Министерство науки и высшего образования РФ

Национальный исследовательский
Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И СУПЕРКОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Труды XX Международной конференции

Нижний Новгород, 23–27 ноября 2020 г.

Нижний Новгород
Издательство Нижегородского госуниверситета
2020

УДК 004.942+519.876.5
ББК 22.181я43
М34

М34 **Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии.** Труды XX Международной конференции (Н. Новгород, 23–27 ноября 2020 г.) / Под ред. проф. В.П. Гергеля. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2020. – 438 с.

Отв. за выпуск К.А. Баркалов

ISBN 978-5-91326-621-7

Сборник материалов Двадцатой Международной конференции «Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии», состоявшейся 23−27 ноября 2020 г. на базе Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, содержит тезисы докладов и короткие статьи, посвященные математическому моделированию сложных процессов и явлений, численным методам их исследования, а также проблемам разработки методов суперкомпьютерных вычислений для решения актуальных задач в различных областях науки, промышленности и образования.

Подробную информацию о конференции можно найти в сети Интернет по адресу http://agora.guru.ru/hpc2020

Поддержка конференции

Корпорация Intel

Компания Huawei

Группа компаний РСК

Научно-образовательный математический центр
«Математика технологий будущего»

ISBN 978-5-91326-621-7
ББК 22.181я43

В скалярной форме уравнения (1)-(3) записываются следующим образом:

$$m\dot{u}-m\theta_3 v = X+F,\quad m\dot{v}+m\theta_3 u = Y+F',\quad m\theta_1 v - m\theta_2 u = P+R; \tag{4}$$

$$J\dot{\omega}_1 + J\theta_2\omega_3 - J\theta_3\omega_2 = F'a,\quad J\dot{\omega}_2 + J\theta_3\omega_1 - J\theta_1\omega_3 = -Fa,\quad \dot{\omega}_3 + \theta_1\omega_2 - \theta_2\omega_1 = 0; \tag{5}$$

$$u - a\omega_2 = 0,\quad v + a\omega_1 = 0. \tag{6}$$

Исключая $F, F', \omega_1, \omega_2$ из уравнений (4)-(6), получаем:

$$\dot{u}-\theta_3 v = \frac{a^2 X}{J+ma^2}+\frac{Ja\theta_1\omega_3}{J+ma^2},\quad \dot{v}+\theta_3 u = \frac{a^2 Y}{J+ma^2}+\frac{Ja\theta_2\omega_3}{J+ma^2}. \tag{7}$$

Уравнения (7) можно рассматривать как уравнения такого движения центра масс шара, которое получается в предположении, что центр масс G движется по гладкой поверхности, в точке G приложены дополнительные силы

$$\frac{Ja\theta_1\omega_3}{J+ma^2} \text{ и } \frac{Ja\theta_2\omega_3}{J+ma^2}$$

по осям GA и GB, а ранее приложенные силы уменьшены в отношении

$$\frac{a^2}{J+ma^2}$$

Центр тяжести шара G движется по поверхности, полученной из данной поверхности смещением по нормали на расстояние, равное радиусу шара. Пусть оси GA и GB направлены по касательным к линиям кривизны этой поверхности. Найдем выражение для угловой скорости $\mathbf{\Omega}$ выбранной подвижной системы координат в зависимости от компонент u и v скорости центра масс шара. Будем считать, что поверхность, по которой движется центр шара, задается относительно некоторой неподвижной системы координат уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(q_1, q_2) \tag{8}$$

где q_1 и q_2 - гауссовы координаты на поверхности. Предположим, что координатная сеть на поверхности (8) составлена из линий кривизны. Направления этих линий в каждой точке указываются ортогональными единичными векторами

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{h_1}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1},\quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{h_2}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2},\quad (\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j)=\delta_{ij} \tag{9}$$

Здесь через h_1, h_2 обозначены параметры Ламе

$$h_i(q_1,q_2)=\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}\right|,\quad i=1,2$$

Вектор $\mathbf{e}_3 = [\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2]$ является вектором нормали к поверхности (8) в точке (q_1, q_2). С другой стороны, скорость центра масс G шара может быть определена по формуле

$$\mathbf{v}_G = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2}\dot{q}_2 = u\mathbf{e}_1 + v\mathbf{e}_2.$$

Отсюда следует, что u и v связаны с координатами q_1, q_2 и их производными формулами:

$$u = h_1\dot{q}_1,\quad v = h_2\dot{q}_2. \tag{10}$$

Обозначая через $k_i(q_1,q_2),\ i=1,2$ главные кривизны поверхности (8), имеем:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial q_1} = -h_1 k_1 \mathbf{e}_1,\quad \frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial q_2} = -h_2 k_2 \mathbf{e}_2. \tag{11}$$

Формулы (11) являются следствием известной в дифференциальной геометрии теоремы (формулы) Родрига [2], в которой дополнительно нужно учесть, что выбранная нами координатная сеть на поверхности (8) является ортогональной и составленной из линий кривизны. С помощью формул (9) и (11) можно получить следующие соотношения:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial q_1} = -\frac{1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial q_2}\mathbf{e}_2 + h_1 k_1 \mathbf{e}_3,\quad \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial q_2} = \frac{1}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial q_1}\mathbf{e}_2,\quad \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial q_1} = \frac{1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial q_2}\mathbf{e}_1,\quad \frac{\partial \mathbf{e}_2}{\partial q_2} = -\frac{1}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial q_1}\mathbf{e}_1 + h_2 k_2 \mathbf{e}_3. \tag{12}$$

Угловая скорость системы координат $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ находится по стандартной формуле

$$\mathbf{\Omega} = (\dot{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_1 + (\dot{\mathbf{e}}_3 \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_2 + (\dot{\mathbf{e}}_1 \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2,$$

где

$$\dot{\mathbf{e}}_i = \frac{d\mathbf{e}_i}{dt} = \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial q_2}\dot{q}_2, \ i = 1,2,3.$$

Принимая во внимание формулы (11)-(12), для угловой скорости $\mathbf{\Omega}$ получим следующее выражение

$$\mathbf{\Omega} = h_2 k_2 \dot{q}_2 \mathbf{e}_1 - h_1 k_1 \dot{q}_1 \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\dot{q}_2}{h_1}\frac{\partial h_2}{\partial q_1} - \frac{\dot{q}_1}{h_2}\frac{\partial h_1}{\partial q_2} \right)\mathbf{e}_3$$

Учитывая формулы (10), перепишем выражение для угловой скорости $\mathbf{\Omega}$ в виде:

$$\mathbf{\Omega} = k_2 v \mathbf{e}_1 - k_1 u \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_1 h_2}\left(\frac{\partial h_2}{\partial q_1} v - \frac{\partial h_1}{\partial q_2} u \right)\mathbf{e}_3.$$

Таким образом, для компонент угловой скорости подвижной системы координат $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ имеем следующие выражения

$$\theta_1 = k_2 v, \quad \theta_2 = -k_1 u, \quad \theta_3 = \frac{1}{h_1 h_2}\left(\frac{\partial h_2}{\partial q_1} v - \frac{\partial h_1}{\partial q_2} u \right). \tag{13}$$

Теперь предположим, что поверхность, по которой движется центр масс G шара, является поверхностью вращения, заданной относительно некоторой неподвижной системы координат уравнением

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \rho(q_1)\cos q_2 \\ \rho(q_1)\sin q_2 \\ \zeta(q_1) \end{pmatrix}. \tag{14}$$

В этом случае коэффициенты Ламе h_1 и h_2 имеют вид:

$$h_1 = h_1(q_1) = \sqrt{\left(\frac{d\rho}{dq_1}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dq_1}\right)^2}, \quad h_2 = h_2(q_1) = \rho(q_1), \tag{15}$$

а главные кривизны k_1 и k_2 поверхности вычисляются по формулам:

$$k_1 = k_1(q_1) = \frac{\dfrac{d^2\zeta}{dq_1^2}\dfrac{d\rho}{dq_1} - \dfrac{d^2\rho}{dq_1^2}\dfrac{d\zeta}{dq_1}}{\left(\left(\dfrac{d\rho}{dq_1}\right)^2 + \left(\dfrac{d\zeta}{dq_1}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad k_2 = k_2(q_1) = \frac{\dfrac{d\zeta}{dq_1}}{\rho\sqrt{\left(\dfrac{d\rho}{dq_1}\right)^2 + \left(\dfrac{d\zeta}{dq_1}\right)^2}}, \tag{16}$$

Линиями кривизны на поверхности вращения являются ее меридианы и параллели. Пусть вертикальная ось Z является осью симметрии рассматриваемой поверхности вращения. Кроме координат q_1, q_2 введем углы Эйлера θ, ψ и φ, где угол, который ось GC составляет с осью Z равен $\pi/2-\theta$, а ψ - угол, который плоскость, содержащая оси Z и GC, составляет с некоторой фиксированной вертикальной плоскостью. Будем считать, что компоненты угловой скорости системы координат $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ определяются при помощи стандартных кинематических формул Эйлера

$$\theta_1 = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi, \ \theta_2 = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi, \ \theta_3 = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi},$$

в которых значение угла φ положено равным $-\pi/2$. Поэтому получаем:

$$\theta_1 = -\dot{\psi}\sin\theta, \ \theta_2 = \dot{\theta}, \ \theta_3 = \dot{\psi}\cos\theta, \tag{17}$$

С другой стороны, сравнивая полученные формулы с формулами (13), находим

$$-\dot{\psi}\sin\theta = k_2 h_2 \dot{q}_2, \ \ \dot{\theta} = -k_1 h_1 \dot{q}_1, \ \dot{\psi}\cos\theta = \frac{1}{h_1}\frac{dh_2}{dq_1}\dot{q}_2. \tag{18}$$

Из второго уравнения системы (18) определяется связь между переменными θ и q_1. Поэтому можно считать, что поверхность (14) задана в зависимости от θ и q_2, то есть

$$\rho\big|_{q_1=q_1(\theta)}=\sigma(\theta),\quad \zeta\big|_{q_1=q_1(\theta)}=\tau(\theta). \tag{19}$$

Коэффициенты Ламе, вычисляемые по формулам (15), определяются формулами:

$$h_1=h_1(\theta)=\sqrt{\left(\frac{d\sigma}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{d\tau}{d\theta}\right)^2},\quad h_2=h_2(\theta)=\sigma(\theta), \tag{20}$$

а главные кривизны $k_1=k_1(\theta)$ и $k_2=k_2(\theta)$ равны

$$k_1=k_1(\theta)=\frac{\frac{d^2\tau}{d\theta^2}\frac{d\sigma}{d\theta}-\frac{d^2\sigma}{d\theta^2}\frac{d\tau}{d\theta}}{\left(\left(\frac{d\sigma}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{d\tau}{d\theta}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}},\quad k_2=k_2(\theta)=\frac{\frac{d\tau}{d\theta}}{\sigma\sqrt{\left(\frac{d\sigma}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{d\tau}{d\theta}\right)^2}}, \tag{21}$$

Теперь учтем вторую из формул (18), которую представим в виде $\dot\theta=-k_1u$, и найдем из нее, что

$$u=-\frac{\dot\theta}{k_1}. \tag{22}$$

Теперь рассмотрим третью из формул (5) и формулы (6). Из формул (6) следует, что

$$\omega_2=\frac{u}{a}=-\frac{\dot\theta}{ak_1},\ \ \omega_1=-\frac{v}{a}.$$

Поэтому

$$\dot\omega_3=\theta_2\omega_1-\theta_1\omega_2=\frac{v\dot\theta}{ak_1}(k_2-k_1). \tag{23}$$

Окончательно, из формулы (23) получаем уравнение

$$\frac{d\omega_3}{d\theta}=\frac{v}{ak_1}(k_2-k_1). \tag{24}$$

Теперь предположим, что качение шара происходит под действием силы тяжести. Тогда имеем:

$$Y=0,\quad \theta_3=\frac{1}{h_1h_2}\frac{dh_2}{d\theta}v$$

и второе из уравнений (7) принимает вид:

$$\frac{dv}{d\theta}-\frac{1}{h_1h_2}\frac{v}{k_1}\frac{dh_2}{d\theta}=\frac{Ja}{J+ma^2}\omega_3. \tag{25}$$

Дифференцируя повторно формулу (25) и принимая во внимание уравнение (24), найдем:

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dv}{d\theta}-\frac{1}{h_1h_2}\frac{v}{k_1}\frac{dh_2}{d\theta}\right)=\frac{Ja}{J+ma^2}\frac{v}{k_1}(k_2-k_1). \tag{26}$$

Таким образом, задача о качении шара по поверхности под действием силы тяжести, в предположении, что центр тяжести G шара движется по поверхности вращения, сводится к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка (26) относительно компоненты скорости v шара. Можно поставить вопрос о том, для каких поверхностей вращения уравнение (26) интегрируется в лиувиллевых функциях. Лиувиллевы функции строятся последовательно из рациональных функций с использованием алгебраических операций, неопределенного интегрирования и взятия экспоненты заданного выражения [3]. Для ответа на вопрос о существовании лиувиллевых решений у линейного дифференциального уравнения второго порядка обычно используется алгоритм Ковачича [4]. Ниже доказано, что задача о качении тяжелого шара по параболоиду вращения интегрируется в лиувиллевых функциях.

2. Качение по параболоиду вращения

Пусть абсолютно шероховатая поверхность, по которой катится шар, такова, что геометрическое место центров шара есть параболоид вращения с вертикальной осью, расположенный вершиной вверх. Уравнение параболоида запишем в виде (14):

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} Rq_1 \cos q_2 \\ Rq_1 \sin q_2 \\ -\dfrac{Rq_1^2}{2} \end{pmatrix}.$$

В рассматриваемом случае

$$\rho(q_1) = Rq_1,\ \zeta(q_1) = -\frac{Rq_1^2}{2}.$$

Здесь R – некоторый параметр, имеющий размерность длины. Коэффициенты Ламе h_1 и h_2, вычисляемые по формуле (15), имеют вид

$$h_1 = R\sqrt{1+q_1^2}\ ,\ \ h_2 = Rq_1,$$

а главные кривизны k_1 и k_2, вычисляемые по формулам (16), равны

$$k_1 = -\frac{1}{R\left(1+q_1^2\right)^{3/2}},\quad k_2 = -\frac{1}{R\sqrt{1+q_1^2}}$$

Второе из уравнений (18) определяет связь между переменными q_1 и θ:

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{q}_1}{1+q_1^2},$$

откуда следует, что

$$q_1 = \operatorname{tg}\theta. \tag{27}$$

Учитывая формулу (27), мы можем считать теперь, что выражения для $\rho(q_1)$ и $\zeta(q_1)$ переписываются в виде:

$$\sigma(\theta) = \rho(q_1)\big|_{q_1=\operatorname{tg}\theta} = R\operatorname{tg}\theta,\quad \tau(\theta) = \zeta(q_1)\big|_{q_1=\operatorname{tg}\theta} = -\frac{R}{2}\operatorname{tg}^2\theta.$$

В результате получим следующие выражения для коэффициентов Ламе h_1 и h_2 и главных кривизн k_1 и k_2:

$$h_1 = \frac{R}{\cos^3\theta},\ h_2 = R\operatorname{tg}\theta,\ k_1 = -\frac{\cos^3\theta}{R},\ k_2 = -\frac{\cos\theta}{R}.$$

Уравнение второго порядка (26) может быть представлено в виде:

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dv}{d\theta} + \frac{v}{\sin\theta\cos\theta}\right) = \frac{J}{J+ma^2}\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}v. \tag{28}$$

Таким образом, задача о качении шара по абсолютно шероховатой поверхности такой, что геометрическое место центров шара является параболоидом вращения, сводится к интегрированию дифференциального уравнения (28). Сделаем в уравнении (28) замену независимой переменной $x = \cos^2\theta$ и введем обозначение

$$\frac{J}{J+ma^2} = n^2 < 1.$$

Тогда уравнение (28) приводится к уравнению с рациональными коэффициентами:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{1}{x-1}\frac{dv}{dx} - \frac{\left(n^2x^2 + 2\left(1-n^2\right)x - \left(1-n^2\right)\right)}{4x^2\left(x-1\right)^2}v = 0. \tag{29}$$

Применение к уравнению (29) алгоритма Ковачича [4] показывает, что общее решение данного уравнения может быть представлено в виде:

$$v(x)=\sqrt{\frac{x}{x-1}}\left(C_1 x^{\frac{n}{2}}+C_2 x^{-\frac{n}{2}}\right).$$

Таким образом, общее решение уравнения (29) выражается через лиувиллевы функции.

Литература

1. Раус Э.Дж. Динамика системы твердых тел. Т. 2. М.: Наука, 1983. 544 с.
2. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. 428 с.
3. Капланский И. Введение в дифференциальную алгебру. М.: Изд-во иностранной литературы, 1959. 85 с.
4. Kovacic J. An algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations // Journal of Symbolic Computation. 1986. Vol. 2, Issue 1. P. 3–43. DOI: 10.1016/S0747-7171(86)80010-4.