a Non–separable Penalty // In the book: Statistical Analysis for High–Dimensional Data. Springer, 2016. P. 233–254.

Stanislav A. Molchanov, Isaac M. Sonin
(UNC at Charlotte, USA)
imsonin@uncc.edu

CONDITIONAL EXPECTATIONS AND POURING WATER FROM FULL CUPS TO EMPTY

About ten years ago A. Cherny and P. Grigoriev obtained the following striking result: for any $\varepsilon > 0$ and any two random variables X and Y with the same distribution, there is a sequence of sigma-algebras F_n such that $||X_n - Y|| < \varepsilon$, where $X_1 = E(X|F_1), ..., X_n = E(X_{n-1}|F_n)$. We provide the transparent interpretation of this problem, show the optimal selection of such sequence and give the exact first term of asymptotic of $\varepsilon = \varepsilon_n$, when n tends to infinity.

С. И. Углич (Ростов-на-Дону)
uglitch@inbox.ru

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕЗУЛЬТАТОВ, ПОЛУЧЕННЫХ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПРИОРИТЕТАМИ [1]

В настоящем докладе будут использованы аналитические результаты, полученные в работах [1–2]. В этих работах рассматривается экстремальная задача со следующей целевой функцией: $F(x) = E^P\left(F_1^{\alpha_1} F_2^{\alpha_2}\right)$, где $F_k(x) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^k x_i + b^k\right) I_{\left\{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^k x_i + b^k > 0\right\}}$; a_i^k, b^k — действительные числа; $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$; I — характеристическая функция; $\alpha_k = \alpha_k(\omega)$ — неотрицательные случайные величины (с.в.), называемые приоритетами, определенные на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

В работе [1] с.в. α_1 и α_2 связаны соотношением $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, в то время как в [2] эти с.в. считаются независимыми. Несмотря на противоположность этих требований, основной результат указанных работ формулируется одинаково. Необходимым условием существования локального (и, в то же время, глобального) максимума является существование такого числа $c > 0$, что $a_i^2 = -c \cdot a_i^1$. Параметр c определяет степень противоположности требований двух систем, целевые установки которых определяются,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00184).

соответственно, функциями F_1 и F_2. Показано, что $\forall c > 0$ точки максимума функции F представляют собой гиперплоскость вида $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i = t^*$, где t^* —корень некоторого уравнения. Максимумы одинаковы для всех точек гиперплоскости.

Целью настоящего доклада является изучение зависимостей значения максимума функции F от параметра c при различных распределениях с.в. α_1 и α_2. Практическая значимость данной работы состоит в том, что она формирует рекомендации арбитру, регулирующему взаимодействие двух систем. Арбитр создает (согласно этим рекомендациям) группы экспертов, которые на основе различного рода статистических данных разрабатывают модели функций распределения приоритетов.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Вагин В. С., Павлов И. В.* // КРОМШ–26. Тезисы. 2015. С. 109.

2. *Красий Н. П.* // Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения –VI. Тезисы. 2016. С. 132–133.

В. В. Ульянов (Москва)
vulyanov@cs.msu.su

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ЧИСЛА РЕБЕР В ОБОБЩЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ГРАФАХ [1]

Рассматривается модель обобщенного случайного графа. Пусть $\{1, 2, ..., n\}$ суть множество вершин графа и $W_i > 0$ — вес в вершине $i, 1 \leq i \leq n$. Вероятность наличия ребра между вершинами i и j, $1 \leq i < j \leq n$, предполагается равной
$$p_{ij} = \frac{W_i W_j}{L_n + W_i W_j},$$
где $L_n = \sum_{i=1}^{n} W_i$ обозначает суммарный вес во всех вершинах. Веса $W_i, i = 1, 2, \ldots, n$, суть независимые одинаково распределенные случайные величины, распределенные как W. Обозначим через E_n общее число ребер в описанном графе. В докладе будут представлены новые асимптотические результаты для E_n типа центральной предельной теоремы при различных моментных условиях на распределение W. Доказательства см. в [1].

Теорема 1. *Если* $\mathbb{E}W^2 < \infty$, *то*
$$\frac{2E_n - n\mathbb{E}W}{\sqrt{n\,(2\mathbb{E}W + \mathrm{Var}(W))}} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

[1] Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (проект 14-11-00364).

Теорема 2. *Пусть* $W, W_1, W_2, \cdots$ *— последовательность независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин таких, что*

$$\frac{W_1 + \cdots + W_n - n\mathbb{E}W}{a_n} \xrightarrow{d} F,$$

где F *— устойчивое распределение с показателем* $\alpha : 1 < \alpha < 2$. *Тогда*

$$\frac{2E_n - n\mathbb{E}W}{a_n} \xrightarrow{d} F.$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Hu Z. C., Ulyanov V. V., Feng Q. Q.* Limit theorems for number of edges in the generalized random graphs with random vertex weights // Working papers by Bielefeld University. Series «Collaborative Research Centre 701». 2016. № 16–006. P. 1–9. См. также http://arxiv.org/abs/1604.00539

А. А. Харин (Москва)
aaharin@yandex.ru

О НОВОМ ВЕРОЯТНОСТНОМ ПОДХОДЕ ПРИ ОПИСАНИИ ВЛИЯНИЯ ШУМА НА КОНЕЧНЫХ ИНТЕРВАЛАХ

В докладе рассматривается возможное математическое описание шума и его следствий. В качестве параметра, характеризующего наличие шума, выбрана минимальная дисперсия случайной величины. На конечном интервале, для простоты, рассмотрена дискретная случайная величина, принимающая конечное число значений.

В, напр., [1] предварительно представлена теорема существования ненулевых ограничений (ненулевых запрещенных зон у границ конечного интервала) для математического ожидания (МО) случайной величины (СВ) при наличии ненулевой минимальной дисперсии этой СВ. Кроме того, в явном виде получены зависимости ширины запрещенных зон от величины минимальной дисперсии. В докладе совершенствуется доказательство теоремы и рассмотрена роль нового вероятностного подхода в описании шумов, намеченного данной теоремой. Теорема утверждает, что появление шума имеет своим следствием появление такого нового объекта, как запрещенные зоны для МО случайной величины, принимающей значения на конечном интервале. Эти запрещенные зоны могут вести к общим ограничениям и новым явлениям для МО СВ, в т.ч.:

1) Запрещенные зоны могут вести к уменьшению доступного пространства.

2) Запрещенные зоны могут превращать, напр., односвязную область в многосвязную. Для областей сложной формы, из-за появления запрещенных зон, области, связанные узким переходом, могут стать разделенными, т.е. возможно возникновение пространственных разрывов.

3) Пусть МО СВ является аргументом некоторой непрерывной функции и эта функция определена на некотором конечном интервале, включая его границу (в т. ч., при наличии шума). Очевидно, что при появлении шума и запрещенной зоны для аргумента функции, у графика функции появится разрыв над этой запрещенной зоной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Харин А. А.* An existence theorem for bounds on the expectation of a random variable. Its opportunities for utility theories. V. 2 // Munich Personal RePEc Archive, ID: 67071. 2015. P. 1–38.

С. О. Хомидов (Ташкент, Узбекистан)
soxibmalik1981@mail.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ УРОВНЯ РАЗВИТИЯ ПРОМЫШЛЕННОСТИ В СТРАНЕ ПО РАСПРЕДЕЛЕНИЮ ПАРЕТО

Предположим, что распределение промышленной продукции на душу населения по регионам страны формулирует кривую Парето. Тогда получим функцию [1]:

$$y = Ax^{-\alpha}, \tag{1}$$

где x — объем промышленной продукции на душу населения, y — число регионов страны, A и α — оцениваемые параметры. Если логарифмировать обе стороны (1), то получим формулу:

$$\log y = \log A - \alpha(\log x), \tag{2}$$

где α-параметр формулирует эластичность функции распределения и угол наклона на линии Парето:

$$E_x^y = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = -\alpha A x^{-\alpha-1} x A^{-1} x^{\alpha} = -\alpha \tag{3}$$

. Если переходить от (1) на распределение Парето, то получим формулу:

$$P\left\{X \geq x\right\} = \frac{y}{Y} = \frac{A}{Yx^{\alpha}}, \tag{4}$$

где X — случайная величина, Y — общее число регионов. Если обозначим $B = A/Y$ и включим x_0 (объём минимальной промышленной продукции на душу населения) в (4), то получим функцию распределения:

$$F\left(x\right) = P\left\{X<x\right\} = 1 - B(x_0/x)^{\alpha}. \tag{5}$$

Для распределения Парето плотность вероятности определяется выражением:

$$p\left(x\right) = \left\{ \begin{array}{l} 0, x \leq x_0 \\ (B\alpha/x_0) \cdot (x_0/x)^{\alpha+1}, x>x_0 \end{array} \right. \tag{6}$$

В заключение можно сказать, что α-параметр выясняет причины различия распределения промышленной продукции на душу населения в регионах страны.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Айвазян С. А., Мхитарян В. С.* Прикладная статистика и основы эконометрики. М.: ЮНИТИ, 1998. 1000 с.

И. В. Цветкова (Ростов-на-Дону)
pilipenkoIV@.mail.ru

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ МАРТИНГАЛЬНЫХ МЕР В СЛУЧАЕ СЧЁТНОГО ВЕРОЯТНОСТНОГО ПРОСТРАНСТВА И КОНЕЧНОЗНАЧНЫХ ЦЕН АКЦИЙ [1]

Рассмотрим одношаговый (**B**,**S**)-рынок, который задан на $(\Omega, \mathbf{F})$, где $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_k)_{k=0}^{1}$, $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \varnothing\}$, $\mathcal{F}_1$ — σ-алгебра, порождённая разбиением Ω на счётное число атомов B_i, $i \in N$ (N — множество натуральных чисел). Пусть $Z = (Z_k, \mathcal{F}_k)_{k=0}^{1}$ — $\mathbf{F}$-адаптированный случайный процесс со значениями: $Z_0(\Omega) = a$, $Z_1(B_i) = b_i$, $a, b_i \in Q$, $a \neq b_i$, $i \in N$ (Q — множество рациональных чисел чисел); $\mathcal{P}(Z, \mathbf{F})$ — множество невырожденных вероятностей, относительно которых процесс Z есть мартингалом. Предположим, что рассматриваемый рынок безарбитражен и неполон. Рассмотрим случай, когда среди элементов последовательности $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ всего r различных ($4 \leq r < \infty$) с соответствующими кратностями m_k, $1 \leq k \leq r$, $1 \leq m_k \leq \infty$ (хотя бы два значения $m_k = \infty$). Разобьём все компоненты мартингальной меры $P \in \mathcal{P}(Z, \mathbf{F})$ на r подпоследовательностей. Обозначим соответсвующие их суммы через: $x_1, x_2, \ldots, x_r$.

Целью работы является конструирование мартингальных мер, удовлетворяющих ОСУХЕ [1], т.е. позволяющих осуществлять переход от неполных рынков к полным. План конструирования таков.

1) Если $x_l < a < x_{l+1}$, $1 \leq l \leq r-1$, $m_l = m_{l+1} = \infty$, тогда $x_k = \dfrac{1}{n}$, $1 \leq k \leq r$, $k \neq l, l+1$, где $n \in N$: $|\sum\limits_{k=1 k\neq l,l+1}^{r} (b_i - b_k)x_k| < |b_i - a|$. Компоненты x_l, x_{l+1} определяются из мартингального соотношения и условия нормировки.

2) Если $x_l < a < x_{l+1}$,$1 \leq l \leq r-1$, или $m_l = \infty$ или $m_{l+1} = \infty$, тогда $x_k = \dfrac{1}{n}$, $1 \leq k \leq r$, $k \neq l, l+1, l-1$, $x_{l-1} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ (иррациональное), где $n \in N$: $|\sum\limits_{k=1 k\neq l,l+1}^{r} (b_i - b_k)x_k| < |b_i - a|$. Компоненты x_l, x_{l+1} определяются из мартингального соотношения и условия нормировки.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00184).

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Данекянц А. Г., Павлов И. В.* Об ослабленном свойстве универсальной хааровской единственности // Обозрение прикл. и промышл. матем.,М.: 2004. Т. 11, № 3. С. 506–508.

Е. А. Чернавская (Москва)
Chernavskayaak@mail.ru

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ВЛОЖЕННОГО ПРОЦЕССА ЧИСЛА ТРЕБОВАНИЙ В БЕСКОНЕЧНОКАНАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Пусть $\{\xi_i, \tau_i\}_{i=1}^{\infty}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин(н.о.р.с.в.), $\theta_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \tau_i$, $\theta_0 = 0$.

Рассматривается бесконечноканальная система обслуживания S, в которой требования поступают в моменты θ_i группами объема ξ_i, $i \geq 1$. Система S является обобщением системы, рассмотренной Н. Капланом [1].

Времена обслуживания $\{\eta_{ij}, 1 \leq j \leq \xi_i, i \geq 1\}$ заявок представляют собой последовательность н.о.р.с.в. с ф.р. $B(x)$. Обозначим $\overline{B}(x) = 1 - B(x)$. Предполагаем, что выполнено следующее

Условие 1. *Для функции $\overline{B}(t)$ и $0 < \beta < 1$ при $t \to \infty$ имеет место асимптотика $\overline{B}(t) \sim \frac{\mathcal{L}(t)}{t^{\beta}}$, где $\mathcal{L}(t)$ – медленно меняющаяся функция при $t \to \infty$.*

Изучается процесс $q(\theta_n)$ – число требований, находящихся на обслуживании в системе S в момент времени θ_n. Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Если $E\xi_1^2 < \infty$, $E\tau_1^2 < \infty$, тогда*

$$\frac{q(\theta_n) - E_n}{\sqrt{E_n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1), \text{ при } n \to \infty, \tag{1}$$

где $E_n = \frac{1}{1-\beta} \frac{E\xi_1}{(E\tau_1)^{\beta}} n^{1-\beta} \mathcal{L}(n)$.

Доказательство теоремы 1 существенным образом опирается на следующую

Лемма 1. *Если $E\xi_1^2 < \infty$, $E\tau_1^2 < \infty$, тогда*

1. $\frac{M_n - EM_n}{n^{\frac{1-\beta}{2}}} \xrightarrow{p} 0$, при $n \to \infty$. 2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{EM_n - \frac{1}{1-\beta}\frac{E\xi_1}{(E\tau_1)^{\beta}} n^{1-\beta}\mathcal{L}(n)}{n^{\frac{1-\beta}{2}}} = 0$.

Здесь $M_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \overline{B}(\theta_n - \theta_i)$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Kaplan N.* Limit theorems for a $GI/G/\infty$ queue.// The Annals of Probability. 1975. Vol. 3,№ 5, p.780–789.

В. В. Шамраева (Ростов-на-Дону)
shamraeva@mail.ru

О НЕРАВЕНСТВАХ, ОБЕСПЕЧИВАЮЩИХ ВЫПОЛНЕНИЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ СВОЙСТВ МАРТИНГАЛЬНЫХ МЕР[1]

Среди мартингальных мер (м.м.) неполного рынка, которые порождают открытый интервал справедливых цен платежного обязательства, в случае счетного вероятностного пространства для большого числа (B,S)-рынков существуют интерполяционные м.м., порождающие "более справедливые"цены. В настоящем докладе для одношаговых (B,S)-рынков рассматриваются м.м., удовлетворяющие ослабленному условию несовпадения барицентров (ОУНБ; см. [1]) — условию, позволяющему с помощью такой м.м. интерполировать (относительно произвольной интерполирующей специальной хааровской фильтрации) неполный рынок до полного. Рассмотрим фильтрацию $(\Omega,\mathbf{F})$, где $\mathbf{F}= (\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$, $\mathcal{F}_0 = \{\Omega, \oslash\}$, а $\mathcal{F}_1$ порождена разбиением Ω на счетное число атомов B_i, $i \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$. Зададим процесс $Z = (Z_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^1$, рассматриваемый как дисконтированная стоимость акции, и обозначим $Z_0 = a$, $Z_1|_{B_i} = b_i$. Предположим, что $b_1 < b_2 < b_3 < b_4$, каждое из этих чисел может присутствовать в последовательности $b_5, b_6, \dots$ конечное или бесконечное число раз, а других чисел в этой последовательности нет. Пусть полученный таким образом рынок безарбитражен, причем $a \neq b_2$ и $a \neq b_3$. В докладе продемонстрируется новая методика доказательства существования интерполяционных м.м., позволяющая получать результаты, более общие, чем в [1]. Она основана на замене сложных неравенств из ОУНБ, содержащих различные неопределенные подмножества из $\mathbb{N}$, более простыми неравенствами, содержащими конкретные компоненты м.м. Один из таких результатов сформулирован в [2].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Павлов И.В., Цветкова И.В., Шамраева В.В.* О существовании мартингальных мер, удовлетворяющих ослабленному условию несовпадения барицентров, в случае счетного вероятностного пространства. // Теория вероятностей и ее применения. 2016. Т. 61. N1.

2. *Шамраева В.В.* Новый метод построения мартингальных мер, удовлетворяющих ОУНБ, в случае счетного вероятностного пространства. // ОТНА –VI. Материалы конференции. Ростов-на-Дону. 2016. С. 144 –145.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 16-01-00184, 16-07-00888, 16-01-20190).

С. Я. Шатских, Л. Э. Мелкумова (Самара)
s.shatskikh@inbox.ru, lana.melkumova@gmail.com

ГЕОМЕТРИЯ УСЛОВНЫХ КВАНТИЛЕЙ МНОГОМЕРНЫХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ [1]

Теорема. *Если для n-мерного вероятностного распределения $F_{1\ldots n}(x_1, ..., x_n)$ все k-мерные условные квантили $q^{(\boldsymbol{x}^0)}_{i|1\,\ldots\,k}(x_1, \ldots, x_k)$, $i = \overline{k+1, n}$ обладают свойством воспроизводимости при сужении на одномерные условные квантили (см. [1]) и определитель*

$$\begin{vmatrix} 1 & \dot{q}^{(x_1^\circ, x_2^\circ)}_{2|1}(x_1) & \ldots & \dot{q}^{(x_1^\circ, x_k^\circ)}_{k|1}(x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dot{q}^{(x_1^\circ, x_k^\circ)}_{1|k}(x_k) & \dot{q}^{(x_2^\circ, x_k^\circ)}_{2|k}(x_k) & \ldots & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то поверхность в $\mathbb{R}^n$, задаваемая условными квантилями

$$\left\{ \left(x_1, \ldots, x_k, q^{(\boldsymbol{x}^0)}_{k+1|1\ldots\,k}(x_1, \ldots, x_k), \ldots, q^{(\boldsymbol{x}^0)}_{n|1\,\ldots\,k}(x_1, \ldots, x_k) \right) \right\}, \qquad (*)$$

является k-мерным решением квантильного уравнения Пфаффа

$$\omega = \begin{vmatrix} \boldsymbol{dx}_1 & \boldsymbol{dx}_2 & \ldots & \boldsymbol{dx}_n \\ \dot{q}^{(x_1^\circ, x_2^\circ)}_{1|2}(x_2^\circ) & 1 & \ldots & \dot{q}^{(x_n^\circ, x_2^\circ)}_{n|2}(x_2^\circ) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dot{q}^{(x_1^\circ, x_n^\circ)}_{1|n}(x_n^\circ) & \dot{q}^{(x_2^\circ, x_n^\circ)}_{2|n}(x_n^\circ) & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (**)$$

Таким образом, решая уравнение $(**)$, мы находим k-мерные ус- ловные квантили по двумерным маргинальным распределениям исходного многомерного распределения. При выполнении условий теоремы максимальная возможная размерность интегрального многообразия уравнения $(**)$ не меньше k. Поэтому класс Дарбу $\boldsymbol{d}$ формы ω меньше или равен $2(n-k)-1$. Когда $\boldsymbol{d} = 2(n-k)-1$, поверхность $(*)$ является интегральным многообразием уравнения $(**)$ максимальной возможной размерности, проходящим через точку $\boldsymbol{x}^\circ$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Мелкумова Л.Э., Шатских С. Я.* Решение квантильных дифференциальных уравнений Пфаффа при отсутствии полной интегрируемости. Вестник Самарского Государственного Университета. Естественнонаучная серия. Самара, 2012. № 3/1(94). С. 20–39.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00184 А).

М. М. Шварцман (Ростов-на-Дону)
black_drive@smtp.ru

РОЛЬ СТОХАСТИЧЕСКИХ И ДЕТЕМИРОВАННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ В ПРОЦЕССЕ ФОРМИРОВАНИЯ КАТАСТРОФЫ

С позиций синергетики, генезис формирования предкатастрофного состояния является универсальным для всех систем. Под термином 'система' понимается: «ограниченная в пространстве среда, с которой и в которой взаимодействуют субъекты и объекты». В конкретной системе на универсальный процесс накладываются стохастические факторы, определяющие уникальность временнОй траектории, ведущей к катастрофе. Для учёта стохастических факторов использовался аппарат стационарных случайных функций.

Предметом анализа были две временнЫе функции, отображающие помесячно число травм на производстве. Инструментарием пакета Statistica последовательно проводились операции: приведение ряда к стационарной случайной функции; идентификация стационарной модели; оценка параметров модели; исследование её адекватности; прогнозирование временнОго ряда.

На основе анализа диаграмм автокорреляции исследуемой функции, была идентифицирована модель смешанного типа: авторегрессия со скользящим средним. Модель авторегрессии описывает состояние системы с учётом её предшествующих состояний. Модель скользящего среднего учитывает накопление внутренних и внешних стохастических воздействий на систему. Оценка модели показала её адекватность. Полученные модели — на языке математики — подтвердили, что движение системы к катастрофе обусловлено накоплением: ошибочных действий человека; и стохастических воздействий, как внутренних, так и внешних по отношению к системе.

Универсальной особенностью генезиса формирования предкатастрофного состояния является увеличение чувствительности (уменьшение устойчивости) системы после каждого очередного воздействия, приближающим момент катастрофы. На каждом последующем шаге, уменьшается роль стохастической компоненты и увеличивается значимость детерминированного фактора. Достаточно всё менее значимого стохастического «кванта», чтобы «запустить» детерминированный процесс движения системы к катастрофе. В последнем, предкатастрофном состоянии, достаточно малого воздействия (т.н. эффект бабочки), чтобы в системе произошла катастрофа.

Л. К. Ширяева (Самара)
Shiryeva_LK@mail.ru

О ХВОСТОВЫХ СВОЙСТВАХ КОПУЛЫ ГРАББСА

Пусть $\{X_i\}_{i=1}^n$ — случайная выборка из n значений нормально распределенной случайной величины X. Рассмотрим статистики Граббса, вычисленные по этой выборке

$$T_n^{(1)} = \max_{1\le i\le n} \left\{(X_i - \overline{X})/S\right\}; \qquad T_{n,(1)} = -\min_{1\le i\le n} \left\{(X_i - \overline{X})/S\right\},$$

где $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ и $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$.

Известно, что $P(T_n^{(1)} < t) = P(T_{n,(1)} < t)$. Рекурсивные соотношения для описания $F_n^{(1)}(t) = P(T_n^{(1)} < t)$ построены в [1].

Пусть $\Lambda_n(t_1,t_2) = P(T_{n,(1)} < t_1, T_n^{(1)} < t_2)$. Рекурсивные соотношения для описания $\Lambda_n(t_1,t_2)$ построены в [2].

Для $n > 2$ копулу Граббса получим инверсией из $\Lambda_n(t_1,t_2)$, используя следствие из теоремы Склара [3].

Обозначим через $\phi_n(\cdot)$ – функцию, обратную функции $F_n^{(1)}$. Тогда для $\forall(u,v) \in [0,1]^2$ существует единственная копула-функция $C_{Gr}(u,v;n)$: $[0,1]^2 \to [0,1]$, такая что $C_{Gr}(u,v;n) = \Lambda_n(\phi_n(u),\phi_n(v))$.

Теорема. Для копулы Граббса коэффициенты верхне-левой и нижне-правой хвостовой зависимости определяются соотношением[4]:

$$\overline{\lambda}_n = \lambda_n = F_{n-1}^{(1)}(a_n) + a_n^{n-2} \int\limits_{a_n}^{\frac{n-2}{\sqrt{n-1}}} \frac{f_{n-1}^{(1)}(x)}{x^{n-2}}dx, \ n > 3,$$

где $a_n = 2\sqrt{\pi}\cdot\frac{\sqrt{n-2}}{n-1}\cdot\sqrt[n-2]{\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\sqrt{n-1}}}$; $f_{n-1}^{(1)}(x) = \frac{dF_{n-1}^{(1)}(x)}{dx}$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Zhang J., Keming Y.* The null distribution of the likelihood-ratio test for one or two outliers in a normal sample// An Official Journal of the Spanish Society of Statistics and Operations Research. 2006. V. 15, No 1. P. 141—150.

2. *Ширяева Л. К.* О нулевом и альтернативном распределении статистики критерия наибольшего по абсолютной величине нормированного отклонения// Изв. вузов. Матем. 2014, №10. С. 62—78.

3. *Nelsen R. B.* An Introduction to Copulas. Lecture Notes in Statistics. New York: Springer-Verlag, 2006.

4. *Ширяева Л. К.* О хвостовой зависимости для копула-функции Граббса// Изв. вузов. Матем. 2015, №12. С. 66—83.

Е. Б. Яровая (Москва)
yarovaya@mech.math.msu.su

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ЭВОЛЮЦИЯ СИСТЕМЫ ЧАСТИЦ В НЕКОМПАКТНОМ ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ [1]

Различные явления, изучаемые в статистической физике, теории гомополимеров, популяционной динамике, часто описываются в терминах моделей эволюции популяции частиц. Такие модели могут обобщаться в различных направлениях, и одно из естественных обобщений заключается в предположении, что частицы не только дают потомство или гибнут, формируя этим ветвящуюся среду, но и мигрируют под действием некоторого случайного закона. Центральная задача в таких моделях — изучение эволюции процессов во времени в зависимости от структуры среды и пространственной динамики частиц. Менее изученными при этом остаются процессы, когда пространство, в котором происходит транспорт частиц, неограниченно, причем оно может быть непрерывным, как, напр., в теории гомополимеров, или дискретным, как при изучении динамики клеточных популяций. В этом смысле «универсальными» являются ветвящиеся случайные блуждания с непрерывным временем по многомерным решеткам — стохастические процессы, сочетающие в себе свойства ветвящегося процесса и случайного блуждания. Основные проблемы в предельном поведении ветвящихся случайных блужданий, связаны с существованием фазовых переходов при изменении различных параметров системы частиц, свойствами предельного распределения популяций частиц, скоростью и формой распространения их фронта. Естественно, решение этих проблем в значительной степени зависят от целого ряда факторов, которые влияют на свойства ветвящегося случайного блуждания, среди которых — случайность ветвящейся среды, ее неоднородность, количество и взаимное расположение источников размножения и гибели частиц в точках решетки, а также такие свойства случайного блуждания, как симметричность или нарушение симметричности, конечность или бесконечность дисперсии скачков. Обсуждаются результаты, полученные в рамках некоторых пространственно-временных эволюционных моделей ветвящихся случайных блужданий, и их дальнейшие приложения.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 14-21-00162).

Секция I
Дифференциальные уравнения

Г. С. Балашова (Москва)
balashovags@mpei.ru

О ФРЕДГОЛЬМОВОЙ РАЗРЕШИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

В некоторой ограниченной области $G \subset R^{\nu}$, $\nu \geq 1$, с границей Γ рассматривается задача Дирихле для линейного дифференциального уравнения бесконечного порядка. В работе предложен новый подход, использующий представление дифференциального оператора бесконечного порядка в виде суммы двух операторов, один из которых главный, а другой ему подчиненный, в то время как оба оператора бесконечного порядка:

$$\begin{aligned} L_1(u) + L_2(u) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} A_{\alpha}(x, D^{\alpha} u) + \\ + \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} B_{\alpha}(x, D^{\gamma} u) = h(x), \quad x \in G, \end{aligned} \tag{1}$$

$$D^{\omega} u(x)\big|_{\Gamma} = 0, \quad |\omega| = 0, 1, \dots . \tag{2}$$

Здесь L_1 — эллиптический оператор с возмущением L_2:

$$h(x) \in W^{-\infty}\{a_{\alpha}, 2\}_{(G)} \equiv \Bigg\{ h(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} (-1)^{|\alpha|} a_{\alpha} D^{\alpha} h_{\alpha}(x) : \\ \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_{\alpha} ||h_{\alpha}(x)||_2^2, \quad h_{\alpha}(x) \in L_2(G) \Bigg\}.$$

В основу сравнения двух дифференциальных операторов бесконечного порядка положено сравнение пространств, являющихся областями определения этих операторов.

Теорема. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. Существуют постоянные $0 < \delta_1 \leq \delta_2$, $\delta_3 > 0$ и последовательности $a_0 > 0$, $a_{\alpha} \geq 0$, $b_0 > 0$, $b_{\alpha} \geq 0$, $|\alpha| = 1, 2, \dots$, такие, что для всех $x \in G$ и всех α

$$a_{\alpha}\delta_1 \leq A_{\alpha}(x) \leq a_{\alpha}\delta_2, \quad |B_{\alpha}(x)| \leq \delta_3 b_{\alpha}.$$

2. Пространство $\overset{\circ}{W}{}^{\infty}\{a_{\alpha}, 2\} = \left\{ u(x) \in C_0^{\infty}(G) : \sum_{|\alpha|=1}^{\infty} a_{\alpha} ||D^{\alpha} u||_2^2 < \infty \right\}$ нетривиально и компактно вложено в пространство $\overset{\circ}{W}{}^{\infty}\{b_{\alpha}, 2\}_{(G)}$.

Тогда задача (1), (2) имеет решение $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}^{\infty}\{a_\alpha, 2\}_{(G)}$ при любой правой части $h(x) \in W^{-\infty}\{a_\alpha, 2\}_{(G)}$, удовлетворяющей следующему условию

$$\int\limits_G \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha h_\alpha(x) D^\alpha v_\lambda(x) dx = 0$$

для всех $v_\lambda(x)$, являющихся решением задачи

$$L_1(v) + \lambda L_2(v) = 0, \quad D^\omega v(x)\big|_\Gamma = 0. \tag{3}$$

В частности, если задача (3) имеет только нулевое решение, то задача (1), (2) имеет единственное решение при любой правой части $h(x) \in W^{-\infty}\{a_\alpha, 2\}_{(G)}$.

Е. А. Барова, Л. Б. Патрушева, Ю. О. Яковлева (Самара)
julia.yakovle@mail.ru

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С НЕКРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Краевые задачи для гиперболических уравнений и систем уравнений гиперболического типа с некратными характеристиками в некоторых случаях удается решить без вспомогательных функций (функций Римана, Римана-Адамара). Н. И. Мусхелишвили в своей монографии [1] отметил, что общие решения, если их возможно найти, при целесообразном использовании оказываются часто чрезвычайно полезными, особенно в вопросах прикладного характера. Таким образом, если методом общих решений можно найти общее решение дифференциального уравнения, то часто возможно получить решение поставленных краевых задач. Известно [2], что для гиперболического уравнения второго порядка, записанного в каноническом виде, решение задачи Коши получено в виде формулы Даламбера. Для уравнений гиперболического типа общего вида третьего и четвертого порядка с некратными характеристиками регулярное решение задачи Коши методом общих решений получено в виде, аналогичном формуле Даламбера, и приведено в работах [3, 4].

Для уравнения гиперболического типа порядка n с некратными характеристиками

$$a_0 u_{xxx\ldots x} + a_1 u_{xx\ldots xy} + \ldots + a_{n-1} u_{x\ldots yyy} + a_n u_{yyy\ldots y} = 0,$$

где a_0, $a_1, \ldots$ a_{n-1}, a_n — действительные ненулевые постоянные, регулярное решение задачи Коши также получено в явном виде и приведено в виде, аналогичном формуле Даламбера.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1.*Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Изд. АН СССР, 1954.

2. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 736 с.

3. *Яковлева Ю. О.* Аналог формулы Даламбера для гиперболического уравнения третьего порядка с некратными характеристиками // Вестник Самарского государственного технического университета. 2012. № 1(26). С. 247–250.

4. *Андреев А. А., Яковлева Ю. О.* Задача Коши для системы уравнений гиперболического типа четвертого порядка общего вида с некратными характеристиками // Вестник Самарского государственного технического университета. 2014. №. 4 (37). С. 7–15.

В. А. Батищев (Ростов-на-Дону)
batishev-v@mail.ru

ВОЗНИКНОВЕНИЕ ВРАЩЕНИЯ В ТЕРМОГРАВИТАЦИОННОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ВБЛИЗИ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ

Температурные пограничные слои с учетом капиллярных сил на свободной границе однородной жидкости активно изучались в конце прошлого столетия в связи с экспериментальными исследованиями в космическом пространстве. Основным объектом изучения оказался термокапиллярный эффект Марангони. Первая работа была опубликована в 1979 г. L. G. Napolitano. До сих пор это научное направление активно развивается. Регулярно раз в два года в различных городах мира проходят конференции по слоям Марангони. Однако, термогравитационные пограничные слои без учета эффекта Марангони не изучались. Отметим, что бифуркация вращения в термогравитационном пограничном слое при неравномерном нагреве свободной границы может объяснить одну из причин возникновения торнадо в атмосфере.

В докладе рассматривается осесимметричное стационарное течение неоднородной жидкости в слое конечной толщины, ограниченном снизу твердой стенкой, а сверху свободной недеформируемой границей. Предполагается, что свободная граница неравномерно нагрета, что и является причиной возникновения термогравитационного течения жидкости. Решение задачи строится на основе уравнений движения неоднородной жидкости в приближении Обербека-Буссинеска. В условиях малости диффузионных коэффициентов вблизи свободной границы возникает термогравитационный пограничный слой, уравнения которого получены асимптотическим методом. Численные расчеты показали, что в случае локального охлаждения свободной границы вблизи оси симметрии возникает вращательный режим в пограничном слое, причем эффект вращения исчезает при выходе из этого слоя. При нагреве свободной границы вращение не возникает.

Численные расчеты нелинейной краевой задачи выделяют два типа решений — это основные и вторичные режимы. Основные режимы описывают термогравитационные течения жидкости без вращения. Вторичные режимы возникают в результате ветвления основных режимов, причем в результате бифуркации возникает вращение жидкости. Точки бифуркации получены путем численного расчета соответствующей краевой задачи на собственные значения. Для течения жидкости в тонком слое приводится вывод уравнения разветвления путем использования известного метода для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Получено три типа уравнений разветвления. Показано, что во всех случаях в точке бифуркации возникает пара вторичных режимом. В окрестности точки бифуркации построена асимптотика вращающихся режимов.

А. И. Вагабов, Х. А. Абдусаламов (Махачкала)
algebra-dgu@mail.ru

СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПУЧКА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С КРАТНЫМИ КОРНЯМИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ И НЕРЕГУЛЯРНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Рассматривается нерегулярный операторный параметрический пучок четвертого порядка с двумя кратными характеристическими корнями

$$l\,(y) \equiv \left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda^2\right)^2 y(x), \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$

(λ — комплексный параметр) при распадающихся краевых условиях:

$$\frac{d^s y}{dx^s}|_{x=0} = 0, \quad s = 0, 1, 2, \quad y(1) = 0 \tag{2}$$

Установлена

Теорема. *Пусть* $f_k(x)$, $0 < x < 1$, $k = \overline{0,3}$ *четырехкратно непрерывно дифференцируемые функции равные нулю вместе с производными на концах интервала* $(0,1)$.

Справедлива формула четырехкратного разложения по производным цепочкам пучка (1), (2):

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C_\nu} \lambda^s d\lambda \int_0^1 G(x,\xi,\lambda) \sum_{k=0}^{3} \frac{8}{3} \frac{l(f_k(\xi))}{\lambda^{k+1}} d\xi = f_s(x),\ s = \overline{0,3}$$

где C_ν - окружности с центорм в начале λ - плоскости и радиусами $|\lambda| = \pi\left(\nu + \frac{1}{2}\right),\ \nu \in N, \nu \ggg 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вагабов А. И.,* Спектральная теория дифференциальных операторов. Германия, Саарбрюккен: Lap-Lambert, 2012. 75 с.

А. В. Гиль, В. А. Ногин (Ростов-на-Дону)
gil@sfedu.ru

КОМПЛЕКСНЫЕ СТЕПЕНИ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА, СВЯЗАННОГО С ОПЕРАТОРОМ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Пусть

$$G_{\overline{\lambda}} = m^2 I + \Delta - \sum_{k=1}^{l} i\lambda_k \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}, \quad m > 0 \tag{1}$$

обобщенный оператор Гельмгольца в $\mathbb{R}^n$, где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ — оператор Лапласа, $\overline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$, $0 < \lambda_k < 1$, $1 \leq l \leq n$. Комплексные степени оператора $G_{\overline{\lambda}}$ с отрицательными вещественными частями на функциях $\varphi(x) \in \Phi$ определяются как мультипликаторные операторы, действие которых в образах Фурье сводится к умножению на соответствующую степень символа рассматриваемого оператора:

$$(\widehat{G_{\overline{\lambda}}^{-\alpha/2}\varphi})(\xi) = \left(m^2 - |\xi|^2 + i\sum_{k=1}^{l} \lambda_k \xi_k^2 \right)^{-\alpha/2} \widehat{\varphi}(x), \tag{2}$$

$\xi \in \mathbb{R}^n$, $\operatorname{Re}\alpha > 0$.

Получены интегральные представления комплексных степеней (2) в виде интегралов типа потенциала $(B_{\overline{\lambda}}^{\alpha}\varphi)(x)$ с нестандартной метрикой.

На функциях $\varphi(x) \in L_p$ отрицательные степени оператора $G_{\overline{\lambda}}$ понимаются как потенциалы $(B_{\overline{\lambda}}^{\alpha}\varphi)(x)$.

Показана ограниченность оператора $B_{\overline{\lambda}}^{\alpha}$ из L_p в $L_p + L_s$ при $1 \leq p < \frac{2n-l}{n+\operatorname{Re}\,\alpha-l-1}$, $\frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$, $\frac{2n-l}{n-\operatorname{Re}\,\alpha+1} < q < \infty$ в случае $l < n$ и из L_p в L_p при $1 \leq p \leq \infty$ в случае $l = n$.

В рамках метода АОО построено обращение потенциалов $B_{\overline{\lambda}}\varphi$, $\varphi \in L_p$, и дано описание образа $B_{\overline{\lambda}}(L_p)$ в терминах обращающих конструкций.

С. А. Духновский (Москва)
sergeidukhnvskijj@rambler.ru

О ЛОКАЛЬНОМ РАВНОВЕСИИ УРАВНЕНИЯ КАРЛЕМАНА

Рассматривается дискретная кинетическая система уравнений Карлемана [1–5], описывающая разреженный одноатомный газ в одномерном случае. Система Карлемана является модельной системой для кинетического уравнения Больцмана [1].

Для одномерного кинетического уравнения Карлемана получено условие локального равновесия для решений задачи Коши с ограниченной энергией, найдено решение, которое распадается на больших временах на суперпозицию слабовзаимодействующих солитонов и убывающих дисперсионных волн [2–3], доказана теорема существования и единственности решения, получены оценки для линеаризованного оператора системы Карлемана. Более того доказана экспоненциальная стабилизация к состоянию равновесия.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Годунов С.К., Султангазин У.М.* О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана // Успехи МН,Т. XXVI, № 3(159), 1974, С. 3–51.

2. *Radkevich E.V., Vasil'eva O.A., Dukhnovskii S.A.* Local equilibrium of the Carleman equation // Journal of Mathematical Science, Vol. 207, № 32, 2015, Pp. 296–323.

3. *Васильева О.А., Духновский С.А., Радкевич Е.В.* О локальном равновесии уравнения Карлемана // Проблемы математического анализа, Т. 78, 2015, С. 165–190.

4. *Васильева О.А., Духновский С.А.* Условие секулярности кинетической системы Карлемана // Вестник МГСУ, № 7, 2015, С. 33-40.

5. *Васильева О.А.* Численное исследование системы уравнений Карлемана // Вестник МГСУ, № 6, 2015, С. 7–15.

6. *Беленький В.З., Васильева О.А., Кукаркин А.Б.* Программный модуль «Алгебра дифференцирования TAYLOR»: результаты численных экспериментов, сообщение о версии 2.1.// Кибернетика и системный анализ № 3, 1997, С. 171–184.

Т. Я. Ершова (Москва)
ersh@cs.msu.ru

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ С РАЗРЫВНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ФУНКЦИИ

В квадрате $\Omega = (0,1)^2$ с границей $\partial\Omega$ рассматривается задача с постоянными коэффициентами при $\varepsilon \in (0,1]$:

$$Lu \equiv -\varepsilon\triangle u + a\,\partial u/\partial x + qu = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega, \quad u\big|_{\partial\Omega} = g(x,y)\big|_{\partial\Omega}.$$

Положим $f(x,y) = 0$, $g(x,y) = 0$ при $x \neq 0$, а при $x = 0$, т.е. на входе потока в область, граничная функция имеет разрывную производную по y в точке $y = 0.5$, а именно, $g(0,y) = y^3$ при $0 \leqslant y \leqslant 0.5$, $g(0,y) = (1-y)^3$ при $0.5 \leqslant y \leqslant 1$. Разрыв производной граничной функции порождает идущий от этой точки параллельно потоку слабый внутренний параболический слой.

При численном решении уравнение аппроксимируется на кусочно равномерной сетке Шишкина классической пятиточечной разностной схемой с направленной навстречу потоку разностью. Экспоненциальный слой около границы $x = 1$ разрешается с использованием сетки Шишкина, сгущающейся в полосе шириной $\sigma_1 = \min\{a^{-1}\,\varepsilon\ln N;\ 1/4\}$. Это решение не имеет характеристических слоев вдоль границ $y = 0$ и $y = 1$ и особенностей в углах квадрата.

Исследования показывают, что наибольшие ошибки в решении имеют место в центральной части области при $y = 0.5$, т.е. во внутреннем слое. При $\varepsilon = 10^{-2}$ скорость сходимости $O(N^{-1})$; при значениях меньших $\varepsilon \leqslant 10^{-6}$ скорость сходимости $O(N^{-1}\ln N)$. С уменьшением ε погрешность решения стабилизируется, что свидетельствует о равномерной сходимости по ε. Уточняющая кусочно равномерная сетка Шишкина полушириной $\sigma_2 = \min\{q^{-1/2}\sqrt{\varepsilon}\ln N;\ 1/8\}$, сгущающаяся симметрично вдоль внутреннего слоя, для рассматриваемого примера даёт уменьшение ошибки и сходимость со скоростью близкой к $O(N^{-1})$. Если в рассматриваемом примере правая часть уравнения $f(x,y) = 1$, то решение имеет относительно более серьезный экспоненциальный слой и характеристические слои. В этом случае максимум ошибки приходится на область пересечения экспоненциального пограничного слоя с внутренним слоем. При этом скорость сходимости $O(N^{-1}\ln^2 N)$ равномерно по ε, что согласуется с ранее полученными оценками.

С. В. Исраилов, А. А. Сагитов (Грозный)
segitov@mail.ru

СУЩЕСТВОВАНИЕ БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ

Считается, что задана бесконечная система нелинейных уравнений:

$$F_i(x, y_1, y_2, \dots) = 0, \quad i = 1, 2, \dots \tag{1}$$

Здесь функции F_i, $i = 1, 2, \dots$, определены и непрерывны в области Д: $\{x \in [a, b],\ |y_i| \leqslant d_i,\ i = 1, 2, \dots\}$, d_i, $i = 1, 2, \dots$, заданные числа, имеют непрерывные частные производные $\partial F_i/\partial x$, $\partial F_i/\partial y_i$, $i = 1, 2, \dots$ Рассматривается вопрос о существовании неявных функций $y_i(x)$, $i = 1, 2, \dots$ удовлетворяющих системе (1) и условиям:

$$F_i(a, y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0n}, \dots) = 0, \quad i = 1, 2, \dots$$

$$y_i(a) = y_{0i}, \quad i = 1, 2, \dots \tag{2}$$

Если такие функции $y_i(x)$, $i = 1, 2, \dots$ существуют, то они являются решением бесконечной системы дифференциальных уравнений:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial F_i}{\partial y_i} y_i'(x) = -\frac{\partial F_i}{\partial x}, \quad i = 1, 2, \dots \tag{3}$$

Поэтому вопрос существования неявных функций $y_i(x)$, $i = 1, 2, \dots$ можно заменить проблемой существования решения бесконечной системы дифференциальных уравнений (3) $y_i(x)$, $i = 1, 2, \dots$, удовлетворяющего условиям $y_i(a) = y_{0i}$, $i = 1, 2, \dots$ Как алгебраическая система относительно $y_i(x)$, $i = 1, 2, \dots$, система (3) имеет определитель Δ_∞ бесконечного порядка с элементами $\partial F_i/\partial y_i$, $i, j = 1, 2, \dots$ Считается, что $\Delta_\infty \neq 0$, по теориям Коха и Пуанкаре о бесконечных определителях и бесконечных системах алгебраических уравнений из (3) выразим:

$$y_i'(x) = \Phi_i(x, y_1(x), y_2(x), \dots), \quad i = 1, 2, \dots \tag{4}$$

с условиями [1]

$$y_i(a) = y_{0i}, \quad i = 1, 2, \dots \tag{5}$$

Вопросы существования и единственности решения задачи (4), (5) изучены [2]. Они равносильны соответствующим вопросам существования и единственности неявных функций $y_i(x)$, $i = 1, 2, \dots$ для системы (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Валееев К. Г., Жаутыков О. А.* Бесконечные системы дифференциальных уравнений. Алма-Ата: Изд-во «Наука» Каз. ССР, 1974. 415 с.

2. *Исраилов С. В., Юшаев С. С.* Многоточечные и функциональные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Нальчик: Изд. центр «Эль-Фа», 2004. 445 с.

О. В. Капцов (Красноярск)
profkap@gmail.com

ИНВАРИАНТЫ ХАРАКТЕРИСТИК УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

В докладе рассматриваются системы уравнений в частных производных первого порядка с двумя и n независимыми переменными. Вводится понятие инварианта характеристик для эволюционных систем с двумя независимыми переменными. Доказывается, что существование инвариантов связано с пассивностью некоторых систем. Описываются способы построения новых инвариантов из уже известных. Приводится схема применения инвариантов к редукции и интегрированию систем уравнений с частными производными. Данная схема применяется к одномерным нестационарным уравнениям газовой динамики. Приводятся инварианты нулевого и первого порядка для двумерных стационарных уравнений газовой динамики с произвольным уравнением состояния. Доказано, что инварианты должны удовлетворять «уравнениям характеристик», в которых частные производные заменяются на полные.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Капцов О. В.* Инварианты характеристик уравнений с частными производными // Сиб. матем. журн., 2004, Т. 45, № 3, С. 577–591.

2. *Капцов О. В.* Методы интегрирования уравнений с частными производными. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 183 с.

С. Б. Климентов (Ростов-на-Дону, ЮФУ, ЮМИ ВНЦ РАН)
sklimentov@hotmail.com

НЕКОТОРЫЕ «ПАТОЛОГИЧЕСКИЕ» РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БЕЛЬТРАМИ

Обозначим $D_z = \{z : |z| < 1\}$ единичный круг комплексной z-плоскости E_z, $z = x + iy$, $i^2 = -1$; $\Gamma_z = \partial D_z$ — граница круга D_z; $\overline{D}_z = D_z \cup \Gamma_z$. Рассмотрим в $\overline{D}$ равномерно эллиптическую систему Бельтрами в комплексной записи

$$\partial_{\bar{z}} w - q(z)\partial_z w = 0, \tag{1}$$

где $w = w(z) = u(z) + iv(z)$ — искомая комплексная функция, $\partial_{\bar{z}} = 1/2(\partial/\partial x + i\partial/\partial y)$, $\partial_z = 1/2(\partial/\partial x - i\partial/\partial y)$ — производные в смысле Соболева, $q(z)$ — измеримая комплексная функция, $|q(z)| \le q_0 = \mathrm{const} < 1$, $z \in \overline{D}$.

В работе построен пример ограниченного в D решения уравнения (1), почти всюду на Γ не имеющего некасательных предельных значений, а также пример ограниченного в D решения такого уравнения, не равного тождественно нулю, почти всюду на Γ имеющего нулевые некасательные предельные значения. Эти примеры показывают, что в общем случае для классов Харди решений уравнения (1) (и более общих неканонических эллиптических систем первого порядка) обычная постановка краевых задач, используемая для голоморфных и обобщённых аналитических функций, некорректна.

При построении этих примеров используются следующие вспомогательные результаты, представляющие определённый самостоятельный интерес.

Теорема 1. *Если $w = w(z)$ — основной гомеоморфизм уравнения (1) (см. [1]), последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D_z$ сходится к $z_0 \in \Gamma_z$ по некасательному пути, то последовательность $\{w_n = w(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $w_0 = w(z_0) \in \Gamma_w$ также по некасательному пути.*

Теорема 2. *Если множество $G \subset \Gamma$ имеет нулевую линейную меру, то существует ограниченная голоморфная функция, не имеющая радиальных пределов в точках множества G.*

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Климентов С. Б.* Представления «второго рода» для классов Харди решений уравнения Бельтрами // Сиб. матем. журн. 2014. Т. 55, № 2. С. 324–340.

Копачевский Н. Д., Радомирская К. А. (Симферополь)
kopachevsky@list.ru, radomirskaya@mail.ru

О НЕКОТОРЫХ АБСТРАКТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ СОПРЯЖЕНИЯ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ [1]

В докладе рассматривается общий подход к изучению абстрактных смешанных краевых задач сопряжения, а также применение этого подхода к различным конфигурациям пристыкованных областей в задачах сопряжения. Этот подход основан на обобщенной формуле Грина, в основном для оператора Лапласа. Другие аналогичные задачи математической физики, гидродинамики, теории упругости и т.д. исследуются по этой предлагаемой общей схеме.

В первой части доклада излагаются без доказательств теоремы о существовании абстрактной формулы Грина для тройки гильбертовых пространств и абстрактного оператора следа, а также аналогичные факты для абстрактных смешанных краевых задач. Приводятся формулировки обобщенной формулы Грина на основе оператора Лапласа.

Во второй части приводится общая схема рассмотрения абстрактных краевых задач сопряжения на примере конфигурации пристыкованных областей, которую авторы для простоты называют «трижды разрезанный

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-21-00066, выполняемого в Воронежском госуниверситете).

арбуз». Затем эта схема реализуется для этой конфигурации и оператора Лапласа. Далее рассматривается другие более простые примеры областей.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Копачевский Н.Д., Радомирская К.А.* Название статьи // Изв. РАН. Сер. матем. 1999. Т. 66, № 6. С. 59–68. Абстрактные смешанные краевые задачи сопряжения // Международная научная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения – V» (Ростов-на-Дону), 2015. С. 211.

2. *Копачевский Н.Д., Радомирская К.А.* Абстрактные краевые и спектральные задачи сопряжения // XXVI Крымская осенняя математическая школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (Батилиман(Ласпи)), 2015. С. 52.

3. *Agranovich M. S., Katsenelenbanm B. Z., Sivov A. N., Voitovich N. N.* Generalized method of eigenoscillations in difraction theory. Berlin: Wiley–VCN, 1999.

A. B. Muravnik (Voronezh)
amuravnik@yandex.ru

ON QUALITATIVE PROPERTIES OF SOLUTIONS OF THE CAUCHY PROBLEM FOR QUASILINEAR PARABOLIC INEQUALITIES[1]

In $\mathbb{R}^n \times (0,+\infty)$, the Cauchy problem for the inequality

$$\Delta u + \sum_{j=1}^{n} a_j(x,u) \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 - \frac{\partial u}{\partial t} \geq f(u)$$

is considered under assumptions that the initial-value function $u_0(x)$ is continuous, bounded, and nonnegative and $\lim\limits_{|x|\to\infty} u_0(x) = 0$.

We find conditions for the coefficients and the right-hand part of the inequality, guaranteeing that any classical nonnegative solution of the investigated problem possesses the following properties:

(i) $\operatorname{supp} u(x,t)$ is bounded for any positive t (the *instant compactification* of the solution);

(ii) $\lim\limits_{|x|\to\infty} u(x,t) = 0$ uniformly with respect to $t \in [0,+\infty)$;

(iii) there exists a positive T such that $u(x,t) \equiv 0$ in the half-space $\mathbb{R}^n \times [T,+\infty)$ (a *finite-time extinction* of the solution).

[1]The author is supported by the president grant for government support of the leading scientific schools of the Russian Federation No. 4479.2014.1 and by the RFBR grant No. 14-01-00265.

Г. Е. Мурзабекова (Астана, Казахстан)
guldenmur07@gmail.com

ЗАДАЧА УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ПАМЯТЬЮ НА ГРАФАХ

Проблема управляемости системами, описываемыми волновыми уравнениями с памятью, исследована в [1] для интервала. Алгоритм восстановления источника идентификации по информации на границе, предложен в [2]. Эти результаты мы обобщаем на графы.

Исследуется управляемость для волнового уравнения с памятью, описываемого уравнением:

$$\rho(x)u_{tt}(x,t) = (p(x)u_x(x,t))_x + \int_0^t N(t-s)(p(x)u_x(x,s))_x\,ds,$$

$$0 < x < l,\ 0 < t < T;$$

с граничными и начальными условиями:

$$u_x(0,t) = f(t),\ u(l,t) = 0,\ u(x,0) = u_t(x,0) = 0.$$

Коэффициенты ρ, $p \in C^2[0,l]$ строго положительны. Задача описывает малые (линейные) поперечные колебания струны с памятью. Здесь $\rho(x)$ — плотность струны, l — длина струны, $N(t-\tau)$ — ядро памяти, функция $f(t)$ — управление, т. е. внешняя сила, действующая на левый конец струны.

Нами решена задача управляемости для рассматриваемой системы, а именно, для любого $T > 0$ мы описываем множество достижимости

$$\left\{\left(y^f(\cdot,T), y_t^f(\cdot,T)\right) :\ f \in L^2(0,T)\right\}$$

для этой системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Avdonin S. Belinsky B.* On controllability of a non-homogeneous string with memory // J. Math. Anal. Appl., 2013. No. 398. C. 254–269.

2. *Avdonin S. Murzabekova G.* Source identification problems for hyperbolic equations with memory on graphs / Abstracts of the 10th International ISAAC Congress. — Macao, China SAR, 2015. — C. 54–55.

К. Б. Нуртазина (Астана)
nurtazina.k@gmail.com

УПРАВЛЯЕМОСТЬ ДЛЯ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ НА ГРАФАХ

Метод граничного управления основан на глубокой связи между обратными задачами (идентификацией) и управляемостью в динамических системах.

В работе [1] исследована управляемость температурой и потоком для тепловых уравнений с памятью. Задача идентификации источника на отрезке по наблюдению на границе решена в [2].

Мы демонстрируем модифицированную версию этого метода в применении к звездному графу. Для восстановления неизвестных коэффициентов построен новый алгоритм, который редуцирует решения линейного уравнения Вольтерра второго рода или систему таких уравнений.

Следующая начально-краевая задача рассматривается на каждом интервале:

$$\begin{cases} u_t^j(x,t) - \int_0^t N(t-s)u_{xx}^j(x,s)ds = f_j(t)g_j(x), & 0<x<l_j, 0<t<T, \\ u^j(l_j,t)=0, & 0<t<T, \\ u^j(x,0)=u_t^j(x,0)=0, & 0<x<l_j \end{cases} \tag{1}$$

На внутреннюю вершину налагаются стандартные условия согласования Кирхгофа-Неймана:

$$\begin{cases} u^1(0,t) = ... = u^N(0), & 0<t<T, \\ \sum_{j=1}^N u_x^j(0,t)=0, & 0<t<T, \end{cases} \tag{2}$$

Теорема. *Для описываемого уравнениями (1)–(2) звездного графа восстановление источников g_j возможно по N или $N-1$ граничным наблюдениям. В первом случае время восстановления равно $1/2\ \max_{i,j=1,\dots,N,\, i\neq j}$ $\{l_i+l_j\}$, во втором — $\max_{j=1,\dots,N-1}\{l_j+l_N\}$ при допущении отсутствия наблюдения в l_N.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Avdonin S. Pandolfi L.* Simultaneous temperature and flux controllability for heat equations with memory / Quarterly of Applied Mathematics, 2013. 71. № 2. P. 339–368.

2. *Avdonin S. Nurtazina K.* Source identification for the Heat Equation with Memory on Graphs / Abstracts of the 10th International ISAAC Congress. — Macao, China SAR, 2015. — C. 52–53.

М. М. Преображенская (Ярославль)
rita.preo@gmail.com

СУЩЕСТВОВАНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ BURSTING-ЦИКЛОВ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОМ УРАВНЕНИИ С ДВУМЯ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ, МОДЕЛИРУЮЩЕМ ПОВЕДЕНИЕ ОТДЕЛЬНОГО НЕЙРОНА

Объектом исследования данной работы служит скалярное нелинейное дифференциально-разностное уравнение с двумя запаздываниями вида

$$\dot{u} = \lambda\Big(f\big(u(t-h)\big) - g\big(u(t-1)\big)\Big)u, \tag{1}$$

моделирующее поведение отдельного нейрона. Здесь $u(t) > 0$ — мембранный потенциал нейрона, параметр λ характеризует скорость протекания электрических процессов в системе и предполагается большим, параметр h фиксирован и принадлежит интервалу $(0, 1)$. Предполагаем, что функции $f(u)$, $g(u)$ класса $C^1(\mathbb{R}_+)$, где $\mathbb{R}_+ = \{u \in \mathbb{R} : u \geqslant 0\}$ обладают свойствами:

$$\begin{gathered} f(0) = 1;\ f(u) = -a_0 + O\big(\tfrac{1}{u}\big),\ uf'(u) = O\big(\tfrac{1}{u}\big) \text{ при } u \to +\infty; \\ g(0) = 0;\ g(u) = b_0 + O\big(\tfrac{1}{u}\big),\ ug'(u) = O\big(\tfrac{1}{u}\big) \text{ при } u \to +\infty. \end{gathered} \tag{2}$$

Общая постановка задачи состоит в следующем. По любому фиксированному натуральному n необходимо подобрать фигурирующие в (1), (2) параметры a_0, b_0, h, такие что при всех достаточно больших λ уравнение (1) будет иметь специальный экспоненциально орбитально устойчивый цикл $u = u_*(t, \lambda)$ периода $T_*(\lambda)$, где $T_*(\lambda)$ при $\lambda \to \infty$ стремится к некоторому конечному пределу $T_* > 0$. Специфика заключается в том, что функция $u_*(t, \lambda)$ на отрезке времени допускает ровно n подряд идущих асимптотически высоких всплесков, а все остальное время она асимптотически мала. Такой цикл принято называть bursting-циклом.

Сформулированная задача допускает четыре варианта решения, один из которых был разобран в статье [1], остальные рассмотрены мною в рамках настоящей работы.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Глызин С. Д., Колесов А. Ю., Розов Н. Х.* Моделирование эффекта взрыва в нейронных системах // Матем. заметки. 2013. Т. 93, № 5. С. 684–701.

Т. С. Ратью, М. С. Романов, В. Н. Самохин,
Г. А. Чечкин(Москва)
vnsamokhin@mtu-net.ru

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ И ЕДИНСТВЕННОСТИ В ДВУМЕРНОЙ НЕМАТОДИНАМИКЕ [1]

Доклад посвящен вопросам существования и единственности решений системы уравнений Эриксена-Лесли, см. [1,2], которая описывает динамику нематических жидких кристаллов. В основном, приводятся результаты работ [3] и [4]. К примеру, в области $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{u}} - \mu\Delta\mathbf{u} = -\nabla\left(p + \frac{K}{2}\|\nabla\theta\|^2\right) - K\Delta\theta\nabla\theta + \mathbf{F}, \qquad \mathrm{div}\mathbf{u} = 0,$$
$$J\dot{\nu} = -K\Delta\theta, \; \dot{\theta} = \nu$$

с граничными и начальными условиями

$$\mathbf{u}\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \theta - \theta_1\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \nu|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{для любого } t > 0,$$

$$\mathbf{u}(0,x) = \mathbf{u}_0(x), \quad \nu(0,x) = \nu_0(x), \quad \theta(0,x) = \theta_0(x).$$

Теорема 1. *Пусть Ω — липшицева область и для почти всех $x \in \partial\Omega$ граница является графиком C^2-функции в некоторой окрестности x. Предположим, что $\theta_0 \in W_2^3(\Omega)$, $\nu_0 \in W_2^2(\Omega)$, $\mathbf{u_0} \in \overset{\circ}{Sol}{}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega)$; $\Delta\mathbf{u}_0\big|_{\partial\Omega} = 0$ и пусть для некоторого $d > 0$ выполняется предположение $\theta_0(x) = \theta_1 \equiv const$, $\nu_0(x) = 0$, если $dist(x, \partial\Omega) < d$. $\mathbf{F} \in L_2((0,T); W_2^1(\Omega))$, $\mathbf{G} = (0,0,G^3) \in L_1((0,T); W_2^2(\Omega))$, $F^3 = 0$. Тогда существует решение для некоторого $T > 0$, и оно единственно.*

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Ericksen J.* Conservation laws for liquid crystals// Trans. Soc. Rheol. 1961. T. 5. C. 22–34. 2. *Leslie F.* Some constitutive equations for anisotropic fluids// Quart. J. Mech. Appl. Math. 1966. T. 19. C. 357–370. 3. *Ратью Т. С., Романов М. С., Самохин В. Н., Чечкин Г. А.* Теоремы существования и единственности в двумерной нематодинамике. Конечная скорость распространения возмущений//Докл. РАН. 2015. Т. 462, № 5, июнь. С. 519–523. 4. *Chechkin G. A., Ratiu T. S., Romanov M. S., Samokhin V. N.* Nematic liquid crystals. Existence and uniqueness of periodic solutions to Ericksen-Leslie equations// Вестник МГУП имени Ивана Федорова. 2012. Т. 12. С. 139–151.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-01-07920).

А. З. Сулейманов, Р. Б. Салимов (Казань)
ayaz-suleymanov-91@mail.ru, salimov@5354.ru

НОВЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ОДНОРОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА С БЕСКОНЕЧНЫМ ИНДЕКСОМ СТЕПЕННОГО ПОРЯДКА И УСЛОВИЯМИ НА ЛУЧЕ

В работе рассматривается краевая задача Римана с бесконечным индексом степенного порядка ρ, $\frac{1}{2} < \rho < 1$. Для решения этой задачи используется подход, основанный на устранении бесконечного разрыва аргумента коэффициента краевого условия.

Пусть D – область, в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, границей которого служит положительная действительная полуось L. Требуется определить функцию $\Phi(z)$, аналитическую и ограниченную в области D, если её граничные значения удовлетворяют условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t),\ t \in L,$$

где $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ – предельные значения функции $\Phi(z)$ при $z \to t$ соответственно слева и справа, когда соответственно $\mathrm{Im}(z) > 0$ и $\mathrm{Im}(z) < 0$, коэффициент $G(t)$ – заданная функция, удовлетворяющая условиям:

1) $\ln|G(t)|$ удовлетворяет условию Гельдера на L $\big(\ln|G(t)| \in H_L\big)$,

2) $\arg G(t) = \beta t^\rho + \nu(t)$, где β, ρ – заданные числа, $\beta > 0$, $\frac{1}{2} < \rho < 1$, $\nu(t)$ – заданная функция, $\nu(t) \in H_L$.

В отличие от работ других авторов решение задачи дается путем приведения ее к соответствующей задаче с конечным индексом.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.

2. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. Т. 2. М.: Наука, 1968. 624 с.

Р. Р. Тазитдинова (Москва)
regina.tazitdinova@gmail.com

УРАВНЕНИЯ МГД-ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ДЛЯ МОДИФИКАЦИИ О.А. ЛАДЫЖЕНСКОЙ СИСТЕМЫ НАВЬЕ–СТОКСА

В докладе рассматривается модифицированная система уравнений Навье–Стокса для электромагнитной среды $B(x)$ в магнитной гидродинамике.

В случае двумерного стационарного течения модифицированная система уравнений МГД - пограничного слоя имеет вид:

$$\nu((1 + k(u_y)^2)u_y)_y - uu_x - vu_y + B^2(x)(U(x) - u) = -U(x)U'(x),$$

$$u_x + v_y = 0, \tag{1}$$

Система уравнений (1) рассматривается в области $D = \{0 < x < X, 0 < y < \infty\}$ с граничными условиями

$$u(0,y) = u_0(y), \quad u(x,0) = 0, \quad v(x,0) = v_0(x),$$

$$u(x,y) \to U(x), \quad \text{при} \quad y \to \infty, \tag{2}$$

С помощью преобразования Мизеса система уравнений (1) с условиями (2) сводится к одному квазилинейному уравнению вида

$$\nu\sqrt{w}\left(1 + \tfrac{3}{4}k\left(\tfrac{\partial w}{\partial \psi}\right)^2\right)\tfrac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} - \tfrac{\partial w}{\partial x} - v_0\tfrac{\partial w}{\partial \psi} + 2B^2(x)(U - \sqrt{w}) = -2U\tfrac{\partial U}{\partial x}$$

в области $G = \{0 < x < X, 0 < \psi < \infty\}$ с граничными условиями
$w(0,\psi) = w_0(\psi), \quad w(x,0) = 0, \quad w(x,\psi) \to U^2(x) \quad$ при $\quad \psi \to \infty$.
При некоторых естественных предположениях относительно $U(x)$, $B(x), u_0(x), v_0(x)$ доказаны существование и единственность классического решения задачи (1), (2), установлен ряд свойств полученного решения. Найдены условия безотрывного течения, установлен характер влияния магнитного поля на отрыв пограничного слоя.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. // М., Наука. Физматлит. 1970.

2. *Самохин В. Н., Фадеева Г. М., Чечкин Г. А.* Уравнения пограничного слоя для модифицированной системы Навье – Стокса. // Труды семинара им. И.Г. Петровского. Вып. 28. М.: Изд-во Моск.ун-та, 2011. С. 329–361..

3. *Самохин В. Н., Фадеева Г. М., Чечкин Г. А.* Модификация О.А. Ладыженской уравнений Навье–Стокса и теория пограничного слоя.// Вестник МГУП, №5, 2009. С. 127–143.

Секция II
Теория функций

Г. Акишев (Караганда, Казахстан)
akishev@ksu.kz

ОЦЕНКИ ПОПЕРЕЧНИКА ПО КОЛМОГОРОВУ КЛАССОВ МАЛОЙ ГЛАДКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОРЕНЦА [1]

В докладе рассматривается пространство Лоренца $L^{*}_{\bar{q},\bar{\theta}}(I^m)$ с анизотропной нормой периодических функций многих переменных (см. [1]) и в нем класс Никольского - Бесова - Аманова $S^{\overline{r}}_{\overline{p},\overline{\theta},\overline{\tau}}B$. Установлены оценки колмогоровских поперечников единичного шара этого класса при малой гладкости в пространстве Лоренца с анизотропной нормой. В частности

Теорема. *Пусть* $1 < \theta_j^{(1)}, \theta_j^{(2)} < \infty$, $\quad 1 < q \leq \theta_j^{(2)}$, $1 \leq \tau_j \leq \infty$, $j = 1, ...m$ *и* $0 < r_1 + \frac{1}{q} - \frac{1}{p_1} = ... = r_\nu + \frac{1}{q} - \frac{1}{p_\nu} < r_{\nu+1} + \frac{1}{q} - \frac{1}{p_{\nu+1}} \leq ... \leq r_m + \frac{1}{q} - \frac{1}{p_m}$.

1. Если $2 \leq p_j < p_1$, $\ j = 2, ..., m$ *и* $p_1 < q$, $r_1 < \beta = \frac{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q}}{1 - \frac{2}{q}}$, *то*

$$d_M \left(S^{\overline{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B, \ \ L^{*}_{q,\bar{\theta}^{(2)}} \right) \leq C \left(\frac{\log^{\nu-1} M}{M} \right)^{\frac{q}{2}(r_1 + \frac{1}{q} - \frac{1}{p_1}} (\log M)^{\sum\limits_{j=2}^{\nu} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tau_j} \right)_+} .$$

2. Если $1 < p_j \leq 2 < q$, $\ j = 1, ..., m$, $r_1 < \frac{1}{p_1}$,*, то*

$$d_M \left(S^{\overline{r}}_{\bar{p},\bar{\theta}^{(1)},\overline{\tau}}B, \ \ L^{*}_{q,\bar{\theta}^{(2)}} \right) \leq C \left(\frac{\log^{\nu-1} M}{M} \right)^{(r_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{p_1})} (\log M)^{\sum\limits_{j=2}^{\nu} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\tau_j} \right)_+} .$$

При $p_j = \theta_j^{(1)} = p, \theta_j^{(2)} = q, j = 1, ..., m$ следуют результаты [2], [3].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Blozinski A. P.* Multivariate rearragements and Banach function spaces with mixed norms //Transac. Amer. math. soc. 1981. Vol. 263, № 1. P. 146–167.

2. *Галеев Э. М.* Оценки поперечников по Колмогорову классов периодических функций многих переменных малой гладкости // Вест.МГУ, сер. мат.мех. 1987. № 1. С. 26–30.

3. *Романюк А. С.* О колмогоровских поперечниках классов $B^r_{p,\theta}$ периодических функций многих переменных малой гладкости в пространстве L_q// Укр. мат.ж. 1994. Т. 46, № 7. С. 915–926.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Программы повышения конкурентоспособности Уральского государственного университета, постановления № 211 Правительства Российской Федерации, контракт № 02.A03.21.0006.

Р. Р. Акопян (Озерск, Екатеринбург)
RRAkopyan@mephi.ru

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ И ЭНТРОПИЯ ИСТОЧНИКА ПОГРЕШНОСТИ [1]

Рассматривается задача оптимального восстановления значения в точке z_0 функции аналитической в односвязной области G, ограниченной замкнутой спрямляемой жордановой кривой Γ, по предельным граничным значениям на γ_1 – измеримом подмножестве Γ, с погрешностью на классе Q функций f из пространства Харди $H^1(G)$ таких, что $\|f\|_{L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)} < +\infty, \|f\|_{L^r_{\varphi_2}(\gamma_2)} \le 1, \gamma_2 = \Gamma \setminus \gamma_1, 1 \le q, r \le \infty$, φ_k – веса, удовлетворяющие условию Сеге. Точная постановка задачи следующая:

$$E_R(\delta) = \inf_{T \in R} \sup_{\substack{f \in Q \\ \|f-g\|_{L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)} \le \delta}} |f(z_0) - Tg|\,. \qquad (1)$$

В качестве множества методов восстановления R рассматривается множество L – линейных, либо B – ограниченных, либо O – всевозможных функционалов на $L^q_{\varphi_1}(\gamma_1)$.

Теорема 1. *Для величины* (1) *справедливо равенство*

$$E_L(\delta) = E_B(\delta) = E_O(\delta) = C\delta^{\alpha}.$$

в котором величина C задается соотношениями

$$C = \alpha^{-\alpha/q}\beta^{-\beta/r}\varepsilon^{1/q}(\gamma_1)\varepsilon^{1/r}(\gamma_2),\ \varepsilon(\gamma_k) = \exp\int_{\gamma_k} P(z_0,\zeta)\ln\frac{P(z_0,\zeta)}{\varphi_k(\zeta)}\,ds,$$

где $\alpha = \alpha(z_0, \gamma_1, G)$ – гармоническая мера γ_1 относительно области G в точке z_0, $\beta = 1-\alpha$, P – ядро Пуассона области G (плотность гармонической меры).

В докладе будет приведен оптимальный метод восстановления, обсуждена связь величины (1) с энтропией.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 15-01-02705), а также при финансовой поддержке Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление №211 Правительства Российской Федерации, контракт №02.A03.21.0006).

Г. Г. Брайчев (Москва)
braichev@mail.ru

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ С НУЛЯМИ НА ЗАДАННЫХ МНОЖЕСТВАХ

Пусть $f(z)$ — целая функция с нулями $\Lambda_f = \Lambda = (\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$, $n_\Lambda(r)$ — считающая функция этой последовательности.

Зададим $\rho > 0$. Верхняя и нижняя ρ-плотности последовательности Λ определяются равенствами

$$\overline{\Delta}_\rho(\Lambda) := \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{n_\Lambda(r)}{r^\rho}, \qquad \underline{\Delta}_\rho(\Lambda) := \varliminf_{r\to+\infty} \frac{n_\Lambda(r)}{r^\rho}.$$

Замена здесь $n_\Lambda(r)$ на $N_\Lambda(r) := \int\limits_0^r \frac{n_\Lambda(t)}{t}\,dt$ определяет усредненные верхнюю и нижнюю ρ-плотности $\overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda)$, $\underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda)$.
Типом и нижним ρ-типом целой функции $f(z)$ называют величины

$$\sigma_\rho(f) := \varlimsup_{r\to+\infty} r^{-\rho} \ln \max_{|z|=r} |f(z)|, \qquad \underline{\sigma}_\rho(f) := \varliminf_{r\to+\infty} r^{-\rho} \ln \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

В докладе будут приведены точные оценки типа и нижнего ρ-типа целой функции $f(z)$ через ρ-плотности или усредненные ρ-плотности ее нулей в нескольких важных случаях: все нули лежат в угле; между двумя параллельными или пересекающимися прямыми; на лучах, разделяющих комплексную плоскость на равные углы, а также в областях, асимптотически близких к указанным.

В качестве примера приведем такой результат

Теорема. *Тип каждой целой функции $f(z)$ порядка $\rho \in (0,1)$ с нулями, расположенными в угле раствора $2\theta \in [0,\pi]$ и имеющими усредненные ρ-плотности $\overline{\Delta}^*_\rho(\Lambda_f) = \beta^*$, $\underline{\Delta}^*_\rho(\Lambda_f) \geq \alpha^*$, удовлетворяет точным, достижимым оценкам*

$$\sigma_\rho(f) \geq \frac{\beta^* e\rho}{2} \max_{a>0} \frac{\ln(a^2 + 2a\cos\theta + 1)}{a^\rho},$$

$$\sigma_\rho(f) \geq \rho \left(\frac{\pi\alpha^* \cos\rho\theta}{\sin\pi\rho} + \max_{a>0} \int\limits_{aa_1^{1/\rho}}^{aa_2^{1/\rho}} \frac{\left(\beta^* a^{-\rho} - \alpha^* \tau^{-\rho}\right)(\tau + \cos\theta)}{\tau^2 + 2\tau\cos\theta + 1}\,d\tau \right),$$

где a_1, a_2 $(0 \leq a_1 \leq 1 \leq a_2 \leq e)$ — корни уравнения $a \ln \frac{e}{a} = \frac{\alpha^*}{\beta^*}$.

Л. Е. Бритвина (Великий Новгород)
Lyubov.Britvina@novsu.ru

ПОНЯТИЕ СОГЛАСОВАННОСТИ СВЕРТОК И ОПЕРАТОРОВ ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ [1]

Допустим, что задано некоторое множество линейных операторов $\mathcal{L}^k$, действующих из некоторого пространства $N_0(T)$ в $N_1(T)$, $k \in \Omega \subset \mathbf{Z}$, каждый из которых может быть дифференциальным, разностным, интегральным, интегро-дифференциальным и т. д.

Рассматривается операторное уравнение

$$\sum_k a_k \mathcal{L}^k u(t) = f(t)\,,$$

где $a_k \in \mathbf{R}\,,\ k \in \Omega \subset \mathbf{Z}$, $u(t) \in N_0(T)$, – искомая, $f(t) \in N_1(T)$ – заданная функция.

Решение данного уравнения ищется при некоторых заданных начальных условиях в виде обобщенной свертки, порожденной в общем случае тремя различными интегральными преобразованиями. В настоящее время существует два основных подхода к построению сверточных конструкций. Один из них основан на нахождении соответствующего оператора обобщенного сдвига. При другом подходе конструируется ядро обобщенной свертки (полисвертки) с использованием определения, которое было введено в 1967 году В. А. Какичевым.

В докладе обсуждается проблема согласованности обобщенных сверток и операторов $\mathcal{L}^k$, $k \in \Omega$, образующих исходное уравнение. Находятся условия, при которых возможна формулировка понятия согласованности в виде свойства обобщенных сверток. Полученные результаты демонстрируются на примерах.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Какичев В. А.* О свертках для интегральных преобразований // Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук. 1967. № 2. С. 48–57.

2. *Britvina L. E.* General convolutions of integral transforms and their application to ODE and PDE problems // Mathematical Modeling and Analysis, Vol.11(1). 2006. Pp. 23–34

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке проектной части государственного задания в сфере научной активности Министерства образования и науки Российской Федерации, проект № 1.949.2014/K.

А. В. Буробин (Обнинск)
burobin@iate.obninsk.ru

УРАВНЕНИЕ АБЕЛЯ И ДРОБНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

В работе [1] изучались свойства интегральных операторов

$$K\varphi(x) = \int\limits_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt$$

с полярным ядром

$$K(x,t) = \frac{K_0(x,t)}{|x-t|^{\gamma}}$$

в пространствах $C^{(\alpha)}([0,1])$, $\alpha < 0$, получающихся при расширении пространства $C^{(0)}([0,1])$.

В настоящем докладе, в развитие предыдущих положений, исследуется разрешимость уравнения Абеля $K\varphi = f$ при $K_0(x,t) \equiv 1$.

Показывается, что с этим уравнением можно связать различные пространства однозначной разрешимости.

С учетом связи оператора Абеля с дробным интегрированием [2] различным пространствам разрешимости уравнения ставятся в соответствие различные операторы дробного интегрирования. Изучаются свойства таких операторов.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Буробин А. В.* Интегральные операторы в С-шкале пространств обобщенно интегрируемых функций // Современные проблемы теории функций и их приложения: тез. докл. X Международной конференции «Математика. Экономика. Образование». Ростов-на-Дону, 2014. С. 74.

2. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

А. В. Герман (Гомель, Беларусь)
avastafeva@mail.ru

ОБ АСИМПТОТИКЕ АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА – ПАДЕ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ

Зафиксируем $n, m_1,\ m_2, \ldots, m_k$ — произвольные целые неотрицательные числа. Обозначим $\sum\limits_{j=1}^{k} m_j = m$, $n_j = n + m - m_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Известно, что для системы экспонент $e^{\lambda_j z}$, где $\{\lambda_j\}_{j=1}^{k}$ — различные комплексные числа, при $j = 1, 2, \ldots, k$ существуют такие многочлены $Q_m(z)$,

$P^j_{n_j}$, $degQ_m \le m$, $degP^j_{n_j} \le n_j$, для которых

$$Q_m(z)e^{\lambda_j z} - P^j_{n_j}(z) = A_j z^{n+m+1} + \dots$$

и единственные рациональные функции

$$\pi^j_{n,m}(z) = \pi^j_{n_j,m}(z, e^{\lambda_j \xi}) = P^j_{n_j}(z)/Q_m(z), \ \ j = 1, 2, \dots, k,$$

называемые аппроксимациями Эрмита – Паде II типа для системы экспонент [1].

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Пусть* $n = m_1 = ... = m_k$ *и* $\pi^j_{kn,kn}(z; e^{\lambda_j \xi})$ *— аппроксимации Эрмита – Паде для системы экспонент* $\{e^{\lambda_j z}\}^k_{j=1}$*, где* $\lambda_j = (\alpha + \beta i)b_j$ *— различные и отличные от нуля комплексные числа. Тогда для любого комплексного* z*,* $|z| \le L$*, и* $j \in \{1,\ 2,\ ...,\ k\}$ *при* $n \to \infty$ *имеем*

$$e^{\lambda_j z} - \pi^j_{kn,kn}(z; e^{\lambda_j \xi}) = (-1)^{(k+1)n}(\alpha+\beta i)^{n(k+1)+1}\frac{z^{kn+n+1}}{(kn+n)!}e^{\lambda_j z}e^{\frac{\sum\limits_{p=0}^{k}\lambda_p}{k+1}} \times$$

$$\times sign(b_j)\sum_p{}^{*}(-1)^{np}\sqrt{\frac{-2\pi}{nS''(x_p)}}e^{nS(x_p)}e^{-z(\alpha+\beta i)x_p}(1 + O_p(1/n)),$$

где в $\sum\limits_p{}^{*}$ *суммирование распространяется только на те значения* p *из* $\{1,\ 2,\ ...,\ k\}$*, для которых* x_p *лежат в интервале с концами в точках* 0 *и* b_j*.*

Использованные обозначения смотри в [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никишин Е. М.* Рациональные аппроксимации и ортогональность. М.: Наука, гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. 256 с.

2. *Старовойтов А. П.* Об асимптотике аппроксимаций Эрмита – Паде для системы функций Миттаг – Леффлера // Изв. вузов. Матем. 2014. № 9. С. 59–68.

А. Ж. Жубанышева, Н. Темиргалиев (Астана, Казахстан)
axaulezh@mail.ru

ПРИБЛИЖЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССОВ СОБОЛЕВА ПО ИХ ЗНАЧЕНИЯМ В ТОЧКАХ

В рамках Компьютерного (вычислительного) поперечника (К(В)П) исследуется задача восстановления производных $f^{(\bar{\alpha})} = f^{(\alpha_1,\dots,\alpha_s)}$ функций из классов Соболева $W_2^r(0,1)^s$ по информации, полученной от всех линейных функционалов $l_1,...,l_N$ (определения и обозначения см.в[1]). Установлено, что

К(В)П-1:

$$\inf_{\substack{l_1,...,l_N - \textit{линейные}\\ \textit{функционалы},\varphi_N}} \sup_{f\in W_2^r(0,1)^s} \left\| f^{(\bar{\alpha})}(x) - \varphi_N(l_1(f),...,l_N(f);x)\right\|_{L^2} \asymp$$

$$\asymp N^{-\frac{r}{s}+\frac{\alpha_1+\ldots+\alpha_s}{s}},$$

где $\varphi_N(z_1,...,z_N;x)$-алгоритм переработки информации. Здесь оценка сверху достигается на вычислительном агрегате (Ω_N-ядро Дирихле)

$$\Lambda_N^{(\bar{\alpha})}(x;f)\equiv\frac{1}{n^s}\sum_{\substack{k_j=0,1,\ldots,n-1\\ (j=1,\ldots,s)}} f\left(\xi^{(k)}\right)\Omega_N^{(\bar{\alpha})}\left(x-\xi^{(k)}\right), \xi^{(k)}=\left(\frac{k_1}{n},...,\frac{k_s}{n}\right),$$

что сразу же включает его в разряд неулучшаемых по порядку среди всех возможных, построенных по линейной информации. Далее, в К(В)П-2 показано, что с сохранением порядка $\asymp N^{-\frac{r}{s}+\frac{\alpha_1+\ldots+\alpha_s}{s}}$ восстановления по точной информации, значения $f\left(\xi^{(k)}\right)$ в $\Lambda_N^{(\bar{\alpha})}(x;f)$ можно вычислять с погрешностью $\tilde{\varepsilon}_N \equiv N^{-\frac{r}{s}+\frac{\alpha_1+\ldots+\alpha_s}{s}}$, причем она является предельной (что есть решение задачи К(В)П-2).

Наконец, в случае $r=2$, и это составляет содержание задачи К(В)П-3, установлено, что во всех вычислительных агрегатах вида $\varphi_N(f\left(\xi^{(1)}\right)+\gamma_1^{(N)}\varepsilon_N,...,f\left(\xi^{(N)}\right)+\gamma_N^{(N)}\varepsilon_N;x)$, $\left|\gamma_\tau^{(N)}\right|\le 1$, построенных по неточной информации об $f\left(\xi^{(\tau)}\right)$, величину ошибки $\tilde{\varepsilon}_N$ из К(В)П-2, вообще говоря, нельзя заменить на $\eta_N\tilde{\varepsilon}_N$ при любом неограниченно возрастающем η_N.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жубанышева А. Ж., Темиргалиев Н.* Журнал вычислительной математики и математической физики, 2015, том 55, № 9, С. 1474–1485.

А. М. Дьячков (Москва)
alexdya@mail.ru

ИНТЕГРАЛ СТИЛТЬЕСА НА КЛАССАХ ЧАНТУРИИ. ОБЩИЙ СЛУЧАЙ

Пусть $v(k)>0, v(k)\uparrow\infty, v(k)/k\downarrow 0\,(k\in\mathbb{N}, k\to\infty)$. Функции $f(x), x\in[0,1]$, для которых ограничена скорость роста модуля вариации $V(f,n)=O(v(n))$. образуют класс Чантурии Cv. В [1] найдено достаточное условие на классы Cv_1 и Cv_2, при котором для любых функций $f \in Cv_1$ $g \in Cv_2$, не имеющих общих точек разрыва, существует интеграл Стилтьеса $S(f,g) = \int_0^1 f(x)\, dg(x)$, и установлено, что это условие точное в случае $0 < \alpha \leq \ln v_i(n)/\ln n \leq \beta < 1$, $i = 1, 2$. Последнее ограничение можно снять, если при формулировке условия использовать (v_1, v_2)-лакунарную в смысле К.И. Осколкова последовательность: $n_1 = 1$, а при $k \in \mathbb{N}$ полагаем

$$n_{2k} = \min\{n \geq n_{2k-1} : \min\left(\tfrac{v_2(n+1)}{v_2(n_{2k-1})}; \tfrac{v_1(n_{2k-1})(n+1)}{n_{2k-1}v_1(n+1)}\right) \geq 2\},$$
$$n_{2k+1} = \min\{n \geq n_{2k} : \min\left(\tfrac{v_1(n+1)}{v_1(n_{2k})}; \tfrac{v_2(n_{2k})(n+1)}{n_{2k}v_2(n+1)}\right) \geq 2\}.$$

Теорема. *Интеграл Стилтьеса $S(f,g)$ существует для любых функций $f \in Cv_1, g \in Cv_2$, не имеющих общих точек разрыва, в том и только том случае, когда выполнено условие:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_1(n_k)v_2(n_k)}{n_k} < \infty.$$

.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Дьячков А. М.* Об интеграле Стилтьеса на классах Чантурии. Вестник МГУП. 2012. № 3. С. 9–18.

И. Н. Катковская, В. Г. Кротов (Минск)
ikatkovskaya@bntu.by, krotov@bsu.by

КРИТЕРИЙ КОМПАКТНОСТИ КОЛМОГОРОВА В L^p, $p > 0$

Пусть (X, d, μ) — ограниченное метрическое пространство с регулярной борелевской мерой μ и метрикой d со свойством удвоения:

$$\mu(B(x, 2r)) \leq a_\mu \mu(B(x, r)), \quad x \in X,\ r > 0.$$

Обозначим $I_B^{(p)} f$ наилучшее приближение функции f в $L^p(B)$ постоянными ($B \subset X$ — шар).

Теорема 1. *Пусть $p \geq q > 0$ и $S \subset L^p(X)$ — ограниченное множество. Тогда S вполне ограничено в том и только том случае, если*

$$\lim_{r \to +0} \sup_{f \in S} \int_X |f(x) - I_{B(x,r)}^{(q)} f|^p \, d\mu(x) = 0. \qquad (1)$$

«Средние» $I_B^{(q)} f$ в теореме 1 можно заменить на δ-медианы

$$m_f^\delta(B) = \inf\{a \in \mathbb{R} : \mu(\{x \in B : f(x) > a\}) < \delta\mu(B)\}, \quad 0 < \delta \le \frac{1}{2},$$

В классическом критерии А.Н.Колмогорова на месте наилучших приближений $I_{B(x,r)}^{(q)} f$ находятся интегральные средние по $B(x,r)$, которые можно использовать только при $p \ge 1$.

Отказ от ограниченности X делает критерий Колмогорова и теорему 1 неверными — условия (1) уже недостаточно для полной ограниченности S [1]. Замену теоремы 1 для неограниченных X дает

Теорема 2. *Пусть $p \ge q > 0$ и $S \subset L^p(X)$ — ограниченное множество. Тогда S вполне ограничено в том и только том случае, если выполнено (1) и для некоторого $x_0 \in X$*

$$\lim_{R\to+\infty} \sup_{f\in S} \int\limits_{X\setminus B(x_0,R)} |f(x)|^p \, d\mu(x) = 0.$$

Доказательства используют технику из [2].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Tamarkin J. D.* On the compactness in the space L^p // Bull. Amer. Math. Soc. 1932. T. 38, № 2. C. 79–84.

2. *Кротов В. Г.* Критерии компактности в пространствах L^p, $p \ge 0$ // Матем. сборник. 2012. Т. 203, № 7. С. 129–148.

С. С. Кудайбергенов, А. М. Сайдазимова (Астана, Казахстан)
sabit-59@mail.ru, saydazimova_alfiya@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕНЗОРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛОВ К КВАДРАТУРНЫМ ФОРМУЛАМ КОРОБОВА

С. А. Смоляком в [1] был предложен метод, позволяющий распространять результаты аппроксимативного содержания с меньших размерностей пространств на большие.

Н. Темиргалиевым [2] метод Смоляка был распространен на общий случай ортонормированных систем.

На основе определений и утверждений из [2] выпишем следующую квадратурную формулу

$$\Lambda_q(f) = \sum_{(v_1,\ldots,v_s)\in\Omega_q^{(c)}} \sum_{\varepsilon_1=0}^{1} \sum_{\varepsilon_2=0}^{1} (-1)^{\varepsilon_1+\varepsilon_2} \left(\prod_{j=1}^{2} p_{v_{tj}-\varepsilon_j}^{(j)} \right)^{-1} \times$$

$$\times \sum_{k_1=1}^{p^{(1)}_{v_{t_1}-\varepsilon_1}} \sum_{k_2=1}^{p^{(2)}_{v_{t_2}-\varepsilon_2}} f\left(\frac{k_1}{p^{(1)}_{v_{t_1}-\varepsilon_1}}, \left\{\frac{a^{v_{t_1}-\varepsilon_1}k_1}{p^{(1)}_{v_{t_1}-\varepsilon_1}}\right\}, \frac{k_2}{p^{(2)}_{v_{t_2}-\varepsilon_2}}, \left\{\frac{a^{v_{t_2}-\varepsilon_2}k_2}{p^{(2)}_{v_{t_2}-\varepsilon_2}}\right\}\right). (*)$$

Пусть s- целое положительное число, $r > 0$.

В этих условиях для (*) справедлива

Теорема. *Пусть даны $r > \frac{1}{2}$ и $c > 0$. Тогда для всех c- допустимых q справедливо неравенство*

$$\sup_{f\in SW_2^r} \left| \int_{[0,1]^4} f(x)\, dx - \Lambda_q(f) \right| \ll \frac{(\ln N)^{3r+\frac{3}{2}}}{N^r}$$

где $N = N_q$ - количество узлов в квадратурной формуле Λ_q, для которого имеют место неравенства $2^q \ll N_q \ll 2^q q^2$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Смоляк С. А.* "Квадратурные и интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторых классов функций" // Докл. АН СССР, 148:5 (1963), 1042–1045.

2. *Темиргалиев Н.* // Доклады РАН, 2010, том 430, №4, с. 460–465.

М. В. Кукушкин (Железноводск)
Kukushkinmv@rambler.ru

ОБ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ ПОРОЖДЕННЫХ ОПЕРАТОРОМ ДРОБНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ.

В работе [1] доказана положительная определенность оператора дробного дифференцирования заданного на линейном пространстве $I^{\alpha}_{a+}(L_p)$, что в свою очередь порождает унитарное пространство. Как известно из общей теории гильбертовых пространств всякое унитарное пространство можно пополнить до гильбертова пространства единственным образом с точностью до изометрии. Очевидно сразу возникает вопрос полноты унитарного пространства. Будут ли идеальные элементы, полученные в результате пополнения унитарного пространства по введенной норме, также принадлежать унитарному пространству? Данная работа посвящена изучению этого вопроса. Выделен класс, построенное по которому унитарное пространство является полным. Доказаны утверждения в терминах шкалы пространств L_p, результа-том которых является возможность определения многообразий замкну-тых в классах L_p. Как известно из теории рядов Фурье равенство Парсеваля имеет место в пространстве L_2, ответ на вопрос возможны ли оценки нормы через коэффициенты Фурье в пространствах $L_p,\ p \neq 2$ дают теоремы Хаусдорфа-Юнга и Харди и Литтлвуда [2]. Доказанная в данной работе теорема вытекает из теоремы Харди и Литтлвуда о оценке нормы через коэффициенты Фурье в пространстве L_p.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кукушкин М. В.* О весовых пространствах дробно дифференцируемых функций // Научные ведомости БелГУ, Математика. Физика. № 6 (227), выпуск 42 Март 2016. С. 60–69.

2. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. Том 2. М.: Мир, 1965. 538 с.

Н. Ж. Наурызбаев, Б. М. Оразкулова (Астана, Казахстан)
balnur_orazkulova@mail.ru

ПОЛНОЕ К(В)П-ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Задача Компьютерного (вычислительного) поперечника (К(В)П) ставится в различных постановках (см., напр., [1-2] и имеющуюся в них библ.). Данная работа посвящена следующей конкретизации общей задачи К(В)П: $Tf = u(x,t,f)$ есть решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} \quad 0 \le t \le \infty,\ x \in R^s, \quad s = 1, 2, ...$$
$$u(x,0) = f(x) \in W_2^r(0,1)^s, \quad x \in R^s,$$

$L^{2,\infty}$ – пространство суммируемых на $[0,1]^s \times [0,+\infty)$ функций с конечной нормой $\|f\|_{L^{2,\infty}} = \sup\limits_{t\ge 0}\mathrm{vrai}\left(\int_{[0,1]^s} |f(x,t)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$,

$$\Phi_N \equiv \left\{\hat{f}\left(m^{(j)}\right) = \int\limits_{[0,1]^s} f(x)\, e^{2\pi i\left(m^{(j)},x\right)} : m^{(j)} \in Z^s, j = 1,...,N\right\} \times \{\varphi_N\}.$$

Справедлива (в обозначениях из [1-2])

Теорема. *Пусть даны числа* s $(s = 1, 2, ...)$ *и* $r, r > 1 + \frac{s}{2}$. *Тогда справедливы следующие утверждения*

К(В)П-1: $\delta_N(0;\Phi_N)_{L^{2,\infty}} \asymp N^{-\frac{r}{s}}$.

К(В)П-2: Для $S_{n^s}(f;x,t) = \sum\limits_{\substack{m\in Z^s,\\ \max\limits_{j=1,...,s}|m_j|\le n}} \hat{f}(m) e^{-4\pi^2(m,m)t + 2\pi i(m,x)}$

во-первых, $\delta_N(0;\Phi_N)_{L^{2,\infty}} \asymp \delta_N(N^{-\frac{r}{s}-\frac{1}{2}}; S_N(f,x,t))_{L^{2,\infty}} \asymp N^{-\frac{r}{s}}$,

во-вторых, $\forall \{\eta_N\}_{N=1}^{\infty} \uparrow +\infty \lim\limits_{N\to\infty} \frac{\delta_N(\eta_N N^{-\frac{r}{s}-\frac{1}{2}}; S_N(f;x,t))_{L^{2,\infty}}}{\delta_N(0;\Phi_N)_{L^{2,\infty}}} = +\infty$.

К(В)П-3: $\forall \{\eta_N\}_{N=1}^{\infty} \uparrow +\infty \lim\limits_{N\to\infty} \frac{\delta_N\left(\eta_N N^{-\frac{r}{s}-\frac{1}{2}};\Phi_N\right)_{L^{2,\infty}}}{\delta_N(0;\Phi_N)_{L^{2,\infty}}} = +\infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Темиргалиев Н., Шерниязов К. Е., Берикханова М. Е.* // Современные проблемы математики / Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (МИАН). — М.: МИАН, 2013. Вып. 17: Математика и информатика.

2, К 75-летию со дня рождения Анатолия Алексеевича Карацубы / С. 179–207.

2. *Темиргалиев Н., Абикенова Ш. К., Жубанышева А. Ж., Таугынбаева Г. Е.* // Изв. ВУЗов. Математика. 2013. № 8. С. 86–93.

И. Е. Преображенский (Ярославль)
preobrazenskii@gmail.com

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СХОДИМОСТИ СУММ РИМАНА ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ ФУНКЦИЙ ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ K-МОДУЛЕМ НЕПРЕРЫВНОСТИ

Пусть I — отрезок [0;1] с обычной мерой Лебега и X симметричное пространство функций на I. $f : I \to R$ периодическая функция с периодом 1. Рассмотрим оператор сумм Римана $R_n f(x) = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(x+\frac{k}{n}), x \in I$. Определим k-модуль непрерывности равенством $\omega_k(f,\delta;X) = \sup_{0<h\le\delta}\left\|\Delta_h^k(f,\cdot)|X\right\|$, где $\Delta_h^k(f;t) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} C_k^i f(t+ih)$. Через U обозначим множество квазивогнутых функций $\varphi : I \to R_+$. Через $U(k),\ k = 2,3,\ldots$ обозначим множество функций $\varphi : [0,1] \to R_+$, состоящее из функций, которые не убывают, но для которых отношение $\varphi(t)/t^k$ не возрастает. Пусть $\varphi \in U(k)$. Через $H_X^{\varphi,k}$ обозначим пространство функций, норма в котором задаётся равенством $\left\|f|H_X^{\varphi,k}\right\| = \|f|X\| + \sup\limits_{h>0,h\in I}\frac{\omega_k(f,h;X)}{\varphi(h)}$.

Теорема 1. *Пусть $f \in H_X^{\varphi,k}$. Пусть ψ — фундаментальная функция пространства X. Зафиксируем $\epsilon > 0$. Выберем последовательности $\delta_i \downarrow 0$ и $\epsilon_i \downarrow 0$ так, чтобы выполнялись условия $\sum \epsilon_i < \epsilon$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{\omega_k(f,\delta_i;X)}{\psi(X;\epsilon_i)} < \infty$ и построим функцию $\Omega_\epsilon(f,h,X) = \inf\limits_q\left\{h^k\sum\limits_{i=1}^{q}\frac{\omega_k(f,\delta_{i+1},X)}{\delta_{i+1}^k\psi(X,\epsilon_i)} + \sum\limits_{i=q+1}^{\infty}\frac{\omega_k(f,\delta_i,X)}{\psi(X,\epsilon_i)}\right\}$. Пусть даны последовательность положительных действительных чисел $\{\tau_i\}$, удовлетворяющая условию $\sum\tau_i < \infty$, и возрастающая последовательность натуральных чисел $n_1, n_2, \ldots, n_i, \ldots$, такие, что последовательность чисел $\left\{\Omega_{\tau_i}(f,\frac{1}{n_i},X)\right\}$ монотонно стремится к нулю и все числа в последовательности $\{n_i\}$ взаимнопросты с числами от 1 до k. Тогда почти всюду выполняется равенство $\lim\limits_{i\to\infty} R_{n_k} f(x) = \int_I f(s)ds$.*

Доказательство теоремы в существенном базируется на конструкциях из [1].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Бережной Е. И.* Оценки равномерного модуля непрерывности функций из симметричных пространств // Изв. РАН. Сер. матем. Т. 60, № 2 (1996), С. 3–20.

Рамазанов М. Д. (Уфа)
ramazanovmd@yandex.ru

НАИЛУЧШИЕ ПРОДОЛЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОГО ЧИСЛА ВЕЩЕСТВЕННЫХ АРГУМЕНТОВ

Рассмотрим вложение в пространство непрерывных функций конечного числа переменных в произвольное банахово пространство. Пусть задано любое подмножество пространства аргументов и известно, что существует элемент банахового пространства, совпадающий с заданной фукнцией на этом подмножестве и имеющий наименьшую банахову норму среди всех таких элементов.

Найден оператор, осуществляющий отображение заданной функции — элемента банахового пространства, в элемент с наименьшей нормой в общем случае продолжения с любого подмножества пространства аргументов.

Оказывается, первоначально поставленная задача получает эквивалентную формулировку в сопряженном банаховом пространстве. Переход к сопряженной задаче (и обратно) задается соответствующим преобразованием Лежандра. В сопряженной задаче оператор продолжения всегда линейный — он является сопряженным к линейному оператору ограничения элементов первоначального банахового пространства на выбранное подмножество в пространстве аргументов.

Возможны приложения к построению вариационных сплайнов в произвольных банаховых пространствах.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Ramazanov M. D.* Multidimensional variational splines in general branch spaces // Doclady Mathematics. - 2011. - Vol. 83, № 2. — Pp. 1–3.

А. И. Рахимова (Уфа, БашГУ)
alsu1405@mail.ru

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ОБОБЩЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ БАРГМАНА-ФОКА

В математической физике важную роль играет пространство Фока. Обобщенное пространство Фока имеет вид: $F_\beta = \{f(z) \in H(\mathbb{C}) : \|f\|^2 = \frac{1}{\pi\frac{2}{\beta}\Gamma(\frac{2}{\beta})} \int\limits_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-|z|^\beta} d\mu < \infty\}$, $\beta > 0$, где $d\mu$ — мера Лебега на плоскости. Введем обозначение $k = \frac{2}{\beta}$. Возьмем функции $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in F_\beta$ и $g(z) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} b_m z^m \in F_\beta$. Рассматриваем оператор $S = z\cdot$ умножения на переменную z. Возьмем последовательность комплексных чисел $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$

таких, что $m_0 = 0$, $m_n \neq 0$ при $n \geq 1$ и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|m_n|} < \infty$. Оператором обобщенного дифференцирования, порожденным последовательностью $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$, называется оператор D, который действует по правилу $Df(z) = \frac{1}{z}\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n m_n z^n$. (см. [1])

Теорема 1. *Оператор, сопряженный к оператору $S = z\cdot$ умножения на переменную z, имеет вид $S^* = c_1\frac{d}{dz} + ... + c_n z^{n-1}\frac{d^n}{dz^n} + ...$, $n \leq n_0$, где порядок оператора n_0 конечный или бесконечный.*

Если k — целое число, то дифференциальный оператор S^* конечный порядка k, если k — нецелое число, то дифференциальный оператор S^* бесконечный. Оператор дифференцирования S^* совпадает с оператором обобщенного дифференцирования D.

Теорема 2. *Коэффициенты оператора S^* вычисляются по формуле* $c_n = \sum\limits_{s=1}^{n} \frac{(-1)^{n-s}\Gamma(k(s+1))}{s!(n-s)!\Gamma(ks)}$, $n = \overline{(1; n_0)}$.

Поскольку оператор S^* действует на целую функцию, а коэффициенты c_n такие, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} < \infty$, то получается также целая функция. Для коэффициентов c_n, $n = \overline{(1; n_0)}$, выполняется асимптотика $c_n \leqq \frac{k^k n^{k-n+\frac{1}{2}} e^n (1+\frac{1}{n})^{k-\frac{1}{2}}}{sqrt(2\pi)}$ и верно равенство $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|} = 0$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Дильмухаметова А. М., Муллабаева А. У., Напалков В. В.* Обобщение пространства Фока // Уфимский математический журнал. Уфа. 2010. Т. 2, № 1. С. 52–58.

Ю. С. Солиев (Москва)
su1951@mail.ru

О РАЦИОНАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГИЛЬБЕРТА

Рассматриваются вопросы рациональной аппроксимации преобразования Гильберта (понимаемого в смысле главного значения по Коши сингулярного интеграла)

$$If = I(f,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)}{t-x}dt, x \in (-\infty, +\infty). \qquad (1)$$

Пусть $f(x) \in W_{m,p}^{(r)}(M,\delta; -\infty, +\infty), p = p(x) = \frac{1+x^2}{2}$ (определение см. в [1]). Через $P_n^* f = P_n^*(f,x)$ обозначим дробно-рациональную функцию, интерполирующую $f(x) \in W_{m,p}^{(r)}(M,\delta; -\infty, +\infty)$ по узлам $x_k = tg\frac{k\pi}{N}, k = \overline{-[\frac{N-1}{2}], n}, n = [\frac{N}{2}]$, где $[\epsilon]$ – целая часть ϵ.

Для $f(x) \in W^{(r)}_{m,p}(M, \delta; -\infty, +\infty), r \geq 1,$ справедлива оценка $|R_n(f;x)| = |I(f - P^*_n f; x)| \leq \frac{2\pi M}{n^r(1-2^{-r})}\left\{\frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi} ln \frac{2}{\pi} N + \frac{1+2^{-r}}{1-2^{-r}} \cdot \frac{ln2}{\pi} + \frac{N-2n}{n}\right\}.$

Пусть $L_n f = L_n(f, x)$ – интерполяционная формула типа Лагранжа по точкам $x_k(k = \overline{1, 2n})$ – нулям косинус-дроби Берштейна $M_{2n,\varphi}(x) = \cos(2\Phi_n(x) + \varphi), \varphi \neq \frac{\pi}{2} + m\pi, m \in Z, \Phi_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \arg(\alpha_k + \beta_k - x), \beta_k > 0,$ а $H_n f = H_n(f, x)$ – интерполяционная формула типа Эрмита-Фейера по этим точкам.

Пусть $f(x) \in H_\alpha(A), 0 < \alpha \leq 1$ (определение см. в [2]). Тогда

$$|R_n(f;x)| = |I(f - P_n; x)| = O\left(\frac{ln^{1+[\alpha]}((1+x^2)\Phi'_n(x))}{((1+x^2)\Phi'_n(x))^\alpha}\right), \tag{2}$$

где $P_n f = L_n f$ или $P_n f = H_n f$.

В качестве $P_n f$ в (2) можно взять операторы типа Фейера, Джексона или Валле-Пуссена [3]. Приводятся явные выражения интерполяционных и квадратурных формул.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Г. Н. Пыхтеев, М. А. Шешко.* ИАН БССР, сер. физ.-мат. н., № 2, 1973, 11–22.

2. *Ю. Солиев.* В сб. «Дифф. и интегр. ур-я и их прилож». Вып. 4, Душанбе, 1996.

3. *В. Н. Русак.* Рациональные функции как аппарат приближения. Минск, 1979.

T. M. Urbanovich (Polotsk, Belarus)
UrbanovichTM@gmail.com

TO THE THEORY OF THE EXCEPTIONAL CASE OF THE RIEMANN BOUNDARY VALUE PROBLEM [1]

Let Γ be a simple smooth closed contour dividing the plane of the complex variable into the interior domain D^+ and the exterior domain D^-, let F be a finite set of points of the contour Γ and let $\alpha = (\alpha_\tau, \tau \in F)$ be a family of complex numbers. Let $A(z) = \prod\limits_{\tau \in F} (z - \tau)^{\alpha_\tau}$, $z \in \overline{D^+}$. Let $\lambda^+ = (\lambda^+_\tau, \tau \in F)$ and $\lambda^- = (\lambda^-_\tau, \tau \in F)$ be families of complex numbers such that $\lambda^+ - \lambda^- = \alpha$. The problem is to find a function $\Phi(z) \in H_{\lambda^\pm}(\overline{D^\pm}, F)$ that is analytic outside Γ, vanishes at infinity, and satisfies the boundary condition

$$\Phi^+(t) - A(t)G_0(t)\Phi^-(t) = g(t), \tag{1}$$

[1]The research was supported by the Belarus Republic Foundation for Basic Research (project no. F14Kaz-034).

where $g(t) \in H_{\lambda^+}(\Gamma, F)$ and $G_0(t) \in H_0(\Gamma, F)$ is an invertible function.

Theorem. *Let $X(z)$ be specially constructed canonical function (see [1]), and let $\varkappa = \sum\limits_{\tau \in F} n_\tau$, $n_\tau = [\mathrm{Re}(\delta_\tau + \alpha_\tau - \lambda_\tau^+)]$, $\delta_\tau = \frac{1}{2\pi i}((\ln G_0)(\tau - 0) - (\ln G_0)(\tau + 0))$. If $\varkappa \geq 0$, then the general solution vanishing at infinity of problem (1) with righthand side $g(t) \in H_{\lambda^+}(\Gamma, F)$ in the class $H_{\lambda^\pm}(\overline{D^\pm}, F)$ is given by the formula*

$$\Phi(z) = \begin{cases} A(z)\Psi(z), & z \in D^+, \\ \Psi(z), & z \in D^-, \end{cases} \tag{2}$$

where the function $\Psi(z)$ has the form $\Psi(z) = X(z)\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{g(t)dt}{A(t)X^+(t)(t-z)} + P(z)\right)$, and the degree of the arbitrary polynomial $P(z)$ does not exceed $\varkappa - 1$. If $\varkappa < 0$, then the solution of problem (1) is unique and is given by formula (2) provided that the orthogonality conditions $\int\limits_\Gamma \frac{g(t)}{A(t)X^+(t)} t^j dt = 0$, $j = 0, 1, ..., -\varkappa - 1$, are satisfied. [For $\varkappa \leq 0$ we set $P(z) = 0$.]

R E F E R E N C E S

1. *Urbanovich T. M.* Exceptional Case of the Linear Conjugation Problem in Weighted Hölder Classes // Differential Equations. 2015. V. 51, No. 12. P. 1669–1673.

А. Х. Фатыхов (Казань), П. Л. Шабалин (Казань)
pavel.shabalin@mail.ru

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ГИЛЬБЕРТА С ЗАВИХРЕНИЕМ В КОНЕЧНОМ ЧИСЛЕ ТОЧЕК КОНТУРА [1]

Исследуется краевая задача Гильберта теории аналитических функций для единичного круга D в ситуации, когда коэффициенты и правая часть краевого условия

$$a(t)\Re\Phi(t) - b(t)\Im\Phi(t) = c(t), \ t \in L = \partial D,$$

имеют конечное число особых точек $t_k = e^{i\theta_k}$, $k = \overline{1,n}$, на контуре L, таких, что функция коэффициентов $G(t) = a(t) - ib(t)$, $t = e^{i\theta}$, имеет непрерывный по Гельдеру модуль и аргумент $\nu(t) = argG(t)$ с разрывами второго рода в этих точках. Именно, в окрестности точки t_k, имеет место представление

$$\nu(t) = \begin{cases} \dfrac{\nu_k^+}{\sin^{\rho_k}((\theta - \theta_k)/2)} + \widetilde{\nu}(\theta), & \theta < \theta_k, \\ \dfrac{\nu_k^-}{\sin^{\rho_k}((\theta - \theta_k)/2)} + \widetilde{\nu}(\theta), & \theta_k < \theta, \end{cases}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-00636-а).

для некоторых чисел ν_k^+, ν_k^-, ρ_k, $0 < \rho_k < 1$, функция $\widetilde{\nu}(\theta)$ удовлетворяет условиям $\widetilde{\nu}(t_k + 0) = \widetilde{\nu}(t_k - 0)$. Для такой постановки задачи Гильберта получены формулы общего решения однородной и неоднородной задач и проведено полное исследование разрешимости однородной задачи в классе ограниченных аналитических в единичном круге функций. Метод построения решения основан на аналитическом выделении особенностей краевого условия, которое, как обычно записываем в виде

$$Re[e^{-i\nu(t)}\Phi(t)] = \frac{c(t)}{|G(t)|}.$$

При исследовании существования и числа решений задачи применяется аппарат теории целых функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Говоров Н. В.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом М.: Наука. 1986. 239 с.

2. *Толочко М. Э.* О краевой задаче Римана с бесконечным индексом для полуплоскости// Изв. АН БССР. – Сер. физ.-мат. н. – 1969. – № 4. – С. 52–59.

3. *Сандрыгайло И. Е.* О краевой задаче Гильберта с бесконечным индексом для полуплоскости// Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. н. – 1974. – № 6. – С. 16–23.

4. *Монахов В. Н., Семенко Е В.* Краевые задачи с бесконечным индексом в пространствах Харди//ДАН СССР. – 1986. – Т. 291. – № 3. – С. 544–547.

5. *Салимов Р. Б., Шабалин П. Л.* Краевая задача Гильберта теории аналитических функций и ее приложения (Казань: Изд-во Казанск. мат. о-ва, 2005).

6. *Салимов Р. Б., Шабалин П. Л.* О разрешимости однородной задачи Гильберта со счетным множеством точек разрыва коэффициентов и двусторонним завихрением на бесконечности порядка меньше 1/2. // Уфимский математический журнал. Том 5. No 2 (2013). С. 82-93.

7. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций М.: Гостехиздат, 1956. 632 с.

А. И. Федотов (Казань)
fedotov@mi.ru

ОЦЕНКА НОРМ ОПЕРАТОРОВ ЛАГРАНЖА В МНОГОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА С ВЕСОМ

Обозначим P_n интерполяционный оператор Лагранжа порядка n по узлам Чебышева первого рода.

Теорема 1. *Для любых $n \in N_0$ и $s \in R$, $s > 1/2$, справедлива оценка*

$$\|P_n\|_{H^s_\rho \to H^s_\rho} < \sqrt{1+\zeta(2s)},$$

где $\zeta(t) = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-t}$ — дзета-функция Римана, ограниченная и убывающая при $t > 1$.

Обозначим $E_n(x)_s$ наилучшее приближение функции $x \in H^s_\rho$ алгебраическими полиномами степени не выше $n \in N_0$.

Теорема 2. *Для любых $n \in N_0$, и $\sigma, s \in R$, $s > 1/2$, $0 \le \sigma \le s$, и любой функции $x \in H^s_\rho$ справедлива оценка*

$$\|x - P_n x\|_{H^\sigma_\rho} \le \sqrt{1+\zeta(2s)}(n+1)^{\sigma-s} E_n(x)_s.$$

Пусть теперь H^s_ρ обозначает пространство Соболева размерности $m \ge 2$.

Теорема 3. *Для любых $m \in N$, $m \ge 2$, $\mathbf{n} \in \mathbf{N_0}$, $s \in R$, $s > m/2$ справедлива оценка*

$$\|P_{\mathbf{n}}\|_{H^s_\rho \to H^s_\rho} \le 2^{\frac{m}{2}-s} m^{\frac{s+1}{2}} M^s(\mathbf{n}+\mathbf{1})\sqrt{1+\zeta(2s-m+1)},$$

$$M(\mathbf{n}+\mathbf{1}) = \frac{\sqrt{(\mathbf{n}+\mathbf{1})^2}}{\min(\mathbf{n}+\mathbf{1})}.$$

Теорема 4. *Для любых $m \in N$, $m \ge 2$, $\mathbf{n} \in \mathbf{N_0}$, $\sigma, s \in R$, $s > m/2$, $0 \le \sigma \le s$, и любой функции $u \in H^s_\rho$ справедлива оценка*

$$\|u - P_{\mathbf{n}} u\|_{H^\sigma_\rho} \le \sqrt{1 + 2^{m-2s} m^{s+1} M^{2s}(\mathbf{n}+\mathbf{1})\zeta(2s-m+1)}(\underline{\mathbf{n}+\mathbf{1}})^{(\sigma-s)} E_{\mathbf{n}}(u)_s.$$

В. И. Филиппов (Саратов)
888vadim@mail.ru

ОБОБЩЕНИЕ МОДУЛЯРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Вводятся новый вид пространств: многомодулярные пространства. Для этих пространств определяется F-норма. Эти пространства могут быть полезны для построения математических моделей некоторых физических и экономических процессов. Понятие модуляра введено в работе Накано [1], мы приведем определение псевдомодуляра так как это даетсяв в работе Музилака [2].

Пространство E с F-нормой (нормой) будем называть F-пространством (B-пространством), если оно полно.

Определение 1. Будем говорить, что функционал $\rho : E \to [0, \infty)$ на действительном или комплексном векторном пространстве E, называется псевдомодуляром, если для произвольных x и y принадлежащих E выполняются условия:1) $\rho(0) = 0$. 2) В случае, когда E действительное, $\rho(-x) = \rho(x)$. 3) Для $\alpha \geq 0$ и $\beta \geq 0$ и $\alpha + \beta = 1$ выполняется $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \rho(x) + \rho(y)$.

Определение 2. Если ρ псевдомодуляр в E, то

$$E_\rho = \{x \in E : \lim_{\lambda \to 0} \rho(\lambda x) = 0\}$$

называется модулярным пространством.

Заметим, что E_ρ векторное подпространство в E. Пусть $E_i, i = 1, 2, \ldots, n$,- действительные или комплексные векторные пространства. Рассмотрим множество E_0^n состоящее из элементов $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, где $f_i \in E_i, i = 1, ..., n$. Пусть $f, g \in E_0^n, L$ - поле скалеров. Введем в множестве E_0^n сумму как $f + g = (f_1 + g_1, f_2 + g_2, \ldots, f_n + g_n)$, а произведение элемента $f \in E_0^n$ на скаляр $\alpha \in L$ как $\alpha f = (\alpha f_1, \alpha f_2, \ldots, \alpha f_n)$. Легко проверяется, что множество E_0^n является линейным пространством.

Лемма 1. Если $\rho_i, i = 1, 2, \ldots, n$, - псевдомодуляры (полумодуляры, модуляры) в $E_i, i = 1, 2, \ldots, n$, то $\rho_0(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \rho_i(f_i), f \in E_0^n$, является псевдомодуляром (полумодуляром, модуляром) в E_0^n.

Определение 3. Если ρ_0 псевдомодуляр в E_0^n, то $E_\rho^n = \{f \in E_0^n : lim_{\lambda \to 0} \rho_0(\lambda f) = 0$ называется многомодулярным пространством. Заметим, что E_ρ^n векторное подпространство в E_0^n.

Теорема 1. *Пусть ρ_0 псевдомодуляр в E_0^n. Тогда функционал*

$$|f|_{\rho_0} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \inf\{\varepsilon > 0 : \rho_i(\frac{f_i}{\varepsilon}) \leq \varepsilon\}$$

является F-псевдонормой в E_ρ^n.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nakano H. Topology and topological linear spaces, Tokyo, 1951.

2. Musielak J. Orlicz spaces and modular spaces, Lecture Notes in Math., 1034, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

B. N. Khabibullin, A. V. Khasanova (Ufa)
Khabib-Bulat@mail.ru

ENTIRE FUNCTIONS AND ITS DERIVATIVES AS MINORANTS OF SUBHARMONIC FUNCTIONS [1]

We are developing and strengthening several results belonging to Lars Hörmander [1; **8**]. One of these results is

Hörmander's Theorem [1; Theorem 8.3]. *Let $u \not\equiv -\infty$ be a subharmonic function on the complex plane $\mathbb{C}$. Suppose that there are constants $p, C \geq 0$ such that*

(1) $\bigl|u(z)\bigr| \leq C\bigl(1+|z|\bigr)^p$ *for all* $z \in \mathbb{C}$;

(2) $\bigl|u(z+w)-u(z)\bigr| \leq C|w|\bigl(1+|z|\bigr)^{p-1}$ *for all* $z, w \in \mathbb{C}$, $|w| \leq 1+|z|$.

Then the following two statements are equivalent:

(i) *there is an entire function $f \not\equiv 0$ such that $\bigl|z^k f^{(j)}(z)\bigr| = O\bigl(e^{u(z)}\bigr)$ as $z \to \infty$ for any positive integers k and j;*

(ii) *total mass $\frac{1}{2\pi}\Delta u$ (the Riesz measure of u) is infinite.*

Our results [2], [3] greatly weakened the pair conditions (1)–(2).

Theorem Kh [2; Theorem 2]. *The conditions* (1)–(2) *in the Hörmander's Theorem can be replaced by one much weaker localized condition: there are constants $P, C \geq 0$ such that*

$$u(z+w)-u(z) \leq C\log\bigl(2+|z|\bigr) \quad \text{for all } z, w \in \mathbb{C} \text{ with } |w| = \frac{1}{\bigl(1+|z|\bigr)^P}.$$

R E F E R E N C E S

1. *Lars Hörmander* On the Legendre and Laplace transformations // Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 4^e série. 1997. V. 25, 3-4. P. 517–568.

2. *B. N. Khabibullin, T. Yu. Baiguskarov* The logarithm of the module of holomorphic functions as minority for subharmonic functions // Матем. заметки. 2016. Т. 99, № 4. С. 588–602 (English translation in "Mathematical Notes").

3. *T. Yu. Baiguskarov, B. N. Khabibullin, A. V. Khasanova* The logarithm of the module of holomorphic functions as minority for subharmonic functions. II. The complex plane // Матем. заметки (Mathematical Notes). 2016, в печати (to appear).

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00024).

А. Ф. Чувенков (Ростов-на-Дону)
chuvenkovaf@mail.ru

О ВЕСОВЫХ ГРАНД-ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА НА НЕОГРАНИЧЕННОМ МНОЖЕСТВЕ

Рассматривается класс измеримых функций $f(x)$ на произвольном открытом множестве $\Omega \subset R^n$ с весом $\omega(x)$

$$K_M(\Omega,\omega) = \left\{ f\colon \rho(f,M,\omega) := \int_\Omega M(|f(x)|)\omega(x)\,dx < \infty \right\}$$

и пространство Орлича $L_M(\Omega,\omega)$ с нормой Колмогорова–Люксембурга, порождаемое функцией Юнга, в частности N-функцией, $M(u)$. Через $E_M(\Omega,\omega)$ обозначаем максимальное линейное подпространство пространства $L_M(\Omega,\omega)$, содержащееся в $K_M(\Omega,\omega)$ [1].

Обозначим через $p = \min\{p_0, p_\infty\}$, $1 < p \leqslant \infty$, где

$$p_0 = \varliminf_{u\to 0} \varphi_M(u), \quad p_\infty = \varlimsup_{u\to\infty} \varphi_M(u), \quad \varphi_M(u) = \frac{uM'(u)}{M(u)}.$$

Определяем весовое гранд-пространство Орлича $L^a_{M)}(\Omega,\omega)$ с дополнительным положительным весом $a(x) \in K_M(\Omega,\omega)$ следующим образом:

$$L^a_{M)}(\Omega,\omega) =$$

$$\left\{ f\colon \rho_a(f,M,\omega) \equiv \sup_{0<\delta<1-1/p} \left[\rho\left(f, M^{1-\delta}, (p\delta)^{1/p} M^\delta(a)\omega\right)\right]^{\frac{1}{1-\delta}} < \infty \right\}.$$

Аналогичным образом определяется гранд-пространство $E^a_{M)}(\Omega,\omega)$.

Теорема 1. *Пусть функция f принадлежит классу Орлича $K_M(\Omega,\omega)$, $1 < p \leqslant \infty$, a — положительный непрерывный на Ω вес. Чтобы была справедлива оценка $\rho_a(f,M,\omega) \leqslant c_{p,a}\rho(f,M,\omega)$ с точной константой $c_{p,a}$, необходимо и достаточно, чтобы $a \in K_M(\Omega,\omega)$. При $p = \infty$ и $\rho(a,M,\omega) \leqslant 1$ имеем $c_{p,a} = 1$.*

В случае $M(u) = u^p$, $p > 1$, получаем известные утверждения для гранд-пространств Лебега [2].

Список литературы

[1] Rao M. M., Ren Z. O., *Theory of Orlicz Spaces*, Crc Press. (1991), p. 472.

[2] Умархаджиев С. М., *Обобщение понятия гранд-пространства Лебега*, Известия вузов. Математика. (2014), № 4, с. 42–51.

Э. Л. Шишкина (Воронеж)
ilina_dico@mail.ru

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ ТОЖДЕСТВО ДЛЯ ИТЕРИРОВАННЫХ ВЕСОВЫХ СФЕРИЧЕСКИХ СРЕДНИХ

Пусть $R_n^+=\{x=(x_1,...,x_n)\in R_n : x_1>0,...,x_n>0\}$, причём $|x|=\sqrt{x_1^2+...+x_n^2}$, $\langle x,y\rangle=x_1y_1+...+x_ny_n$, $y\in R_n^+$, $S_n^+=\{x\in R_n^+ : |x|=1\}$. Многомерный обобщённый сдвиг T_x^y, задаётся формулой

$$T_x^y f(x)=\pi^{-\frac{n}{2}}\prod_{i=1}^n\frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)}\int\limits_0^\pi...\int\limits_0^\pi\prod_{i=1}^n\sin^{\gamma_i-1}\beta_i\times$$

$$\times f(\sqrt{x_1^2-2x_1y_1\cos\beta_1+y_1^2},...,\sqrt{x_n^2-2x_ny_n\cos\beta_n+y_n^2})\,d\beta_1...d\beta_n,$$

где $\gamma=(\gamma_1,...,\gamma_n)$ — мультииндекс, состоящий из фиксированных положительных чисел.

Весовое сферическое среднее и итерированное весовое сферическое среднее, по аналогии с [1], определим, соответственно, формулами

$$I_\gamma(x,r)=N_\gamma^r[f(x)]=\frac{1}{|S_n^+|_\gamma}\int\limits_{S_n^+}T_x^{ry}f(x)y^\gamma dS,\quad |S_n^+|_\gamma=\frac{\prod\limits_{i=1}^n\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{2n}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}$$

и

$$M_\gamma(x,\lambda,\mu)=N_\gamma^\lambda N_\gamma^\mu[f(x)].$$

Для итерированного весового сферического среднего справедливо представление

$$M_\gamma(x,t,\mu)=\frac{2^{-n}\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{|\gamma|+n-1}{2}\right)}\frac{1}{(2\lambda\mu)^{n+|\gamma|-2}}\times$$

$$\times\int\limits_{|t-\mu|}^{t+\mu}\left((t^2-(r-\mu)^2)((r+\mu)^2-t^2)\right)^{\frac{n+|\gamma|-3}{2}}I_\gamma(x,r)rdr.$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Йон Ф.* Плоские волны и сферичесие средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными. М., Изд.-во иностр. лит. 1958, 158 с.

Секция III
Алгебра, топология, геометрия

С. М. Гусейн-Заде (Москва)
sabir@mccme.ru

ВЫСШИЕ ОРБИФОЛДНЫЕ ЭЙЛЕРОВЫ ХАРАКТЕРИСТИКИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯ [1]

Понятие орбифолдной эйлеровой характеристики (топологического) G-пространства (G — конечная группа) пришло из математической физики: [1]. Пусть G конечная группа, X — (достаточно хорошее) G-пространство. Для подгруппы H группы G через X^H обозначается множество неподвижных точек подгруппы H. Пусть $[g]$ — класс сопряженности элемента $g \in G$, $\mathrm{Conj}\, G = \{[g]\}$. Через $C_G(g)$ обозначим централизатор $\{h \in G : hg = gh\}$ элемента g. Орбифолдная эйлерова характеристика пары (X, G) определяется как

$$\chi^{\mathrm{orb}}(X, G) = \frac{1}{|G|} \sum_{(g,h)\in G^2 : gh=hg} \chi(X^{\langle g,h\rangle}) = \sum_{[g]\in \mathrm{Conj}\, G} \chi(X^{\langle g\rangle}/C_G(g))\,,$$

где $\langle g, h\rangle$ — подгруппа, порожденная элементами g и h. Ее высшие аналоги, в которых фигурируют не пары коммутирующих элементов, а их тройки, четверги, …, были предложены М. Атья и Г. Сегалом ([2]), а также Дж. Брайаном и Дж. Фулманом. Формула типа Макдональда выражает производящий ряд значений некоторого инварианта для симметрических степеней пространства или их аналогов в виде степенного ряда, не зависящего от пространства, в степени, равной значению инварианта на самом пространстве. Для обычной эйлеровой характеристики она имеет вид $\sum_{n=0}^{\infty} \chi(S^n X) t^n = (1-t)^{-\chi(X)}$. В докладе обсуждаются аналоги высших орбифолдных эйлеровых характеристик со значениями в кольце Бернсайда конечной группы, в некоторой модификации кольца Гротендика комплексных квазипроективных многообразий и в некоторых других. Формулируются формулы типа Макдональда для них. Доклад основан на совместных работах с И. Луенго, А. Мелье и В. Эбелингом.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Dixon L., Harvey J. A., Vafa C., Witten E.* Strings on orbifolds I, II // Nuclear Physics B 1985, v. 261, p. 678-686; 1986, v. 274, p. 285–314.

2. *Atiyah M., Segal G.* On equivariant Euler characteristics. J. Geom. Phys. 1989, v. 6, no. 4, p. 671–677.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00409).

В. В. Казак (ЮФУ, Россия)
vkazak136@gmail.com
Н. Н. Солохин (ДГТУ, Россия)
nik2007.72@mail.ru

НЕКОТОРЫЕ УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В ТЕОРИИ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ИЗГИБАНИЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ

В настоящей работе изучается внешняя связь, определяющая при бесконечно малом изгибании поверхности S зависимость между смещением точек края ∂S и поворотом касательных плоскостей поверхности вдоль края. Зависимость между этими характеристиками записывается в виде:

$$a\left(\vec{U}\vec{l}\right) + b\left(\vec{V}\vec{n}\right) = c \tag{1}$$

где $\vec{U}$ и $\vec{V}$ – соответственно векторные поля смещения и вращения бесконечно малого изгибания поверхности, $\vec{l}$ – векторное поле, заданное вдоль края поверхности, $\vec{n}$ - вектор нормали поверхности S; a, b, c – некоторые функции, заданные вдоль края поверхности.

Изучение этого краевого условия приводит к краевой задаче, сводящейся к системе интегральных уравнений. Исследование этой системы позволяет сформулировать следующий результат.

Теорема. *Пусть вдоль края ∂S поверхности задано семейство векторных полей $\vec{\ell}_\alpha$, определяемых углами $\alpha(s)$ и $\beta_0(s)$, где $\beta_0(s)$ – фиксированная функция из интервала $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$, а $\alpha(s)$ - произвольная функция. Пусть, кроме того, $a(s)b(s) < 0$, $\left(\vec{t}\vec{l}\right) < 0$ и $Ind(\overline{a+ib})$=0. Тогда существует константа C_0, зависящая от поверхности S, края ∂S и векторного поля $\vec{l}$, такая, что при выполнении условий $C_0 \leqslant max|\frac{acos\alpha}{b\sqrt{K}}| < \infty$ поверхность с внешней связью (1) является квазикорректной с 3 степенями свободы. Кроме того, существует такая константа α_0 , что поверхность с условием (1) является квазикорректной с 3 степенями свободы, если $\frac{\pi}{2} - \alpha_0 < \alpha(s) < \frac{\pi}{2}$.*

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Фоменко В. Т.* О квазикорректности внешних связей в теории бесконечно малых изгибаний // СМЖ. — 1974. — Т. XV, № 1. — С. 152–161.

2. *Казак В. В.* Распределение собственных векторных полей поверхностей положительной кривизны // Известия СКНЦ ВШ. Сер. Естеств. науки. — 1973. — № 4. — С. 38–41.

Е. В. Рубашкина (Москва)
lerubac@yandex.ru

ЧИСЛО ЛЕФШЕЦА n–ЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Многозначная функция f из X в Y это функция, которая сопоставляет точке x подмножество пространства Y. Для каждого подмножества S из Y, его прообраз в X состоит из точек x, таких что их образы лежат в S.

В докладе рассматриваются многозначные отображения, то есть непрерывные многозначные функции. $n-$ значная функция это многозначная функция, которая сопоставляет каждому x неупорядоченное подмножество n точек из Y. Таким образом, $n-$значное отображение — это непрерывная n-значная функция.

Известно очень общее понятие индуцированного гомоморфизма для многозначных отображений. Если X и Y — компактные метрические пространства, тогда для любого многозначного отображения существует векторное пространство градуированных гомоморфизмов h гомологических групп с коэффициентами в поле. Все они рассматриваются как индуцированный гомоморфизм отображения f. Если f — однозначная функция, то это векторное пространство состоит из наборов обычных скалярных индуцированных гомоморфизмов.

Если X и Y — конечномерные полиэдры, а f, g — $n-$значные отображения, то гомологии пространств X и Y являются конечномерными векторными пространствами. Для h и t (t — индуцированный гомоморфизм g) можно определить число совпадения Лефшеца $\Lambda(h, t)$.

Тогда верна версия теоремы Лефшеца о точках совпадения, состоящая в том что, если образы точки x при отображениях f и g или гомологически тривиальны, или состоят из n гомологически тривиальных компонент и $\Lambda(h, t)$ не равно 0 для некоторых индуцированных гомоморфизмов h и t, тогда f и g имеют точку совпадения, то есть x принадлежит пересечению её образов при отображениях f и g для некоторого x из X.

Е. В. Тюриков (Ростов-на-Дону, ЮФУ)
etyurikov@hotmail.com

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ МЕМБРАННОЙ ТЕОРИИ ВЫПУКЛЫХ ОБОЛОЧЕК

Начало систематическому применению методов комплексного анализа для исследования основных задач общей (моментной) теории пологих оболочек было положено в работах И.Н. Векуа. Задача построения мембранной теории выпуклых оболочек с кусочно-гладким краем (т.е. с кусочно-гладкой границей её серединной поверхности) была поставлена А.Л. Гольденвейзером. Существенное продвижение в этом направлении связано с основополагающей работой И.Н. Векуа, в которой разработан общий метод изучения общих задач мембранной теории выпуклых оболочек произвольной формы с гладким краем и любым числом отверстий. Определяющим здесь является то обстоятельство, что безмоментное напряжённое состояние равновесия оболочки вполне определяется решением задачи Римана-Гильберта с гёльдеровым коэффициентом граничного условия для обобщённых аналитических функций. Однако поставленные А.Л. Гольденвейзером задачи для оболочки с кусочно-гладким краем уже не укладываются в рамки математической части теории И.Н. Векуа. Дальнейшее её развитие в работах автора с приложением к теории бесконечно малых изгибаний приводит к необходимости постановки граничной задачи, которая бы учитывала специфику состояния напряжённого равновесия при условии концентрации напряжений в угловых точках. Такая постановка предлагается для оболочки с односвязной серединной поверхностью с использованием специального граничного условия Римана-Гильберта, которое позволяет дать прозрачную геометрическую интерпретацию состояний напряжённого равновесия при условии концентрации напряжений в угловых точках, а также «сравнивать» различные состояния равновесия. Такой подход в сочетании с техникой работ автора позволяет сформулировать критерий корректности поставленной задачи. Выделен класс оболочек, для которых задача квазикорректна.

Секция IV
Дискретная математика и информатика

В. В. Курганский, А. В. Лютенков (Ярославль)
vlidimir.kurgansky@gmail.com, artem.lutenkov@gmail.com

АЛГОРИТМ РЕАЛИЗАЦИИ БУЛЕВЫХ ОПЕРАЦИЙ НАД ТРИАНГУЛИРОВАННЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

Мы представляем эффективный алгоритм реализации булевых операций для триангулированных поверхностей.

В некоторых практических задачах известна структура «соседства»: то есть мы знаем, какие треугольники являются «соседними». В такой ситуации вычисления могут производиться существенно быстрее.

Будем считать, что линии пересечения поверхностей — простые циклы. Приведем основные шаги работы алгоритма:

Поиск пар пересекающихся треугольников. Используется принцип BVH-разбиения пространства и локализации пересечения поверхностей [1].

Пересечение треугольников и ре-триангуляция. Для быстрой ре-триангуляции с ограничениями используется алгоритм [2, с. 68].

Поиск линии пересечения поверхностей. Ввиду имеющейся структуры данных [3], поиск линии пересечения происходит только среди «соседей». Таким образом, последовательно добавляя ребра, мы получаем один из циклов, по которым пересекаются поверхности.

Разрезание поверхностей на части по линиям пересечения. Происходит разрезание имеющихся поверхностей на подповерхности, путем разделения полигональной сетки на части по линиям пересечения.

Склеивание из получившихся частей необходимых поверхностей.

Отметим, что выполнение операций над триангулированными поверхностями подразумевает работу с большими объёмами данных. Поэтому для выполнения некоторых шагов, например, поиск первой пары пересекающихся треугольников, использовались параллельные вычисления.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Ericson C.* Real-Time Collision Detection. //Morgan Kaufmann Publishers is an imprint of Elsevier. 500 Sansome Street, Suite 400, San Francisco, CA, USA. 2004. 238 c.

2. *Скворцов А. В.* Триангуляция Делоне и её применение // Томск: Изд-во Том. ун-та, 2002. 128 с.

3. *Bruce G. Baumgart* Winged Edge Polyhedron Representation // Technical Report. Stanford University, Stanford, CA, USA. 1972.

Секция V
Математические модели в естественных науках, технике, экономике и экологии

В. В. Алексеев (Ярославль)
vladislav.alexeev.yar@gmail.com

ПРИМЕНЕНИЕ ДИСКРЕТНОЙ ТЕОРИИ МОРСА ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ СОЛНЕЧНОЙ АКТИВНОСТИ.

По магнитограмме Солнца, заданной функцией $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, нужно построить ее упрощенный вариант с сохранением основных топологических свойств функции. Для решения задачи проводятся следующие шаги: предобработка магнитограммы, построение комплекса Морса-Смейла, упрощение комплекса Морса-Смейла при помощи метода сокращения персистентных пар, восстановление магнитограммы по упрощённому комплексу.

Построение комплекса Морса-Смейла.

Для функции Морса φ находится множество критических точек, проводятся интегральные кривые с началом и концом в различных критических точках. Полученный граф, состоящий из критических точек функции и набора дуг, их соединяющих, называется *комплексом Морса-Смейла.* Для дискретной функции вводятся аналоги понятий теории Морса, строится *дискретный комплекс Морса-Смейла.*

Упрощение МС-комплекса.

Бо́льшая часть топологических особенностей, соответствующих критическим точкам функции, представляет собой шум. Для его устранения используется сокращение персистентных пар [2]. Дуге ДМС-комплекса сопоставляется число, которое называется *персистентностью* дуги. На каждом шаге упрощения удаляется дуга с минимальным значением персистентности; дуги, выходящие из концов удалённой дуги, перестраиваются.

Восстановление по упрощённому комплексу.

Далее, по упрощённому ДМС-комплексу нужно построить функцию, соответствующую этому комплексу, в некотором смысле близкую к исходной. В общем случае эта задача пока не решена, существуют решения для случая, когда исходная функция аппроксимируется суммой гауссиан; также существует метод, основанный на применении теоремы Пуанкаре-Хопфа для области, содержащей персистентную пару.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Forman R.* Morse theory for cell complexes // Adv. in Mathematics 1998 № 134 p. 90–145

2. *Edelsbrunner H. et al.* Topological persistence and simplification // Discrete Comp. Geometry 2002 № 28 p. 511–33

Р. В. Арутюнян (Москва)
rob57@mail.ru

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ СТЕФАНА ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ИЗЛУЧЕНИЯ НА ПОЛУПРОЗРАЧНЫЕ СРЕДЫ

Когерентное излучение является эффективным инструментом многих передовых технологий [1-3]. В исследовании автора моделируется система с полупрозрачным слоем, нанесенным на металлическую подложку. Предполагается, что поглощение лазерного излучения в веществе происходит по закону Бугера-Ламберта. Для решения задачи Стефана применялся метод сквозного счета [4], основанный на ее преобразовании к энтальпийному виду с сосредоточенной теплоемкостью. Применяемый метод является явным и условно устойчивым. Для внутренних узлов сетки система решалась методом Ньютона относительно значения энтальпии. Контроль погрешности решения осуществлялся на основе сравнения с аналитическим решением для модельной задачи, а в остальных случаях по значениям теплового баланса (погрешности порядка 1%). В качестве конкретного примера рассматривалась система, в которой верхний слой состоял из кварца, а материалом подложки служило железо.

В общей доле потерь на охлаждение: потери на испарение составляют - от 0,1% (при температурах 300-500 К) до 85% при более высоких температурах, для радиационного охлаждения - около 10-15%, потери для конвективного охлаждения составляют менее 1% и являются пренебрежимыми. По отношению к мощности нагрева потери на испарение составляют от 0,1% до 30%, для радиационного охлаждения - около 5%, относительный вклад конвективного охлаждения незначительный.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Руденко В. Н.* Изменение температуры среды под действием лазерного импульса // Оптика и спектроскопия. 1965. Т. 20. С. 370–371.

2. *Гусаров А. В.* Физические модели воздействия лазерного излучения на конденсированные вещества в лазерной технологии получения материалов: Автореф. дис. ... доктора физ.-мат. наук. М. : 2011. 44 с.

3. *Кондратенко В. С., Борисовский В. Е.* Лазерная обработка кварцевого стекла. - М.: Изд. МГУПИ, 2011. 157 с.

4. *Самарский А. А., Моисеенко Б. Д.* Экономичная схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1965. Т. 5, № 5. С. 816–827.

В. А. Батищев, В. Г. Ильичев (Ростов-на-Дону)
batishev-v@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СПИРАЛЬНЫХ ВОЛН В КРОВЕНОСНОМ СОСУДЕ

Закрученные течения крови в аортальной системе человека и животных активно изучаются со второй половины прошлого столетия. Harwey W. был одним из первых, кто наблюдал вихревые движения крови в области сердца еще в семнадцатом веке. Среди причин спирального течения крови в левом желудочке сердца является закрученная природа стенок этого желудочка. Далее, закрученный поток попадает в восходящую аорту.

Доклад посвящен развитию математической модели спиральных волн в восходящей аорте. Отметим, работу профессора Ю. А. Устинова по моделированию длинных спиральных волн в крупных кровеносных сосудах. Эти волны локализованы в окрестностях стенки сосуда. В докладе рассматриваются короткие спиральные волны, заполняющие все поперечное сечение сосуда. Совместно с Ю. А. Устиновым построена модель этих волн на основе системы уравнений Навье-Стокса и динамических уравнений тонкой упругой изотропной оболочки. Эта оболочка моделирует стенку сосуда.

Эксперименты показывают, что в аорте распространяется стационарный поток, на фоне которого бегут длинные продольные пульсовые волны. Эти волны были предметом исследований еще в девятнадцатом веке. Рассчитанная скорость этих волн оказалась близка к измеренным значениям. В докладе стационарный поток моделируется как течением Пуазейля, так и равномерным потоком, окруженным пограничными слоями. Короткие спиральные волны рассчитываются путем применения асимптотических и численных методов. Показано, что в аорте распространяются и квазистационарные моды. Первая квазистационарная мода не зависит от времени и не изменяет направления вращения потока.

Анализ динамики коротких спиральных волн на основе численных расчетов показал, что в течении систолы существуют различные способы закручивания потока жидкости. Систолой называется такая фаза сердечного цикла, при которой происходит сокращение левого сердечного желудочка. Сумма первой моды спиральных волн и первой квазистационарной моды описывает режим, при котором во время систолы кровь вращается в одну сторону, за исключением небольшого промежутка времени, когда возникает обратное вращение. Этот режим подтверждается экспериментально. Анализ асимптотических формул показал, что механизмом переноса коротких спиральных волн являются длинные продольные волны совместно со стационарным потоком. Короткие спиральные волны слабо зависят от упругих свойств стенок аорты.

В. Н. Беркович (Ростов-на-Дону)
bvn06@yandex.ru

О ПРИНЦИПЕ ПРЕДЕЛЬНОЙ АМПЛИТУДЫ ПРИ АНАЛИЗЕ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В КЛИНОВИДНЫХ ОБЛАСТЯХ

На основе построения функционально-инвариантных решений для динамических уравнений теории упругости и использования вариационного принципа Гамильтона-Остроградского предложен метод изучения характера формирования волнового поля смещений при возбуждении однородной клиновидной среды источниками плоских стационарных и нестационарных колебаний. Переход от нестационарного случая колебаний к стационарному осуществляется с помощью хорошо известного в физике принципа предельной амплитуды: при $t \to \infty$ нестационарный колебательный процесс должен стремится к стационарному в некотором предельном смысле (см., например, [1,2]). В предлагаемом ниже докладе утверждается, что указанный предел может существовать с точки зрения тех функциональных пространств, в которых устанавливается разрешимость рассматриваемой задачи. Математически обоснована корректность применения этого принципа в рассматриваемых задачах. Представлены соотношения связи между геометрическими и динамическими характеристиками клиновидной среды, а также формулы расчета фазовых скоростей волн локализации и критических углов раствора, при которых эти волны появляются в клиновидной среде [3]. Рассмотрен также вопрос локализации волнового процесса на ребре клиновидной среды в случае возникновения пространственных колебаний.

Из полученных результатов вытекает, что процесс локализации волнового процесса в клиновидной среде зависит только от механических и геометрических параметров среды и не зависит от характера источников возбуждаемых колебаний.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Бабич В. М., Капилевич М. Б. и др.* Линейные уравнения математической физики. Серия СМБ. М.: Наука. 1964. 368 с.

2. *Shaw P. R.* Boundary -integral equation methods applied to transient wave scattering in an inhomogeneous medium. J. Appl. Mech. 1975. No. 42. P. 147–152.

3. *Беркович В. Н.* Нестационарная смешанная задача динамики неоднородно упругой клиновидной среды. «Экол.вестник научн.центров ЧЭС», Краснодар. 2005. № 3. С. 14–20.

Боев Н. В. (Ростов-на-Дону)
boyev@math.rsu.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ К АНАЛИЗУ ПРОХОЖДЕНИЯ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ ПЕРИОДИЧЕСКУЮ СИСТЕМУ ПРЕПЯТСТВИЙ В СПЛОШНОЙ СРЕДЕ [1]

В рамках геометрической теории дифракции (ГТД) разработан метод решения задачи о прохождении плоской акустической волны через трояко периодическую систему твердых шаровых препятствий, находящихся в сплошной среде. Система препятствий расположена в кубе, с одной из граней которого внутрь объема вводится плоская высокочастотная акустическая монохроматическая волна, а на противоположной грани принимается прошедшая волна. При этом плоская волна заменяется набором точечных источников сферических волн. Телесный угол с вершиной в источнике, направленный в сторону препятствий и стягивающийся полусферой, в котором распространяется волна заменяем системой лучей распространения акустической волны. Таким образом, проблема сводится к исследованию задачи коротковолновой дифракции в локальной постановке. Суммарное поле на грани приема распространяющихся волн складывается из лучей, прошедших через систему шаров, которые могут быть трех типов: лучи, прошедшие через систему препятствий без дифракции; лучи, отразившиеся от системы только один раз. В этом случае получено явное выражение давления в однократно отраженной волне; лучи многократно отраженные от системы препятствий. Однократная и многократная дифракция высокочастотной волны исследуется в рамках модификации интегрального представления давления в отраженной волне физической теории дифракции Кирхгофа. Возникающие при этом дифракционные интегралы оцениваются методом многомерной стационарной фазы. Получено аналитическое выражение главного члена асимптотики давления в точке приема многократно отраженной волны, которое соответствует ГТД. При этом траектория луча представляет собой пространственную ломаную линию с вершинами в точках зеркального отражения от шаровых препятствий. Таким образом, в локальной постановке задачи для каждого луча расчет давления в прошедшей волне на грани приема осуществляется в два этапа. На первом этапе решается геометрическая задача. Рассчитываются траектории каждого однократно или многократно отраженного луча. На втором этапе на основе полученных явных выражений вычисляются давления в точках приема однократно и многократно отраженных лучей и вычисляется суммарное давление в прошедшей волне.

[1]Исследования проведены при финансовой поддержке Российского Научного Фонда, грант № 15-19-10008.

О. А. Васильева (Москва)
vasiljeva.ovas@yandex.ru

О РЕЗУЛЬТАТАХ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается задача Коши для системы уравнений Карлемана и системы уравнений Годунова-Султангазина [1–6]. Как частные случаи кинетического уравнения Больцмана, исследуемые системы уравнений являются модельными системами кинетической теории газов, рассматривающей газ как совокупность большого числа хаотически движущихся частиц, взаимодействующих друг с другом.

Изучаемые задачи обладают рядом характерных свойств, присущих кинетическому уравнению Больцмана, что объясняет актуальность их исследования.

Для численного исследования в работе применяются конечно-разностные методы. Полученные численные результаты согласуются с теоретическими результатами, полученными в работах [1–3].

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Годунов С. К., Султангазин У. М.* О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана // Успехи МН. 1974, т. XXVI, №. 3(159). С. 3–51.

2. *Radkevich E. V., Vasil'eva O. A., Dukhnovskii S. A.* Local equilibrium of the Carleman equation // Journal of Mathematical Science. 2015, vol. 207, № 32. Pp. 296–323.

3. *Васильева О. А., Духновский С. А., Радкевич Е. В.* О локальном равновесии уравнения Карлемана // Проблемы математического анализа. 2015, т. 78. С. 165–190.

4. *Васильева О. А., Духновский С. А.* Условие секулярности кинетической системы Карлемана // Вестник МГСУ. 2015, № 7. С. 33–40.

5. *Vasil'eva O.* Some results of numerical investigation of the Carleman system // Procedia Engineering 24th. «XXIV R-S-P Seminar — Theoretical Foundation of Civil Engineering, TFoCE 2015». 2015. Pp. 834–838.

6. *Васильева О. А.* Численное исследование системы уравнений Карлемана // Вестник МГСУ. 2015, № 6. С. 7–15.

В. А. Гетман (Ростов-на-Дону)
vagetman@sfedu.ru

ПРИМЕНЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ К ДЛИННЫМ ВОЛНАМ В АОРТЕ

Длинные волны в жидкости заполняющие цилиндрическую трубку с упругой границей изучались, начиная с конца девятнадцатого века. В 20 веке ученые открыли винтовое движение крови в сосудах. Длинные спиральные волны в кровеносном сосуде с учетом винтовой анизотропии стенок впервые исследовал Устинов Ю. А.

В работе приведены результаты асимптотических расчетов длинных продольных волн с использованием пограничных слоев. Длинные продольные и спиральные волны рассчитываются на основе системы Навье-Стокса и динамических уравнений тонкой упругой изотропной оболочки с учетом малости коэффициента вязкости. В работе используются безразмерные уравнения тонкой изотропной оболочки в безмоментном приближении с учётом гидродинамических воздействий на срединную поверхность, полученные Устиновым Ю. А. Аорта моделируется цилиндром, ограниченным вязкоупругой оболочкой. Применяется известный метод расчета длинных волн с введением медленной осевой координаты. Асимптотические разложения строятся в виде рядов по степеням коэффициента, обратно пропорционального фазовой скорости волны Моуэнса-Кортевега. Решение задачи состоит из суммы функций двух видов. Функции первого вида, в главном приближении, описывают течение идеальной жидкости. Функции второго вида описывают пограничные слои на стенках сосуда.

Показано, что в ядре потока (вне зоны пограничного слоя) продольная компонента скорости длинных волн постоянна по сечению. Этот факт наблюдается в эксперименте. В приближении идеальной жидкости определена фазовая скорость волн. Получены две волны — волна давления и квазипродольная волна. Вне пограничного слоя основной вклад в решение вносит только волна давления. Проведены численные расчеты формы волны и давления как в зависимости от времени в течение систолы, так и в зависимости от осевой координаты. В конце систолы возникает зона противотока. Причем область противотока локализована в пограничном слое. Скорость противотока стремится к нулю как при выходе из области пограничного слоя, так и при приближении к стенке сосуда.

И. М. Данцевич, Ю. Ю. Метревели, И. А. Изюмов
(Новороссийск)
danzewitsch@rambler.ru, pim1289@yandex.ru, veless@rambler.ru

ВИЗУАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ МОРСКИХ ПОДВИЖНЫХ ОБЪЕКТОВ

Визуальные условия работы необитаемых телеуправляемых аппаратов непривычны восприятию человека. Воспроизведение динамики телеуправляемых аппаратов должно учитывать эти сложные условия. Для этой цели необходимо реализовать воспроизведение высококачественной компьютерной графики с использованием моделей истиной динамики морских подвижных объектов. Используя коэффициенты модели, полученные в ходе аэротрубного эксперимента получаем модель динамики МПО с замкнутой системой уравнений Навье-Стокса с учётом коэффициентов сопротивления потоков жидкости в трёхмерном базисе. Численное решение динамики потоков в условиях вязкого трения выполним методом генерации объёмных сеток и исследования проекций движения МПО на различные плоскости.

Качественную визуализацию можно получить посредством рендеринга по позициям проекций в базисе объёмных сеток.

Представляем вектор ускорения модели в проекциях субстационарных производных, записываем уравнение Навье-Стокса. Учитывая возможности параллельных вычислений на объёмных сетках рассмотрим численный метод моделирования крупных вихрей (LES).

С учётом небольших чисел Рейнольдса на условия движения системы условия стационарности движения системы возможно разделение на крупные и мелкие вихри. Отфильтруем крупные вихри, возникающих при движении системы.

В отношении мелких вихрей применить модели подсеточного масштаба (SGS) и осреднение в виде фильтра, коэффициенты разложения функции которого совпадают с соответствующими коэффициентами разложения Фурье.

Усреднение вихрей с использованием анализирующего фильтра позволяет применить несколько подходов:

– метод конечно-разностных производных, этот подход требует наличия передаточной функции фильтра;

– метод дифференциального оператора.

Дифференциальный оператор может иметь произвольную степень, тогда передаточная функция фильтра, является полиномом от частоты, с показателем степени дифференциального оператора, или реализован в виде всплеска (вейвлета), соответствующего порядка

Д. А. Закора (Воронеж, Симферополь)
dmitry.zkr@gmail.com, dmitry_@crimea.edu

О СПЕКТРЕ В ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ [1]

Рассматривается задача о малых движениях вязкоупругой жидкости, заполняющей ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, вращающуюся вокруг вертикальной оси Ox_3 с постоянной угловой скоростью ω_0:

$$\frac{\partial \vec{u}(t,x)}{\partial t} - 2\omega_0\big(\vec{u}(t,x)\times\vec{e}_3\big) = -\nabla\big(a_\infty \rho_0^{-1/2}(z)\rho(t,x)\big) +$$

$$+\frac{1}{\rho_0(z)}\big(\mu_0\Delta\vec{u}(t,x) + (\eta_0 + \frac{\mu_0}{3})\nabla\mathrm{div}\vec{u}(t,x)\big) +$$

$$+\sum_{l=1}^{m}\int_0^t \frac{e^{-b_l(t-s)}}{\rho_0(z)}\big(\mu_l\Delta\vec{u}(s,x) + (\eta_l + \frac{\mu_l}{3})\nabla\mathrm{div}\vec{u}(s,x)\big)\,ds + \vec{f}(t,x),$$

$$\frac{\partial \rho(t,x)}{\partial t} + a_\infty \rho_0^{-1/2}(z)\mathrm{div}\big(\rho_0(z)\vec{u}(t,x)\big) = 0 \ \ (\Omega), \quad \vec{u}(t,x) = \vec{0} \ \ (\partial\Omega),$$

$$\vec{u}(0,x) = \vec{u}^0(x), \quad \rho(0,x) = \rho^0(x).$$

Здесь $\vec{u}(t,x)$, $\widetilde{\rho}(t,x) = a_\infty^{-1}\rho_0^{1/2}(z)\rho(t,x)$ — поле скоростей и динамическая плотность жидкости, $\rho_0(z)$ $(z := 2^{-1}\omega_0^2(x_1^2 + x_2^2) - gx_3)$ — плотность жидкости в состоянии относительного равновесия, a_∞ — скорость звука в сжимаемой жидкости, $\vec{f}(t,x)$ — малое поле внешних сил, наложенное на гравитационное, остальные параметры в уравнениях — это положительные физические константы.

Система уравнений, граничных и начальных условий сводится к задаче Коши в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\mathcal{A}\xi + \mathcal{F}(t), \quad \xi(0) = \xi^0,$$

где оператор $\mathcal{A}$ представляет из себя некоторую операторную блок-матрицу и является максимальным секториальным оператором в $\mathcal{H}$.

В работе исследована локализация и структура спектра оператора $\mathcal{A}$, свойства системы его корневых элементов, возможность разложения решения динамической задачи по этой системе элементов.

[1] Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №14-21-00066, выполняемый в Воронежском госуниверситете).

С. В. Зуев (Белгород)
sergey.zuev@bk.ru

КВАНТОВАНИЕ И МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ

Квантование для нелинейных систем, осуществляющих финитное движение, получается естественным путем, если имеется их вероятностное описание. Пусть значения координат x, y для интересующей нас области фазового пространства заключены в интервалах $[x_0, x_N]$ и $[y_0, y_M]$, где $x_N = x_0 + N\xi$ и $y_M = y_0 + M\eta$, соответственно. Определим семейство комплексно-значных функций

$$|\psi\rangle \equiv |\phi\rangle|\theta\rangle,$$

где в некотором фиксированном базисе

$$|\phi\rangle = \begin{pmatrix} \phi_0(t) \\ \vdots \\ \phi_N(t) \end{pmatrix}, \quad |\theta\rangle = \begin{pmatrix} \theta_0(t) \\ \vdots \\ \theta_M(t) \end{pmatrix}.$$

Выберем их так, чтобы вероятность обнаружить систему в промежутке времени $t...t+\tau$ в прямоугольнике $x_k...x_k+\xi$, $y_l...y_l+\eta$ при условии, что во время $t_0...t_0+\tau$ система точно находилась в прямоугольнике $x_0...x_0+\xi$, $y_0...y_0+\eta$, была равна

$$P_{(t_0,x_0,y_0)}(t, x_k, y_l) = \phi_k(t)\overline{\phi_k(t)}\theta_l(t)\overline{\theta_l(t)},$$

где

$$x_k = x_0 + k\xi, \quad y_l = y_0 + l\eta, \quad k = 0, \ldots, N, \quad l = 0, \ldots, M.$$

Дополнительно требуется выполнение обычных условий нормировки.

Набор значений $P_{(t_0,x_0,y_0)}(t, x_k, y_l)$ может быть получен для широкого класса динамических систем численным моделированием по вероятностному методу (см. [1]).

В этом случае можно так построить алгебру наблюдаемых, что собственные значения и собственные векторы оператора Гамильтона системы могут быть рассчитаны численно с использованием библиотек программной среды PYTHON.

В частности, таким образом возможно построить численное квантование для всех систем осцилляторного типа, приведенных в монографии [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черенков Д. М., Зуев С. В.* Вероятностная модель динамической системы // Труды Международной конференции «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики-2015» Новосибирск, 2015. С. 828.

2. *Кузнецов С. П.* Динамический хаос и гиперболические аттракторы: от математики к физике. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. 488 с.

Ю. С. Ивченко (Новороссийск)
juliya1977_08@mail.ru

ВЫЯВЛЕНИЕ ФАКТОРОВ ИНВЕСТИЦИОННОЙ АКТИВНОСТИ РЕГИОНОВ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ (НА ПРИМЕРЕ ЮЖНОГО И СЕВЕРО-КАВКАЗСКОГО ФЕДЕРАЛЬНЫХ ОКРУГОВ)

Инвестиционная активность региона в самом общем виде зависит от наличия финансовых источников и уровня эффективности инвестиционных вложений. Приступая к построению эконометрической модели уровня инвестиций в основной капитал на душу населения по статистической совокупности, состоящей из тринадцати регионов Южного и Северо-Кавказского федеральных округов, автор выбрал следующие факторы: 1) удельный вес убыточных организаций в регионе (фактор, характеризующий источник инвестиций, поскольку инвестиционные вложения осуществляются на 57% за счет собственных средств предприятий и их аналога – средств вышестоящих организаций [1]); 2) доходность валового накопления основного капитала и 3) удельный вес строительной и транспортной отрасли в валовом региональном продукте региона (этот фактор был выбран по причине того, что на данные отрасли национальной экономики приходится 18 и 25% всех инвестиций соответственно [1]). Корреляционная матрица показала очень тесную связь между результатом и третьим фактором и отсутствие зависимости результата как от первого, так и от второго фактора. Построенная модель множественной линейной регрессии с указанными тремя факторами показала отсутствие статистической значимости коэффициентов при первом и втором факторе. Автором были отброшены незначимые факторы и построена модель парной линейной регрессии. Для дальнейшего улучшения качества модели автором была построена модель без свободного члена. Эта модель описывает вариацию результативного признака на 89%, является статистически значимой, коэффициент при факторном признаке данной модели равен 3613.

Таким образом, методами эконометрического моделирования выявлено, что объемы инвестиционных вложений в регионах определяются не наличием источников инвестиций в виде собственных средств (в основном, прибыли) организаций и не уровнем доходности валового накопления основного капитала, а долей строительной и транспортной отраслей в валовом региональном продукте региона, что указывает на диспропорции в экономике РФ и нездоровый инвестиционный климат.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ивченко Ю. С.* Статистический анализ инвестиций в основной ка-

питал в России за период 2001-2012 годы и общая оценка сложившейся инвестиционной ситуации как фактора экономического роста // Russian Journal of Management. — 2015. — № 3. — Том 3. — С. 228–239.

В. Л. Литвинов (СамГТУ, Самара)
vladlitvinov@rambler.ru

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОУПРУГОГО СТЕРЖНЯ С ДВИЖУЩЕЙСЯ ГРАНИЦЕЙ

Рассмотрим продольные колебания вязкоупругого стержня, изменение длины которого происходит на свободном конце

$$Z_{tt}(x,t) - a^2[Z_{xx}(x,t) + \mu Z_{xxt}(x,t)] = 0; \tag{1}$$

$$Z(0,t) = 0; \quad Z_x(\ell_0(v_0 t), t) = 0. \tag{2}$$

В задаче (1)–(2) обозначено: $Z(x,t)$ — продольное смещение точки x в момент времени t; a — скорость распространения продольных волн в стержне; μ — малый параметр, учитывающий вязкоупругость; $\ell_0(v_0 t) = L_0 - v_0 t$ — закон движения границы.

Введем в задачу (1), (2) безразмерные переменные:

$$\xi = \frac{\omega_0}{a}x; \quad \tau = \omega_0 t + \frac{\omega_0 L_0 - a}{-v_0}; \quad Z(x,t) = U(\xi,\tau).$$

После преобразований получим:

$$U_{\tau\tau}(\xi,\tau) - U_{\xi\xi}(\xi,\tau) - \varepsilon_1 U_{\xi\xi\tau}(\xi,\tau) = 0; \tag{3}$$

$$U(0,\tau) = 0; \quad U_\xi(\ell(\varepsilon_0\tau), \tau) = 0, \tag{4}$$

где $\varepsilon_1 = \mu\omega_0$; $\ell(\varepsilon_0\tau) = 1 + \varepsilon_0\tau$; $\varepsilon_0 = -v_0/a$.

Для решения задачи (3), (4) воспользуемся методом Канторовича-Галеркина [1]. В итоге получим

$$U(\xi,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\omega_{0n}(\varepsilon_0\tau)\xi) \cdot \frac{\ell(\varepsilon_0\tau)}{\sqrt{\pi n - \pi/2}} \cdot e^{-\int\limits_0^\tau \frac{\varepsilon_1}{2}\frac{(\pi n - \pi/2)^2}{\ell^2(\varepsilon_0\zeta)}d\zeta} \times$$

$$\times \left(D_n \cos\left(\frac{\pi n - \pi/2}{\varepsilon_0}\ln(1+\varepsilon_0\tau)\right) + E_n \sin\left(\frac{\pi n - \pi/2}{\varepsilon_0}\ln(1+\varepsilon_0\tau)\right)\right),$$

где постоянные D_n, E_n определяются из начальных условий.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Анисимов В. Н., Литвинов В. Л.* Резонансные свойства механических объектов с движущимися границами. Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2009. 131 с.

А. Т. Лукашенко (Москва)
a_lu@mail.ru

ГЕОМЕТРИЯ ЛИНИЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО БЕЗДИВЕРГЕНТНОГО ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ВБЛИЗИ НУЛЕВЫХ ТОЧЕК ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Нули 1-го порядка потенциального бездивергентного векторного поля (на примере магнитного) неоднократно рассматривались в литературе ранее (см, например, [1]). Описание нулей 2-го и высших порядков затрудняется нелинейностью выражения для вектора поля. Однако оно может быть упрощено за счет выбора системы координат и, соответственно, базисных функций разложения потенциала U [2], а также посредством решения следующей задачи на собственные функции:

$$A_i = \lambda |\mathbf{R}|^{p-1} R_i,$$

где

$$A_i = \frac{1}{p!} T_{ij_1 \ldots j_p} R_{j_1} \ldots R_{j_p},$$

p — порядок нуля, индексы пробегают номера декартовых координат, $\mathbf{R}$ — радиус-вектор, $\mathbf{A} = \nabla U$ — вектор поля, а тензор постоянных коэффициентов

$$T_{ij_1 \ldots j_p} = \frac{\partial^{p+1} U}{\partial x_i \partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_p}}.$$

Дальнейший анализ заключается в рассмотрении асимптотического поведения линий поля вблизи найденных таким образом лучей (реперов), на которых поле радиально или же обращается в нуль. У нулевых точек 1-го порядка может иметься либо 6 реперов, либо континуум [1]. У нулей 2-го порядка, соответственно, может быть до 14-ти реперов (в случае конечного числа последних).

Проведенный анализ может быть, в частности, полезен при рассмотрении процессов магнитного пересоединения на Солнце и в гелиосфере.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Parnell C. E., Smith J. M., Neukirch T., Priest E. R.* The structure of three-dimensional magnetic neutral points // Phys. Plasmas. 1996. V. 3. P. 759–770.

2. *Lukashenko A. T., Veselovsky I. S.* General principles of describing second- and higher-order null points of a potential magnetic field in 3D // Geomagnetism and Aeronomy. 2015. V. 55, № 8. P. 1152–1158.

А. А. Любушин, Ю. А. Фарков (Москва)
lyubushin@yandex.ru, farkov@list.ru

МЕРЫ СИНХРОНИЗАЦИИ ФИНАНСОВЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Одним из универсальных признаков надвигающихся катастрофических изменений в сложных системах является синхронизация случайных флуктуаций различных параметров, описывающих их состояние. Процесс синхронизации сопровождается также изменением структуры шума в сторону его упрощения. В частности, подобного рода изменения в сейсмическом шуме на Японских островах помогли дать заблаговременный прогноз мега-землетрясения в Японии 11 марта 2011 года [1]. В данном докладе эти идеи применяются к совместному анализу финансовых временных рядов с целью построения некоторых мер, описывающих степень их синхронного поведения. Исследуются множественные робастные коэффициенты корреляции между вариациями вейвлет-коэффициентов на различных уровнях детальности и спектральные множественные меры когерентного поведения при их оценке в скользящем временном окне. При вычислении вейвлет-коэффициентов используются разложения сигналов как по классическим вейвлет-базисам, так и недавние конструкции вейвлетов в анализе Уолша [2]. Кроме того, применяется преобразование исходных временных рядов к значениям их свойств, вычисленных в последовательных временных интервалах малой длины для последующего анализа когерентности уже между значениями этих свойств. В качестве таких свойств рассматриваются параметры мульти-фрактального спектра сингулярности, индекс линейной предсказуемости шума, минимальная нормализованная энтропия распределения квадратов ортогональных вейвлет-коэффициентов, индекс гладкости волновых форм шума и многие другие. Целью построения таких мер синхронизации является поиск предвестников резких колебаний цен на фондовых рынках.

Л И Т Е Р А Т У Р А

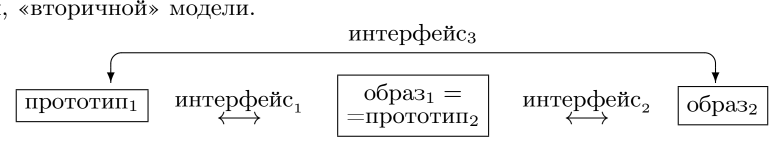
1. *Любушин А.А.* Прогноз Великого Японского землетрясения // Природа. 2012. № 8. С. 23–33.

2. *Farkov Yu. A.* Constructions of MRA-based wavelets and frames in Walsh analysis // Poincare J. Anal. Appl. 2015. V. 2. Special Issue (IWWFA-II, Delhi). P. 13–36.

Ю. Б. Мельников (Екатеринбург)
UriiMelnikov58@gmail.com

ТРАНЗИТИВНОЕ И НЕТРАНЗИТИВНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ [1]

Моделью назовём систему из 2 компонентов: интерфейсного (обеспечивающего обмен информацией между прототипом и образом) и модельно-содержательного (формализующего образ). Рассмотрим случай, когда образ рассматривается как прототип для модели следующего уровня, «вторичной» модели.



Если удаётся построить интерфейс$_3$ между прототипом$_1$ и модельно-содержательным компонентом «образ$_2$» (см. рис.), построение системы «прототип$_1$-интерфейс$_3$-образ$_2$» назовём транзитивным моделированием относительно рассматриваемого вида информации о прототипе. Иначе моделирование назовём нетранзитивным.

Нетранзитивность обычно связана с тем, что информация о прототипе, прежде чем быть преобразованной с помощью интерфейса$_2$, в рамках образа$_1$ должна быть существенным образом преобразована, причем это преобразование не удаётся непосредственным образом отразить в прототипе. Например, в задаче «найти равнобедренный треугольник наименьшей площади, описанный около данной окружности», в качестве прототипа можно рассматривать соответствующую геометрическую модель. Например, обозначим через x длину основания и выразим площадь треугольника как функцию $S(x)$ (радиус окружности рассматриваем как константу). Для определения экстремального значения площади решим уравнение $S'(x) = 0$. Последнее уравнение в рамках прототипа интерпретировать затруднительно.

Результатом транзитивного моделирования часто является модель-полиада, например, векторную алгебру можно рассматривать как модель-триаду с компонентами в виде векторно-геометрической модели (оперирующей с направленными отрезками), векторно-символической модели (оперирующей с выражениями вида $2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{p} \perp \vec{q}$) и векторно-координатной модели.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-06-00240 А).

Е. А. Онохина, С. А. Шитиков, Ю. Б. Мельников
(Екатеринбург)
UriiMelnikov58@gmail.com

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ ПОДХОД К МОДЕЛИРОВАНИЮ: О СИСТЕМЕ БАЗОВЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ [1]

Алгебраический подход к построению модели состоит в выделении трёх компонентов: 1) система типовых базовых элементарных моделей; 2) система типовых преобразований и типовых комбинирований; 3) механизм аппроксимирования. В ситуации, когда будут созданы условия для применения алгебраического подхода, построение требуемой экономической или экономико-математической модели будет представлять собой рутинную процедуру, с обязательной оценкой уровня адекватности модели. Эффективность применения алгебраического подхода определяется: 1) полнотой и качеством базовых моделей; 2) полнотой набора базовых преобразований и типовых комбинаций моделей; 3) сформированностью и удобством использования механизма аппроксимирования; 4) разработанностью механизма оценки адекватности моделей; 5) наличием кадров, способных работать с соответствующими моделями.

С целью применения алгебраического подхода мы предложили формально-конструктивную трактовку модели, которую кратко можно представить в виде системы из двух компонентов: модельно-содержательного компонента (формализующего образ моделируемого объекта) и интерфейсного компонента (формализующего систему обмена информацией между прототипом и образом).

Мы выделили следующие группы базовых экономических моделей: I) модели субъектов экономической деятельности; II) модели взаимодействия субъектов экономической деятельности; III) модели свойств субъектов экономической деятельности; IV) модели функций субъектов экономической деятельности; V) модели экономических процессов. Набор типовых преобразований и комбинаций достаточно велик [1]. Создание механизма аппроксимирования в данном случае требует дополнительных исследований.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Мельников Ю. Б.* Математическое моделирование: структура, алгебра моделей, обучение построению математических моделей: Монография.– Екатеринбург: Уральское издательство, 2004, 384 с.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-06-00240 А).

А. Ю. Переварюха, В. А. Дубровская (Санкт-Петербург)
madelf@pisem.net

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТРЕМИТЕЛЬНОГО КОЛЛАПСА ЭКСПЛУАТИРУЕМЫХ ВОДНЫХ БИОРЕСУРСОВ [1]

Развитие осетровых рыб Каспийского моря на ранних стадиях онтогенеза имеет выраженный этапный характер. Уменьшение скорости прохождения этапов развития молоди может стать отрицательным фактором для дальнейшей выживаемости, но опережение весового прироста не способствует своевременной адаптации к морской среде. Учтем некоторое оптимальное значение размерного развития $\hat{w}$. Убыль численности поколения $N(t)$ от исходной $N(0)$ будут описывать на интервале модельного времени $t \in [0, T]$ следующие объединённые в систему дифференциальные уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = -\left(\alpha\sqrt{(\hat{w} - w(t))^2}N(t) + \Psi[S]\beta\right) N(t) \\ \dfrac{dw}{dt} = \dfrac{m}{\sqrt[3]{N^2 + \zeta}} \end{cases} \tag{1}$$

$w(t)$ — уровень размерного развития поколения, влияющий на увеличение пищевых потребностей; m – параметр количества корма; ζ — ограничение темпов развития не зависящее от N; показатель трофической конкуренции в пределах $2 < k < 3$; α — коэффициент компенсационной смертности от скученности; β –декомпенсационной смертности; $N(0) = \lambda S, w(0) = w_0$ λ — средняя плодовитость запаса S; $t \in [0, T], R = N(T)$ интервал уязвимости с действием $\alpha N^2(t)$ типа убыли. В итерации $\psi^n(R_0)$, где на концах множества временных кадров $\{[T_n, T_{n+1}]\}_i$ должны переопределяться начальные условия $N_{n+1}(0) = N_n(T_n)\lambda$ для расчета задачи Коши на смежном отрезке времени. Фазовое пространство разделяется на области притяжения Ξ_1 и Ξ_2. Граница — неустойчивая «репеллерная» точка R_1^* первого пересечения кривой с биссектрисой координатного угла. Особая точка R_1^* отражает предельную допустимую для выживания популяции L численность S. В экологическом смысле у Ξ_1 аттрактора не существует в 0,0 зависимость (1) неопределенна. При граничном кризисе $R_0 \dots R_n < R_1^*$ констатируется деградация биоресурсов, которая не будет преодолена мораторием на промысел.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 15-07-01230, 14-07-00066).

Г. Ю. Ризниченко (Москва)
riznich@biophys.msu.ru

СОПРЯЖЕНИЕ РАЗНЫХ МЕТОДОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ В МОДЕЛЯХ БИОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

В ранних работах по моделированию биологических процессов в основном представлены качественные модели малой размерности, параметры которых имели феноменологический смысл. Феноменологический подход в науке — это подход, по которому создается теория для наблюдаемых явлений, в которой не рассматриваются реально происходящие процессы более «низкого» уровня (эти процессы могут быть просто неизвестны). Такая теория вполне может быть полезной, если она дает правильное описание явлений. Однако, как правило, такие модели не удовлетворяли специалистов-биологов, поскольку не включали важные детали моделируемых процессов, хотя и могли дать ответ на вопросы о качественном типе поведения системы, например, прояснить условия возникновения колебаний, квазистохастических процессов и неоднородных пространственно-временных режимов в системе.

Современные возможности компьютеров позволяют детально описывать процессы в подсистемах, при этом параметры системы — константы элементарных взаимодействий компонентов системы, имеют конкретный биолоческий смысл. Для описания процессов в разных подсистемах биологических систем разработан разный математический аппарат, моделирование сопряжения этих процессов в реальной системе требует решения задачи сопряжения математических описаний (например, непрерывных и дискретных уравнений, методов молекулярной и квантовой механики и проч.). Эта проблема требует индивидуального решения для каждой моделируемой системы.

Еще одна важная задача — вопрос качественного исследования, когда необходимо установить возможность и условия возникновения разного типа режимов (наличие колебательных, квазистохастических, разного типа пространственно-временных режимов). Проведение корректного бифуркационного анализа для сложных многокомпонентных систем с большим числом параметров представляет значительные трудности. В этом случае полезно построить упрощенную модель и решать задачи бифуркационного анализа на этой упрощенной модели. Параметры такой модели, как правило, имеют гораздо менее ясный физический смысл, чем параметры детальной модели. И перенос результатов исследования с редуцированной на полную модель представляет собой самостоятельную задачу. Ее удается решить в случае, когда можно провести редукцию системы согласно теореме Тихонова о системах с малым параметром.

В лекции приводятся примеры многомасштабных моделей биологических систем разного уровня организации: системы первичных процессов фотосинтетической мембране, модели сердечной активности, динамики популяций в сообществе водных организмов.

А. Н. Румянцев, Т. Г. Румянцева (Ростов-на-Дону)
rumhome@aaanet.ru

РАСЧЕТ УСТАНОВИВШИХСЯ КОЛЕБАНИЙ КРУГОВОГО ВИБРОИСТОЧНИКА НА ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ СРЕДЕ

Рассматривается приближённый подход к исследованию установившихся колебаний упругой полуограниченной среды, на поверхности которой расположен виброисточник. Предполагается, что источник колебаний сцеплён с поверхностью среды или контактирует без трения. Среда может представлять собой слой с параллельными гранями или полупространство. Предполагается, что нагрузка распределена в круге на поверхности среды. Считается, что движение среды описывается системой дифференциальных уравнений теории упругости.

Краевая задача приводится к системе интегральных уравнений первого рода относительно контактных напряжений. Подынтегральные функции ядер уравнений имеют особенности на вещественной оси. На каждой частоте подынтегральные функции содержат конечное число полюсов. В случае полупространства добавляются точки ветвления. Характер поведения ядер интегральных уравнений позволяет применить прямой приближённый подход к их решению. При этом задачи сведены к системам алгебраических уравнений, допускающим эффективное численное решение.

Получены соотношения для приближённого расчёта движения среды вблизи источника колебаний и в дальней зоне. Эти соотношения содержат криволинейные интегралы в комплексной плоскости. В рамках исследования механизма формирования волнового поля был проведён численный анализ дисперсионных соотношений для рассматриваемой упругой среды. Этот анализ основан на изучении распределения действительных полюсов подынтегральных функций. Рассмотрено влияние на распределение полюсов приведённой частоты колебаний при различных соотношениях механических характеристик среды.

Полученные алгоритмы для расчёта смещений реализованы в виде компьютерных программ, когда источник колебаний совершает вертикальные перемещения на поверхности среды.

Л. В. Сахарова (Ростов-на-Дону)
L_Sakharova@mail.ru

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ ДЛЯ ТОНКОГО СЛОЯ ИСПАРЯЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

Посторены автомодельные решеня задачи тепловой конвекции для испаряющейся капли, полученной осреднением приближения Обербека-Буссинеска по тонкому слою испаряющейся жидкости [1]:

$$h_t + div(h^2 s) = -V_0\varphi; \tag{1}$$

$$s_t + (\beta_r - 1)hsdivs + (\beta_r - 1)hs\nabla s = 0; \tag{2}$$

$$\varphi_t + (\beta_r - 1)h\varphi divs + (\beta_r - 1)hs\nabla\varphi = 0; \tag{3}$$

здесь: h — толщина слоя жидкости, $s = (s_1, s_2)$, φ — осредненные функции поля скоростей жидкости, потока тепла. Установлено, что задача (1)– (3) имеет автомодельное решение следующего вида:

$$h = H(x,y)exp(\lambda t), \qquad s = S(x,y)exp(-\lambda t), \qquad \varphi = \Phi(x,y)exp(\lambda t),$$

где λ – параметр, определяемый краевыми условиями. Новые неизвестные функции двух пространственных переменных H, S, Φ определяются на характеристиках $x = m_0(x_0)y + x_0$, $m = m_0(x)$, заданных условием $S = (m(x,y)S, S)$:

$$\Phi = \Phi_0 z, \qquad z = m_0'(x_0)y + 1, \qquad S = S_0 z, \qquad H = H_0/z,$$

$$H_0 = 1,5\lambda\left(\frac{dS_0}{dy}\right)^{-1}, \qquad S_0\frac{d^2S_0}{dz^2} = \left(\frac{dS_0}{dz}\right)^2\left(k^2z^2\frac{dS_0}{dz} + \frac{5}{6}\right),$$

$$k = \frac{2V_0\Phi_0}{9\lambda^2 m_0'(x_0)}, \qquad m(x,y) = m_0(x - m(x,y)y).$$

В частности, решением задачи являются функции

$$S = -\frac{21\lambda^2 m_0'(x_0)}{4V_0\Phi_0}(m(x,y),1), \qquad H = \frac{V_0\Phi_0}{7\lambda(m_0'(x_0))^2}z,$$

определяющие режим испарения капли в условиях пиннинга, с фиксированной границей, определяемой заданием функцией $m_0(x_0)$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Жуков М. Ю.* Моделирование испарения капли жидкости: монография / М. Ю. Жуков, Е. В. Ширяева, Н. М. Полякова ; Южный федеральный университет. – Ростов-на-Дону: Издательство Южного федерального университета, 2015. – 208 с., ил.

А. Ю. Тимофеева, О. Е. Аврунев, Н. Е. Шатров (Новосибирск)
a.timofeeva@corp.nstu.ru, avrunev@ciu.nstu.ru,
nikitashatrov92@gmail.com

ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ИЗМЕНЕНИЯ СТУДЕНЧЕСКОГО КОНТИНГЕНТА ВУЗА [1]

Решается задача построения прогноза качественных и количественных изменений студенческого контингента вуза в процессе обучения по начальным характеристикам поступивших абитуриентов. Анализируются следующие виды моделей:

1. модель временного ряда численности студентов по курсам,
2. модель успешности освоения образовательной программы,
3. модель длительности обучения в днях до отчисления.

Структура моделей выбиралась по информационным критериям [1]. Для описания временного ряда численности студентов чаще всего подходила авторегрессия первого порядка. Успешность сдачи сессии моделировалась с помощью логистической регрессии. Длительность обучения описана моделью пропорциональных интенсивностей Кокса. В итоговый набор объясняющих факторов преимущественно вошли баллы ЕГЭ, форма и основа обучения, факультет.

Построение моделей производилось по данным информационной системы НГТУ о студентах 2011 года набора, а оценка качества прогнозов — 2012–2014 гг. По критериям качества классификации [2] модель длительности обучения оказалась хуже логистической регрессии. Сравнение всех трех моделей по средней абсолютной ошибке прогноза численности показало, что лучше использовать модель логистической регрессии, которая в большинстве случаев обеспечила ошибку в пределах 10%.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Burnham K. P., Anderson D. R.* Multimodel inference understanding AIC and BIC in model selection // Sociological methods & research. 2004. Т. 33, № 2. С. 261–304.

2. *Steyerberg E. W. et al.* Assessing the performance of prediction models: a framework for some traditional and novel measures // Epidemiology. 2010. Т. 21, № 1. С. 128—138.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых (проект МК-5385.2016.6).

М. М. Цвиль, И. В. Колесникова (Ростов-на-Дону)
tsvilmm@mail.ru

ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ РОСТОВСКОЙ ОБЛАСТИ

В настоящей работе был проведен эконометрический анализ зависимости количества создаваемых рабочих мест от суммы вложенных инвестиций на примере 100 Губернаторских проектов Ростовской области, находящихся на стадии реализации. В рассматриваемом перечне выделено 19 инвестиционных проектов, реализуемых в промышленности, которые обеспечены надежными статистическими данными о значениях количества новых рабочих мест, создаваемых в рамках инвестиционного проекта, и стоимости инвестиционного проекта в млн. руб. Для нашего примера зависимой (эндогенной) переменной Y является количество новых рабочих мест, а независимой (объясняющей, экзогенной) переменной — стоимость инвестиционного проекта X (млн. руб.).

Поскольку часть инвестиционных проектов предполагает введение в эксплуатацию новых заводов (непосредственно создание рабочих мест), другая часть проектов направлена на техническое перевооружение и автоматизацию производства, в эконометрической модели следует учесть это различие. С этой целью используются для моделирования фиктивная переменная z, которая будет равна 1 — для наукоемких и 0 — для остальных.

В результате исследования с помощью MS Excel и EViews. Получена модель со статистически значимыми параметрами.

$\hat{y} = 452,094 + 0,015x - 351,171z$, $R_2 = 0,64$.

Полученная модель дает основание утверждать, что при прогнозировании количества создаваемых рабочих мест большое значение имеет направление применения инвестиций, то есть при $x = 1000$ (млн. руб.) для наукоемкого проекта может быть создано 116 рабочих мест. А если аналогичная сумма будет инвестирована в трудоемкое направление, то в среднем можно ожидать создание около 467 рабочих мест.

М. М. Шварцман (Ростов-на-Дону)
black_drive@smtp.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ДИСКРИМИНАНТНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ДИАГНОСТИКИ ОПУХОЛИ ГОЛОВНОГО МОЗГА

Существуют различные методы предоперационной диагностики глиальной опухоли головного мозга: нейровизуальные методики; магнитно-резонансная и компьютерная томография. Для повышения достоверности диагноза, предлагается использовать статистическую модель, основанную на дискриминантном анализе (ДА). Моделирование проводилось с помощью пакета Statistica. На первом этапе по обучающей выборке, вычисляются значения коэффициентов в дискриминантных функциях (ДФ). Это функции, которые типологизируют пациента к одному из кластеров. В наших исследованиях число кластеров, равное трём, определялось постановкой задачи. Кластеры были промаркированы: N — отсутствие опухоли; D — глиальная опухоль I – II стадии анаплазии; Z — глиальная опухоль III – IV стадии анаплазии. В качестве параметров ДФ — по итогам предварительного моделирования по различным критериям — были выбраны параметры иммунного статуса пациента. Из 15 параметров иммунного статуса — инструментарием Statistica — были отобраны 12 параметров, наиболее значимые для типологизации пациента. Обучающая выборка для кластеров D (31 пациент) и Z (30 пациентов) базировалась на сопоставлении значений параметров иммунного статуса с результатами гистологического анализа вещества головного мозга. Данные для кластера N (41 «пациент») были сгенерированы для каждого параметра в интервале нормы по случайному закону.

На втором этапе, на основе полученных ДФ, проводилась типологизация пациентов, проходивших консервативное лечение. В пакете Statistica типологизация осуществляется: по апостериорным вероятностям и метрике Махаланобиса. Метод апостериорных вероятностей более информативен; т.к. в пограничных случаях прогноз выдаётся в процентном соотношении. Например, 70% – пациент относится к кластеру D; 30% — к кластеру Z. Результаты катамнестического наблюдения за пациентами, проходившими консервативное лечение, подтвердили работоспособность построенной на основе ДА, статистической модели. Исходные данные и итоги наблюдений за пациентами предоставлены онкологом Е. Г. Кравченко.

Д. В. Явна, В. В. Бабенко (Ростов-на-Дону)
yavna@fortran.su

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗРИТЕЛЬНЫХ МЕХАНИЗМОВ, ОБНАРУЖИВАЮЩИХ ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ МОДУЛЯЦИИ ОРИЕНТАЦИИ [1]

Целью работы являлось создание компьютерной модели зрительного механизма, обнаруживающего модуляции ориентации яркостных градиентов в статическом изображении, при этом игнорирующего модуляции контраста и пространственной частоты. Существенным требованием к модели выступало сходство её элеменов с естественными нейрональными структурами. Необходимость создания модели обусловлена психофизическими и психофизиологическими данными, поддерживающими предположение, что каналы восприятия контрастных, ориентационных и пространственно-частотных модуляций в зрительной системе человека функционируют независимо.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект 1741).

Мы основывались на классической последовательности «фильтрация $\to$ выпрямление $\to$ фильтрация», объясняющей неспецифическую детекцию пространственных модуляций локальных признаков зрительной системой человека [1]. Для обеспечения специфичности модели был добавлен механизм нормализации контраста [1] и изменена организация «рецептивных полей» элементов, выполняющих фильтрацию второго этапа [2]. Тогда как центральная, возбудительная часть поля принимает входы от элементов, настроенных на *определённую* ориентацию и пространственную частоту, тормозная периферия получает сигнал от элементов той же ориентации, но с разными частотными настройками. Нормализация контраста осуществлялась методом нормировки изображения на карту амплитуд функции модуляции локального контраста [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kingdom F., Prins N., Hayes A.* Mechanism independence for texture-modulation detection is consistent with a filter-rectify-filter mechanism // Vis. Neurosci. 2003. V. 20, No 1. P. 65–76.

2. *Бабенко В. В., Явна Д. В.* Модель специфичности зрительных механизмов второго порядка // Нейроинформатика-2009: сборник научных трудов XI Всероссийской научно-технической конференции: в 2-х ч. М.: Изд-во МИФИ. 2009. Ч. 1. С. 243-248.

3. *Красильников Н. Н.* Цифровая обработка 2D- и 3D-изображений. Спб.: БХВ-Петербург, 2011. 608 с.

Секция VI Математическое программирование, управление и теория игр

К. Н. Кудрявцев (Челябинск)
kudrkn@gmail.com

РАВНОВЕСИЕ ПО НЭШУ И КОЛЛЕКТИВНАЯ РАЦИОНАЛЬНОСТЬ

Ставшее уже классическим, равновесие по Нэшу является наиболее распространенным принципом оптимальности в теории бескоалиционных игр. Однако, этому понятию присуще негативное свойство – множество равновесий по Нэшу внутренне неустойчиво. А именно, могут существовать две ситуации равновесия по Нэшу такие, что выигрыши каждого игрока в первой из них строго больше соответствующих выигрышей в другой. «Снять» этот «негатив» можно используя ту ситуацию равновесия по Нэшу, для которой выполнено (естественное в кооперативных играх) условие коллективной рациональности, то есть равновесную по Нэшу ситуацию, приносящую игрокам наибольший возможный суммарный выигрыш. Подход, позволяющий выявлять такие равновесия и достаточные условия их существования были предложены в [1].

Рассмотрим бескоалиционную игру N лиц

$$\Gamma = \langle \mathbb{N}, \{\mathbf{X}_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{f_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}} \rangle. \tag{1}$$

Введем $N+1$ скалярных функций

$$\begin{aligned} \varphi_i(x,z) \ &= \ f_i(z\|x_i) - f_i(z) \quad (i \in \mathbb{N}), \\ \varphi_{N+1}(x,z) \ &= \ \sum_{r\in\mathbb{N}} f_r(x) - \sum_{r\in\mathbb{N}} f_r(z), \end{aligned} \tag{2}$$

где $z = (z_1, ..., z_N)$, $z_i \in \mathbf{X}_i$ $(i \in \mathbb{N})$, $z \in \mathbf{X} = \mathbf{X}_1 \times ... \times \mathbf{X}_N$, $x \in \mathbf{X}$. Гермейеровская свертка скалярных функций (2) будет

$$\varphi(x,z) \ = \ \max_{j=1,\dots,N,N+1} \varphi_j(x,z). \tag{3}$$

Игре (1) поставим в соответствие антагонистическую игру

$$\langle\ \mathbf{X},\ \mathbf{Z} = \mathbf{X},\ \varphi(x,z)\ \rangle\,, \tag{4}$$

Теорема. *Если для антагонистической игры* (4) *существует седловая точка* (x^0, z^*)*, то минимаксная стратегия* z^* *является равновесной по Нэшу ситуацией для игры* (1)*, удовлетворяющей условию коллективной рациональности.*

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Жуковский В. И., Кудрявцев К. Н.* Парето-равновесная ситуация: достаточные условия и существование в смешанных стратегиях // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2015. Т. 7, № 1. С. 74–91.

М. А. Калашникова, Г. А. Курина (Воронеж)
margarita.kalashnikova@mail.ru, kurina@math.vsu.ru
АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНЫХ ЗАДАЧ С ДЕШЕВЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ РАЗНОЙ ЦЕНЫ

Рассматривается следующая задача

$$J(\overset{(1)}{v}, \overset{(2)}{v}) = 1/2 \int_0^T (\langle z, W(t,\varepsilon)z\rangle + \sum_{k=1}^{2} \varepsilon^{2k} \langle \overset{(k)}{v}, \overset{(k)}{R}(t,\varepsilon)\overset{(k)}{v}\rangle)\, dt \to \min,$$

$$\frac{dz}{dt} = A(t,\varepsilon)z + C(t,\varepsilon)v, \quad t \in [0,T], \quad z(0,\varepsilon) = z^0,$$

где $\overset{(k)}{v}(t,\varepsilon) \in R^{n_k}$, $z(t,\varepsilon) \in R^n$, $v(t,\varepsilon) = (\overset{(1)}{v}(t,\varepsilon)', \overset{(2)}{v}(t,\varepsilon)')'$, все матрицы предполагаются достаточно гладкими по своим аргументам, причем $W(t,\varepsilon)$, $\overset{(k)}{R}(t,\varepsilon)$ — симметричны, $W(t,0)$, $\overset{(k)}{R}(t,0)$ — положительно определены, $k = 1, 2$, $n = n_1 + n_2$, а матрица $C(t,0)$ обратима при всех $t \in [0,T]$.

При $\varepsilon = 0$ управление в рассматриваемой задаче является особым.

Путем перехода к новым переменным управления и состояния исходную задачу приводим к сингулярно возмущенной задаче оптимального управления с трехтемповыми переменными состояния в критическом случае. При этом в полученной задаче управление не является особым при $\varepsilon = 0$.

Используя непосредственную подстановку постулируемого асимптотического разложения решения в условие преобразованной задачи и определяя задачи оптимального управления для нахождения членов асимптотики, построены члены первого порядка асимптотического разложения решения, содержащего пограничные функции четырех типов, вида

$$\mathrm{v}(t,\varepsilon) = \overline{\mathrm{v}}(t,\varepsilon) + \sum_{i=0}^{1} (\Pi_i \mathrm{v}(\tau_i,\varepsilon) + Q_i \mathrm{v}(\sigma_i,\varepsilon)),$$

где $t \in [0,T]$, $\tau_i = t/\varepsilon^{i+1}$, $\sigma_i = (t-T)/\varepsilon^{i+1}$, $i = 0, 1$, $\overline{\mathrm{v}}(t,\varepsilon) = \sum_{j\geq 0} \varepsilon^j \overline{\mathrm{v}}_j(t)$, $\Pi_i \mathrm{v}(\tau_i,\varepsilon) = \sum_{j\geq 0} \varepsilon^j \Pi_{ij}\mathrm{v}(\tau_i)$, $Q_i\mathrm{v}(\sigma_i,\varepsilon) = \sum_{j\geq 0} \varepsilon^j Q_{ij}\mathrm{v}(\sigma_i)$, $\overline{\mathrm{v}}_j(t)$ — регулярные функции, $\Pi_{ij}\mathrm{v}(\tau_i)$ — пограничные функции экспоненциального типа в окрестности $t = 0$, $Q_{ij}\mathrm{v}(\sigma_i)$ — пограничные функции экспоненциального типа в окрестности $t = T$.

В. А. Саакова, А. Б. Зинченко (Ростов-на-Дону)
veronika-saakova@rambler.ru

КООПЕРАТИВНАЯ МОДЕЛЬ ПРОИЗВОДСТВА НЕДЕЛИМОЙ ПРОДУКЦИИ

LP-игрой (linear programming game) называют кооперативную игру с множеством участников $N = \{1, ..., n\}$ и характеристической функцией $\nu : 2^N \to \mathbf{R}$, определенной задачей линейного программирования. Примером LP-игры является полностью сбалансированная производственная игра (N, ν_{LP}), где

$$\nu_{LP}(S) = max\{cx | Ax \leq b^S, \ x \in R_+^p\}.$$

Подмножество дележей C-ядра игры (N, ν_{LP}) можно получить, вычислив значение функции ν_{LP} только для максимальной коалиции.

Если выпускается продукция неделимого типа, то определяющие функцию ν_{LP} задачи становятся целочисленными, т.е. LP-игра (N, ν_{LP}) превращается в ILP-игру (integer linear programming game) (N, ν_{ILP}). C-ядро игры (N, ν_{ILP}) может быть пустым. На первый взгляд кажется, что соотношения между C-ядрами ILP-игры и соответствующей LP-игры похожи на соотношения между решениями задачи целочисленного линейного программирования и ее линейной релаксации. Однако численный эксперимент показал, что отличие этих игр настолько существенно, что даже их множества дележей могут не пересекаться. Известное достаточное условие сбалансированности целочисленной производственной игры

$$\frac{\nu_{ILP}(N)}{\nu_{LP}(N)} = \max_{S \in 2^N \setminus \{N.\emptyset\}} \frac{\nu_{ILP}(S)}{\nu_{LP}(S)}$$

требует решения $2^n - 1$ задач целочисленного линейного программирования и столько же линейных задач. Задача целочисленного программирования является NP-сложной, поэтому актуален вывод условий непустоты C-ядра игры (N, ν_{ILP}), требующих меньшего объема вычислений. Авторами получено достаточное условие сбалансированности целочисленной производственной игры, выраженное только через параметры A (технологическая матрица) и B (матрица ресурсов): если существует такое $k \in N$, что

$$\min_{1 \leq i \leq r} \{[\frac{b_i^S}{a_{ij}}] : a_{ij} \neq 0\} = 0, \quad j \in \{1, ..., p\}, \quad S \in N \setminus k,$$

то игра (N, ν_{ILP}) сбалансирована.

В. В. Цыганкова (Ростов-на-Дону)
tsvictoryvalery@gmail.com

ОБОБЩЕНИЕ ЧЕТКОЙ КООПЕРАТИВНОЙ ИГРЫ НА СЛУЧАЙ НЕЧЕТКИХ КОАЛИЦИЙ

Классическая коалиционная игра (N,ν_0) не подходит для моделирования ситуаций, участники которых предпочитают подстраховать себя от крупных потерь, жертвуя некоторой частью возможной выгоды. Например, они не вкладывают все имеющиеся средства (деньги, время, ресурсы и т.д.) в один проект, а распределяют их между несколькими проектами. Работа посвящена нечетким коалиционным играм, в которых агенты могут участвовать в нескольких коалициях одновременно. Явный вид характеристической функции нечеткой игры описать трудно, поэтому она часто определяется с помощью характеристической функции соответствующей четкой игры. Рассмотрено несколько подходов к такому расширению:

$$\nu(U)=\sum_{T_0\in SuppU}\{\prod_{i\in T_0}U(i)\prod_{i\in SuppU\setminus T_0}(1-U(i))\}\ \nu_0(T_0),$$

$$\nu(U)=\sum_{l=1}^{q(U)}\nu_0([U]_{h_l})(h_l-h_{l-1}),$$

$$\nu(U)=\begin{cases}\tilde{\nu}(U), & \tilde{\nu}(U)\le\nu_0(SuppU),\\ \nu_0(SuppU), & \tilde{\nu}(U)>\nu_0(SuppU),\end{cases}$$

где

$$\tilde{\nu}(U)=\sum_{T_0\in SuppU}\{\prod_{i\in T_0}U(i)\}\ \nu_0(T_0).$$

Были созданы программы вычисления вектора Шепли для нечетких игр с перечисленными выше характеристическими функциями. Численный эксперимент позволил проверить свойства нечеткого вектора Шепли и сравнить решения разных нечетких игр, порожденных одной и той же четкой коалиционной игрой. Получены следующие результаты:

- при использовании первого и второго подходов к вычислению характеристической функции нечеткой игры вектор Шепли обладает всеми основными свойствами,

- при использовании третьего подхода к вычислению характеристической функции нечеткой игры вектор Шепли обладает свойствами агрегации и симметрии, но не обладает свойством эффективности.

Д. М. Черенков (Белгород)
jokcik@yandex.ru

УПРАВЛЕНИЕ ВЕНТИЛЬНО-ИНДУКТОРНЫМ ПРИВОДОМ НА ОСНОВЕ ВЕРОЯТНОСТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Построен алгоритм и создана программная реализация векторного управления комплектным вентильно-индукторным приводом с тремя фазами (6 полюсов ротора, 9 полюсов статора) и без обмотки возбуждения.

Как известно (см., например, [1]), векторное управление в такой системе задается системой алгебро-дифференциальных уравнений вида

$$\sigma L_s \frac{dI_d}{dt} = -R_s I_d + U_d + \sigma L_s \omega_\psi I_q - \frac{L_m}{L_r}\frac{d\psi_r}{dt}$$

$$\sigma L_s \frac{dI_q}{dt} = -R_s I_q + U_q - \sigma L_s \omega_\psi I_d - \frac{L_m}{L_r}\omega_\psi \psi_r$$

$$T_r \frac{d\psi_r}{dt} = -\psi_r + L_m I_d$$

$$\omega_\psi = \omega_r + \frac{L_m}{T_r}\frac{I_d}{\psi_r}; M = \frac{3}{2} R_r \frac{L_m}{L_r}\psi_r I_q.$$

Эта система нелинейна, то есть ее решение затруднено. В реальном управлении часто встречаются жесткие режимы. Это затрудняет численное моделирование и резко сужает область использования ШИМ.

Предлагаемый нами подход к управлению основан на вероятностном моделировании, подобном рассмотренному в работе [2]. Его идея заключается в вычислении вероятностей попадания значений наблюдаемых системы в некоторые интервалы. При таком подходе не возникает "сваливания"в длительные расчеты и ШИМ заменяется микроконтроллером, с помощью которого можно реализовать широкий спектр режимов работы привода. Ключевым преимуществом является наличие эффективного алгоритма расчета вероятностей вне зависимости от жесткости режима. При попадании в жесткий режим, вероятности теряют явно выраженный максимум и тогда состояние системы диагностируется как неуправляемое и управляющий контроллер меняет входные параметры чтобы достичь управляемого режима.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Козаченко В., Анучин А., Дроздов А., Жарков А.* Цифровое векторное управление вентильно-индукторными двигателями с независимым возбуждением // Компоненты и технологии. 2004. № 8. С. 166–170.

2. *Черенков Д. М., Зуев С. В.* Вероятностная модель динамической системы // Труды Международной конференции «Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики-2015» Новосибирск, 2015. С. 828.

Секция VII Информационно-коммуникационные технологии в науке, образовании и производстве

Г. А. Зеленков, А. А. Руднев, И. А. Гриник (Новороссийск)
mathshell@mail.ru

ВИРТУАЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

При изучении теоретического курса высшей математики в вузах существенную роль для понимания учебного материала играет наглядное представление математических объектов, процессов, формулировок теорем, их доказательств и т. д. Современные информационные технологии позволяют разрабатывать виртуальные модели этих объектов с использованием мощных программных систем компьютерной математики.

В данной работе мы продемонстрировали средствами виртуального моделирования в программной среде MATLAB возможность графической интерпретации и оценки выполнения критериев устойчивости системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) согласно так называемому методу функций Ляпунова.

Нами реализована возможность визуально оценивать границы той замкнутой окрестности точки покоя рассматриваемой нами системы ОДУ, внутри которой выполняется условие теоремы Ляпунова, и на основании данной оценки заявлять об устойчивости нулевого решения системы. Динамическая пошаговая визуализация движения фазовой точки системы по фазовой траектории в направлении точки покоя системы наглядно демонстрирует геометрический смысл условия устойчивости нулевого решения системы согласно теореме Ляпунова, а именно: должна существовать некоторая замкнутая область вокруг точки покоя системы, внутри которой угол между градиентом функции Ляпунова и касательным вектором к фазовой траектории системы, откладываемыми от фазовой точки, не должен превышать $\pi/2$. Пошаговая динамика движения фазовой точки по фазовой траектории изображается одновременно и на трехмерной поверхности функции Ляпунова (реализована функция ее свободного вращения) в фазовом пространстве, и на ее двухмерной проекции на фазовую плоскость.

Актуальность нашей работы заключается в фактическом отсутствии на сегодняшний день разработанных интерактивных учебных пособий для исследования устойчивости систем ОДУ, ценность которых трудно переоценить в виду того, что понимание и аналитическое обоснование устойчивости систем ОДУ может быть затруднено из-за сложности этих систем.

В. М. Простокишин, А. Н. Снежин (Москва),
VMProstokishin@mephi.ru

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РЕЧЕВЫХ СИГНАЛОВ МЕТОДАМИ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА И ЦИФРОВОЙ ГОЛОГРАФИИ

Разрабатываемая интеллектуальной системы тренинга специалистов диспетчерской службы [1] содержит два взаимодействующих модуля: модуль имитации функционирования технологических процессов и модуль имитации поведения эргатических объектов, взаимодействующих с технологическим оборудованием и между собой. Составной часть второго модуля является системы распознавания и синтеза речевых сигналов [2], поэтому был проведено сравнение результатов работы различных алгоритмов [3-5] анализа речевых сигналов. В докладе проанализированы результаты этого анализа применительно к оцифрованным речевым сигналам в широком диапазоне их длительности, интенсивности, спектральной и эмоциональной наполненности.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Юшманов В. Н., Снежин А. Н., Простокишин В. М.* Пилотный проект повышения квалификации кадров в организации диспетчерского управления ООО «Газпром трансгаз Ухта» // Газ. промышл.. 2014. №04(705). С. 47–49.

2. *Григорьев Л. И., Снежин В. М., Простокишин В. М.* Интеллектуальный интерфейс – средство повышения эффективности взаимодействия в человеко-машинных системах автоматизированного управления // Автом., телемех. и связь в нефт. промышл. 2014. № 5. С. 27–35.

3. *Петров С. В., Простокишин В. М.* К анализу цифровых изображений методами цифровой голографии // XVIII Международная конференция «Математика. Экономика. Образование». Ростов-на-Дону, 2010. С. 24–25.

4. *Нагорнов О. В., Никитаев В. Г., Простокишин В. М. и др.* Вейвлет-анализ в примерах. Уч. пос. /Изд-во НИЯУ МИФИ, 2010 г. 118 с.

5. *Петров С. В.* О представлении функций со значениями в векторных решетках рядами Фурье //XVI Международная конференция «Математика. Экономика. Образование». Ростов-на-Дону, 2008. С. 274.

М. М. Шварцман (Ростов-на-Дону)
black_drive@smtp.ru

КОНЦЕПТУАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ COMPUTER SCIENCE

Новизна, предлагаемой концептуальной модели, заключается в разграничении семантической и синтаксической компонентов сигнала. Семантика сигнала — это его смысловое значение. Синтаксис сигнала — это форма, в которую закодирована семантика. Далее, термин «информационный» будем использовать, если речь идёт о семантике сигнала (Смысл, Знания). Если речь идёт о синтаксисе сигнала (Сигнал, Данные), то будем применять новый термин «информатический».

Инструментарием, с помощью которого из синтаксиса сигнала (Смысла в себе) формируется семантика «Знание для нас», является мыслительный аппарат человека. «Информация – это результат умственной деятельности субъекта, обусловленной внешним воздействием сигналов, и/или «внутренним» мыслительным процессом». Предлагаем следующие определения:

«Информатика — это область человеческой деятельности, связанная с обработкой Данных и Знаний на основе современных научно-технических достижений (НТД) и служащая для их (НТД) дальнейшего развития». Опорными являются два положения. Во-первых, наличие положительной обратной связи между Информатикой и НТД. Во-вторых, подчёркнуто два лика Информатики. При работе со Знаниями /Данными/, Информатика выступает как метадисциплина /прикладная дисциплина/. Информатический процесс — это процесс обработки сигналов и данных. Информационный процесс — это процесс: 1) отражающий умственную деятельность человека с образом; 2) при передаче образа — его воплощение в сигнале (синтаксизация); 3) при приёме сигнала, извлечение из него смысла (семантизация).

Информационные /информатические/ технологии – это совокупность методов и средств, с помощью которых, на основе НТД, реализуются информационные /информатические/ процессы. Информационные технологии базируются и способствуют развитию интеллектуальных систем (ИС). Показано, что этапы развития ИС повторяют этапы эволюции тезауруса: от вирусов до homo. Рассматривается перспектива моделирования «интуиции».

Рассматриваются составляющие информационной и информатической культур; информатического и информационного общества. Показано, что экономически развитые страны, находятся в фазе информатического (а не информационного!) общества. Описаны негативные аспекты современного информатического общества.

Секция VIII
Институциональная организация экономических систем

Волынский А. И., Кирилюк И. Л., Круглова М. С., Кузнецова А. В., Сенько О. В. (Москва)
igokir@rambler.ru

ИССЛЕДОВАНИЯ ИНСТИТУЦИОНАЛЬНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ СТРАН МИРА МЕТОДАМИ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ [1]

Развиваемая в центре эволюционной экономики института экономики РАН С. Г. Кирдиной теория институциональных матриц [1] предполагает, что существует два класса стран с доминированием различных систем базовых институтов, или $X-$ или $Y-$ институциональных матриц. Нами исследуется возможность проверки этой теории с помощью математических методов интеллектуального анализа данных [2].

Ранее нами исследовалась взаимосвязь показателей внешней среды и уровня освоенности территорий с характером доминирующих в странах институциональных матриц. Была собрана из различных источников база данных показателей, и выяснялось, насколько они зависят от того, какая матрица доминирует в выбранной группе стран. В частности, выявлена высокая информативность таких показателей, как амплитуда осадков, летние и зимние температуры, уровень рисков [3].

Наши новые исследования посвящены тому, насколько различна динамика ряда показателей для стран с доминированием $X-$ и $Y-$ матрицы. Среди них рост ВВП, размер внутреннего кредита частному сектору, государственные расходы, ряд других показателей. В итоге выявлены существенные различия значений и динамики показателей между исследуемыми классами стран.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кирдина С. Г.* Институциональные матрицы и развитие России. Введение в $-Y-$теорию. Изд. 3-е, перераб., расш. и иллюстр. — М.–СПб. : Нестор-История, 2014. — 468 с.

2. *Журавлев Ю. И., Рязанов В. В., Сенько О. В.* Распознавание. Математические методы. Программная система. Практические применения. М. Фазис, 2006. 159 с.

3. *Кирилюк И. Л., Волынский А. И., Круглова М. С., Кузнецова А. В., Рубинштейн А. А., Сенько О. В.* Эмпирическая проверка теории институциональных матриц методами интеллектуального анализа данных // Компьютерные исследования и моделирование, 2015, т. 7, № 4, с. 923–939

[1] Работа выполнена при поддержке гранта РГНФ (проект №14-02-00422)

А. Ф. Капитанова (Ростов-на-Дону)
kapitanova.af@mail.ru

ПРОЦЕССЫ ДЕГЛОБАЛИЗАЦИИ В МИРОВОМ ХОЗЯЙСТВЕ

Глобализация – процесс таких изменений в национальных экономиках, в результате которых система международных экономических отношений становится все более однородной, то есть приобретает «глобальный» характер.

Глобализация экономики — противоречивый процесс. С одной стороны, она создает условия для доступа стран к факторам и результатам производства, обеспечивает экономию ресурсов, стимулирует прогресс. С другой, с процессами глобализации связано обострение многих проблем: ограничение суверенитета национальных государств, глобальный характер экономических циклов и кризисов, быстрое их распространение, проблема бедности, проблема защиты окружающей среды и прочее. Обратными процессами в мировом хозяйстве являются:

Регионализация — тенденция, идущая вразрез глобализации, это укрепление экономических, политических и иных связей между областями или государствами, входящими в один регион. Регионализация ведет к определенному обособлению национальных хозяйств от формирующейся целостной системы мировой экономики и является отражением противоречий между национальными и глобальными интересами.

Деглобализация — понятие, которое сравнительно недавно появилось в научной литературе, означает приостановку процессов глобализации. Поскольку США и часть развитых европейских стран претендуют на роль мировых гегемонов, глобализация означает создание однополярного мира с преобладанием западных способов производства, правил, культуры. Деглобализация — это отказ от однополярного мира и переход к многополярному. Попытки некоторых стран, в том числе России и Китая, в расчетах с другими государствами заменить доллар иными валютами — пример наличия в мировом хозяйстве процессов деглобализации.

Наметившаяся тенденция деглобализации находит подтверждение и в применении экономических санкций одними государствами в отношении других.

Против России санкции были введены США и странами Евросоюза в марте 2014 года из-за позиции страны по украинскому вопросу. Под целью санкций понимался отказ России от взятого внешнеполитического курса. Ограничительные меры в отношении России поддержали: Канада, Япония, Австралия и страны-кандидаты в члены Евросоюза. Часть из них впоследствии отказалась от поддержки антироссийских санкций.

Последние тенденции, происходящие в мировой экономике, указывают на то, что происходит обособление национальных государств и мир становится более многополярным.

Карташева Л. В. (Ростов–на–Дону)
kartasheva@mail.ru

МОДЕЛИ ЦЕПИ ПОСТАВОК УГЛЯ

Управление цепями поставок — это интегральный подход к бизнесу, раскрывающий фундаментальные принципы управления в логистической цепи. Цель управления цепями поставок состоит в минимизации общих логистических издержек при удовлетворении данного фиксированного спроса.

При построении модели для решения конкретных проблем планирования можно исследовать лишь часть общей цепи поставок компании и связанных с ней издержек. Управленческие решения о цепи поставок и спросе также очень тесно связаны с корпоративными финансовыми решениями, особенно при планировании стратегии фирмы. Поэтому компании рассматривают оптимизационные модели для анализа финансовых решений. Данные модели могут быть полностью интегрированы в логистические модели.

Фирма использует складскую форму завоза товара. Поступление товаров от поставщиков производится на основании заключенных договоров поставки. С помощью методов оптимизации решается задача о размещения трех видов угля по трем складам с минимальными издержками и максимальной прибылью. Затем уголь необходимо поставить с трех складов на заводы в пять разных городов в разных требуемых количествах.

Рассчитываются минимальные стоимости затрат на перевозки без разбивки угля на фракции и с разбивкой.

Оказалось, что стоимость перевозок в первом случае — 34638,6 рублей; а во втором — 34647,6 рублей.

Компании, конечно, выгоднее перевозить уголь без разбивки на фракции, но при этом требования заказчиков не выполняются. Незначительная разница (34647,6 – 34638,6=9) убедит компанию, что сделка эта все-таки выгодна.

А. И. Лешукович (Душанбе, Таджикистан)
alena—666@mail.ru

ИНФОРМАЦИОННЫЕ ИНТЕРНЕТ-УСЛУГИ И ИХ ЭВОЛЮЦИЯ

В докладе рассматриваются основные аспекты возникновения и дальнейшее развитие информационных бизнес-процессов, как современный объект интеллектуальной собственности, главными элементами которых являются процессы обработки и передачи информации на коммерческой основе.

На протяжении всей истории развития человеческой цивилизации основным предметом труда являлись объекты материальной сферы, а могущество государства определялось в первую очередь его золотым запасом, богатством природных ресурсов, размерами территории и выгодным месторасположением, численностью населения и т. п. В 1975 г. конгресс ЮНЕСКО определил, что экономический потенциал любой страны наряду с такими традиционными показателями национального богатства и экономики характеризуется еще и информационной вооруженностью, определяемой как способность быстро и качественно обрабатывать информацию, возникающую во всех сферах деятельности общества. Таким образом, наряду с материальными, трудовыми и финансовыми ресурсами возник новый вид - информационные ресурсы, которые стали играть доминирующую роль.

Наблюдается три периода этой эволюции.

1. Появления в Республике Таджикистан первые законы об интеллектуальной собственности (1994 г.). В том числе, первые концепции разработки электронного правительства.

2. Влияние новейших информационно-коммуникационных технологий (ИКТ) на общество, которые определили формирование новых научных направлений и областей во многих сферах человеческой деятельности, что, и создало подходящую среду для появления новых объектов, где можно внедрять ИКТ.

3. Влияние Интернета на все сферы человеческого общества, в том числе и на экономику и появляются новые объекты интеллектуальной собственности.

Проникновение Интернет-технологий в различные сферы человеческой жизни способствует формированию экономических отношений в сфере интернет-технологий и интернет-услуг. Чтобы полноценно понимать все факты об интеллектуальной собственности необходимо изучить все формы ее проявлений, сферы внедрения, в том числе в сфере Интернета.

И. В. Петрова, Н. А. Ращепкина (Чебоксары)
iniveri@yandex.ru, ninara11@mail.ru

О ВЗАИМОСВЯЗИ ФАКТОРОВ ПРИ ФОРМИРОВАНИИ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

При изучении формирования социально-экономической системы во временном и пространственном аспектах на первый план выходят факторы, наполняющие систему содержанием и мотивирующие ее развитие. Рассмотрим это на примере формирования агломерации.

Агломерационные образования в территориальном срезе, так или иначе, могут быть определены для любой страны, имеющей развитую систему расселения. В контексте идеи корректировки пространственного развития современной России необходимо понимание того, как экономическая и социальная сферы взаимодействуют внутри подобной территории.

До недавнего времени популярным лозунгом стратегических документов отдельных городских округов, в том числе позиционирующих себя как часть соответствующей агломерации, были слова «город, в котором хочется жить». Другими словами, стратегической целью становится образ города, привлекательного для жизнедеятельности человека. С одной стороны здесь все достаточно просто - человек, являясь центром генерации и реализации идей организации пространства собственной жизнедеятельности, выступает главным критерием при определении признаков пригодности данной территории для него, уровня соответствия настоящим и будущим ценностям. С другой стороны, не всякая территория (город, село) могут отвечать интересам человека, что подтверждается устойчивой тенденцией роста городского населения, в особенности, крупных городов, которые и выступают опорными точками агломераций. Здесь представляется возможным говорить о том, что уровень развития экономики стимулирует человека к изменению характера социальных потребностей.

Таким образом, можно говорить о том, что современные социальные потребности человека находятся в зависимости от уровня экономического развития территории. А уровень экономического развития территории определяется уровнем социальных потребностей людей, которые готовы положительно ассоциировать себя с конкретной территорией.

В докладе делается попытка по результатам факторного анализа одной экономической задачи [1] подтвердить гипотезу о доминировании социальных проблематик над экономическими в современном постиндустриальном мире.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. О полицентричности пространственной и территориальной структуры региона / *Е. Н. Кадышев, И. В. Петрова, Н. А. Ращепкина, Д. С. Федяева* // Региональная экономика: теория и практика. — 2015. — № 8 (383). — С. 15–26.

М. В. Попов (Ростов-на-Дону)
glonas@list.ru

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ ПРИМЕНЕНИЯ МАРКЕТИНГОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ РЕАЛИЗАЦИИ ВИРТУАЛЬНЫХ ТОВАРОВ В ТАНКОВЫХ СИМУЛЯТОРАХ

Современный этап развития информационных технологий обусловил появление рынка виртуальных товаров, в том числе товаров, используемых виртуальных мирах компьютерных игр. В России и постсоветском пространстве популярны такие онлайновые игры как военно-патриотические симуляторы — World of Tanks, Warthunder, Armored warfare. Так, например, число зарегистрированных пользователей проекта World of Tanks составляет 30 миллионов человек (компания Wargaming - создатель World of Tanks за 2015 год получила прибыль в размере 600 млн. долларов.), а аудитория его основного конкурента Warthunder составляет 10 миллионов человек. В игре пользователь может купить ускоритель, данный товар позволяет получать больше бонусов по результатам игровых сессий. Ускоритель носит форму премиум-аккаунта (премиум-времени) и представляет собой временя, в течение которого игроку предоставлены бонусы (1, 2, 3 и более дней). В данных играх премиум-время можно покупать за специальную валюту, а специальная валюта покупается за реальные деньги — билеты банка России. Пакеты специальной валюты и цены на эти товары представлены в таблице 1.

Таблица № 1 — Пакеты специальной валюты и цены на тарифы премиум-аккаунта в танковых симуляторе Armored Warfare[1].

Armored Warfare			
Цена пакета специальной валюты	Количество специальной валюты в пакете	Цена премиум-тарифа в специальной валюте	Количество дней в премиум-тарифе
100	500	190	1
300	1500	570	3
500	2500	1093	7
1000	5000	2185	30
3000	15000	11875	180
500	25000	20900	365

Из данных таблицы видно, что количество золота в тарифе (пакете) заведомо не совпадает с ценой премиум-аккаунта за специальные денежные единицы (см. колонку 2 и 3). В данном случае создатели игры намеренно стимулируют излишнее потребление такого товара как специальная валюта. Подобные методы являются частью маркетинговых технологий, которые помогают компаниям сформировать следующие потребительские

[1] Сайт создателя Armored Warfare Mail.ru: URL: https://aw.mail.ru/billing/payment/?_1lp=0&_1ld=2046937_0 (дата обращения 07.04.2016). Примечание от автора: В симуляторе WarThunder ситуация с пакетами специальной валюты аналогичная. Сайт создателя WarThunder Gaijin.net: URL: https://store.gaijin.net/catalog.php?category=WarThunderPacks (дата обращения 07.04.2016)

нормы у игроков: у игрока формируется желание купить еще больше специальной валюты для покупки других виртуальных товаров в игре; у игрока формируется желание оставшуюся специальную валюту потратить на другие товары в игре.

Н. В. Чеботарева (Ростов-на-Дону)
nv_chebotareva@mail.ru

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННЫХ ДЕНЕГ НА ПРЕДПРИЯТИИ

Современному обществу сложно представить жизнь без интернета, повсеместное его проникновение невозможно не заметить как в обычной жизни, так и в сфере бизнеса. Многие процессы упрощены именно с помощью интернета: отправка электронных писем, поиск поставщиков и контрагентов — то же произошло и с процессом обращения денег. Существует много компаний, деятельность которых связана с расчетами через интернет. В этом случае более удобным способом ведения денежных расчетов будет использование «электронных денег» и самих «электронных кошельков». В настоящее время уже есть возможность и организациям открыть такой «электронный кошелек». Существует ряд особенностей ведения такого денежного оборота для юридических лиц.

Согласно Федеральному закону № 161-ФЗ «О национальной платежной системе» юридическому лицу необходимо заключить договор с оператором платежной системы и пройти процедуру идентификации. Пополнение «электронного кошелька» или выведение с него денежных средств возможно только путем перечислений с банковского счета. К тому же, клиент не может перевести на счет организации сумму свыше 15 000 рублей. Данные особенности важно учитывать при использование электронных платежных средств, это облегчит как работу самим организациям, так и операторам электронных денег. Сам закон не дает четкого понимания, что такое электронные деньги и не содержит указаний по их учету, но его положения дали основания для появления соответствующих указаний в нормативных актах, исходящих из понимания электронных денег как аналога денежных средств. Соответственно в бухгалтерском учете появились указания, каким образом принимать к учету электронные деньги. Использование организациями электронных денег порождает и специфику исполнения налогового законодательства. Налоговые службы теперь могут накладывать арест не только на счета организации, открытые в банках, но и на электронные. А если существует какая-либо задолженность, инспекторы имеют право изъять необходимую сумму денежных средств, находящихся на электронном кошельке, в качестве уплаты какого-либо долга. В использовании электронных денег есть ряд ограничений, но они не настолько существенны, чтобы отказываться от нового, современного и весьма удобного способа осуществления денежного оборота.

Секция X
Современные проблемы образования

Афанасьева У. В. (Пермь)
Ulya-a@bk.ru

ПОСТРОЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ ЛИНИЙ 2-ГО ПОРЯДКА В ЖИВОЙ ГЕОМЕТРИИ

Изображение линий второго порядка важно, так как они встречаются не только в математике, но и в физике, астрономии и других науках. Так, в физике по гиперболе движутся альфа-частицы в опыте Резерфорда при рассеивании их ядром атома, по параболе — тело в однородном поле силы тяжести, брошенное под углом к горизонту. В астрономии же по эллипсам движутся планеты вокруг Солнца. В технике для устройства разнообразных прожекторов и антенн используются так называемые «параболические зеркала». На евклидовой модели плоскости Минковского (Галилея) гипербола (парабола) играют роль окружности (цикла).

Однако изображение линий второго порядка часто вызывают определённые сложности не только у простых обывателей, но и у студентов технических и математических специальностей. В этом случае на помощь приходят ИКТ. Они по новому позволяют подойти к изображению этих линий. На сегодняшний день спектр этих программ неисчерпаем: «Cosinor Ellipse 2006», «Компас-3D», «Живая геометрия» и т.д. В педагогических целях наиболее приемлемо использовать программу «Живая геометрия».

Geometer's SketchPad (Живая геометрия) — это набор инструментов для построения чертежей и их исследования. Эта программа дает возможность «открывать» и проверять геометрические факты. Если рассматривать евклидовы свойства этих линий, то их применение позволяет наглядно иллюстрировать различные определения эллипса, параболы и гиперболы, исследовать их свойства. При этом подходе эллипс можно задавать фокусами и отрезком, равным сумме расстояний от фокусов до точки эллипса, окружностью и коэффициентом сжатия и т. д.

Эти построения можно в дальнейшем использовать при изображении тел вращения. В проективной геометрии кривой 2-го порядка называется геометрическое место точек пересечения соответственных прямых двух проективных пучков (центры которых различны) [1, с. 148]. Теорема Паскаля [1, с. 155], теорема Брианшона [1, с. 156] , и их предельные случаи для пятиугольника, четырёхугольника, треугольника, вписанных в кривую 2-го порядка, и двойственных фигур описанных около кривой 2-го класса, позволяют построить изображение линии, заданных пятью точками, четырьмя точками и касательной в одной из них и т. д. [1, с. 157]. При построение линий второго порядка во всех случаях можно использовать две команды Живой геометрии: «Геометрическое место точек» и «След точки». Первая из них позволяет получить изображение линии, которое удобно использовать как основу для дальнейшей работы с изображением.

Вторую команду удобнее использовать в сочетании с командой «Анимация» для иллюстрации действия того или иного определения.

Вывод: таким образом, программа «Живая геометрия» является незаменимым помощником в деятельности учителя математики. Так как функционал данной программы позволяет работать как с евклидовыми, так и проективными свойствами линий второго порядка, и использовать полученные результаты в дальнейших построениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Комиссарук. А. М.* Проективная геометрия в задачах: Учеб. пособие для мат. фак. пед. ин-тов. / Комиссарук А. М. — Мн.: Вышэйш. Школа, 1971 — 320 с.: ил.

И. А. Байгушева (Астрахань)
iabai@mail.ru

О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КОМПЕТЕНТНОСТИ ВЫПУСКНИКОВ НЕПРОФИЛЬНЫХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ ВУЗОВ

Реформа российской системы высшего образования выстраивается на принципах компетентностного и деятельностного подходов. При этом в качестве образовательных результатов рассматриваются компетенции и профессиональные функции выпускников, характеризующие квалификационную характеристику специалиста — профессиональную компетентность. Для широкого спектра специальностей важной составляющей профессиональной компетентности является математическая компетентность как результат математической подготовки в вузе.

Цели и результаты обучения математике в вузе зависят, прежде всего, от характера будущей профессиональной деятельности. Выпускникам непрофильных специальностей математика необходима в качестве инструмента решения профессиональных задач. Поэтому содержание термина математическая компетентность определяется профилем специальности. Исследования, посвященные формированию математической компетентности в вузе, предлагают разные трактовки данного понятия. В то время как вопрос о цели обучения сегодня особенно актуален, поскольку ФГОС ВО практически не регламентируют содержание математической подготовки.

Под математической компетентностью специалиста (МКС) мы понимаем способность и готовность решать методами математики типовые профессиональные задачи. Типовая профессиональная задача (ТПЗ) — это цель, которую специалист многократно ставит перед собой в процессе своей профессиональной деятельности. Типовых профессиональных задач у каждого специалиста много, но всё же их конечное число. Если выделить те их них, решение которых требует использования математических знаний, то можно разработать методы решения ТПЗ в обобщенном виде, определить объем и содержание математической подготовки.

На основе предложенного профессионально-деятельностного подхода [1] определен путь формирования МКС: 1) выделение ТПЗ специалиста, для решения которых необходимы математические знания; 2) разработка обобщенных методов решения ТПЗ; 3) отбор математических знаний и методов, необходимых для реализации обобщенных методов решения ТПЗ; 4) проектирование и реализация математической подготовки как процесса формирования обобщенных методов решения ТПЗ; 5) разработка и реализация мониторинга сформированности МКС.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Байгушева И. А.* Система формирования обобщенных методов решения профессиональных задач при математической подготовке экономистов в высшей школе: монография. — Астрахань: АГУ, 2014. — 144 с.

Г. Ф. Беляева, Е. О. Ермолаева (Москва)
eoermolaeva@yandex.ru

ГЕНДЕРНЫЙ ФАКТОР НА ПОРОГЕ 4-й ИНДУСТРИАЛЬНОЙ РЕВОЛЮЦИИ

Всемирный экономический форум (ВЭФ) в течение последних 10 лет ежегодно публикует доклад, где приводится рейтинг стран мира как по реальному равенству прав и возможностей мужчин и женщин, так и разрыву между ними в доступе к ресурсам, независимо от объема этих ресурсов. Рейтинг выстраивается в соответствии с индексом гендерного неравенства стран, который оценивает гендерный дисбаланс в сфере экономики, в образовании, здравоохранении и политике, и может изменяться от 1 (равноправие мужчин и женщин) до 0 (полное неравенство). В рейтинге за 2015 г. первые пять мест занимают Северные страны Европы. Россия обычно занимает невысокое место, например, 49-е из 115 в 2006 г. и 75-е из 145 в 2015 г. (Global Gender Gap Report-2015). В сферах образования и здравоохранения Россия фактически достигла гендерного паритета, и поэтому значение интегрального индекса, изменявшееся в этот период от 0.68 до 0.7, определяется в основном участием женщин в экономике, управлении и политике. Одна из особенностей женской занятости связана с гендерной асимметрией при подготовке специалистов. Так среди всех специалистов высшего уровня квалификации, занятых в экономике РФ, женщины составляют 61%; при этом их 80% в области образования, 63% в области биологических, сельскохозяйственных наук и здравоохранения и только 29% в области естественных и технических наук. Доля женщин среди руководителей органов власти и управления всех уровней, включая руководителей организаций, составляет 38%, мужчин — 62% (Россия в цифрах–2015).

Женщины тяготеют к гуманитарному образованию, не столь популярному для руководящих кадров в РФ. Гендерная асимметрия при подготовке специалистов наблюдается и среди женщин во всех странах объединенной Европы. Более чем в половине стран женщины составляют менее 45% среди ученых и инженеров, они «недопредставлены» в области инженерии и технологии и даже естественных науках (She Figures-2015). На ВЭФ-2016 обсуждалась 4-я индустриальная революция, на пороге которой стоит наш мир и которую отличает как скорость инновационного прогресса, так и влияние на повседневную жизнь и взаимоотношения людей. Она предъявляет высокие требования к образованию и квалификации мужчин и женщин, требует знаний и навыков для STEM-индустрии (науки, технологий, инжиниринга, математики). Главными факторами грядущей технологической эпохи станут талант, образование и высокая квалификация. Женщины должны сыграть на опережение и встретить новую индустриальную эру во всеоружии, преодолев разрыв в сфере STEM, иначе, идя в будущее, они могут остаться на прежних позициях.

Е. Н. Беспалова, Ю. А. Алейникова (Ростов-на-Дону)
vberkovich@mail.ru, aleynikova_yulia@mail.ru

К ПРОБЛЕМЕ КОРРЕКЦИОННО-РАЗВИВАЮЩЕГО ОБУЧЕНИЯ В ДОШКОЛЬНОМ ОБРАЗОВАНИИ

Настоящий доклад посвящен описанию специальных методов обучения детей с ограниченными возможностями здоровья в системе взаимодействия «учитель-логопед и учитель-дефектолог (тифлопедагог)». Важность рассматриваемой проблемы на современном этапе отмечена в федеральном законе об образовании. Дети, имеющие одновременно дефект зрения и речи (сложный дефект), испытывают трудности не только в построении грамотного связного речевого высказывания, но и в формировании пространственных представлений. В этом случае работа «на слух», особенно при овладении фонетической, словообразовательной, морфологической системой языка не всегда дает быстрый, устойчивый результат. При этом требуется опора также и на зрительные, кинестетические ощущения. В игровой форме учитель-логопед осуществляет комплексную коррекцию всех компонентов речи, используя, в частности, технологию «чистоговорки» — зарифмованной фразы, в которой повторяется какой-либо звук [1]. Получая в чистоговорке готовую синтаксическую конструкцию, логопед формирует у детей логически связное речевое изложение. Тифлопедагог, в свою очередь, проводит работу по развитию зрительного восприятия и ориентировки в микропространстве, что позволяет ребенку видеть перспективу по признаку удаленности и развивает способность наблюдать за объектом, позволяя более полно выразить свое отношение к окружающему их миру взрослых.

Одновременное взаимодействие специалистов различного профиля позволяет существенно повысить эффективность результата коррекционной работы с детьми, имеющими сложный дефект. В докладе приведены видеоматериалы совместной работы специалистов.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Темникова В. Э.* Логопедические игры с чистоговорками. Пособие для работы с детьми 5-6 лет с речевыми нарушениями. М. 2008 г. 44 с.

2. *Григорьева Л. П., Бернадская М. Э.* и др. Развитие восприятия у ребенка «Школа-Пресс» М. 2001. 11 с.

О. А. Голоснов, И. В. Куприянов (Ростов-на-Дону)
golosnoff@gmail.com

К ВОПРОСУ ОБ ОСНОВНЫХ ПРОБЛЕМАХ РОССИЙСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Анализу состояния современной российской системы образования к настоящему моменту посвящено большое количество исследований, выявляющих целый ряд проблемных вопросов её функционирования и развития [1;2]:

– низкий уровень финансирования, дальнейшее снижение социального статуса учителя (преподавателя);

– проблемы преемственности средней и высшей школы;

– низкая практическая направленность образования: существование разрыва между теоретической и практической составляющими обучения;

– несоответствие структуры реализуемых образовательных программ актуальным рыночным требованиям;

– превращение российских ВУЗов, по сути, в коммерческие организации.

Вместе с тем, последовательной реализации комплекса мер по исправлению существующего положения не просматривается. Так, например, согласно Закону 273-ФЗ «Об образовании» новый ФГОС для средней школы предполагает, по сути, отсутствие закрепленного объема знаний, обязательного для усвоения. Переход ВУЗов на бакалавриат сокращает образовательный процесс на 1 год, что не может не сказаться на подготовке будущего профессионала в своей области.

На наш взгляд, единственным объяснением подобной ситуации выступает отсутствие не декларативной, а реальной заинтересованности государства в осуществлении инвестиций в человеческий капитал, без чего невозможно развитие отвечающей требованиям времени «экономики знаний». Становится понятным, что сохранение модели развития, основанной на так называемой «экономике трубы», полностью это исключает.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Бурко Р. А., Тимофеева С. В.* Современные проблемы науки и образования в России // Молодой ученый. 2013. № 11. С. 745–747.

2. *Розин В. М.* Прогнозирование и методологическое осмысление российского образования и социальности // Педагогика и просвещение. 2012. № 3. С. 44–56.

Голубкина К. В., Репьева П. В. (Новороссийск)

СОЗДАНИЕ ЮРИДИЧЕСКОЙ КЛИНИКИ КАК ОДИН ИЗ ЭФФЕКТИВНЫХ СПОСОБОВ РЕАЛИЗАЦИИ МЕР ГОСУДАРСТВЕННОЙ ПОЛИТИКИ В ОБЛАСТИ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ СИСТЕМЫ ЮРИДИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Неотъемлемой составной частью правового регулирования в России выступает юридическое образование. Так, совершенствование системы юридического образования и подготовки квалифицированных юристов и педагогических кадров в области права выступает в качестве одного из основных направлений государственной политики в сфере развития правовой грамотности и правосознания граждан.

За последние годы мы можем наблюдать важнейшие изменения во всех составляющих правовой системы общества, что обуславливает необходимость реформации и современного юридического образования. Возникает остра необходимость внедрения инновационных методов обучения. Особо важную роль здесь призвано сыграть клиническое образование.

В данной связи юридическая клиника может выступать одним из эффективных методов инновационного обучения будущего юриста-профессионала, где он может непосредственно на практике реализовывать свои приобретенные теоретические знания. Также важное место юридической клиники в области совершенствования юридического образования обусловлено тем, что она выступает непосредственным способом реализации мероприятий, направленных на реализацию норм ФЗ «О бесплатной юридической помощи в РФ».

В настоящем докладе обосновывается не только эффективность деятельности юридической клиники на базе Института морского транспортного менеджмента, экономики и права ФГБОУ ВО «ГМУ им. адм. Ф.Ф. Ушакова», но и отражаются основные проблемы правового регулирования деятельности в области создания и функционирования юридических клиник, а также проблемы, связанные с возможностью сотрудничества юридических клиник с правоохранительными органами и другими организациями, стоящих на страже защиты прав и свобод человека и гражданина в РФ.

И. С. Гудович (Воронеж)
goudovitch@mail.ru

О КУРСЕ «СИСТЕМЫ С УСЛОВНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ В БИОСФЕРЕ, СОЦИУМЕ И ЭКОНОМИКЕ»

Учебный курс «Системы с условной информацией в биосфере, социуме и экономике» предназначен для студентов второго года обучения направления 01.03.04. Прикладная математика (магистратура). Его целью является освоение современных подходов к исследованию развивающихся систем и приобретение навыков анализа взаимодействия систем с условной информацией. Рассматриваемые в курсе идеи и методы, развитые в пионерских работах Д. С. Чернавского и Н. М. Чернавской, наиболее полно изложенные в [1], позволяют на основе современных достижений физики, биологии, математического моделирования и теории информации значительно продвинуться в анализе таких проблем как возникновение информации и эволюция ее ценности, происхождение жизни и мышления, биологическая и культурная эволюция человечества, взаимодействие национальных валют и естественных языков, а также моделировать такие сложные феномены как интуитивное познание и творчество. Следует отметить, что некоторые идеи и результаты, изложенные в [1], имеют характер дискуссионных, как, впрочем, и другие, обсуждаемые в настоящее время решения проблемы возникновения жизни и биологической информации в современной науке. Центральными вопросами курса являются обсуждение проблемы единого генетического кода в биосфере, биологической асимметрии и моделирования процесса интуитивного мышления. Изучаемые модели и методы позволяют, кроме того, исследовать феномены взаимодействия валют и информационной сущности денег, закономерности развития языковых конкурирующих сред и идеологий, а также в более общем случае — взаимодействие любых развивающихся систем с условной информацией в предположении, что их информации находятся в антагонистическом отношении друг к другу.

Лекционный курс по обсуждаемой дисциплине предполагает обращение к теории распознавания образов и нейрокомпьютингу, а лабораторные работы включают в себя, в частности, задания по программной реализации базовой модели и решению ряда задач, связанных с игрой Жизнь (Эволюция). Автору представленного курса хотелось бы также дать слушателям почувствовать веяние живого научного созидания, характерного для содержания курса, и передать необыкновенное обаяние жизнелюбивого творчества Д. С. Чернавского и Н. М. Чернавской, воплощенного в их работах.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Чернавский Д. С.* Синергетика и информация. Динамическая теория информации. — М.: Едиториал УРСС, 2004. — 288 стр.

Л. А. Демехина, Н. В. Демехина (Ростов-на-Дону)
nelly3nelly@gmail.com

МЕТОДИКА ИЗЛОЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ В БАКАЛАВРИАТЕ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Современное состояние педагогического образования показывает, что интерес студентов к изучению теоретической физики упал. Связано это как с недостаточной подготовкой по физике и математике, так и с неочевидностью связи между изучением теоретической физики и будущей работой учителя.

При изложении курса теоретической физики необходимо продемонстрировать построение теорий, удовлетворяющих как требованиям научности, так и общим методологическим принципам физических теорий. Это позволяет лучше понять структуру теоретической физики, систематизировать знание с единых позиций и усилить мировоззренческую направленность обучения. В частности, изложение электродинамики, основанное на этом методе, приводит к построению физической теории как системы математически выводимых следствий из небольшой группы должным образом обобщенных и проверенных столетиями опытных фактов.

Для вывода уравнений электромагнитного поля используется вариационный принцип построения. Как правило, студенты уже встречались с ним при изучении классической механики. Однако, в электродинамике есть трудность математического характера. Так как уравнения поля должны иметь релятивистски инвариантную форму, то их надо получить в 4-х мерной форме в виде соотношения между 4-мя векторами и 4-мя тензорами. Поэтому потребуется время для изложения сведений из векторного и тензорного анализа. В такой форме уравнения приобретают простой и наглядный характер.

Используя при конструировании уравнений принципа простоты, законов сохранения электрического заряда, импульса, энергии, момента импульса для электродинамической системы, студенты увидели, что электромагнитное поле — это физическая реальность, форма существования материи, обладающая всеми ее атрибутами, способная взаимодействовать с другой формой существования материи — с веществом. На наш взгляд, такой подход к изучению теоретической физики повышает фундаментальный характер физического образования, способствует развитию естественно-научного мировоззрения, формированию представлений о современной физической картине мира.

С. А. Докучаев, Г. С. Костецкая (Ростов-на-Дону)
Galina.kostezkaya@gmail.com

О ФОРМИРОВАНИИ ОБЩЕПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ КОМПЕТЕНЦИИ БАКАЛАВРОВ В ОБЛАСТИ ИНФОКОММУНИКАЦИЙ ПРИ ИЗУЧЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ дИСЦИПЛИН (НА ПРИМЕРЕ КЕЙС-МЕТОДА)

Утвержденный в марте 2015 г. федеральный государственный образовательный стандарт высшего образования по направлению подготовки Инфокоммуникационные технологии и системы связи (уровень бакалавриата), предъявляет принципиально новые требования к подготовке бакалавров в области инфокоммуникаций [1]. Эти требования предусматривают формирование у обучающихся общепрофессиональных компетенций, которые служат своеобразным трамплином для эффективной подготовки будущего бакалавра к решению стандартных задач профессиональной деятельности. Очевидно, что формирование общепрофессиональных компетенций бакалавра по направлению «ИТСС» невозможно без изучения базовых математических дисциплин: «Математический анализ» и «Теория вероятностей и математическая статистика». На лекционных и практических занятиях по данным дисциплинам от преподавателя требуется не только привить студентам знания основных понятий и методов математического анализа, теории вероятностей и математической статистики, навыки решения типовых и нестандартных задач. На первый план выходит формирование общепрофессиональной компетенции ОПК-2, т. е. способности решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры с применением инфокоммуникационных технологий. Нам представляется, что одним из наиболее эффективных средств для достижения этой цели является кейс-метод.

Суть кейс–метода состоит в том, что усвоение знаний и формирование умений есть результат активной самостоятельной деятельности обучающихся по разрешению противоречий, в результате чего и происходит творческое овладение профессиональными знаниями, навыками, умениями и развитие мыслительных способностей. Если метод кейсов применяется в учебном процессе многократно, то у студентов вырабатываются навыки решения практических задач, анализа жизненных ситуаций, определения задачи, которая требует решения, оценивать полученный результат, давать оценку своей деятельности в процессе решения [2].

Таким образом, практическая составляющая, заключенная в решении кейсов, позволяет формировать общепрофессиональную компетентность будущего бакалавра в области инфокоммуникаций. Кейсы позволяют эффективно и грамотно, с опорой на полученные знания, решать стандартные задачи профессиональной деятельности, формируют у студентов опыт использования знаний, умений и навыков в профессиональной деятельности, способствуют их будущей профессиональной состоятельности.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Федеральный государственный образовательный стандарт Высшего образования по направлению подготовки 11.03.02 Инфокоммуникационные технологии и системы связи (уровень бакалавриата) [Электронный ресурс]. / URL: http://fgosvo.ru/fgosvo/92/91/4/11 (дата обращения 27.03.2016)

2. *Седова Н. С.* Использование метода кейсов в процессе развития стохастической компетентности будущего учителя математики. / Письма в Эмиссия. Оффлайн: электронное научное издание 2011. № 9 (сентябрь). ART 1645. URL: http://emissia.org/offline/2011/1645.htm (дата обращения 27.03.2016)

И. Б. Доценко (Таганрог), М. И. Коваленко (Ростов-на-Дону), Е. В. Попова (Таганрог)
ibdocenko@sfedu.ru, mikovalenko@sfedu.ru, elenapopova25@yandex.ru

ИНФОРМАЦИОННО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ СРЕДЫ И СОВРЕМЕННАЯ ДИДАКТИКА

В докладе мы хотели бы обсудить лишь один аспект дидактики электронного обучения — необходимость, перехода от дидактического треугольника к дидактическому тетраэдру. Речь идёт о трансформации классической дидактической схемы «учитель–ученик–содержание» в более сложную схему, которая позволяет учесть контекст образовательной деятельности [1], как следствие объективности существования информационно-образовательной среды (ИОС). А также, преобразование плоского дидактического треугольника в пространственную фигуру - дидактический тетраэдр «как признание существенной роли технологий в опосредовании отношений между содержанием, студентом и учителем» [2].

В развитие упомянутой точки зрения нами выдвинута гипотеза. В трёх вершинах дидактического тетраэдра будут находиться субъекты образовательного процесса: конкретный обучающийся, обучающий, коллектив обучающихся; а в четвёртой — средства обучения. Рёбра, связывающие вершины тетраэдра, представляют собой педагогические технологии. Грани тетраэдра задают четыре основных стиля организации образовательного процесса: индивидуальное обучение, групповое обучение, индивидуальная и групповая самостоятельная работа обучающихся, метапредметная образовательная деятельность.

Предложенная модель может быть актуальной в условиях развития образовательных сетей и организации образовательного процесса в информационно-образовательных средах. В этом случае появляются противоречия между индивидульным характером образовательной практики и коллективным характером создания ИОС, в которой будет эта практика реализована. Сгладить противоречия можно за счёт планирования архитектуры ИОС с учётом возможного спектра индивидуальных образовательных практик, а для этого требуется адекватное и наглядное описание психолого-педагогических теорий, лежащих в её основе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Tchoshanov M.* «Engineering of Learning: Conceptualizing e-Didactics». M.: UNESCO Institute for Information Technologies in Education, 2013., — p. 192.

2. *Ruthven K.* «The didactical tetrahedron as a heuristic for analyzing the incorporation of digital technologies into classroom practice in support of investigative approaches to teaching mathematics». ZDM — The International Journal of Mathematics Education, 2012, 44(5), pp. 627–640.

Г. А. Зеленков, Л. А. Иванова, Е. С. Клименко (Новороссийск)
mathshell@mail.ru

КОМПЬЮТЕРНЫЕ МОДЕЛИ КАК ИНСТРУМЕНТ РЕШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В ШКОЛЕ

Очевидно, не подлежит сомнению необходимость разработки некоторых прикладных педагогических вопросов общей теории моделирования, а также психолого-педагогических проблем, разрешаемых при помощи моделирования в процессе обучения, в частности, при формировании понятий, интерпретации знаковых математических моделей и решении учебных текстовых задач.

Настоящая работа посвящена компьютерному моделированию формул сокращенного умножения, предлагаемых в школьном курсе математики в младших классах. Одним из главных направлений является формирование элементарных геометрических навыков, развитие пространственных представлений, становление логического и образного мышления, аналитических и созидательных компонентов творческого мышления. В качестве главной цели является развитие пространственного мышления, как разновидности образного мышления, оперирующего формой, величиной, пространственным положением и пространственными отношениями объектов.

Были созданы компьютерные модели бесформульных доказательств формул вида $(a+b)^2$, $(a+b+c)^2$, $(a+b)^3$, $(a+b+c)^3$ и т. д.

Рассматривается более широкий круг проблем, связанных с ранним развитием способностей (математических, в частности) младших школьников, позволяющих им легче, осознанно осваивать абстрактные аналитические и геометрические структуры (объекты, доказательства, формулы и т. д.). Приведены примеры геометрических доказательств формул $(a+b)^2$ и $(a+b+c)^3$. Метод разрезаний позволяет моделировать практически любые формулы сокращенного умножения. Более того, удается применить этот подход для более сложных формул такого типа, как бином Ньютона $(a+b)^n$. Все формулы сокращенного умножения можно записать одной общей формулой $(a_1+a_2+...+a_k)^n$, где $k=2,3,...$, $n=2,3,...$. Моделирование было проведено на плоскости (2D) и в пространстве (3D) в среде программы «КОМПАС».

Н. В. Зеликин (Москва)
n-zl@math.msu.su

МЕЖДИСЦИПЛИНАРНАЯ ИНТЕГРАЦИЯ И ИНДИВИДУАЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА СПЕЦИАЛИСТОВ

Взаимодействие ВУЗов с бизнесом становится темой широкого обсуждения в России и за рубежом. Есть примеры эффективной междисциплинарной интеграции, особенно в области высоких технологий. При крупных ВУЗах создаются инновационные центры (ИЦ «Сколково»), технологические долины (проект НТД МГУ «Воробьевы горы») и др. Эти формы поддержки творчества студентов со стороны государства и бизнеса приносят свои плоды. Однако, этим не исчерпываются возможности взаимодействия всех заинтересованных сторон образовательного процесса. Недостаточно использован резерв отбора и поддержки талантливых студентов, необходимых не «бизнесу» вообще, а конкретным работодателям. Адресная поддержка и подготовка будущего выпускника важна для учета специфики деятельности конкретного работодателя, который своевременно может помочь будущему выпускнику дополнить свой образовательный портфель, пройдя дополнительное обучение в своем ВУЗе, в высокопрофессиональной образовательной среде. Заметим, что распределение выпускников, широко развитое в прошлом, при плановой подготовке кадров, в настоящее время не является эффективным средством интеграции.

Работодатели не ведут поиска талантливых старшекурсников во время их учебы, и встречаются с ними лишь по окончании ВУЗа, упуская возможность персональной доводки специалиста по всему набору требуемых квалификаций. В свою очередь, и ВУЗы не всегда помогают предприятиям и учреждениям в расширении предвыпускной работы со студентами. Ежегодно в ВУЗах проводятся отдельные мероприятия («Дни карьеры»), а компании, в своих офисах, проводят тесты и конкурсы «бизнес-кейсов». Однако, следует различать простой отбор и углубленную подготовку. В интересах обучающегося к формированию его целевой квалификации должен быть допущен потенциальный работодатель, и это право может быть закреплено в договоре на оказание образовательных услуг. Инициативный выбор студентом дополнительных программ должен стать нормой. Хорошим примером является система межфакультетских курсов МГУ, с 2013 года вовлекающая каждый семестр более 25 тысяч студентов, и способствующая профориентации и подготовке к будущей профессии.

Совместные усилия по широкому фронту инноваций, при активном взаимодействии бизнеса и высшей школы, помогут заложить фундамент несырьевой экономики, которая кардинально улучшит ситуацию в обществе, сможет вернуть высокотехнологичному производству лучшие молодые кадры.

О. И. Кандоба, С. Г. Синцова (Екатеринбург)
okandoba@gmail.com

СТРАТЕГИИ ВОСПРИЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕКСТОВ СТУДЕНТАМИ ВУЗОВ

Формирование умений работы с текстом, и с информацией вообще, является одной из основных задач современного образования. Актуальной является проблема изучения механизмов восприятия для развития приемов самостоятельной работы с текстом (учебник, пособие, лекция, доклад и т. д.) Математические тексты отличаются высоким уровнем абстракции, использованием специальной символики и элементов логического аппарата. Информация часто подается в виде рисунков, формул, таблиц и схем, что затрудняет восприятие и создает сложности в изучении математических дисциплин.

Когнитивная работа с математическим текстом, как и любая другая комплексная работа с информацией задействует определенный набор стратегий. Стратегии в данном случае означают индивидуальные способы обработки информации, способы приобретения, сохранения и использования знаний для достижения определенных целей.

При работе с математическими текстами были выделены следующие стратегии.

(1) Стратегия определения главного. Умение выделить в тексте основную идею, нахождение ключевых слов и понятий, умение скомпановать информацию в виде тезиса.

(2) Стратегия дробления на части. Деление текста на более мелкие смысловые и логические блоки для удобства восприятия и переработки изучаемого материала.

(3) Стратегия обобщения и детализации. Умение перейти от общего к частному и наоборот.

(4) Стратегия структурирования. Представление всей структуры в целом и отдельно каждой ее части, установление связей между выделенными компонентами структуры.

(5) Стратегия поиска аналогии. Упрощение восприятия за счет ранее полученных знаний и за счет уже знакомых понятий.

Набор стратегий является открытым, новые типы и формы коммуникации могут потребовать разработки новых стратегий. Некоторые из них осваиваются в процессе обучения, другие появляются по мере необходимости. Стратегии нуждаются в изучении и осознанном применении для создания необходимых навыков в ходе развития познавательной деятельности. Использование определенных стратегий в образовательном процессе позволяет сделать обучение управляемым, а значит более эффективным.

Ланцева В. Ю. (Новороссийск)
Lantseva.v@yandex.ru

ВНЕДРЕНИЕ В УЧЕБНЫЙ ПРОЦЕСС СОВРЕМЕННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Различные этапы развития общества характеризуются преобразованием требований социума как к личности в целом, так и как к работнику, что в свою очередь требует усовершенствования технологий обучения. Внедрение современных образовательных технологий не должно полностью вытеснить традиционные технологии обучения, а применяться с последними в комплексе.

В составе образовательной технологии можно выделить ряд основных элементов: теоретическое обоснование, цели и ожидаемые результаты обучения, содержательная часть, средства проверки текущего образовательного уровня обучающихся, комплекс методов обучения. Различают три основные модели обучения: пассивная, активная, интерактивная.

Интерактивная модель обучения предполагает вовлечение в процесс познания почти всех обучающихся, их взаимодействие с педагогом, друг с другом, учебной средой. Источником познания служит уже не заученный материал, а личный опыт обучающегося. Педагог должен способствовать сотрудничеству и активности обучающихся, создавая условия для преодоления появляющихся препятствий и развития не только интеллектуальной, но и эмоциональной, мотивационной, коммуникативной сфер.

Внедрение в образовательный процесс современных образовательных технологий и программ нового поколения, происходящее в настоящее время, сопряжено с рядом проблем. Если внедрение программ нового поколения активно реализуется в вузах, то использование современных образовательных технологий преподавателями пока имеет фрагментарный характер. Необходимо повышение квалификации профессорско-преподавательского состава в данной области, а также некоторая трансформация его мышления в сфере построения образовательного процесса. Однако усовершенствование технологий обучения предполагает не полную замену традиционных образовательных технологий интерактивными, а их симбиоз.

В. Л. Литвинов (Самара)
vladlitvinov@rambler.ru

ПРИКЛАДНОЙ ПОДХОД К ПРЕПОДАВАНИЮ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ СТУДЕНТАМ ИНЖЕНЕРНО-ТЕХНИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ ВТУЗОВ

Чтобы подготовить высококвалифицированных специалистов для производства и науки, нужно обеспечить надлежащий уровень математической подготовки молодого поколения.

Высшая математика имеет непосредственную связь со многими предметами, изучаемыми в вузе, начиная с младших курсов, и заканчивая старшими курсами, а также дипломным проектированием. Этим определяется место математики в системе высшего образования. Смежные науки используют различный объем математических знаний и ставят новые задачи в изучении самой математики.

При традиционном ведении высшей математики на первом курсе высших учебных заведений именно математика становилась главной причиной отсева учащихся. Только изменив способ преподавания можно изменить отношение к предмету. Поэтому перед преподавателями математики встает одна из основных задач: повышение интереса учащихся к математике. Высшая математика должна превратиться из сухого и трудного предмета в комплекс ясных и естественных представлений, открывающих прямой путь к изучению физики, химии, инженерно-технических и экономических дисциплин под девизом «доступное изложение».

В технических вузах математика занимает двойственное положение: с одной стороны, это — особая общеобразовательная дисциплина, с другой стороны, для большинства специальностей технических вузов математика не является профилирующим предметом. Студенты, особенно на младших курсах, воспринимают ее как некую абстрактную дисциплину, которая не влияет на профессиональный уровень будущего инженера. Очевидна необходимость определенной интеграции курса математики с циклом профессиональных дисциплин, особенно когда математические методы все шире применяются в инженерно-технической деятельности.

Принцип прикладной направленности предполагает уже на первом курсе погружение студента в контекст будущей профессиональной деятельности, включение в содержание обучения профессионально значимых знаний, показывающих связь математических понятий, теорем, методов с его будущей инженерной работой. Основной задачей математического образования инженера становится формирование у будущих специалистов определенных знаний, умений и навыков, а так же способности их применения в будущей профессиональной деятельности.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д.* Элементы прикладной математики. М.: Наука, 1967.

М. М. Махкамов (Душанбе, Таджикистан)
mahkamov-m51@mail.ru

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ СМЕШАННЫХ ЧИСЕЛ

В школьных учебниках математики для 6 класса приводятся много примеров и задач на действия со смешанными числами. Однако редко встречаются типовые решения и указания по использованию таких чисел при изучении линейных, квадратных, рациональных, иррациональных уравнений, уравнений высшего порядка и соответствующих систем уравнений.

Поэтому считаем, что ознакомление с решениями подобных задач следует начинать на факультативных занятиях и кружках юных математиков средних общеобразовательных школ.

В докладе приводятся некоторые методы практического применения смешанных чисел при решении различного рода уравнений и их соответствующих систем.

В смешанных выражениях целая часть, числитель или знаменатель может содержать неизвестное. Например,

$$x\frac{3}{4},\ \ x\frac{5}{x+7},\ \ x\frac{3-x^2}{x},\ldots.$$

В дальнейшем смешанные числа мы будем обозначать символами $x\frac{b}{a}$ и $-x\frac{b}{a}$, где x — целое неизвестное число, а символы $x\frac{b}{a}$ и $-x\frac{b}{a}$ соответственно равны:

$$x\frac{b}{a}=\frac{ax+b}{a},\ \ -x\frac{b}{a}=\frac{-ax+b}{a}.$$

Пример 1. Решить уравнение

$$(x\frac{1}{2})^2+x\frac{1}{4}-\frac{7}{2}=0.$$

Решение. Имеем

$$(x+\frac{1}{2})^2+x+\frac{1}{4}-\frac{7}{2}=0\ \ \Leftrightarrow\ \ x^2+2x-3=0.$$

Отсюда $x_1=1,\ \ x_2=-3$.

Таким образом, заключаем, что включение уравнений и систем уравнений, содержащих смешанные выражения, в школьные учебники и задачники по математике способствует реализации внутрипредметным связям арифметики и алгебры.

A. A. Melkumyan, A. V. Tsybulnikov (Moscow)
amelkumyan6@gmail.com

WOMEN PARTICIPATION AND GENDER DISPARITIES IN ENGINEERING EDUCATION AND ENGINEERING INDUSTRY

Despite the fact that the overall employment status of women has increased all over the world and more and more women get higher education, women are still under-represented in the engineering professions. An engineer is a male-dominated profession, but not everywhere and always: in China 40% of engineers are women, in the former USSR women accounted for 58% of engineering workforce. The growing worldwide shortage of qualified engineering personnel requires attracting more female students to technical universities and training more women engineers. Engineering education lags severely behind the other sciences in terms of share of women in the total number of university students. According to the data of the National Center for Science and Engineering Statistics in USA women accounted 56.5% of all university students, and only 18,6% of students on programs of higher engineering education. In Russia in 2014 this gap was smaller: women accounted 54.0% of all university undergraduates, and 29.6% of undergraduates in higher technical and engineering education. Under-representation of women in undergraduate engineering programs may be caused by gender inequality in students' admission and retention. The specialized research highlights that in USA the dropout rate for girls and boys is approximately equal, in Russia the dropout rate is significantly lower for females than for males. Consequently gender disparities in engineering education are largely driven by inequality in admission of female and male students. The attraction of women to engineering career includes a motivation of women and a full support to those who have chosen the profession. A main goal of a gender approach in higher technical education is the deconstruction of gender restrictions in the development of individuals to create conditions for maximum self-realization of students. The process of professional self-determination of students is carried out in the existing gender predetermination. Gender differences occur from different professional orientations and different systems of values among female and male students. Changing of gender stereotypes to attract women in higher technical education is possible with a competent professional orientation at all levels: from school to media. Given the fact that engineering professions are becoming less popular in Russia and world-wide, increasing the participation of girls in the competitions for technical universities allows to overcome the shortage of qualified engineering professionals in the fields of high-tech economy.

Н. И. Мерлина (Чебоксары)
merlina@cbx.ru

О ФОЛЬКЛОРНЫХ И КРАЕВЕДЧЕСКИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ НАРОДОВ РОССИИ

Математическое образование является обязательной и неотъемлемой частью общего образования. В настоящее время в программу изучения математики в школах широко внедряется национально-региональный компонент в направлениях: а) личностного развития: формирование представлений о математике как части общечеловеческой культуры; б) в метапредметном направлении: развитие представлений о математике как форме описания и методе познания действительности.

По результатам освоения основных образовательных программ бакалавриата, выпускник вуза должен обладать следующими общекультурными и профессиональными компетенциями, в частности такими как: готовностью к толерантному восприятию социальных и культурных различий, уважительному и бережному отношению к историческому наследию и культурным традициям народа; способностью к осознанию российской идентичности в поликультурном социуме, понимать значение культуры как формы человеческого существования и руководствоваться в своей деятельности базовыми культурными ценностями, осознанно принимающего традиционные национальные и современные принципы толерантности, диалога и сотрудничества. Содержание профессионального образования должно быть нацелено и на использование возможностей региональной культурно – исторической среды обучения. Это тесно связано с этнопедагогикой. Этнопедагогика - наука об эмпирическом опыте этнических групп в воспитании и образовании детей, о морально-этических и эстетических воззрениях на исконные ценности семьи, рода, племени, народности, нации. Термин введён и популяризирован Г. Н. Волковым (http://ru.wikipedia.org/wiki/Этнопедагогика). При определении содержания математической подготовки следует исходить из того, что «этноматематика» - это раздел математики, который исследует культуру, в которой возникает математика (термин «этноматематика» введен на пятом конгрессе ISME (International Congresson Mathematical Education). Познание образа жизни, самобытной культуры различных народов убедили нас в необходимости систематизации математический знаний и представлений народов России, с точки зрения элементарных вопросов развития понятий числа и нумерации чисел, самобытной терминологии, возникновении мер как значимого социального опыта, адаптированного для передачи из поколения в поколение.

В настоящий момент появилось достаточное количество работ, посвященных истокам математической культуры различных народов России: Петрова А.И. (2011). Сборник задач по методике преподавания математики на фольклорном и краеведческом материале Якутии: учебное пособие. — Якутск: Изд.–полиг. Комплекс СВФУ, 66 с.; Мерлина, Н. И. (2012). Фольклорные и краеведческие математические задачи народов России - Чебоксары, изд-во Чуваш. ун-та. 290 с.; Пырырко, Н. А. (2014). Жизнь народов Крайнего Севера (ненцев) в математических задачах. Чебоксары, изд-во Чувашского университета, 106 с.; Дьячковская, М. Д. (2014). Этноматематика коренных малочисленных народов Севера (юкагиров). Исторические, фольклорные и краеведческие математические задачи Верхнеколымского и Нижнеколымского улусов Республики Саха (Якутия), (114 с.) и др.

Актуальность исследуемой проблемы обусловлена тем, что образование, имеющее ценность для конкретного социума, где живет и трудится человек, нацелено на формирование культурной личности, способной адаптироваться в поликультурной среде. В своем докладе мы собираемся познакомить участников семинара с результатами проводимых в России исследований по данному направлению.

Н. С. Мигда, А. П. Зливко (Новороссийск)
Natashachebanova90@gmail.com

ИННОВАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В ОБУЧЕНИИ НАПРАВЛЕНИЯ ПОДГОТОВКИ «ЮРИСПРУДЕНЦИЯ»

На данном этапе развития системы обучения все больше используются инновационные методы. Они могут быть представлены и в качестве обычной презентации, т.е. презентационного материала, но могут быть и в качестве интерактивного комплекса.

Интерактивные методы обучения представлены в виде взаимодействия студентов с преподавателем. Это взаимодействие может выражаться в форме игр, в виде «мозгового штурма», в виде кейса, научного проекта и т. д. В юриспруденции основным материалом, помогающим студентам изучать ту или иную учебную дисциплину и науку являются нормативно-правовые акты. Чаще всего для того, чтобы разобраться в той или иной правовой задаче, преподаватель использует кейсы, то есть разбирает с группой определенную сиуацию, опираясь в ее решении на нормативно-правовой акт, будь это Федеральный Закон, Постановление Правительства или региональный нормативно-правовой акт. С помощью данного метода студент на практике изучает норму права.

Порой, чтобы донести информацию до студента преподаватель визуализируют материал, данный метод чаще всего находит отражение в лекции-визуализации или же в презентации, подготовленной как самим преподавателем, так и студентом.

Наиболее популярным среди интерактивных методов обучения направления подготовки «Юриспруденция» является «мозговой штурм». Данный метод используется для того, чтобы вся группа или подгруппа участвовали в разборе определенной ситуации, которую дает преподаватель.

Каждый из студентов высказывает свое мнение, свои пути решения, той или иной проблемы. Мнение каждого студента индивидуально, и должно учитываться преподавателем, оно не должно подвергаться острой критике. Наиболее трудоемким методом и затратным по времени является научный проект. Он занимает у студента много времени, вследствие того, что студент должен не только выбрать актуальную тему исследования, но и воплотить пути ее решения, найти способы их реализации.

На сегодняшний день очень много способов и методов донести материал студентам так, чтобы они не только поняли его, но и были компетентны в решении профессиональных правовых задач, которые будут стоять перед ними в дальнейшем.

Л. В. Новикова (Ростов-на-Дону)
lvnovikova@sfedu.ru

О НЕКОТОРОЫХ ВОПРОСАХ ПРЕПОДАВАНИЯ КУРСА ТФКП НА ФИЗИЧЕСКОМ ФАКУЛЬТЕТЕ

В процессе изучения курса ТФКП возникает необходимость усиления прикладной направленности курса одновременно с повышением уровня фундаментальной математической подготовки.

Студент должен научиться строить математические модели, уметь ставить математические задачи, уметь выбирать подходящий математический метод и алгоритм для решения задач, уметь применять численные методы одновременно с качественными математическими методами исследования.

Проходимые в курсе ТФКП методы имеют многочисленные практические применения. Так, например, конформные отображения прменяются в картографии при построении географических карт. Известно, что часть земной поверхности невозможно изобразить на плоскости. Однако, оказывается, что можно строить карту, не изменяя величины углов между различными линиями на земной поверхности. Известен пример карты Гренландии, построенной около 400 лет назад голландским ученым Меркатором, получившую большое распространение в навигации. Её преимущества перед картой, выполненной в стереографической проекции, состоят в том, что здесь не только меридианы, но и параллели изображаются прямыми линиями.

Наиболее важные применения конформных отображений относятся к вопросам физики и механики. Во многих прикладных вопросах речь идёт, например, об электрическом потенциале в точке пространства, окружающего заряженный конденсатор, или о температуре внутри нагретого тела, о скоростях частиц жидкости или газа в потоке, движущемся в некотором канале и обтекающем при этом какие-либо препятствия и т. п., нужно уметь вычислить потенциал, температуру, скорости и т. п. Например, для того, чтобы свести задачу о скорости частиц потока воздуха, обтекающего крыло самолета, к более простой задаче обтекания круглого цилиндра, достаточно конформно отобразить внешность профиля крыла на внешность окружности.

Многолетний опыт преподавания на физическом факультете показывает, что вышеперечисленные примеры применения методов ТФКП к вопросам из реальной жизни оказывают положительное влияние на интерес студентов как к прикладным методам, так и к их теоретическим основам.

А. Б. Ольнева, В. Г. Боловин (Астрахань)
a.olneva@gmail.com

ИНТЕРАКТИВНЫЕ МЕТОДЫ ПРИ ОБУЧЕНИИ СТУДЕНТОВ В ВЫСШЕЙ ТЕХНИЧЕСКОЙ ШКОЛЕ

Большинство предприятий в настоящее время нуждается в активной реструктуризации, которую тормозит из-за отсутствия знаний, ресурсов, должный уровень менеджмента, координация и сотрудничество между акционерами и государством, стратегия развития предприятий. В образовании сложились, утвердились и получили широкое распространение в основном три формы взаимодействия преподавателя и студентов. Среди них: 1. пассивные методы; 2. активные методы; 3. интерактивные методы. Каждый из них имеет свои особенности.

Интерактивное обучение – это диалоговое обучение, в ходе которого осуществляется взаимодействие педагога и студентов, непосредственное или опосредованное (чаще всего с использованием компьютерной техники).

В настоящее время преподавателю недостаточно быть компетентным в области своей специальности и уметь передавать эту базу знаний студентам. Совместная деятельность означает, что каждый вносит свой особый индивидуальный вклад, в ходе работы идет обмен знаниями, идеями. Кроме того, каждый студент имеет возможность ориентироваться на формирование индивидуальной образовательной траектории и интенсивную работу на протяжении всего срока обучения.

Применение интерактивных методов обучения зависит от характера образовательной программы; специфики учебных дисциплин; целей и задач конкретных занятий; возрастных и других особенностей обучающихся; возможностей и предпочтений преподавателя. . Замечаем, что компьютер в интерактивных методах обучения позволяет проводить презентации слайдов лекции; во время семинара-дискуссии использовать интерактивные панели и доску; слайд-кейс, презентации решений ситуаций.

В связи с решением возникших проблем применения интерактивных методов обучения коллективами кафедр(общеобразовательных и выпускающих) разрабатывается содержание, прежде всего, самостоятельной деятельности будущих бакалавров и магистров, представленное системой самостоятельных профессиональных работ по каждой учебной дисциплине; продумывается организация самостоятельной деятельности, основанная на групповой дифференциации и поэтапном педагогическом сопровождении.

Особого внимания и подготовки в работе по организации учебного процесса в высшей технической школе требует и хорошо организованная методическая работа педагогов.

Л. В. Пузанкова (Рязань)
eluda2001@mail.ru

СОЗДАНИЕ ПРОГРЕССИВНОЙ ИНФОРМАЦИОННО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СРЕДЫ ВАЖНЕЙШЕЕ УСЛОВИЕ МОДЕРНИЗАЦИИ РОССИЙСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Модернизация федерального образования, создание новейшей модели современной школы порождают необходимость формирования профессиональной компетентности российского педагога, отвечающей прогрессивным вызовам времени. Важнейшим условием эффективной деятельности современного педагога становится его способность к стремительной адаптации к постоянно меняющимся условиям мироокружения, что в свою очередь предполагает во многом совершенно иную (по направленности и содержанию) готовность учителя к преподавательской деятельности.

В таких условиях значительно возрастает роль системы образования по информатике, в частности и всей системы современного педагогического образования, в целом. Методологическая база парадигмы образования сегодня достаточно широка (это компетентностный и системно-деятельностный подходы, гуманистическая педагогика и т. д.), но переход от обучения, носящего в основном информационный характер и направленного преимущественно на исполнительскую деятельность, к формированию развитой личности, умеющей быстро ориентироваться и принимать своевременные и обоснованно-важные решения в условиях сложившейся информационно-образовательной среды, владеющей важными приемами созидательной деятельности, способной овладевать приобретенным из вне знанием, еще и генерировать на его основе новое, требует несомненно нового подхода к учебному процессу.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пузанкова, Л. В.* Методология подготовки учителей к технологическому проектированию учебного процесса по информатике в прогрессивной информационно-образовательной среде // Профессиональное образование: модернизационные аспекты: коллективная монография /Том

6. [Текст] — Ростов-на-Дону: Издательство Международного исследовательского центра «Научное сотрудничество», 2015. — С. 159–185

2. *Пузанкова, Л. В.* Подготовка студентов направления педагогическое образование с использованием методов формирования компьютерной грамотности /Вестник Челябинского государственного педагогического университета. — 2014. — № 5. – С. 157–167

3. *Пузанкова, Л. В.* Применение новых информационных технологии в профессиональной подготовке специалистов по туризму в вузе /Вестник Университета (Государственный университет управления) — 2014. — № 10. — С. 271–274

4. *Пузанкова, Л. В.* Подготовки педагога по информатике к технологическому проектированию. / Вестник Челябинского государственного педагогического университета. — 2014. — № 8. — С. 105–112

Н. А. Пырырко (с. Яр-Сале, Ямальский район, ЯНАО)
teacher_pna@mail.ru

ОСОБЕННОСТИ И ПРОБЛЕМЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В КОРРЕКЦИОННЫХ КЛАССАХ VII ВИДА

Коррекционные (специальные) классы VII вида предназначены для обучения детей, имеющих задержки в психическом развитии. Основные признаки данной патологии выражаются в слабости внимания и памяти, а также в недостаточности подвижности и темпа. При посещении таких классов детям обеспечивается нормализация эмоционально-волевой сферы и психического развития. У воспитанников происходит формирование умений и навыков, нужных для учебного процесса, а также активизируется познавательная деятельность.

Для лучшего восприятия изучаемой темы по математике важно ставить практические задачи перед учащимися, показывающими связь того, или иного раздела математики с жизнью.

Также важно показывать связь с другими предметами и практикой, т. к. это стимулирует познавательный интерес к предмету. Необходимо учитывать также и медицинские аспекты. При обучении ребят в классах КРО, например даже такой нюанс, как использование доски учителем, имеет огромное значение, т.к. это связано с работой полушарий головного мозга учащихся и обуславливается особенностями психики ребят. Ход урока должен записываться строго слева направо, иначе сбивается восприятие и последовательность действий учащихся, внимание рассеивается и теряется нить хода урока.

Учитывая все особенности и проблемы обучения математике в классах КРО, применяя практические задачи из жизни, возрастает не только активизация познавательной деятельности школьников, но и способствует развитию у школьников творчества и любви к родному краю и его истории.

С. Г. Разуваев, А. П. Ремонтов, С. В. Трубицков (Пенза)
remontov@mail.ru

К ВОПРОСУ О СОЗДАНИИ МНОГОУРОВНЕВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ КОМПЛЕКСОВ

Неоспоримый в последние годы тезис о решающей роли образования в информационном транскультурном обществе дополняется естественным образом концепцией непрерывного профессионального образования, которая принята в качестве стратегической во многих странах мира. В свою очередь, общемировые тенденции развития образования как непрерывного опираются на многоуровневую систему его обеспечения и на интеграционные процессы в образовании. Задача многоуровневой профессиональной подготовки с возможностью получения личностью индивидуально востребованного уровня образования находит решение в создании интегрированных учебных заведений, в том числе — многоуровневых образовательных комплексов (МОК). Главная идея при создании МОК — органичное сочетание допрофессионального, начального, среднего, высшего, послевузовского и дополнительного профессионального образования. Требование, чтобы учебный процесс в подготовке специалиста технического профиля как можно более полно моделировал будущую профессиональную деятельность, оптимально удовлетворяется именно в контексте многоуровневой подготовки, когда студент имеет возможность «встречаться» с будущей деятельностью на разных уровнях подготовки.

В практике профессионального образования активизировались процессы интеграции вузов с учреждениями СПО, профильными школами, научными и производственными организациями, однако в педагогической теории обнаруживается недостаточная разработанность методологических оснований такой интеграции и отсутствие исследований влияния интегрированных образовательных систем на профессиональную социализацию обучающихся.

Анализ научных источников по проблеме и опыт практической работы позволили зафиксировать противоречия между:

- необходимостью создания в профессиональной школе условий для успешной профессиональной социализации обучающихся;

- продекларированными ФГОС нового поколения требованиями сформированности профессиональной компетентности, и слабой разработанностью концептуальных и технологических основ их воплощения;

- многообразием уровней и форм профессионального образования и недостаточной разработанностью научно обоснованных моделей целостного процесса профессиональной;

- педагогическими возможностями интегрированного образовательного пространства МОК и малой разработанностью научно-методических способов их актуализации.

А. Н. Румянцев, Т. Г. Румянцева (Ростов-на-Дону)
rumhome@aaanet.ru

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ В КУРСЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРИРОДНЫХ СРЕД

Курс моделирования природных сред имеет большое значение при подготовке специалистов по прикладной математике. Традиционно в этом курсе преобладают математические вопросы. С теоретической точки зрения важным является вывод определяющих соотношений, следует обсуждать вопросы существования и единственности решения. Необходимо изучать способы построения математических моделей с использованием средств комплексного анализа, тензорного исчисления, асимптотических методов. Практическая часть курса строится в виде применения аналитических методов при реализации конкретных математических задач.

Предлагается обсудить опыт внедрения в курс моделирования природных сред лабораторного компьютерного практикума. Работа современного инженера тесно связана с информационными технологиями. Требованием времени является свободное владение компьютерной техникой и программированием.

Считаем, что значительную часть аудиторного времени, предназначенного для закрепления материала, необходимо отвести на выполнение лабораторных работ. Их следует связать с применением методов приближённых вычислений, дискретных структур данных, проблемами программных аналитических преобразований.

Лабораторные работы позволяют глубже понимать основные идеи математических моделей. Такие занятия помогают показать смысл абстрактных математических представлений о процессах, протекающих в природных средах. При выполнении лабораторных работ происходит совершенствование навыков программирования и использования существующих пакетов аналитических преобразований и методов приближённых вычислений. Лабораторные работы дают опыт решения конкретных проблем от постановок задач до интерпретации полученных числовых и графических результатов.

В лабораторных работах рассматривались различные способы представления моделей природных сред. При этом предлагалось выполнение аналитической работы проводить с использованием математических программных пакетов. В некоторых случаях математические пакеты использовались в программном режиме. Особенно интересными били возможности графической визуализации полученных результатов.

Важным был элемент контролируемой самостоятельной работы при подготовке и выполнении лабораторных работ. Студенты демонстрировали способность получения некоторых новых знаний, необходимых для выполнения конкретного задания.

Использование программирования при выполнении лабораторных и самостоятельных работ способствовало более твёрдому закреплению изучаемого материала, повысило уровень программирования, что является важным для специалистов технических направлений. Другим важным достижением для студентов было углубление степени владения компьютером и компьютерными технологиями.

При таком подходе курс моделирования природных сред был дополнением курсов профессиональных дисциплин «Структуры данных» и «Построение и анализ алгоритмов», «Методы приближённых вычислений», «Математические программные пакеты». Практика показала усиление интереса ко многим понятиям информационных технологий.

Изученные на практике приёмы и правила алгоритмизации могут служить основой для формирования культуры алгоритмизации и разработки программ практической направленности.

М. В. Синицына (Пермь)
sinita3@yandex.ru

ПРОАКТИВНОЕ МЫШЛЕНИЕ КАК СРЕДСТВО РЕАЛИЗАЦИИ ФГОС НОВОГО ПОКОЛЕНИЯ

Современное общество ставит перед образованием новые образовательные задачи. Федеральные образовательные стандарты нового поколения ориентированы на формирование универсальных учебных действий, которые могут применяться не только в рамках образовательного процесса, но и при решении познавательных и практических задач в самых различных областях человеческой деятельности. Важным и главным становится не просто вооружить ученика фиксированным набором знаний, а сформировать у него умение и желание учиться, способность к саморазвитию, умение делать осознанный выбор, самостоятельно и последовательно действовать и работать в командах, достигать результата и развиваться в России. Все это возможно только при развитии активности и ответственности – двух составляющих проактивного мышления.

Развитие проактивного мышления возможно только при системной деятельности всех учителей предметников, в том числе и учителей математики. Формирование проактивного мышление неразрывно связано с формированием математического мышления.

На конкретной задаче приведем пример системы вопросов, направленных на формирование проактивного мышления, которые целесообразно задавать школьникам при обсуждении ее решения.

Дедка вдвое сильнее Бабки, Бабка втрое сильнее внучки, внучка в четверо сильнее Жучки, Жучка в пятеро сильнее кошки, кошка в шестеро сильнее мышки. Дедка, Бабка, внучка, Жучка и кошка вместе с мышкой могут вытащить репку, а без мышки — не могут. Сколько надо позвать мышек, чтобы они смогли сами вытащить репку? Нестандартная формулировка задачи может вызвать затруднения и нежелание школьника добиться результата и решить задачу. Однако подход «правильных» вопросов при обсуждении решения данной задачи способствует прогнозированию последовательных действий для получения правильного ответа, и как следствие формированию проактивного мышления. «Какими методами я могу попытаться решить эту задачу?», «Какой способ решения целесообразнее применить в этой задаче?», «Какие знания и правила могут помочь мне достигнуть правильного результата?».

Такой подход к обсуждению решения задачи позволяет сформировать универсальную модель мышления, которая способствует появлению мотивации к обучению и познанию, возможности осознано выбирать наиболее эффективный метод решения познавательных и практических задач в разных областях человеческой деятельности. Именно эти качества характеризуют современных лидеров, несомненно, обладающих проактивностью мышления и действий.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Джон Миллер.* Проактивное мышление. — М.: Манн, Иванов и Фербер, 2013 — 320 с.

Т. С. Смирнова (Москва)
smirnova.ts-mos@yandex.ru

О МЕТОДИЧЕСКИХ ОСОБЕННОСТЯХ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ В ВЫСШЕМ ВОЕННОМ УЧЕБНОМ ЗАВЕДЕНИИ

Современная экономическая теория, как в научных исследованиях, так и при решении многих практических экономических задач использует сложный математический аппарат. Поэтому перед преподавателями высшей математики финансово-экономического факультета Военного университета стоит задача серьёзной математической подготовки курсантов и развитие их творческих и исследовательских способностей.

Средством достижения целей математического образования в военно-экономическом вузе является профессионально-прикладная направленность преподавания математики, проявляющаяся не только в решении задач с прикладным, профессионально-ориентированным содержанием, но и в методологической связи, позволяющей продемонстрировать курсантам роль математики в современном мире, необходимость овладения математическими методами как инструментом для изучения различных, и прежде всего профессиональных, областей человеческой деятельности.

Весь курс математики строится таким образом, чтобы выработать у курсантов математический подход к изучению задач реальной экономики, увязать воедино вопросы общего курса математики и военно-экономических приложений. Следует отметить, что усиление прикладной направленности курса математики военно-экономического вуза соответствует прагматическим настроениям современных курсантов, которые уже в процессе изучения общих вопросов математики хотят видеть, как приобретенные знания могут быть использованы в дальнейшей практической деятельности.

Так, в разделе «Теория вероятностей» при рассмотрении повторных независимых испытаний мы стараемся подбирать и составлять задачи на использование формул Бернулли, Лапласа и Пуассона с учетом военно-экономической терминологии.

Привлечение при обучении математике материала других дисциплин позволяет интегрировать разрозненные знания курсантов по разным предметам в единую систему. Всё это в конечном итоге сказывается на качестве профессиональной подготовки, способствует развитию мышления курсантов.

Вся эта многогранная работа преподавателей математики военно-экономического вуза позволяет подготовить военных экономистов, умеющих применять математические методы для решения экономических и военно-специальных задач.

М. В. Шабанова, М. А. Павлова (Архангельск),
Л. Н. Удовенко (Москва)
m.shabanova@narfu.ru, ln.udovenko@mpgu.edu,
m.pavlova@narfu.ru

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА КАК ПРЕДМЕТНАЯ ОСНОВА СОЗДАНИЯ МОТИВИРУЮЩЕЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ СРЕДЫ

Несмотря на усиление зависимости всех сфер общественной деятельности от уровня развития математической науки, уровня математической компетентности специалистов, во всем мире наблюдается тенденция снижения мотивации подрастающего поколения к математическому образованию. Эта проблема вынесена на первое место и в принятой Концепции развития математического образования в Российской Федерации.

Одним из признанных мировым научным сообществом направлений, способных повысить мотивацию учащихся к изучению математики без перегрузки образовательных программ, является экспериментальная математика. Реализация этого направления подтверждается сегодня рядом международных образовательных проектов, реализуемых при поддержке ЕС (DynaMAT, Fibonacci, InnoMathEd, Mascil и др.). Задача по оформлению в содержании школьного математического образования содержательно-методологической линии экспериментальной математики нашла поддержку и на III всероссийском съезде «Школьное математическое образование» (Новосибирск, 17–18 ноября 2015).

В докладе решение этой задачи будет представлено через создание мотивирующей образовательной среды для участников образовательного пространства в предметном поле экспериментальной математики. Понимая под мотивирующей образовательной средой систему определенных специальным образом внешних условий, в докладе будет описана среда, созданная нами всего за два года благодаря взаимодействию общеобразовательных школ, нескольких университетов, академического института, института открытого образования, компьютерной фирмы 1С, открытого сообщества и института GeoGebra в поле общих научных и образовательных интересов, непосредственно связанных с экспериментальной математикой. При этом учтены психодидактический, социальный, пространственно-предметный компоненты развития мотивации. Каждый из них охарактеризован и подтвержден результатами непосредственной практической работы. Эффективность такой среды подтверждается не только успехами вовлеченных в нее школьников, студентов и педагогов, но и стремительным расширением самого сообщества не только по его численности, но и географии.

Н. Р. Федотова (Казань)
nrubinova@bk.ru

ЭЛЕКТРОННЫЕ УЧЕБНЫЕ КУРСЫ В СИСТЕМЕ BLACKBOARD

Одной из наиболее важных задач, стоящих перед российской системой образования, является обеспечение доступности и качества образовательного процесса путем применение электронного обучения. Во всех стандартах есть требования к условиям реализации программы бакалавриата, в которых указывается что «Каждый обучающийся в течение всего периода обучения должен быть обеспечен индивидуальным неограниченным доступом к электронной информационно-образовательной среде организации». Электронная образовательная среда (ЭОС) должна обеспечивать: доступ к учебным планам, рабочим программам дисциплин, электронным образовательным ресурсам, указанным в рабочих программах, фиксацию хода образовательного процесса, результатов промежуточной аттестации, проведение всех видов занятий, формирование электронного портфолио обучающегося, в том числе сохранение работ обучающегося, рецензий и оценок на эти работы со стороны любых участников образовательного процесса, взаимодействие между участниками образовательного процесса.

В КНИТУ-КАИ (Казань) с 2011года успешно используется ЭОС на платформе Blackboard. Каждый год создаются и обновляются электронные учебные курсы. Автором разработаны и внедрены электронные курсы по дисциплинам: «безопасность жизнедеятельности», «экология», «промышленная экология», «физико-химические процессы в техносфере». Ежегодно эти курсы обновляются и используются студентами разных направлений и форм обучения.

Опыт работы с использованием ЭОС в течение трех лет, показал, что улучшаются результаты обучения студентов, повышается их интерес и мотивация освоения курса. В настоящее время система ЭОС продолжает совершенствоваться, и в дальнейшем предполагается объединить балльно-рейтинговую систему и текущую аттестацию в системе Blackboard.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Федотова Н. Р.* Создание электронного учебного курса в системе Blackboard // Приоритетные направления развития науки и технологий: тез. докл. XVI Международной научно-технической конференции. Тула, 2014. С. 39–42.

Содержание

Международная конференция по стохастическим методам 43