Алгебра и логика, ??, № ? (????), ???—???

Содержание

1 Введение

Понятие рекурсивной реализуемости восходит к работе американского математика С. К. Клини [1], в которой была предложена интерпретация ряда специфических интуиционистских понятий на основе концепции теории алгоритмов. Пропозициональная и предикатная логики рекурсивной реализуемости по Клини исследовались, начиная с 50-х годов прошлого столетия. С недавних пор были введены в рассмотрение варианты реализуемости, основанные на различных видах субрекурсивной реализуемости: примитивно-рекурсивная реализуемость [2], [3] и минимальная реализуемость [4]; исследовались соответствующие им предикатные логики [5], [6], [7], [8]. Представляют интерес и другие виды субрекурсивной реализуемости.

В настоящей работе разрабатывается понятие общерекурсивной реализуемости, основанное на использовании индексов общерекурсивных функций в качестве конструктивного способа получения одних реализаций из других. Доказывается корректность базисной логики [9] относительно семантики общерекурсивной реализуемости. Аналогичный результат был получен ранее для примитивно-рекурсивной реализуемости [10] и выриантов реализуемости, основанных на арифметической [11], [12] и гиперарифметической вычислимости [13].

2 Нумерация общерекурсивных функций

Пусть фиксирована вычислимая нумерация всех n-местных частично-рекурсивных функций: $\varphi_1^n, \varphi_2^n, \ldots$ для каждого натурального числа n. Рассмотрим соответствующую нумерацию общерекурсивных функций, определив множество индексов $\mathsf{I}_n \rightleftharpoons \{e \mid \varphi_e^n$ — общерекурсивная функция$\}$. Таким образом, если $z \in \mathsf{I}_n$, то φ_z^n — n-местная общерекурсивная функция, и напротив, всякая n-местная общерекурсивная функция есть φ_z^n для некоторого $z \in \mathsf{I}_n$. В дальнейшем будем опускать верхний индекс у функции φ_z^n там, где он может быть восстановлен из контекста.

Предложение 1. *Множество общерекурсивных функций вместе с вышеописанной нумерацией обладает следующими свойствами:*

- *все примитивно-рекурсивные функции являются общерекурсивными (ПРФ);*
- *если ψ есть n-местная общерекурсивная функция, s — перестановка на множестве $\{1, \ldots, n\}$, то функция ψ', определенная условным равенством $\psi'(x_1, \ldots, x_n) \simeq \psi(x_{s(1)}, \ldots, x_{s(n)})$, является общерекурсивной функцией (ПП);*
- *если ψ есть n-местная общерекурсивная функция, то функция ψ', определенная условным равенством $\psi'(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \simeq \psi(x_1, \ldots, x_n)$, является общерекурсивной функцией, и при этом индекс функции ψ' может быть найден общерекурсивно по индексу функции ψ, т.е. для любого натурального числа n найдется такая общерекурсивная функция s, что для всех $e \in \mathsf{I}_n$ верно $s(e) \in \mathsf{I}_{n+1}$ и имеет место $\varphi_{s(e)}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \simeq \varphi_e(x_1, \ldots, x_n)$ (эФП);*
- *композиция общерекурсивных функций есть общерекурсивная функция, индекс которой может быть найден общерекурсивно, т.е. для*

любых натуральных числе $n, m_1, \ldots, m_n$ *найдется такая* $(n+1)$-*местная общерекурсивная функция* s, *что для всех* $e \in \mathsf{I}_n, e_1 \in \mathsf{I}_{m_1}, \ldots, e_n \in \mathsf{I}_{m_n}$ *верно* $s(e, e_1, \ldots, e_n) \in \mathsf{I}_m$ *и имеет место*

$$\varphi_{s(e,e_1,\ldots,e_n)}(x_1, \ldots, x_m) \simeq \varphi_e(\varphi_{e_1}(x_1, \ldots, x_{m_1}), \ldots, \varphi_{e_n}(x_1, \ldots, x_{m_n})),$$

где $m = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} m_i$ *(эК);*

- *для любой* n-*местной примитивно-рекурсивной функции* p *найдется такая общерекурсивная функция* s, *что для всех* $e_1, e_2 \in \mathsf{I}_n$ *верно* $s(e_1, e_2) \in \mathsf{I}_n$ *и имеет место*

$$\varphi_{s(e_1,e_2)}(x_1, \ldots, x_n) \simeq \begin{cases} \varphi_{e_1}(x_1, \ldots, x_n), & \text{если } p(x_1, \ldots, x_n) = 0; \\ \varphi_{e_2}(x_1, \ldots, x_n), & \text{иначе;} \end{cases} \tag{эУ}$$

- *для общерекурсивных функций справедлив аналог* $(s - m - n)$-*теоремы, т.е. для каждой пары натуральных чисел* m, n *найдется такая общерекурсивная функция* s, *что для всех натуральных чисел* $k_1, \ldots, k_m$ *и* $e \in \mathsf{I}_{m+n}$ *верно* $s(e, k_1, \ldots, k_m) \in \mathsf{I}_n$ *и имеет место*

$$\varphi_{s(e,k_1,\ldots,k_m)}(x_1, \ldots, x_n) \simeq \varphi_e(x_1, \ldots, x_n, k_1, \ldots, k_m). \tag{SMN}$$

Доказательство. Утверждения ПРФ и ПП очевидны.

Согласно тезису Чёрча найдется такая общерекурсивная функция s, что имеет место $\varphi_{s(e)}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) \simeq \varphi_e(x_1, \ldots, x_n)$ для всех натуральных чисел e. Если функция φ_e общерекурсивна, то общерекурсивна и функция $\varphi_{s(e)}$. Таким образом, если $e \in \mathsf{I}_n$, то $s(e) \in \mathsf{I}_{n+1}$. Получаем, что верно эФП.

Утверждения эК и эУ доказываются аналогично эФП.

Согласно $(s - m - n)$-теореме для частично-рекурсивных функций [14, §1.8 теорема V] найдется такая общерекурсивная функция s, что для всех натуральных чисел $e, k_1, \ldots, k_m$ верно

$$\varphi_{s(e,k_1,\ldots,k_m)}(x_1, \ldots, x_n) \simeq \varphi_e(x_1, \ldots, x_n, k_1, \ldots, k_m).$$

Нетрудно видеть, что если $e \in \mathsf{I}_{m+n}$, то $s(e, k_1, \ldots, k_m) \in \mathsf{I}_n$. Получаем, что верно SMN. □

3 Общерекурсивная реализуемость

Предикатные формулы строятся обычным образом из предикатных символов различной валентности, предметных переменных, констант $0,\ 1,\ 2, \ldots$ для натуральных чисел, логических символов $\top$ (истина), $\bot$ (ложь), логических связок $\wedge$, $\vee$, $\to$ и кванторов $\exists$, $\forall$.

Пусть фиксированы примитивно-рекурсивные двухместная функция c, которая взаимно однозначно нумерует все пары натуральных чисел, и одноместные обратные функции p_1 и p_2, так что выполняются соотношения $\mathsf{p}_1(\mathsf{c}(x,y)) = x$ и $\mathsf{p}_2(\mathsf{c}(x,y)) = y$. В выражениях вида $\mathsf{p}_1(t),\ \mathsf{p}_2(t)$ обычно будем опускать скобки.

Определим понятие общерекурсивной реализуемости в духе абсолютной реализуемости [15]. Следуя [15], n-местным обобщенным предикатом будем называть всякую тотальную функцию типа $\mathbb{N}^n \to 2^{\mathbb{N}}$. Пусть A — предикатная формула, f — отображение, которое каждой предикатной переменной из A ставит в соответствие обобщенный предикат соответствующей валентности. В этом случае отображение f будем называть оценкой формулы A.

Для каждого натурального числа e, произвольной замкнутой предикатной формулы A и оценки f определим отношение $e\ \mathbf{gr}_f\ A$ (натуральное число e общерекурсивно реализует формулу A при оценке f) индукцией по построению формулы A:

- неверно $e\ \mathbf{gr}_f\ \bot$, и верно $e\ \mathbf{gr}_f\ \top$;
- $e\ \mathbf{gr}_f\ P(a_1, \ldots, a_n) \rightleftharpoons e \in f(P)(a_1, \ldots, a_n)$;
- $e\ \mathbf{gr}_f\ (\Phi \wedge \Psi) \rightleftharpoons \mathsf{p}_1 e\ \mathbf{gr}_f\ \Phi$ и $\mathsf{p}_2 e\ \mathbf{gr}_f\ \Psi$;
- $e\ \mathbf{gr}_f\ (\Phi \vee \Psi) \rightleftharpoons (\mathsf{p}_1 e = 0$ и $\mathsf{p}_2 e\ \mathbf{gr}_f\ \Phi)$ или $(\mathsf{p}_1 e = 1$ и $\mathsf{p}_2 e\ \mathbf{gr}_f\ \Psi)$;
- $e\ \mathbf{gr}_f\ \exists x\, \Phi(x) \rightleftharpoons \mathsf{p}_2 e\ \mathbf{gr}_f\ \Phi(\mathsf{p}_1 e)$;
- $e\ \mathbf{gr}_f\ \forall x_1, \ldots, \forall x_n\, (\Phi(x_1, \ldots, x_n) \to \Psi(x_1, \ldots, x_n)) \rightleftharpoons e \in \mathsf{I}_{n+1}$ и для

всех[1] натуральный чисел s, $a_1, \ldots, a_n$ если $s\ \mathbf{gr}_f\ \Phi(a_1, \ldots, a_n)$, то имеет место $\varphi_e(a_1, \ldots, a_n, s)\ \mathbf{gr}_f\ \Psi(a_1, \ldots, a_n)$;

- $e\ \mathbf{gr}_f\ \forall x_1, \ldots, \forall x_n\, \Phi \rightleftharpoons e\ \mathbf{gr}_f\ \forall x_1, \ldots, x_n\, (\top \to \Phi)$, если $n > 0$, формула Φ не начинается с квантора $\forall$, и логическая связка $\to$ не является главной в Φ.

Будем говорить, что замкнутая предикатная формула A является *абсолютно общерекурсивно реализуемой* (обозначение: $\mathbf{ugr}\ A$), если найдется такое натуральное число e, что имеет место $e\ \mathbf{gr}_f\ A$ при любой оценке f формулы A.

Выражения вида $A \Rightarrow B$, где A и B — предикатные формулы, называют секвенциями. Список переменных $\overline{x}$ назовем *допустимым* для секвенции $A \Rightarrow B$, если он не содержит одинаковых переменных, и все свободные переменные формул A и B содержатся в списке $\overline{x}$. Оценками секвенции $A \Rightarrow B$ будем называть оценки формулы $A \to B$. Распространим понятие общерекурсивной реализуемости на секвенции по аналогии с определением примитивно-рекурсивной секвенции из работы С. Салехи [**?**]:

$$e\ \mathbf{gr}_{f,\overline{x}}\ A \Rightarrow B \rightleftharpoons e\ \mathbf{gr}_f\ \forall \overline{x}\, (A \to B),$$

где f — оценка секвенции $A \Rightarrow B$, а список $\overline{x}$ является допустимым для секвенции $A \Rightarrow B$. Будем писать $\mathbf{ugr}_{\overline{x}}\ S$, если для секвенции S найдется такое натуральное число e, что имеет место $e\ \mathbf{gr}_{f,\overline{x}}\ S$ для всех оценок f секвенции S.

Лемма 1. *Пусть $A \Rightarrow B$ — секвенция, $x_1, \ldots, x_n$ — допустимый для $A \Rightarrow B$ список переменных, s — перестановка на $\{1, \ldots, n\}$. Тогда если верно $\mathbf{ugr}_{x_{s(1)}, \ldots, x_{s(n)}}\ A \Rightarrow B$, то имеет место и $\mathbf{ugr}_{x_1, \ldots, x_n}\ A \Rightarrow B$.*

Доказательство. Пусть $e\ \mathbf{gr}_{f,\, x_{s(1)}, \ldots, x_{s(n)}}\ A \Rightarrow B$ для всех оценок f секвенции $A \Rightarrow B$. Согласно предложению 1 (ПП) найдется такое натуральное число $e' \in \mathsf{I}_{n+1}$, что верно $\varphi_{e'}(x_1, \ldots, x_n, s) \simeq \varphi_e(x_{s(1)}, \ldots, x_{s(n)}, s)$.

[1] Однако, если в списке $x_1, \ldots, x_n$ на некоторых позициях i и j стоят одинаковые переменные x_i и x_j, то мы не допускаем рассмотрение тех списков $a_1, \ldots, a_n$, в которых $a_i \neq a_j$.

Нетрудно видеть, что имеет место $e' \ \mathbf{gr}_{f,\,x_1,\ldots,x_n}\ A \Rightarrow B$ для всех оценок f секвенции $A \Rightarrow B$. $\square$

Лемма 2. *Пусть $A \Rightarrow B$ — секвенция, $z_1, \ldots, z_n$ — допустимый для $A \Rightarrow B$ список переменных, а $u_1, \ldots, u_m$ — такой безповторный список переменных, что список переменных $z_1, \ldots, z_n, u_1, \ldots, u_m$ допустим для $A \Rightarrow B$. Тогда если верно $\mathbf{ugr}_{z_1,\ldots,z_n}\ A \Rightarrow B$, то имеет место $\mathbf{ugr}_{z_1,\ldots,z_n,u_1,\ldots,u_m}\ A \Rightarrow B$.*

Доказательство. Пусть $e \ \mathbf{gr}_{f,\,z_1,\ldots,z_n}\ A \Rightarrow B$ для всех оценок f секвенции $A \Rightarrow B$. Согласно предложению 1 (ПП, эФП) найдется такое $e' \in \mathsf{I}_{n+m+1}$, что верно $\varphi_{e'}(z_1, \ldots, z_n, u_1, \ldots, u_m, s) \simeq \varphi_e(z_1, \ldots, z_n, s)$. Нетрудно видеть, что имеет место $e' \ \mathbf{gr}_{f,\,z_1,\ldots,z_n,u_1,\ldots,u_m}\ A \Rightarrow B$ для всех оценок f секвенции $A \Rightarrow B$. $\square$

Лемма 3. *Пусть $A \Rightarrow B$ — секвенция, $z_1, \ldots, z_n$ — допустимый для $A \Rightarrow B$ список переменных, а $u_1, \ldots, u_m$ — такой безповторный список переменных, что список переменных $z_1, \ldots, z_n, u_1, \ldots, u_m$ допустим для $A \Rightarrow B$. Тогда для любой оценки f если верно $\mathbf{ugr}_{z_1,\ldots,z_n,u_1,\ldots,u_m}\ A \Rightarrow B$, то имеет место $\mathbf{ugr}_{z_1,\ldots,z_n}\ A \Rightarrow B$.*

Доказательство. Пусть $e' \ \mathbf{gr}_{f,\,z_1,\ldots,z_n,u_1,\ldots,u_m}\ A \Rightarrow B$ для всех оценок f секвенции $A \Rightarrow B$. Согласно предложению 1 (ПРФ, эК) найдется такое $e \in \mathsf{I}_{n+1}$ что имеет место $\varphi_e(z_1, \ldots, z_n, s) \simeq \varphi_{e'}(z_1, \ldots, z_n, 0, \ldots, 0, s)$. Нетрудно видеть, что верно $e \ \mathbf{gr}_{f,\,z_1,\ldots,z_n}\ A \Rightarrow B$ для всех оценок f секвенции $A \Rightarrow B$. $\square$

Предложение 2. *Пусть списки переменных $\overline{x}$ и $\overline{y}$ являются допустимыми для секвенции S. Имеет место $\mathbf{ugr}_{\overline{x}}\ S$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{ugr}_{\overline{y}}\ S$.*

Доказательство. Пусть $\overline{z}$ — безповторный список всех переменных, которые имеют вхождения в $\overline{x}$ и $\overline{y}$. Отметим, что список $\overline{z}$ является допустимым для секвенции $A \Rightarrow B$. Через $\overline{u}$ обозначим безповторный список всех переменных, которые имеют вхождения в $\overline{x}$ и не имеют вхождений в $\overline{y}$, а через $\overline{v}$ — безповторный список всех переменных, которые имеют вхождения в $\overline{y}$ и не имеют вхождений в $\overline{x}$. Отметим, что список $\overline{x}$ и список $\overline{z}, \overline{u}$ состоят из одних и тех же переменных. Также списки $\overline{y}$ и $\overline{z}, \overline{v}$ состоят из одних и тех же переменных. Пусть $\mathbf{gr}_{f,\overline{x}}\, S$. Последовательно применяя леммы 1, 2, 3, получаем $\mathbf{gr}_{f,\overline{z},\overline{u}}\, S$, $\mathbf{gr}_{f,\overline{z}}\, S$, $\mathbf{gr}_{f,\overline{z},\overline{v}}\, S$, и наконец $\mathbf{gr}_{f,\overline{y}}\, S$. □

Таким образом, абсолютная реализуемость секвенции не зависит от выбора допустимого для нее списка переменных.

4 Базисная логика

Базисная логика предикатов в виде секвенциального исчисления BQC описана в [9]. Понятие предикатной формулы в базисной логике несколько отличается от общепринятого в интуиционистской или классической логиках. А именно, все вхождения квантора всеобщности в предикатную формулу должны иметь вид $\forall x_1, \ldots, \forall x_n\, (A \to B)$. Такие формулы будем называть B-формулами. Таким образом, если $\forall x\, \Phi$ — некоторая подформула B-формулы, то либо формула Φ начинается с квантора всеобщности, либо импликация является главной связкой в формуле Φ.

Базисная логика предикатов BQC задается следующим набором *схем аксиом*, где A, B, C — произвольные B-формулы, $\overline{x}$, $\overline{y}$ — списки переменных одинаковой длины, x — переменная:

A1) $A \Rightarrow A$;

A2) $A \Rightarrow \top$;

A3) $\bot \Rightarrow A$;

A4) $A \wedge \exists x\, B \Rightarrow \exists x\, (A \wedge B)$, где переменная x не свободна в A;

A5) $A \wedge (B \vee C) \Rightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$;

A6) $\forall \overline{x}\, (A \to B) \wedge \forall \overline{x}\, (B \to C) \Rightarrow \forall \overline{x}\, (A \to C)$;

A7) $\forall \overline{x}\, (A \to B) \wedge \forall \overline{x}\, (A \to C) \Rightarrow \forall \overline{x}\, (A \to B \wedge C)$;

A8) $\forall \overline{x}\, (B \to A) \wedge \forall \overline{x}\, (C \to A) \Rightarrow \forall \overline{x}\, (B \vee C \to A)$;

A9) $\forall \overline{x}\, (A(\overline{x}) \to B(\overline{x})) \Rightarrow \forall \overline{x}\, (A(\overline{y}) \to B(\overline{y}))$;

A10) $\forall \overline{x}(A \to B) \Rightarrow \forall \overline{y}(A \to B)$, где переменные из $\overline{y}$ не входят свободно в $\forall \overline{x}(A \to B)$;

A11) $\forall \overline{x}, x\,(B \to A) \Rightarrow \forall \overline{x}\,(\exists x\, B \to A)$, где переменная x не свободна в A.

Исчисление BQC имеет следующие *правила вывода*, где $A,\ B,\ C$ — произвольные B-формулы, $\overline{x},\ \overline{y}$ — списки переменных одинаковой длины, x — переменная:

R1) $\dfrac{A \Rightarrow B \;\; B \Rightarrow C}{A \Rightarrow C}$;

R2) $\dfrac{A \Rightarrow B \;\; A \Rightarrow C}{A \Rightarrow B \wedge C}$;

R3) $\dfrac{A \Rightarrow B \wedge C}{A \Rightarrow B}$ (а), $\dfrac{A \Rightarrow B \wedge C}{A \Rightarrow C}$ (б);

R4) $\dfrac{B \Rightarrow A \;\; C \Rightarrow A}{B \vee C \Rightarrow A}$;

R5) $\dfrac{B \vee C \Rightarrow A}{B \Rightarrow A}$ (а), $\dfrac{B \vee C \Rightarrow A}{C \Rightarrow A}$ (б);

R6) $\dfrac{A(\overline{x}) \Rightarrow B(\overline{x})}{A(\overline{y}) \Rightarrow B(\overline{y})}$;

R7) $\dfrac{B \Rightarrow A}{\exists x\, B \Rightarrow A}$, где переменная x не свободна в A;

R8) $\dfrac{\exists x\, B \Rightarrow A}{B \Rightarrow A}$, где переменная x не свободна в A;

R9) $\dfrac{A \wedge B \Rightarrow C}{A \Rightarrow \forall \overline{x}(B \to C)}$, где каждая переменная из списка $\overline{x}$ не свободна в A.

Выводимость секвенции S в исчислении BQC обозначаем так: $\mathsf{BQC} \vdash S$. Будем говорить, что в исчислении BQC выводится формула A, если имеет место $\mathsf{BQC} \vdash \top \Rightarrow A$.

5 Основной результат

Теорема 1. *Пусть $\mathsf{BQC} \vdash S$ и список переменных $\overline{r} = r_1, \ldots, r_l$ допустим для секвенции S. Тогда найдется натуральное число e, для которого при любой оценке f секвенции S имеет место $e\ \mathbf{gr}_{f,\overline{r}}\ S$.*

Доказательство. Индукция по длине вывода секвенции S.

Рассмотрим все случаи, когда секвенция S является аксиомой исчисления BQC.

A1) Пусть секвенция S есть $A(\overline{r}) \Rightarrow A(\overline{r})$. Согласно предложению 1 (ПРФ) найдется такое натуральное число e, что выполняется условное равенство $\varphi_e(k_1, \ldots, k_l, d) \simeq d$ для всех натуральных чисел

$k_1, \ldots, k_l, d$. Нетрудно видеть, что имеет место $e\ \mathbf{gr}_{f,\overline{r}}\ A(\overline{r}) \Rightarrow A(\overline{r})$ для любой оценки f секвенции S.

A2) Пусть секвенция S есть $A(\overline{r}) \Rightarrow \top$. Согласно предложению 1 (ПРФ) найдется такое натуральное число e, что для всех натуральных чисел $k_1, \ldots, k_l, d$ выполняется условное равенство $\varphi_e(k_1, \ldots, k_l, d) \simeq 0$. Нетрудно видеть, что имеет место $e\ \mathbf{gr}_{f,\overline{r}}\ A(\overline{r}) \Rightarrow \top$ для любой оценки f секвенции S.

A3) Пусть секвенция S есть $\bot \Rightarrow A(\overline{r})$. Тогда каково бы ни было натуральное число $e \in \mathsf{I}_{l+1}$ имеет место $e\ \mathbf{gr}_{f,\overline{r}}\ \bot \Rightarrow A(\overline{r})$ для всех оценок f секвенции S.

A4) Пусть секвенция S есть $A(\overline{r}) \wedge \exists x\, B(x, \overline{r}) \Rightarrow \exists x\, (A(\overline{r}) \wedge B(x, \overline{r}))$. Согласно предложению 1 (ПРФ) найдется такое натуральное число e, что для всех натуральных чисел $k_1, \ldots, k_l, d$ выполняется условное равенство $\varphi_e(k_1, \ldots, k_l, d) \simeq \mathsf{c}(\mathsf{p}_1\mathsf{p}_2 d, \mathsf{c}(\mathsf{p}_1 d, \mathsf{p}_2\mathsf{p}_2 d))$. Нетрудно показать, что $e\ \mathbf{gr}_{f,\overline{r}}\ A(\overline{r}) \wedge \exists x\, B(x, \overline{r}) \Rightarrow \exists x\, (A(\overline{r}) \wedge B(x, \overline{r}))$ для любой оценки f секвенции S.

A5) Пусть секвенция S есть

$$A(\overline{r}) \wedge (B(\overline{r}) \vee C(\overline{r})) \Rightarrow (A(\overline{r}) \wedge B(\overline{r})) \vee (A(\overline{r}) \wedge C(\overline{r})).$$

Согласно предложению 1 (ПРФ) найдется такое натуральное число e, что для всех натуральных чисел $k_1, \ldots, k_l, d$ выполняется условное равенство $\varphi_e(k_1, \ldots, k_l, d) \simeq \mathsf{c}(\mathsf{p}_1\mathsf{p}_2 d, \mathsf{c}(\mathsf{p}_1 d, \mathsf{p}_2\mathsf{p}_2 d))$. Нетрудно показать, что $e\ \mathbf{gr}_{f,\overline{r}}\ A(\overline{r}) \wedge (B(\overline{r}) \vee C(\overline{r})) \Rightarrow (A(\overline{r}) \wedge B(\overline{r})) \vee (A(\overline{r}) \wedge C(\overline{r}))$ для всех оценок f секвенции S.

A6) Пусть секвенция S есть

$$\forall \overline{x}\, (A(\overline{x}, \overline{r}) \to B(\overline{x}, \overline{r})) \wedge \forall \overline{x}\, (B(\overline{x}, \overline{r}) \to C(\overline{x}, \overline{r})) \Rightarrow \forall \overline{x}\, (A(\overline{x}, \overline{r}) \to C(\overline{x}, \overline{r})).$$

Согласно предложению 1 (эК) существует такая общерекурсивная функция k, что если $b, c \in \mathsf{I}_{n+1}$, то $\mathsf{k}(b, c) \in \mathsf{I}_{n+1}$ и выполняется условное равенство

$$\varphi_{\mathsf{k}(b,c)}(m_1, \ldots, m_n, a) \simeq \varphi_c(m_1, \ldots, m_n, \varphi_b(m_1, \ldots, m_n, a)) \qquad (1)$$

для всех натуральных чисел $m_1, \dots, m_n, a$. Согласно предложению 1 (эФП, ПП, эК) найдется такое натуральное число e, что для всех натуральных чисел $k_1, \dots, k_l, d$ верно

$$\varphi_e(k_1, \dots, k_l, d) \simeq \mathsf{k}(\mathsf{p}_1 d, \mathsf{p}_2 d). \tag{2}$$

Пусть f — оценка секвенции S и для некоторых натуральных чисел d и $k_1, \dots, k_l$ имеет место

$$d \ \mathbf{gr}_f \ \forall \overline{x}\, (A(\overline{x}, \overline{k}) \to B(\overline{x}, \overline{k})) \wedge \forall \overline{x}\, (B(\overline{x}, \overline{k}) \to C(\overline{x}, \overline{k})), \tag{3}$$

где $\overline{k} = k_1, \dots, k_l$. Докажем, что

$$\varphi_e(k_1, \dots, k_l, d) \ \mathbf{gr}_f \ \forall \overline{x}\, (A(\overline{x}, \overline{k}) \to C(\overline{x}, \overline{k})). \tag{4}$$

Из (3) следует, что выполняются соотношения

$$\mathsf{p}_1 d \ \mathbf{gr}_f \ \forall \overline{x}\, (A(\overline{x}, \overline{k}) \to B(\overline{x}, \overline{k})), \tag{5}$$

$$\mathsf{p}_2 d \ \mathbf{gr}_f \ \forall \overline{x}\, (B(\overline{x}, \overline{k}) \to C(\overline{x}, \overline{k})). \tag{6}$$

Пусть для натуральных чисел a и $m_1, \dots, m_n$ имеет место

$$a \ \mathbf{gr}_f \ A(\overline{m}, \overline{k}), \tag{7}$$

где $\overline{m} = m_1, \dots, m_n$. Тогда из (5), (7) следует, что

$$\varphi_{\mathsf{p}_1 d}(m_1, \dots, m_n, a) \ \mathbf{gr}_f \ B(\overline{m}, \overline{k}). \tag{8}$$

Из (8), (6) следует, что

$$\varphi_{\mathsf{p}_2 d}(m_1, \dots, m_n, \varphi_{\mathsf{p}_1 d}(m_1, \dots, m_n, a)) \ \mathbf{gr}_f \ C(\overline{m}, \overline{k}). \tag{9}$$

Из (1), (9) получаем, что

$$\varphi_{\mathsf{k}(\mathsf{p}_1 d, \mathsf{p}_2 d)}(m_1, \dots, m_n, a) \ \mathbf{gr}_f \ C(\overline{m}, \overline{k}). \tag{10}$$

Таким образом, для всех натуральных чисел a и $m_1, \dots, m_n$ всякий раз, когда имеет место (7), выполняется и (10). Тем самым имеет место $\mathsf{k}(\mathsf{p}_1 d, \mathsf{p}_2 d) \ \mathbf{gr}_f \ \forall \overline{x}\, (A(\overline{x}, \overline{k}) \to C(\overline{x}, \overline{k}))$. Применяя (2), получаем (4). Таким образом, для всех натуральных чисел d и $k_1, \dots, k_l$ всякий раз, когда имеет место (3) выполняется и (4). Тем самым имеет место $e \ \mathbf{gr}_{f, \overline{r}} \ S$.

A7) Пусть секвенция S имеет вид

$$\forall\overline{x}\,(A(\overline{x},\overline{r})\to B(\overline{x},\overline{r}))\wedge\forall\overline{x}\,(A(\overline{x},\overline{r})\to C(\overline{x},\overline{r}))\Rightarrow\forall\overline{x}\,(A(\overline{x},\overline{r})\to B(\overline{x},\overline{r})\wedge C(\overline{x},\overline{r}))$$

где $\overline{x} = x_1,\ldots,x_n$. Согласно предложению 1 (эК) существует такая общерекурсивная функция k, что для любых натуральных чисел $b, c \in \mathsf{I}_{n+1}$ имеет место $\mathsf{k}(b,c) \in \mathsf{I}_{n+1}$ и выполняется соотношение

$$\varphi_{\mathsf{k}(b,c)}(m_1,\ldots,m_n,a) \simeq \mathsf{c}(\varphi_b(m_1,\ldots,m_n,a),\varphi_c(m_1,\ldots,m_n,a)) \quad (11)$$

для всех натуральных чисел $m_1,\ldots,m_n,a$. Согласно предложению 1 (эФП, ПП, эК) найдется такое натуральное число e, что выполняется условное равенство $\varphi_e(k_1,\ldots,k_l,d) \simeq \mathsf{k}(\mathsf{p}_1 d,\mathsf{p}_2 d)$ для всех натуральных чисел $k_1,\ldots,k_l,d$. Нетрудно показать, что $e\ \mathbf{gr}_{f,\overline{r}}\ S$.

A8) Пусть секвенция S есть

$$\forall\overline{x}\,(B(\overline{x},\overline{r})\to A(\overline{x},\overline{r}))\wedge\forall\overline{x}\,(C(\overline{x},\overline{r})\to A(\overline{x},\overline{r}))\Rightarrow\forall\overline{x}\,(B(\overline{x},\overline{r})\vee C(\overline{x},\overline{r})\to A(\overline{x},\overline{r})),$$

где $\overline{x} = x_1,\ldots,x_n$. Согласно предложению 1 (эУ, ПРФ, эК) найдется такая общерекурсивная функция k, что если $b,c \in \mathsf{I}_{n+1}$, то $\mathsf{k}(b,c) \in \mathsf{I}_{n+1}$ и для всех натуральных чисел $m_1,\ldots,m_n,a$ имеет место

$$\varphi_{\mathsf{k}(b,c)}(m_1,\ldots,m_n,a) \simeq \begin{cases} \varphi_b(m_1,\ldots,m_n,\mathsf{p}_2 a), & \text{если } \mathsf{p}_1 a = 0; \\ \varphi_c(m_1,\ldots,m_n,\mathsf{p}_2 a), & \text{иначе.} \end{cases} \quad (12)$$

Согласно предложению 1 (эФП, ПП, эК) найдется такое натуральное число e, что для всех натуральных чисел $k_1,\ldots,k_l,d$ выполняется условное равенство

$$\varphi_e(k_1,\ldots,k_l,d) \simeq \mathsf{k}(\mathsf{p}_1 d,\mathsf{p}_2 d). \quad (13)$$

Пусть f — оценка секвенции S и для некоторых натуральных чисел d и $k_1,\ldots,k_l$ имеет место

$$d\ \mathbf{gr}_f\ \forall\overline{x}\,(B(\overline{x},\overline{k})\to A(\overline{x},\overline{k}))\wedge\forall\overline{x}\,(C(\overline{x},\overline{k})\to A(\overline{x},\overline{k})), \quad (14)$$

где $\overline{k} = k_1,\ldots,k_l$. Докажем, что

$$\varphi_e(k_1,\ldots,k_l,d)\ \mathbf{gr}_f\ \forall\overline{x}\,(B(\overline{x},\overline{k})\vee C(\overline{x},\overline{k})\to A(\overline{x},\overline{k})). \quad (15)$$

Из (14) следует, что выполняются соотношения

$$\mathsf{p}_1 d\ \mathbf{gr}_f\ \forall\overline{x}\,(B(\overline{x},\overline{k}) \to A(\overline{x},\overline{k})), \tag{16}$$

$$\mathsf{p}_2 d\ \mathbf{gr}_f\ \forall\overline{x}\,(C(\overline{x},\overline{k}) \to A(\overline{x},\overline{k})). \tag{17}$$

Пусть для натуральных чисел a и $m_1,\dots,m_n$ имеет место

$$a\ \mathbf{gr}_f\ B(\overline{m},\overline{k}) \vee C(\overline{m},\overline{k}), \tag{18}$$

где $\overline{m} = m_1,\dots,m_n$. Из (18) следует, что либо $\mathsf{p}_1 a = 0$, либо $\mathsf{p}_1 a = 1$. Рассмотрим случай $\mathsf{p}_1 a = 0$. Из (18) получаем, что

$$\mathsf{p}_2 a\ \mathbf{gr}_f\ B(\overline{m},\overline{k}). \tag{19}$$

Из (16), (19) следует, что

$$\varphi_{\mathsf{p}_1 d}(m_1,\dots,m_n,\mathsf{p}_2 a)\ \mathbf{gr}_f\ A(\overline{m},\overline{k}), \tag{20}$$

Из (12), (20) получаем, что

$$\varphi_{\mathsf{k}(\mathsf{p}_1 d,\mathsf{p}_2 d)}(m_1,\dots,m_n,a)\ \mathbf{gr}_f\ A(\overline{m},\overline{k}). \tag{21}$$

Случай $\mathsf{p}_1 a = 1$ рассматривается аналогично. Соотношение (21) получается из (18), (17), (12).

Таким образом, для всех натуральных чисел a и $m_1,\dots,m_n$ всякий раз, когда имеет место (18), выполняется и (21). Тем самым имеет место $\mathsf{k}(\mathsf{p}_1 d,\mathsf{p}_2 d)\ \mathbf{gr}_f\ \forall\overline{x}\,(B(\overline{x},\overline{k}) \vee C(\overline{x},\overline{k}) \to A(\overline{x},\overline{k}))$. Применяя (13), получаем (15). Таким образом, для всех натуральных чисел d и $k_1,\dots,k_l$ всякий раз, когда имеет место (14) выполняется и (15). Тем самым имеет место $e\ \mathbf{gr}_{f,\overline{r}}\ S$.

A9) Пусть секвенция S есть $\forall\overline{x}\,(A(\overline{x}) \to B(\overline{x})) \Rightarrow \forall\overline{x}\,(A(\overline{z}) \to B(\overline{z}))$, где $\overline{x} = x_1,\dots,x_n$, $\overline{z} = z_1,\dots,z_n$. Каждая переменная из списка $\overline{z}$ есть или переменная из списка $\overline{x}$, или переменная из списка $\overline{r}$. Этот факт будем отражать обозначением списка $\overline{z}$ через $\overline{z}(\overline{x},\overline{r})$. Таким образом S имеет вид $\forall\overline{x}\,(A(\overline{x},\overline{r}) \to B(\overline{x},\overline{r})) \Rightarrow \forall\overline{x}\,(A(\overline{z}(\overline{x},\overline{r}),\overline{r}) \to B(\overline{z}(\overline{x},\overline{r}),\overline{r}))$.

Если $\overline{k}$ — список натуральных чисел $k_1, \dots, k_l$, то через $\overline{z}(\overline{x}, \overline{k})$ обозначаем список, полученный из списка $\overline{z}(\overline{x}, \overline{r})$ заменой переменных $r_1, \dots, r_l$ натуральными числами $k_1, \dots, k_l$. Если $\overline{m}$ — список натуральных чисел $m_1, \dots, m_n$, то через $\overline{z}(\overline{m}, \overline{k})$ обозначаем список, полученный из списка $\overline{z}(\overline{x}, \overline{k})$ заменой переменных $x_1, \dots, x_n$ натуральными числами $m_1, \dots, m_n$. Очевидно, $\overline{z}(\overline{m}, \overline{k})$ есть список натуральных чисел длины n. Функцию, которая натуральным числам $\overline{m}, \overline{k}$ ставит в соответствие i-ый элемент списка $\overline{z}(\overline{m}, \overline{k})$, обозначаем через z_i.

Согласно предложению 1 (эК) найдется такая общерекурсивная функция k, что для всех натуральных чисел $m_1, \dots, m_n, a, k_1, \dots, k_l$ и $d \in \mathsf{I}_{n+1}$ имеет место

$$\varphi_{\mathsf{k}(d)}(m_1, \dots, m_n, a, k_1, \dots, k_l) \simeq \varphi_d(\mathsf{z}_1(\overline{m}, \overline{k}), \dots, \mathsf{z}_n(\overline{m}, \overline{k}), a), \qquad (22)$$

где $\overline{m} = m_1, \dots, m_n$, $\overline{k} = k_1, \dots, k_l$. Так как $\mathsf{z}_1(\overline{m}, \overline{k}), \dots, \mathsf{z}_n(\overline{m}, \overline{k})$ есть в точности список $\overline{z}(\overline{m}, \overline{k})$, то соотношение (22) переписывается так:

$$\varphi_{\mathsf{k}(d)}(m_1, \dots, m_n, a, k_1, \dots, k_l) \simeq \varphi_d(\overline{z}(\overline{m}, \overline{k}), a). \qquad (23)$$

Согласно предложению 1 (SMN) найдется такая общерекурсивная функция s, что для всех натуральных чисел $m_1, \dots, m_n, a, k_1, \dots, k_l$ и $c \in \mathsf{I}_{n+l+1}$ имеет место

$$\varphi_{\mathsf{s}(c, k_1, \dots, k_l)}(m_1, \dots, m_n, a) \simeq \varphi_c(m_1, \dots, m_n, a, k_1, \dots, k_l). \qquad (24)$$

Из (23), (24) получаем

$$\varphi_{\mathsf{s}(\mathsf{k}(d), k_1, \dots, k_l)}(m_1, \dots, m_n, a) \simeq \varphi_d(\overline{z}(\overline{m}, \overline{k}), a). \qquad (25)$$

Согласно предложению 1 (эФП, ПП, эК) найдется такое натуральное число e, что для всех натуральных чисел $k_1, \dots, k_l, d$ выполняется условное равенство

$$\varphi_e(k_1, \dots, k_l, d) \simeq \mathsf{s}(\mathsf{k}(d), k_1, \dots, k_l) \qquad (26)$$

Пусть f — оценка секвенции S и для некоторых натуральных чисел d и $k_1, \dots, k_l$ имеет место

$$d \ \mathbf{gr}_f \ \forall \overline{x} \, (A(\overline{x}, \overline{k}) \to B(\overline{x}, \overline{k})), \qquad (27)$$

где $\overline{k} = k_1, \ldots, k_l$. Докажем, что

$$\varphi_e(k_1, \ldots, k_l, d)\ \mathbf{gr}_f\ \forall \overline{x}\, (A(\overline{z}(\overline{x}, \overline{k}), \overline{k}) \to B(\overline{z}(\overline{x}, \overline{k}), \overline{k})). \tag{28}$$

Пусть для натуральных чисел a и $m_1, \ldots, m_n$ имеет место

$$a\ \mathbf{gr}_f\ A(\overline{z}(\overline{m}, \overline{k}), \overline{k}), \tag{29}$$

где $\overline{m} = m_1, \ldots, m_n$. Из (27), (29) получаем, что

$$\varphi_d(\overline{z}(\overline{m}, \overline{k}), a)\ \mathbf{gr}_f\ B(\overline{z}(\overline{m}, \overline{k}), \overline{k}) \tag{30}$$

Из (25), (30) следует, что

$$\varphi_{\mathsf{s}(\mathsf{k}(d), k_1, \ldots, k_l)}(m_1, \ldots, m_n, a)\ \mathbf{gr}_f\ B(\overline{z}(\overline{m}, \overline{k}), \overline{k}) \tag{31}$$

Таким образом, для всех натуральных чисел a и $m_1, \ldots, m_n$ всякий раз, когда имеет место (29), выполняется и (31). Тем самым имеет место $\mathsf{s}(\mathsf{k}(d), k_1, \ldots, k_l)\ \mathbf{gr}_f\ \forall \overline{x}\, (A(\overline{z}(\overline{x}, \overline{k}), \overline{k}) \to B(\overline{z}(\overline{x}, \overline{k}), \overline{k}))$. Применяя (26), получаем (28). Таким образом, для всех натуральных чисел d и $k_1, \ldots, k_l$ всякий раз, когда имеет место (27) выполняется и (28). Тем самым имеет место $e\ \mathbf{gr}_{f, \overline{r}}\ S$.

A10) Пусть секвенция S есть $\forall \overline{x}\, (A \to B) \Rightarrow \forall \overline{y}\, (A \to B)$, где $\overline{x} = x_1, \ldots, x_n$, $\overline{y} = y_1, \ldots, y_p$ и каждая переменная из списка $\overline{y}$ не входит свободно в левую часть секвенции. Список всех переменных, которые входят свободно в левую часть секвенции, обозначаем через $\overline{u}(\overline{r})$. Если $\overline{k}$ — список натуральных чисел $k_1, \ldots, k_l$, то через $\overline{u}(\overline{k})$ обозначаем список, полученный из списка $\overline{u}(\overline{r})$ заменой переменных $r_1, \ldots, r_l$ натуральными числами $k_1, \ldots, k_l$. Каждая переменная из списка $\overline{x}$ есть или переменная из списка $\overline{y}$, или переменная из списка $\overline{r}$. Этот факт будем отражать обозначением списка $\overline{x}$ через $\overline{x}(\overline{y}, \overline{r})$. Если $\overline{k}$ — список натуральных чисел $k_1, \ldots, k_l$, то через $\overline{x}(\overline{y}, \overline{k})$ обозначаем список, полученный из списка $\overline{x}(\overline{y}, \overline{r})$ заменой переменных $r_1, \ldots, r_l$ натуральными числами $k_1, \ldots, k_l$. Если $\overline{m}$ — список натуральных чисел $m_1, \ldots, m_p$, то через $\overline{x}(\overline{m}, \overline{k})$ обозначаем список, полученный из списка $\overline{x}(\overline{y},\overline{k})$ заменой переменных $y_1,\ldots,y_p$ натуральными числами $m_1,\ldots,m_p$. Очевидно, $\overline{x}(\overline{m},\overline{k})$ есть список натуральных чисел длины n. Функцию, которая натуральным числам $\overline{m},\overline{k}$ ставит в соответствие i-ый элемент списка $\overline{x}(\overline{m},\overline{k})$, обозначаем через x_i. Таким образом секвенция S имеет вид

$$\forall\overline{x}\,(A(\overline{x},\overline{u}(\overline{r}))\to B(\overline{x},\overline{u}(\overline{r})))\Rightarrow\forall\overline{y}\,(A(\overline{x}(\overline{y},\overline{r}),\overline{u}(\overline{r}))\to B(\overline{x}(\overline{y},\overline{r}),\overline{u}(\overline{r}))).$$

Согласно предложению 1 (эК) найдется такая общерекурсивная функция k, что для всех натуральных чисел $m_1,\ldots,m_p,a,k_1,\ldots,k_l$ и $d\in\mathsf{I}_{n+1}$ имеет место

$$\varphi_{\mathsf{k}(d)}(m_1,\ldots,m_p,a,k_1,\ldots,k_l)\simeq\varphi_d(\mathsf{x}_1(\overline{m},\overline{k}),\ldots,\mathsf{x}_n(\overline{m},\overline{k}),a). \tag{32}$$

Согласно предложению 1 (SMN) найдется такая общерекурсивная функция s, что для всех натуральных чисел $m_1,\ldots,m_p,a,k_1,\ldots,k_l$ и $c\in\mathsf{I}_{p+l+1}$ имеет место

$$\varphi_{\mathsf{s}(c,k_1,\ldots,k_l)}(m_1,\ldots,m_p,a)\simeq\varphi_c(m_1,\ldots,m_p,a,k_1,\ldots,k_l). \tag{33}$$

Из (32), (33), учитывая, что $\mathsf{x}_1(\overline{m},\overline{k}),\ldots,\mathsf{x}_n(\overline{m},\overline{k})$ есть в точности список $\overline{x}(\overline{m},\overline{k})$, получаем, что для всех натуральных чисел $m_1,\ldots,m_p,a,k_1,\ldots,k_l$ и $d\in\mathsf{I}_{n+1}$ верно

$$\varphi_{\mathsf{s}(\mathsf{k}(d),k_1,\ldots,k_l)}(m_1,\ldots,m_p,a)\simeq\varphi_d(\overline{x}(\overline{m},\overline{k}),a). \tag{34}$$

Согласно предложению 1 (эФП, ПП, эК) найдется такое натуральное число e, что для всех натуральных чисел $k_1,\ldots,k_l,d$ выполняется условное равенство

$$\varphi_e(k_1,\ldots,k_l,d)\simeq\mathsf{s}(\mathsf{k}(d),k_1,\ldots,k_l). \tag{35}$$

Пусть f — оценка секвенции S и для некоторых натуральных чисел d и $k_1,\ldots,k_l$ имеет место

$$d\,\mathbf{gr}_f\,\forall\overline{x}\,(A(\overline{x},\overline{u}(\overline{k}))\to B(\overline{x},\overline{u}(\overline{k}))), \tag{36}$$

где $\overline{k} = k_1, \ldots, k_l$. Докажем, что

$$\varphi_e(k_1, \ldots, k_l, d)\ \mathbf{gr}_f\ \forall \overline{y}\,(A(\overline{x}(\overline{y}, \overline{k}), \overline{u}(\overline{k})) \to B(\overline{x}(\overline{y}, \overline{k}), \overline{u}(\overline{k}))). \tag{37}$$

Пусть для натуральных чисел a и $m_1, \ldots, m_p$ имеет место

$$a\ \mathbf{gr}_f\ A(\overline{x}(\overline{m}, \overline{k}), \overline{u}(\overline{k})), \tag{38}$$

где $\overline{m} = m_1, \ldots, m_p$. Из (36), (38) получаем, что

$$\varphi_d(\overline{x}(\overline{m}, \overline{k}), a)\ \mathbf{gr}_f\ B(\overline{x}(\overline{m}, \overline{k}), \overline{k}) \tag{39}$$

Из (34), (39) следует, что

$$\varphi_{\mathsf{s}(\mathsf{k}(d), k_1, \ldots, k_l)}(m_1, \ldots, m_p, a)\ \mathbf{gr}_f\ B(\overline{x}(\overline{m}, \overline{k}), \overline{k}) \tag{40}$$

Таким образом, для всех натуральных чисел a и $m_1, \ldots, m_p$ всякий раз, когда имеет место (38), выполняется и (40). Тем самым имеет место $\mathsf{s}(\mathsf{k}(d), k_1, \ldots, k_l)\ \mathbf{gr}_f\ \forall \overline{y}\,(A(\overline{x}(\overline{y}, \overline{k}), \overline{u}(\overline{k})) \to B(\overline{x}(\overline{y}, \overline{k}), \overline{u}(\overline{k})))$. Применяя (35), получаем (37). Таким образом, для всех натуральных чисел d и $k_1, \ldots, k_l$ всякий раз, когда имеет место (36) выполняется и (37). Тем самым имеет место $e\ \mathbf{gr}_{f,\overline{r}}\ \forall \overline{x}\,(A \to B) \Rightarrow \forall \overline{y}\,(A \to B)$.

A11) Пусть секвенция S имеет вид

$$\forall \overline{x}, x\,(B(\overline{x}, x, \overline{r}) \to A(\overline{x}, \overline{r})) \Rightarrow \forall \overline{x}\,(\exists x\, B(\overline{x}, x, \overline{r}) \to A(\overline{x}, \overline{r})),$$

где $\overline{x} = x_1, \ldots, x_n$. Согласно предложению 1 (эК) существует общерекурсивная функция k, для которой если $d \in \mathsf{I}_{n+2}$, то имеет место $\mathsf{k}(d) \in \mathsf{I}_{n+1}$ и для всех натуральных чисел $m_1, \ldots, m_n, b$ верно

$$\varphi_{\mathsf{k}(d)}(m_1, \ldots, m_n, b) \simeq \varphi_d(m_1, \ldots, m_n, \mathsf{p}_1 b, \mathsf{p}_2 b). \tag{41}$$

Согласно предложению 1 (эФП, ПП) найдется такое натуральное число e, что для всех натуральных чисел $k_1, \ldots, k_l, d$ выполняется условное равенство

$$\varphi_e(k_1, \ldots, k_l, d) \simeq \mathsf{k}(d). \tag{42}$$

Пусть f — оценка секвенции S и для некоторых натуральных чисел d и $k_1, \ldots, k_l$ имеет место

$$d \, \mathbf{gr}_f \; \forall \overline{x}, x \, (B(\overline{x}, x, \overline{k}) \to A(\overline{x}, \overline{k})), \tag{43}$$

где $\overline{k} = k_1, \ldots, k_l$. Докажем, что

$$\varphi_e(k_1, \ldots, k_l, d) \; \mathbf{gr}_f \; \forall \overline{x} \, (\exists x \, B(\overline{x}, x, \overline{k}) \to A(\overline{x}, \overline{k})). \tag{44}$$

Пусть для натуральных чисел b и $m_1, \ldots, m_n$ имеет место

$$b \, \mathbf{gr}_f \; \exists x \, B(\overline{m}, x, \overline{k}), \tag{45}$$

где $\overline{m} = m_1, \ldots, m_n$. Из (45) следует, что

$$\mathsf{p}_2 b \, \mathbf{gr}_f \; B(\overline{m}, \mathsf{p}_1 b, \overline{k}). \tag{46}$$

Из (43), (46) получаем, что

$$\varphi_d(m_1, \ldots, m_n, \mathsf{p}_1 b, \mathsf{p}_2 b) \; \mathbf{gr}_f \; A(\overline{m}, \overline{k}). \tag{47}$$

Из (41), (47) следует, что

$$\varphi_{\mathsf{k}(d)}(m_1, \ldots, m_n, b) \; \mathbf{gr}_f \; A(\overline{m}, \overline{k}). \tag{48}$$

Таким образом, для всех натуральных чисел b и $m_1, \ldots, m_n$ всякий раз, когда имеет место (45), выполняется и (48). Тем самым имеет место $\mathsf{k}(d) \; \mathbf{gr}_f \; \forall \overline{x} \, (\exists x \, B(\overline{x}, x, \overline{k}) \to A(\overline{x}, \overline{k}))$. Применяя (42), получаем (44). Таким образом, для всех натуральных чисел d и $k_1, \ldots, k_l$ всякий раз, когда имеет место (43) выполняется и (44). Тем самым имеет место $e \, \mathbf{gr}_{f, \overline{r}} \; S$.

Теперь рассмотрим все случаи, когда секвенция S получена по одному из правил вывода исчисления BQC.

Иногда будем использовать следующее обозначение. Если A — формула, $t_1, \ldots, t_n$ — термы, $x_1, \ldots, x_n$ — предметные переменные, то через $[t_1, \ldots, t_n / x_1, \ldots, x_n]A$ обозначаем результат подстановки термов $t_1, \ldots, t_n$ вместо свободных вхождений переменных $x_1, \ldots, x_n$ в формулу A. При этом считаем, что предварительно происходит переименование связанных переменных в формуле A таким образом, чтобы каждый из термов $t_1, \dots, t_n$ был свободен для соответствующей переменной из списка $x_1, \dots, x_n$ в формуле A.

R1) Пусть секвенция S получена по правилу $\frac{A \Rightarrow B \quad B \Rightarrow C}{A \Rightarrow C}$, и f — ее оценка. Доопределим произвольным образом оценку f до оценки секвенций-посылок. Пусть $\overline{u} = u_1, \dots, u_p$ — список переменных, допустимый для секвенций $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow C$, $A \Rightarrow C$. Согласно предположению индукции найдутся такие натуральные числа a, b, что выполняются соотношения $a\ \mathbf{gr}_{f,\overline{u}}\ A \Rightarrow B, \quad b\ \mathbf{gr}_{f,\overline{u}}\ B \Rightarrow C$. Следовательно $a,\ b \in \mathsf{I}_{p+1}$. Согласно предложению 1 (эК) найдется $c \in \mathsf{I}_{p+1}$, что для всех натуральных чисел $k_1, \dots, k_p, d$ имеет место

$$\varphi_c(k_1, \dots, k_p, d) \simeq \varphi_b(k_1, \dots, k_p, \varphi_a(k_1, \dots, k_p, d)). \tag{49}$$

Нетрудно показать, что $c\ \mathbf{gr}_{f,\overline{u}}\ A \Rightarrow C$. Получаем, что для всех оценок f секвенции S верно $c\ \mathbf{gr}_{f,\overline{u}}\ S$. В силу предложения 2 найдется такое e, что для всех оценок f секвенции S имеет место $e\ \mathbf{gr}_{f,\overline{r}}\ S$.

R2) Пусть секвенция S получена по правилу $\frac{A \Rightarrow B \quad A \Rightarrow C}{A \Rightarrow B \wedge C}$, и f — ее оценка, а для секвенций $A \Rightarrow B$, $A \Rightarrow C$, $A \Rightarrow B \wedge C$ список переменных $\overline{u} = u_1, \dots, u_p$ является допустимым. Доопределим произвольным образом оценку f до оценки секвенций-посылок. Согласно предположению индукции найдутся такие натуральные числа b, c, что выполняются соотношения $b\ \mathbf{gr}_{f,\overline{u}}\ A \Rightarrow B, \quad c\ \mathbf{gr}_{f,\overline{u}}\ A \Rightarrow C$. Следовательно $b,\ c \in \mathsf{I}_{p+1}$. Согласно предложению 1 (эК) найдется такое $a \in \mathsf{I}_{p+1}$, что для любых натуральных чисел $k_1, \dots, k_p, d$ верно условное равенство $\varphi_a(k_1, \dots, k_p, d) \simeq \mathsf{c}(\varphi_b(k_1, \dots, k_p, d),\ \varphi_c(k_1, \dots, k_p, d))$. Нетрудно показать, что $a\ \mathbf{gr}_{f,\overline{u}}\ A \Rightarrow B \wedge C$. Получаем, что для всех оценок f секвенции S верно $a\ \mathbf{gr}_{f,\overline{u}}\ S$. В силу предложения 2 найдется такое e, что для всех оценок f секвенции S имеет место $e\ \mathbf{gr}_{f,\overline{r}}\ S$.

R3) a) Пусть секвенция S получена по правилу $\frac{A \Rightarrow B \wedge C}{A \Rightarrow B}$, и для секвенций $A \Rightarrow B$, $A \Rightarrow B \wedge C$ список переменных $\overline{u} = u_1, \dots, u_p$ является допустимым. Пусть f — оценка секвенции $A \Rightarrow B$. Доопределим ее произвольным образом до оценки секвенции $A \Rightarrow B \wedge C$. Согласно предположению индукции найдется такое натуральное число a, что выполняется соотношение $a\ \mathbf{gr}_{f,\overline{u}}\ A \Rightarrow B \wedge C$. Следовательно $a \in \mathsf{I}_{p+1}$. Согласно предложению 1 (эК) найдется такое $b \in \mathsf{I}_{p+1}$, что для любых натуральных чисел $k_1, \ldots, k_p, d$ верно условное равенство $\varphi_b(k_1, \ldots, k_p, d) \simeq \mathsf{p}_1\varphi_a(k_1, \ldots, k_p, d)$. Нетрудно показать, что $b\ \mathbf{gr}_{f,\overline{u}}\ A \Rightarrow B$. Получаем, что для всех оценок f секвенции S верно $b\ \mathbf{gr}_{f,\overline{u}}\ S$. В силу предложения 2 найдется такое e, что для всех оценок f секвенции S имеет место $e\ \mathbf{gr}_{f,\overline{r}}\ S$.

б) Случай, когда секвенция S получена по правилу $\dfrac{A \Rightarrow B \wedge C}{A \Rightarrow C}$ рассматривается аналогично пункту а).

R4) Пусть секвенция S получена по правилу $\dfrac{B \Rightarrow A \quad C \Rightarrow A}{B \vee C \Rightarrow A}$, и для секвенций $B \Rightarrow A$, $C \Rightarrow A$, $B \vee C \Rightarrow A$ список переменных $\overline{u} = u_1, \ldots, u_p$ является допустимым. Пусть f — оценка секвенции $B \vee C \Rightarrow A$. Согласно предположению индукции найдутся такие натуральные числа b, c, что выполняются соотношения

$$b\ \mathbf{gr}_{f,\overline{u}}\ B \Rightarrow A, \quad c\ \mathbf{gr}_{f,\overline{u}}\ C \Rightarrow A. \tag{50}$$

Из (50) следует, что $b,\ c \in \mathsf{I}_{p+1}$. Согласно предложению 1 (эУ) найдется такое $a \in \mathsf{I}_{p+1}$, что для любых натуральных чисел $k_1, \ldots, k_p, d$

$$\varphi_a(k_1, \ldots, k_p, d) \simeq \begin{cases} \varphi_b(k_1, \ldots, k_p, \mathsf{p}_2 d), & \text{если } \mathsf{p}_1 d = 0; \\ \varphi_c(k_1, \ldots, k_p, \mathsf{p}_2 d), & \text{иначе.} \end{cases} \tag{51}$$

Пусть для некоторых натуральных чисел d и $k_1, \ldots, k_p$ имеет место

$$d\ \mathbf{gr}_f\ [\overline{k}/\overline{u}]\,(B \vee C), \tag{52}$$

где $\overline{k} = k_1, \ldots, k_p$. Из (52) следует, что либо $\mathsf{p}_1 d = 0$, либо $\mathsf{p}_1 d = 1$.

Рассмотрим случай $\mathsf{p}_1 d = 0$. Из (52) получаем, что

$$\mathsf{p}_2 d\ \mathbf{gr}_f\ [\overline{k}/\overline{u}]\,B. \tag{53}$$

Из (50), (53) следует, что

$$\varphi_b(k_1, \dots, k_p, \mathsf{p}_2 d)\ \mathbf{gr}_f\ [\overline{k}/\overline{u}]\, A. \tag{54}$$

Из (51), (54) получаем, что

$$\varphi_a(k_1, \dots, k_p, d)\ \mathbf{gr}_f\ [\overline{k}/\overline{u}]\, A. \tag{55}$$

Рассмотрим случай $\mathsf{p}_1 d = 1$. Из (52) получаем, что

$$\mathsf{p}_2 d\ \mathbf{gr}_f\ [\overline{k}/\overline{u}]\, C. \tag{56}$$

Из (50), (56) следует, что

$$\varphi_c(k_1, \dots, k_p, \mathsf{p}_2 d)\ \mathbf{gr}_f\ [\overline{k}/\overline{u}]\, A. \tag{57}$$

Из (51), (57) получаем (55).

Таким образом, для всех натуральных чисел d и $k_1, \dots, k_p$ всякий раз, когда имеет место (52), выполняется и (55). Тем самым имеет место $a\ \mathbf{gr}_{f,\overline{u}}\ B \vee C \Rightarrow A$. Получаем, что для всех оценок f секвенции S верно $a\ \mathbf{gr}_{f,\overline{u}}\ S$. В силу предложения 2 найдется такое e, что для всех оценок f секвенции S имеет место $e\ \mathbf{gr}_{f,\overline{r}}\ S$.

R5) а) Пусть секвенция S получена по правилу $\dfrac{B \vee C \Rightarrow A}{B \Rightarrow A}$, и для секвенций $B \Rightarrow A$, $B \vee C \Rightarrow A$ список переменных $\overline{u} = u_1, \dots, u_p$ является допустимым. Пусть f — оценка секвенции S. Доопределим произовльным образом оценку f до оценки секвенции-посылки. Согласно предположению индукции найдется такое натуральное число a, что выполняется соотношение $a\ \mathbf{gr}_{f,\overline{u}}\ B \vee C \Rightarrow A$. Следовательно $a \in \mathsf{I}_{p+1}$. Согласно предложению 1 (эК) найдется такое $b \in \mathsf{I}_{p+1}$, что для любых натуральных чисел $k_1, \dots, k_p, d$ имеет место $\varphi_b(k_1, \dots, k_p, d) \simeq \varphi_a(k_1, \dots, k_p, \mathsf{c}(0, d))$.

Нетрудно показать, что $b\ \mathbf{gr}_{f,\overline{u}}\ B \Rightarrow A$. Получаем, что для всех оценок f секвенции S верно $b\ \mathbf{gr}_{f,\overline{u}}\ S$. В силу предложения 2 найдется такое e, что для всех оценок f секвенции S имеет место $e\ \mathbf{gr}_{f,\overline{r}}\ S$.

б) Случай, когда секвенция S получена по правилу $\dfrac{B \vee C \Rightarrow A}{C \Rightarrow A}$, рассматривается аналогично пункту а).

R6) Пусть секвенция S получена по правилу $\dfrac{A \Rightarrow B}{[\overline{y}/\overline{x}]\,A \Rightarrow [\overline{y}/\overline{x}]\,B}$, где $\overline{x} = x_1, \ldots, x_n$, $\overline{y} = y_1, \ldots, y_n$. И пусть список переменных $\overline{u} = u_1, \ldots, u_p$ является допустимым для секвенций $A \Rightarrow B$, $[\overline{y}/\overline{x}]\,A \Rightarrow [\overline{y}/\overline{x}]\,B$. Через $[\overline{y}/\overline{x}]\,\overline{u}$ обозначаем список переменных, полученный из списка $\overline{u}$ заменой в этом списке всех переменных $x_1, \ldots, x_n$ переменными $y_1, \ldots, y_n$ соответственно. Из того, что список переменных $\overline{u}$ допустим для секвенции $[\overline{y}/\overline{x}]\,A \Rightarrow [\overline{y}/\overline{x}]\,B$, следует, что все переменные из списка $[\overline{y}/\overline{x}]\overline{u}$ содержатся среди переменных списка $\overline{u}$. Если $\overline{k} = k_1, \ldots, k_p$ — список натуральных чисел, то через $[\overline{k}/\overline{u}][\overline{y}/\overline{x}]\,\overline{u}$ обозначаем список, полученный из списка $[\overline{y}/\overline{x}]\,\overline{u}$ заменой в этом списке всех переменных $u_1, \ldots, u_p$ натуральными числами $k_1, \ldots, k_p$. Очевидно, что $[\overline{k}/\overline{u}][\overline{y}/\overline{x}]\,\overline{u}$ есть список натуральных чисел длины p. Через z_i обозначим общерекурсивную p-местную функцию, которая каждому набору натуральных чисел $k_1, \ldots, k_p$ ставит в соответствие i-ый элемент списка $[\overline{k}/\overline{u}][\overline{y}/\overline{x}]\,\overline{u}$.

Пусть f — оценка секвенции S. Согласно предположению индукции найдется такое натуральное число a, что выполняется соотношение

$$a\ \mathbf{gr}_{f,\overline{u}}\ A \Rightarrow B. \tag{58}$$

Из (58) следует, что $a \in \mathsf{I}_{p+1}$. Согласно предложению 1 (эК) найдется такое $b \in \mathsf{I}_{p+1}$, что выполняется соотношение

$$\varphi_b(k_1, \ldots, k_p, d) \simeq \varphi_a(\mathsf{z}_1(\overline{k}), \ldots, \mathsf{z}_l(\overline{k}), d) \tag{59}$$

для всех натуральных чисел $k_1, \ldots, k_p, d$. Учитывая, что $\mathsf{z}_1(\overline{k}), \ldots, \mathsf{z}_l(\overline{k})$ есть в точности список $[\overline{k}/\overline{u}][\overline{y}/\overline{x}]\,\overline{u}$, соотношение (59) переписывается следующим образом:

$$\varphi_b(k_1, \ldots, k_p, d) \simeq \varphi_a([\overline{k}/\overline{u}][\overline{y}/\overline{x}]\,\overline{u}, d). \tag{60}$$

Пусть для некоторых натуральных чисел d и $k_1, \ldots, k_p$ имеет место

$$d\ \mathbf{gr}_f\ [\overline{k}/\overline{u}][\overline{y}/\overline{x}]\,A, \tag{61}$$

где $\overline{k} = k_1, \ldots, k_p$. Из (58), (61) следует, что

$$\varphi_a([\overline{k}/\overline{u}][\overline{y}/\overline{x}]\,\overline{u}, d)\ \mathbf{gr}_f\ [\overline{k}/\overline{u}][\overline{y}/\overline{x}]\,B. \tag{62}$$

Из (60), (62) получаем, что

$$\varphi_b(k_1, \ldots, k_p, d)\ \mathbf{gr}_f\ [\overline{k}/\overline{u}][\overline{y}/\overline{x}]\,B. \tag{63}$$

Таким образом, для всех натуральных чисел d и $k_1, \ldots, k_p$ всякий раз, когда имеет место (61), выполняется и (63). Тем самым имеет место $b\ \mathbf{gr}_{f,\overline{u}}\ [\overline{y}/\overline{x}]\,A \Rightarrow [\overline{y}/\overline{x}]\,B$. Получаем, что для всех оценок f секвенции S верно $b\ \mathbf{gr}_{f,\overline{u}}\ S$. В силу предложения 2 найдется такое e, что для всех оценок f секвенции S имеет место $e\ \mathbf{gr}_{f,\overline{r}}\ S$.

R7) Пусть секвенция S получена по правилу $\dfrac{B \Rightarrow A}{\exists x\, B \Rightarrow A}$. Так как применение этого правила предполагает, что переменная x не свободна в формуле A, то можно сделать вывод, что секвенция S есть $\exists x\, B(\overline{u}, x) \Rightarrow A(\overline{u})$ для некоторого списка переменных $\overline{u} = u_1, \ldots, u_p$. Пусть f — оценка секвенции S. Согласно предположению индукции найдется такое натуральное число a, что верно $a\ \mathbf{gr}_{f,\overline{u},x}\ B \Rightarrow A$. Следовательно $a \in \mathsf{I}_{l+2}$. Согласно предложению 1 (эК) найдется такое $b \in \mathsf{I}_{p+1}$, что для всех натуральных чисел $k_1, \ldots, k_p, d$ имеет место $\varphi_b(k_1, \ldots, k_p, d) \simeq \varphi_a(k_1, \ldots, k_p, \mathsf{p}_1 d, \mathsf{p}_2 d)$.

Нетрудно показать, что $b\ \mathbf{gr}_{f,\overline{u}}\ \exists x\, B \Rightarrow A$. Получаем, что для всех оценок f секвенции S верно $b\ \mathbf{gr}_{f,\overline{u}}\ S$. В силу предложения 2 найдется такое e, что для всех оценок f секвенции S имеет место $e\ \mathbf{gr}_{f,\overline{r}}\ S$.

R8) Пусть секвенция S получена по правилу $\dfrac{\exists x\, B \Rightarrow A}{B \Rightarrow A}$. Так как применение этого правила предполагает, что переменная x не свободна в формуле A, то можно сделать вывод, что секвенция S имеет вид $B(\overline{u}, x) \Rightarrow A(\overline{u})$, где $\overline{u} = u_1, \ldots, u_p$. Пусть f — оценка секвенции S. Согласно предположению индукции найдется такое натуральное число a, что для всех оценок f секвенции S имеет место $a\ \mathbf{gr}_{f,\overline{u}}\ \exists x\, B \Rightarrow A$. Следовательно $a \in \mathsf{I}_{p+1}$. Согласно предложению 1 (эК) найдется такое $b \in \mathsf{I}_{p+1}$, что для всех натуральных чисел $k_1, \ldots, k_p, c, d$ имеет место $\varphi_b(k_1, \ldots, k_p, c, d) \simeq \varphi_a(k_1, \ldots, k_p, \mathsf{c}(c, d))$.

Нетрудно показать, что $b\ \mathbf{gr}_{f,\overline{u},x}\ B \Rightarrow A$. Получаем, что для всех оценок f секвенции S верно $b\ \mathbf{gr}_{f,\overline{u},x}\ S$. В силу предложения 2 найдется такое e, что для всех оценок f секвенции S имеет место $e\ \mathbf{gr}_{f,\overline{r}}\ S$.

R9) Пусть секвенция S получена по правилу $\dfrac{A \wedge B \Rightarrow C}{A \Rightarrow \forall \overline{x}\,(B \to C)}$. Так как применение этого правила предполагает, что каждая переменная из списка $\overline{x}$ не свободна в A, то можно сделать вывод, что секвенция S имеет вид $A(\overline{u}) \Rightarrow \forall \overline{x}\,(B(\overline{x},\overline{u}) \to C(\overline{x},\overline{u}))$, где $\overline{u} = u_1,\ldots,u_p$, $\overline{x} = x_1,\ldots,x_n$. Пусть f — оценка секвенции S. Согласно предположению индукции найдется такое натуральное число c, что для всех оценок f секвенции S имеет место

$$c\ \mathbf{gr}_{f,\overline{x},\overline{u}}\ A(\overline{u}) \wedge B(\overline{x},\overline{u}) \Rightarrow C(\overline{x},\overline{u}). \tag{64}$$

Из (64) следует, что $c \in \mathsf{I}_{n+l+1}$. Согласно предложению 1 (SMN, эК, ПП) найдется такая общерекурсивная функция s, что выполняется условное равенство

$$\varphi_{\mathsf{s}(c,k_1,\ldots,k_p,d)}(m_1,\ldots,m_n,b) \simeq \varphi_c(m_1,\ldots,m_n,k_1,\ldots,k_p,\mathsf{c}(d,b)) \tag{65}$$

для всех натуральных чисел $m_1,\ldots,m_n,k_1,\ldots,k_p,d,b$. Согласно предложению 1 (эФП, ПП, эК) найдется такое натуральное число e, что для всех натуральных чисел $k_1,\ldots,k_p,d$ верно

$$\varphi_e(k_1,\ldots,k_p,d) \simeq \mathsf{s}(c,k_1,\ldots,k_p,d). \tag{66}$$

Пусть для некоторых натуральных чисел d и $k_1,\ldots,k_p$ имеет место

$$d\ \mathbf{gr}_f\ A(\overline{k}), \tag{67}$$

где $\overline{k} = k_1,\ldots,k_p$. Докажем, что

$$\varphi_e(k_1,\ldots,k_p,d)\ \mathbf{gr}_f\ \forall \overline{x}\,(B(\overline{x},\overline{k}) \to C(\overline{x},\overline{k})). \tag{68}$$

Пусть для натуральных чисел b и $m_1,\ldots,m_n$ имеет место

$$b\ \mathbf{gr}_f\ B(\overline{m},\overline{k}), \tag{69}$$

где $\overline{m} = m_1, \ldots, m_n$. Из (67), (69) следует, что

$$\mathsf{c}(d, b)\ \mathbf{gr}_f\ A(\overline{k}) \wedge B(\overline{m}, \overline{k}). \tag{70}$$

Из (64), (70) получаем, что

$$\varphi_c(m_1, \ldots, m_n, k_1, \ldots, k_p, \mathsf{c}(d, b))\ \mathbf{gr}_f\ C(\overline{m}, \overline{k}). \tag{71}$$

Из (65), (71) следует, что

$$\varphi_{\mathsf{s}(c,k_1,\ldots,k_p,d)}(m_1, \ldots, m_n, b)\ \mathbf{gr}_f\ C(\overline{m}, \overline{k}). \tag{72}$$

Таким образом, для всех натуральных чисел b и $m_1, \ldots, m_n$ всякий раз, когда имеет место (69), выполняется и (72). Тем самым имеет место

$$\mathsf{s}(c, k_1, \ldots, k_p, d)\ \mathbf{gr}_f\ \forall \overline{x}\, (B(\overline{x}, \overline{k}) \to C(\overline{x}, \overline{k})). \tag{73}$$

Из (66), (73) следует (68). Таким образом, для всех натуральных чисел d и $k_1, \ldots, k_p$ всякий раз, когда имеет место (67), выполняется и (68). Тем самым имеет место $e\ \mathbf{gr}_{f, \overline{u}}\ A \Rightarrow \forall \overline{x}\, (B \to C)$. Получаем, что для всех оценок f секвенции S верно $e\ \mathbf{gr}_{f, \overline{u}}\ S$. В силу предложения 2 найдется такое e', что для всех оценок f секвенции S имеет место $e'\ \mathbf{gr}_{f, \overline{r}}\ S$. □

Следующее утверждение является следствием теоремы 1.

Теорема 2. *Всякая замкнутая предикатная формула, выводимая в исчислении* BQC*, является абсолютно общерекурсивно реализуемой.*

Список литературы

[1] S. K. Kleene. *On the interpretation of intuitionistic number theory*, Journ. Symbolic Logic., **10** (1945), 109—124.

[2] Damnjanovic Z. *Strictly primitive recursive realizability*, Journal of Symbolic Logic, **59**, N 4 (1994), 1210—1227.

[3] Salehi. S. *A generalized realizability for constructive arithmetic*, Bulletin of Symbolic Logic, **7** (2001), 147–148.

[4] Damnjanovic Z. *Minimal realizability of intuitionistic arithmetic and elementary analysis*, Journal of Symbolic Logic, **60**, N 4 (1995), 1208—1241.

[5] Д. А. Витер. *Примитивно-рекурсивная реализуемость и логика предикатов.* Депонировано в ВИНИТИ, № 1830–В2001. М., 2001.

[6] Д. А. Витер. Примитивно-рекурсивная реализуемость и конструктивная теория моделей: Канд. дис. М., 2001.

[7] Пак Бён Ха. *Минимальная реализуемость и логика предикатов.* Депонировано в ВИНИТИ № 1896-В2002. М., 2002.

[8] Пак Бён Ха. *Строго примитивно рекурсивная реализуемость и логика предикатов.* Депонировано в ВИНИТИ № 218-В2003. М., 2003.

[9] W. Ruitenburg. *Basic predicate calculus.* Notre Dame J. Formal Logic, **39**, N 1 (1998), 18–46.

[10] S. Salehi. *Provably total functions of basic arithmetic.* Math. Log. Quart. 2003, **49**, N 3, 316—322.

[11] А. Ю. Коновалов. *Арифметическая реализуемость и базисная логика.* Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ., № 1 (2016), стр. 52–56.

[12] А. Ю. Коновалов. *Арифметическая реализуемость и примитивно-рекурсивная реализуемость.* Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ., № 4 (2016), стр. 60–64.

[13] А. Ю. Коновалов, В. Е. Плиско. *О гиперарифметической реализуемости.* Матем. заметки, т. 98, № 5 (2015), стр. 725—746.

[14] Х. Роджерс. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.:«Мир», 1972.

[15] В. Е. Плиско. *Абсолютная реализуемость предикатных формул.* Изв. АН СССР, Сер. матем., т. 47, № 2 (1983), стр. 315—334.