

## О моделировании изгибных колебаний балок переменного поперечного сечения

**Борис Владимирович ГУСЕВ**, доктор технических наук, профессор, член-корр. РАН, e-mail: info-rae@mail.ru  
ФГАОУ ВО «Российский университет транспорта» (МИИТ), 127994 Москва, ул. Образцова, 9, стр. 9

**Василий Васильевич САУРИН**, доктор физико-математических наук, ведущий сотрудник, e-mail: saurin@pmnet.ru  
ФГБНУ «Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского Российской академии наук»,  
119526 Москва, просп. Вернадского, 101, корп. 1

**Аннотация.** В статье во введении обсуждается актуальность вопросов, связанных с моделированием колебаний упругих неоднородных тел. Проводится анализ публикаций и полученных результатов в данной области. Первый раздел посвящен формулировке краевой задачи нахождения собственных частот упругого тела в рамках линейной теории упругости. В отличие от традиционной задачи в данной формулировке граничные условия задаются специальным образом, что позволяет преобразовать уравнения в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Также для этих целей применяется проекционный алгоритм, представленный во втором разделе статьи. Далее, в третьем разделе, исследуются спектральные свойства системы уравнений наименьшей размерности (в данном случае система двух уравнений второго порядка). В заключительном, четвертом разделе, на примере свободных колебаний балки переменного сечения, исследуются численные аспекты построения приближенного решения краевых задач, описываемые обыкновенным дифференциальным уравнением с переменными коэффициентами. Предложенная в статье методология построения балочных моделей с использованием положений линейной теории упругости позволит проектировщикам строительных конструкций получать решения с заданной точностью.

**Ключевые слова:** балка переменного сечения, собственные колебания, численные методы, структурная неоднородность, линейная теория упругости, частота колебаний.

### ABOUT MODELING OF BENDING VIBRATIONS FOR BEAMS WITH VARIABLE CROSS-SECTION

**Boris V. GUSEV**, e-mail: info-rae@mail.ru

Russian University of Transport (MIIT), ul. Obraztsova, 9, str. 9, Moscow 127994, Russian Federation

**Vasily V. SAURIN**, e-mail: saurin@pmnet.ru

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, prosp. Vernadskogo, 101, korp. 1, Moscow 119526, Russian Federation

**Abstract.** The introduction discusses the relevance of issues related to the simulation of vibrations of elastic inhomogeneous bodies. The analysis of publications and results obtained in this area is carried out. The first part is devoted to the formulation of the boundary value problem to finding the natural frequencies of an elastic body in the frame of the linear theory of elasticity. In contrast to the traditional formulation in this statement, the boundary conditions are set in a special way, which makes it possible, in the fourth part, to transform partial differential equations to a system of ordinary differential equations with variable coefficients. Also, for these purposes, the projection algorithm described in the second part of the article is used. In what follows, the spectral properties of the system of equations of the smallest dimension (in this case, a system of two second order equations) are investigated in the third section. In the final fourth section, using the example of natural vibrations for a beam with variable cross-section, the numerical aspects of finding an approximate solution to boundary value problems described by an ordinary differential equation with variable coefficients are investigated. The methodology proposed in the article for constructing beam models using the provisions of the linear theory of elasticity will make it possible for designers of building structures to obtain solutions with a given accuracy.

**Key words:** variable section beam, natural vibrations, numerical methods, structural inhomogeneity, linear theory of elasticity, vibration frequency.

#### Введение

Исследования динамики конструкций очень важны в гражданском строительстве, поскольку высотные здания относительно гибки, что, как правило, приводит к увеличению амплитуды колебаний зданий. В этой связи в некоторых случаях необходимо рассчитывать динамические характеристики высотных сооружений уже на стадии проектирования.

При анализе свободных колебаний высотных зданий их можно в первом приближении моделировать балками с переменным поперечным сечением.

Динамическому анализу структурно-неоднородных балок посвящены некоторые работы [1–3]. Значительно меньше исследований проведено в области структурного динамического анализа с использованием методов линейной теории упругости.



Одна из первых работ [4] в этой области показала эффективность применения методов интегродифференциальных соотношений для построения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих собственные колебания балок переменного сечения.

Подробный обзор методов решения таких задач можно найти в работе [5]. Однако эти проблемы до сих пор являются достаточно актуальными для исследования, поскольку пока нет надежных аналитических методов для получения решений линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Рациональное применение конкретных численных подходов, таких как вариационные или проекционные методы, предполагает соответствующие ответы на следующие вопросы:

- какое из определяющих соотношений будет ослаблено, а какое выполняться в точности;
- какие приближения неизвестных функций следует выбрать для построения приближенного решения;
- каким образом можно оценить точность приближенного решения.

Один из возможных ответов на эти вопросы дается в настоящей статье на примере решения двумерной задачи линейной теории упругости о нахождении собственных колебаний балки переменного сечения. Основные идеи этого подхода также подробно обсуждаются в работе [5].

Основное внимание при этом уделяется разработке простейшей системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих боковые собственные движения балки с переменным сечением на основе линейной теории упругости и метода интегродифференциальных соотношений, достаточно полно изложенных в книгах [6, 7].

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим изотропную пластину, занимающую некоторую область в плоскости  $Ox_1x_2$ , симметричной относительно оси  $Ox_1$ :

$$V = \{x: -L/2 < x_1 < L/2, -h(x_1) < x_2 < h(x_1)\} \\ \text{с } x = (x_1, x_2).$$

Граница области  $V = \Omega$  состоит из четырех частей (рис. 1):

$$\Gamma = \partial V = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_3 \cup \bar{\Gamma}_4.$$

Предполагается, что части границы  $\bar{\Gamma}_2$  и  $\bar{\Gamma}_4$  ( $\bar{\Gamma}_2(x_1, x_2) = x_2 - h(x_1) = 0$  и  $\bar{\Gamma}_4(x_1, x_2) = x_2 + h(x_1) = 0$ , где  $h(x_1)$  — функция формы) свободны от нагрузок. При этом границы  $\bar{\Gamma}_1$  и  $\bar{\Gamma}_3$  при  $x_2 = -L/2, L/2$  испытывают нулевые напряжения. Далее, считается, что длина  $L$  пластины (балки) намного больше ее высоты  $2h(x_1)$  в любой точке  $x_1$ .

Форма балки симметрична относительно обеих координатных осей.

Напряженно-деформированное состояние тела описывается уравнениями линейной теории упругости:

$$\xi = \sigma - E\varepsilon; \quad f = \nabla\sigma - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где  $\sigma$  — тензор напряжений;  $\varepsilon$  — тензор деформаций;  $E$  — тензор модулей упругости;  $\xi$  — тензор невязки закона Гука;  $u$  — вектор перемещений;  $f$  — вектор невязки уравнения динамического равновесия;  $\rho$  — объемная плотность материала. Также считается, что все границы свободны от нагрузок.

Краевая задача состоит в нахождении собственной частоты  $\omega$ , перемещения  $u(x)$  и напряжения  $\sigma(x)$ , которые минимизируют энергетический функционал при точном выполнении граничных условий

$$\Phi^\omega[u, \sigma, \omega] = \frac{1}{2} \int_V (\rho \omega^2 u \cdot u + \xi; E: \xi) dV. \quad (2)$$

### 2. Проекционный подход задачи о нахождении собственных значений

Алгоритм поиска приближенного решения динамических задач основан на проекционном подходе и полудискретизации. Применим эту методику для построения приближенных систем уравнений, описывающих собственные колебания балки в рамках модели плоского напряженного состояния упругого тела.

Рассмотрим задачу в перемещениях  $u(x)$  и напряжениях  $\sigma(x)$ , чтобы найти собственные значения  $\omega$ . Введем полиномиальные приближения малой размерности неизвестных функций компонент вектора  $u$  и тензора  $\sigma$  относительно одной из координат  $x_2$  в следующем виде:

$$\sigma_{11} = \sum_{k=0}^N \hat{x}^k \sigma_{11}^{(k)}(x_1); \quad \sigma_{12} = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}^k \sigma_{12}^{(k)}(x_1); \quad (3) \\ \sigma_{22} = \sum_{k=0}^N \hat{x}^k \sigma_{22}^{(k)}(x_1); \quad u_1 = \sum_{k=0}^N \hat{x}^k u_1^{(k)}(x_1); \\ u_2 = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}^k u_2^{(k)}(x_1); \quad \hat{x} = \frac{x_2}{h}.$$

В проекционном подходе (модификация метода Петрова—Галеркина) требуется, чтобы перемещения и напряжения давали нулевые значения интегральным проекциям определяющего вектора и тензора на выбранные тензорные  $T$  поля тестовых функций  $\tau(x)$ :

$$\Theta_\xi = \int_{-h(x_1)}^{h(x_1)} \xi(u, \sigma); \tau dx_2, \quad \forall \tau \in T. \quad (4)$$

где  $\Theta_\xi$  — интеграл невязки определяющих уравнений с размерностью линейной плотности мощности;  $\tau(x_2)$  — тензор виртуальных напряжений.

**3. Поперечные колебания пластины**

Рассмотрим упругую пластину (см. рис. 1), которая сделана из однородного изотропного материала, т. е.  $E = \text{const}$ ,  $\rho = \text{const}$ ,  $\nu = \text{const}$ . Учтем также свойства симметрии области и граничные условия. Как было показано в работе [8], исходная система дифференциальных уравнений может быть разбита на две независимые подсистемы, которые описывают продольные или поперечные колебания пластины в плоскости. Для этого неизвестные функции с несоответствующими степенями переменной  $\hat{x} = x_2$  должны быть удалены из выражений для перемещений и напряжений в уравнении (3). Верхние индексы нечетности характеризуют симметричность (антисимметричность) функций перемещений и напряжений относительно оси  $x_1$ . Из-за ортогональности нечетных и четных степенных функций соответствующие проекции в интегралах (4) автоматически обнуляются.

Напряжение и сжатие центральной линии ( $x_2 = 0$ ), которые задаются функцией  $u_1^{(0)}(x_1)$ , являются определяющими смещениями для продольных колебаний. Напротив, боковые движения в плоскости характеризуются поперечными отклонениями  $u_2^{(0)}(x_1)$  относительно этой линии.

Исследуем поперечные колебания. Нечетность степеней функций в разложениях по переменной задана в табл. 1. При минимально возможной степени приближения система уравнений сводится к четырем дифференциальным уравнениям первого порядка, а полиномиальные приближения имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \hat{x}\sigma_{11}^{(1)}(x_1); u_1 = \hat{x}u_1^{(1)}(x_1); \\ \sigma_{12} &= \sigma_{12}^{(0)}(x_1) + \hat{x}^2\sigma_{12}^{(2)}(x_1); \\ u_2 &= u_2^{(0)}(x_1) + \hat{x}^2u_2^{(2)}(x_1); \\ \sigma_{22} &= \hat{x}\sigma_{22}^{(1)}(x_1) + \hat{x}^3\sigma_{22}^{(3)}(x_1); \hat{x} = \frac{x_2}{h(x_1)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Приближения (5) содержат восемь неизвестных функций по  $x_1$ .

При последовательном удовлетворении граничных условий, соотношении закона Гука и уравнения динамического равновесия, краевая задача нахождения собственных частот балки переменного сечения сводится к двум связанным обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка с переменными коэффициентами (с переменными в качестве функций напряжений  $\sigma_{11}^{(2)}$  и  $\sigma_{12}^{(2)}$ ):

$$\begin{aligned} Q_1 := \frac{d\sigma_{11}^{(2)}}{dx_1} - \sigma_{12}^{(2)} + \rho\omega^2 h^2 \left[ \frac{h}{\rho\omega^2} \frac{d}{dx_1} \left( \frac{1}{h} \frac{d\sigma_{12}^{(2)}}{dx_1} \right) - \right. \\ \left. - \frac{2}{3} \frac{dh}{dx_1} u_2^{(2)} + \frac{2(1+\nu)}{3E} \sigma_{12}^{(2)} \right] = 0; \end{aligned} \quad (6)$$

**1. Функции продольных и поперечных колебаний**

Колебания:	$u_1$	$u_2$	$\sigma_{11}$	$\sigma_{12}$	$\sigma_{22}$
продольные	$u_1^{(2j)}$	$u_2^{(2j+1)}$	$\sigma_{11}^{(2j)}$	$\sigma_{12}^{(2j+1)}$	$\sigma_{22}^{(2j)}$
поперечные	$u_1^{(2j+1)}$	$u_2^{(2j)}$	$\sigma_{11}^{(2j+1)}$	$\sigma_{12}^{(2j)}$	$\sigma_{22}^{(2j+1)}$

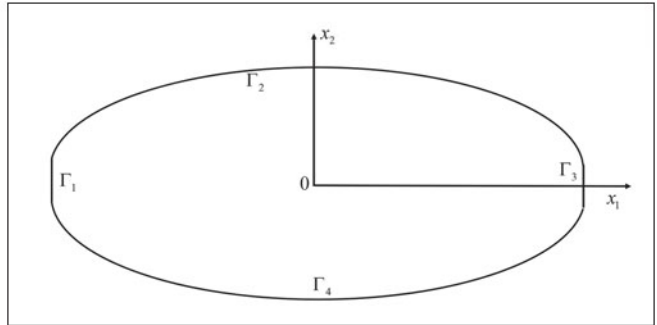


Рис. 1. Упругая пластина

$$\begin{aligned} Q_2 := 3Eh \frac{du_2^{(3)}}{dx_1} - 2E \frac{dh}{dx_1} u_2^{(2)} - 2(1+\nu)\sigma_{12}^{(2)} + \\ + \frac{3Eh}{\rho\omega^2} \frac{d}{dx_1} \left( \frac{1}{h} \frac{d\sigma_{12}^{(2)}}{dx_1} \right) - 2E \frac{dh}{dx_1} u_2^{(2)} + \\ + 2(1+\nu)\sigma_{12}^{(2)} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

**4. Численный пример**

В качестве примера рассмотрим различные алюминиевые балки со следующими геометрическими характеристиками. Все балки имеют одинаковую длину  $L = 1$  м и прямоугольное поперечное сечение с шириной  $b = 0,1$  м = const и высотой  $h = h(x)$ , изменяющейся по длине балки:

$$h(x) = \left( \frac{6}{5} + 12h_0 \right) x^2 + h_0. \quad (8)$$

Здесь управляющий параметр  $h_0$ , который может изменяться в следующих пределах  $0 < h_0 < 0,15$  м, представляет значения высоты балки в ее средней точке  $x = 0$ . Из формулы (8) следует, что все рассматриваемые балки имеют одинаковый объем конструкционного материала  $V = 0,01$  м<sup>3</sup>.

Отметим, что форма поперечного сечения балки не меняется по длине, если  $h(x) = h_0 = 0,1$  м = const. Момент инерции поперечного сечения рассчитывается по следующей формуле

$$J(x) = \frac{bh^3(x)}{12} = \frac{h^2(x)S(x)}{12}; S(x) = bh(x), \quad (9)$$

где  $S(x)$  – площадь поперечного сечения.

При выборе размеров  $h_0$  полагаем, что пластина, показанная на рис. 1, моделирует балку с заданными параметрами.



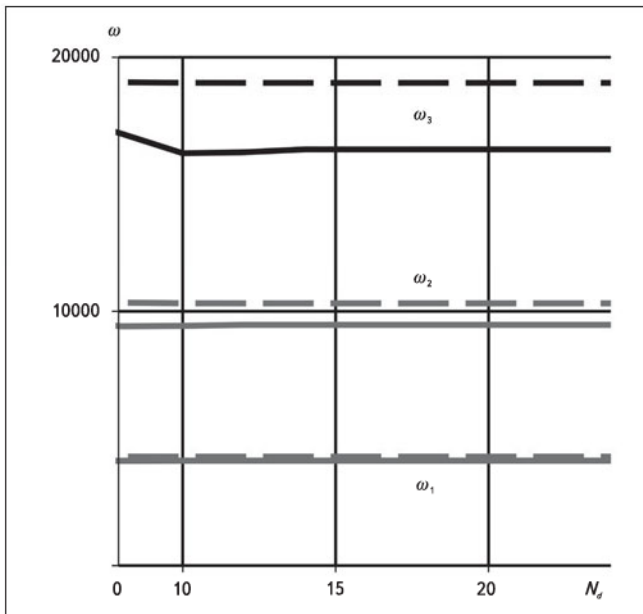


Рис. 2. Сходимость собственных частот

Считается, что все балки изготовлены из алюминия с модулем упругости  $E = 70$  ГПа, коэффициентом Пуассона  $\nu = 0,34$  и линейной массовой плотностью  $\rho(x) = \rho_V bh(x)$ , где  $\rho_V = 2700$  кг/м<sup>3</sup> – объемная плотность алюминия.

Собственные частоты были найдены с использованием вариационного и проекционного подходов, обсуждаемых в этой статье. Следует отметить, что все обыкновенные дифференциальные уравнения, которые следуют из проекционного подхода, имеют переменные коэффициенты. Это, как сказано в работе [9], существенно ограничивает возможности построения аналитических решений и выполнения полного анализа свободных движений балки с переменным поперечным сечением.

Без ограничения общности представленные расчеты выполнены для балки с главным параметром  $h_0 = 0,12$  м.

На рис. 2 показано поведение первых трех собственных частот в зависимости от числа степеней свободы  $N_d$  для двух различных математических моделей, описывающих свободное движение бал-

## 2. Собственные частоты и их различия

Частоты	1	2	3	4	5
$\omega^i, 1/c$	4127,165	9467,842	16386,83	24473,37	33373,27
$\omega_c^i, 1/c$	4281,459	10313,37	18995,08	30419,58	44023,85
$\Delta\omega^i, \%$	3,73	8,93	15,9	24,3	33,7

ки с переменным поперечным сечением. Сплошные линии соответствуют собственным частотам, полученным из уравнений (6) и (7), а пунктирные линии показывают частоты, определенные из классического уравнения балки

$$\rho(x) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EJ(x) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (10)$$

Из представленных зависимостей видно, что с ростом номера собственного числа различия в частотах, полученных для разных моделей, быстро увеличиваются. Так что уже для пятой частоты разница достигает более 30 %. Значения первых пяти частот для этих двух моделей ( $\omega^i$  – для предложенной модели,  $\omega_c^i$  – для классического уравнения и их относительные различия  $\Delta\omega^i$ ), полученные при  $N_d = 24$ , приведены в табл. 2.

## Вывод

Предложен регулярный проекционный подход к построению системы обыкновенных дифференциальных уравнений для нахождения собственных частот и форм колебаний неоднородных балок на основе принципов линейной теории упругости и метода интегродифференциальных соотношений. Изучены и обсуждены свойства квадратичных соотношений и их значения для решения различных спектральных задач. В качестве примера представлены интегродифференциальные постановки задачи о собственных колебаниях балки с высотой балки, квадратично изменяющейся по ее длине.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований Минстроя России и РААСН.

## ЛИТЕРАТУРА / REFERENCES

1. Jang S. K., Bert C. W. Free vibration of stepped beams: Exact and numerical solutions crack [Свободные колебания ступенчатых балок: точные и численные решения трещины]. *Journal of Sound and Vibration*, 1989, vol. 130, pp. 342–346.
2. Simsek M., Cansiz S. Dynamics of elastically connected double-functionally graded beam systems with different boundary conditions under action of a moving harmonic load [Динамика упругосвязанных двухфункциональ-

ных балочных систем с различными граничными условиями под действием движущейся гармонической нагрузки]. *Composite Structures*, 2012, vol. 94, no. 9, pp. 2861–2878.

3. Calim F. F. Free and forced vibrations of non-uniform composite beams [Свободные и вынужденные колебания неоднородных составных балок]. *Computers and Structures*, 2009, vol. 88, no. 3, pp. 413–423.
4. Kostin G. V., Saurin V. V. Asymptotic approach to free beam vibration analysis [Асимптотический подход к

- анализу колебаний свободной балки]. *Journal of Aerospace Engineering*, 2009, vol. 22, no. 4, pp. 456–459.
5. Гусев Б. В., Саурин В. В. О колебаниях неоднородных балок // Инженерный вестник Дона. 2017. № 3. URL: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2017/4312](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2017/4312) (дата обращения: 20.10.2020).
  5. Gusev B. V., Saurin V. V. On vibrations of inhomogeneous beams. *Inzhenerny vestnik Dona*, 2017, no. 3. Available at: [ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2017/4312](http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n3y2017/4312) (accessed 20.10.2020). (In Russian).
  6. Kostin G. V., Saurin V. V. *Integrodifferential relations in linear elasticity* [Интегродифференциальные отношения в линейной упругости]. De Gruyter, Berlin. 2012. 280 p.
  7. Kostin G. V., Saurin V. V. *Dynamics of solid structures. Method using integrodifferential relations* [Динамика твердых структур. Метод с использованием интегродифференциальных отношений]. De Gruyter, Berlin, 305 p.
  8. Saurin V. V. Analysis of dynamic behavior of beams with variable cross-section [Анализ динамического поведения балок переменной сечения]. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2019, vol. 40, pp. 364–374.
  9. Chaudhari T. D., Maiti S. K. Modelling of transverse vibration of beam of linearly variable depth with edge crack [Моделирование поперечных колебаний балки линейно переменной глубины с краевой трещиной]. *Engineering Fracture Mechanics*, 1999, vol. 63, pp. 425–445.

**Для цитирования:** Гусев Б. В., Саурин В. В. О моделировании изгибных колебаний балок переменного поперечного сечения // Промышленное и гражданское строительство. 2020. № 11. С. 94–98. DOI: 10.33622/0869-7019.2020.11.94-98.

**For citation:** Gusev B. V., Saurin V. V. About Modeling of Bending Vibrations for Beams with Variable Cross-Section. *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo* [Industrial and Civil Engineering], 2020, no. 11, pp. 94–98. (In Russian). DOI: 10.33622/0869-7019.2020.11.94-98. ■

В Москве 22 и 23 сентября 2020 г. состоялась III Международная научно-практическая конференция «Современные технологии проектирования и строительства гидротехнических сооружений». Организатор — Международная Ассоциация Фундаментостроителей при поддержке ФГУП «Росморпорт» и ФГБУ «Канал имени Москвы».

В числе участников конференции — представители надзорных органов, строительных компаний, морских и речных портов, гидроэлектростанций, генподрядчики и субподрядчики по строительству гидротехнических сооружений, эксперты из проектных и научных институтов, сотрудники российских и иностранных компаний-производителей специализированного оборудования, материалов и техники, государственные заказчики и специалисты эксплуатирующих организаций.

Эксплуатации гидротехнических сооружений, находящихся в хозяйственном ведении учреждения, посвятил свое выступление руководитель научно-технической группы ФГУП «Росморпорт» А. Ильченко.

О новых российских нормативных документах по проектированию гидротехнических сооружений, их особенностях и основных положениях рассказал О. Финагенов, зам. начальника управления организации научной деятельности АО «ВНИИГ им. Б. Е. Веденеева».

Применение BIM-технологий в гидротехническом строительстве было рассмотрено в презентации директора немецкой компании «Allbau Software GmbH» В. Шкатова, который рассказал о новом параметри-

ческом решении для трехмерного моделирования Allplan Bridge, помогающем проектировать бетонные, стальные и композитные конструкции.

Руководитель филиала компании «Дока Рус» в Санкт-Петербурге В. Дмитрук на примере сложных гидротехнических сооружений разобрал технологические нюансы применения индивидуальных опалубочных решений. Показал проекты сложных объектов — электростанций, пилонов, очистных сооружений и др.

Интерес вызвал доклад генерального директора НПП «Форт XXI» С. Дунчевской об опыте комплексного применения инновационных технологий при обследовании подводной части гидротехнических сооружений. В частности, была представлена технология применения телеуправляемых подводных аппаратов со специализированным оборудованием.

О применении стальной несъемной опалубки Proster® 21, принципе ее работы, монтаже и преимуществах рассказал И. Носков, генеральный директор компании «НПО 22».

Генеральный директор компании «Русинжект» А. Глуценко рассмотрел устройство гидроизоляции деформационных швов на гидротехнических объектах с использованием гидрофильных материалов Рокапур 33, 34, рассказал о применении специализированного оборудования и преимуществах гидрофильных систем.

Материалы конференции доступны на официальном сайте ассоциации [www.fc-union.com](http://www.fc-union.com).

(По материалам Международной Ассоциации Фундаментостроителей)