

**ФИЛИАЛ МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА В Г. ДУШАНБЕ**

**ФИЛИАЛИ ДОНИШГОҲИ ДАВЛАТИИ МОСКВА БА НОМИ
М.В. ЛОМОНОСОВ ДАР Ш. ДУШАНБЕ**

В Е С Т Н И К
**ФИЛИАЛА МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА В Г. ДУШАНБЕ**
(научный журнал)

СЕРИЯ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК

3(1) 2017

П А Ё М И
**ФИЛИАЛИ ДОНИШГОҲИ ДАВЛАТИИ МОСКВА БА НОМИ
М.В. ЛОМОНОСОВ ДАР Ш. ДУШАНБЕ**
(мачаллаи илмӣ)

БАХШИ ИЛМҲОИ ТАБИЙ

ДУШАНБЕ

**ФИЛИАЛ МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА В Г. ДУШАНБЕ**

**ФИЛИАЛИ ДОНИШГОҲИ ДАВЛАТИИ МОСКВА БА НОМИ
М.В. ЛОМОНОСОВ ДАР Ш. ДУШАНБЕ**

**НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ ОСНОВАН В 2016 ГОДУ.
МАҶАЛЛАИ ИЛМӢ СОЛИ 2016 ТАӢСИС ЁФТААСТ.**

Редакционный совет:

Садовничий Виктор Антонович - доктор физико-математических наук, профессор, академик РАН; Демидович Павел Николаевич - кандидат физико-математических наук, доцент; Мирзоев Сайъло Хабибуллоевич-кандидат физико-математических наук, доцент; Илолов Мамадшо-доктор физико-математических наук, профессор, академик АН РТ; Акбар Турсон - доктор философских наук, профессор, академик АН РТ.

Редакционная коллегия:

Главный редактор: Мирзоев Сайъло Хабибуллоевич-кандидат физико-математических наук, доцент;

Члены редколлегии:

Федянин Андрей Анатольевич - доктор физико-математических наук, профессор;
Пушаровский Дмитрий Юрьевич - доктор геолого-минералогических наук, профессор, академик РАН;
Чубариков Владимир Николаевич - доктор физико-математических наук, профессор;
Фарход Рахими - доктор физико-математических наук, профессор;
Илолов Мамадшо - доктор физико-математических наук, профессор;
Усмонов Зафар Джураевич - доктор физико-математических наук, профессор;
Шабозов Мирганд Шабозович - доктор физико-математических наук, профессор;
Рахмонов Зарулло Хусейнович - доктор физико-математических наук, профессор;
Муминов Хикмат Халимович - доктор физико-математических наук, профессор;
Халиков Джурабой Халикович - доктор химических наук, профессор;
Юнуси Махмадюсуф Камарзода - доктор физико-математических наук, профессор;
Пачаджанов Далер Набиджанович - доктор геолого-минералогических наук, профессор;
Файзиев Абдулхак Раджабович - доктор геолого-минералогических наук, профессор;
Комилов Файзали Саъдуллоевич - доктор физико-математических наук, профессор;
Умарова Татьяна Мухсиновна - доктор технических наук, доцент;
Демидович Павел Николаевич- кандидат физико-математических наук, доцент;
Реймерс Алексей Николаевич - кандидат геолого-минералогических наук, доцент;
Абдукаримов Махмадсалим Файзуллоевич - кандидат физико-математических наук;
Одинабеков Джасур Музофирович - кандидат физико-математических наук;
Шозиёев Гулмурод Парвонашоевич - кандидат физико-математических наук;
Широков Владимир Николаевич - кандидат геолого-минералогических наук, доцент;
Салихов Фарид Салохиддинович - кандидат геолого-минералогических наук.

*В журнале статьи печатаются на русском, таджикском и английском языках.
Дар маҷалла мақолаҳо бо забонҳои русӣ, тоҷикӣ ва англисӣ нашр мешаванд.*

СОДЕРЖАНИЕ - МУНДАРИЧА

МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА.....	5
Абдукаримов М.Ф. О ГРАНИЧНОМ УПРАВЛЕНИИ, ПРОИЗВОДИМОМ УПРУГОЙ СИЛОЙ НА ОДНОМ КОНЦЕ ПРИ ЗАКРЕПЛЕННОМ ВТОРОМ ПРОЦЕССА ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ, ЗА МАЛЫЕ ВРЕМЕНА.....	5
Джангибеков Г., Арабзода К. О ЯВНОМ РЕШЕНИИ ОДНОГО ДВУМЕРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ	19
Зарипов С.К. ОБ ОДНОМ КЛАССЕ МОДЕЛЬНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПРАВОЙ СИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ В ЯДРЕ	40
Икрамов Х.Д. ЗАМЕЧАНИЕ О КВАЗИНОРМАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ.....	51
Комилов Ф.С., Мирзоев С.Х. О ТЕХНОЛОГИЯХ ВЫРАЩИВАНИЯ ОПЫТНОГО НАГУЛЬНОГО РЫБОВОДНОГО ПРУДА.....	53
Мирзорахимов М.Х. ДВУХСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СОПРЯЖЕННОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ.....	60
ФИЗИКА И ТЕХНИКА.....	69
Латипова С.З., Галкин В.И., Шозиёев Г.П. ПОПЕРЕЧНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧЕРЕНКОВСКОГО СВЕТА ШИРОКИХ АТМОСФЕРНЫХ ЛИВНЕЙ ОТ РАЗЛИЧНЫХ ЯДЕР С ЭНЕРГИЕЙ 1 ПЭВ НА ВЫСОТЕ 4250М НАД УРОВНЕМ МОРЯ	69
Рахмонов Р.К., Ахмеджанова К.М., Зоирова З.О. ИЗУЧЕНИЕ КОНТУРА МАГНИТНОГО ПОЛЯ ПОСРЕДСТВОМ ДАТЧИКА ХОЛЛА ВОКРУГ КАТУШКИ, ПО КОТОРОМУ ТЕЧЕТ ТОК.....	75
Сафаров М.М., Мирзоев С.Х., Зарипова М.А., Гуломов М.М., Давлатов Б.Н., Собиров Дж.Ф., Файзиев Б.Г. МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛООТДАЧИ (число Био) НАНОКОМПОЗИТОВ.....	83
Тагоев С.А., Зоиров Х.А., Сафаров М.М. ВЯЗКОСТЬ ТУРБИННОГО МАСЛА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ	90
ХИМИЯ И ГЕОЛОГИЯ.....	94
Еремин Н.Н., Уланова А.С., Марченко Е.И. РАЗРАБОТКА МОДЕЛИ МЕЖАТОМНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ И АТОМИСТИЧЕСКОЕ	

МОДЕЛИРОВАНИЕ КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ СТРУКТУР МОНАЦИТОВ ЛЕГКИХ РЕДКОЗЕМЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ	94
Джалолов Ф.Н., Умарова Т.М. СИНТЕЗ И ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СПЛАВОВ СИСТЕМЫ Al-Fe (1,8%), МОДИФИЦИРОВАННЫХ ЕВРОПИЕМ	108
Пираков Г., Мирзоев Б., Факеров Г.М., Неъматзода Б. ГЕОЛОГИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ УГОЛЬНОГО МЕСТОРОЖДЕНИЯ ФАН-ЯГНОБ.....	113
Сайфуллоев К.Н., Умарова Т.М. СИНТЕЗ И ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СПЛАВОВ СИСТЕМЫ Al-Mn.....	119
Салихов Ф.С., Бахтдавлатов Р.Д., Бобоев С.Н. МЕДЕНОСНОСТЬ ПЕРМО- ТРИАСОВЫХ ОТЛОЖЕНИЙ ПРИГРАНИЧНЫХ ТЕРРИТОРИЙ ТАДЖИКИСТАНА, КЫРГЫЗСТАНА И КИТАЯ (ЗААЛАЙСКИЙ ХРЕБЕТ)	124

УДК 517.984.5

О ГРАНИЧНОМ УПРАВЛЕНИИ, ПРОИЗВОДИМОМ УПРУГОЙ СИЛОЙ НА ОДНОМ КОНЦЕ ПРИ ЗАКРЕПЛЕННОМ ВТОРОМ ПРОЦЕССА ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ, ЗА МАЛЫЕ ВРЕМЕНА

Абдукаримов М. Ф.

Филиал МГУ имени М. В. Ломоносова в г. Душанбе

В статье рассмотрена задача граничного управления упругой силой на одном конце при закреплённом втором процессе вынужденных колебаний струны. При $T \leq 2l$, где l – длина струны и T – момент времени, приведены соотношения, обеспечивающие однозначную разрешимость искомого граничного управления. Также получена явная аналитическая формула для его вычисления.

Ключевые слова: *граничное управление, процесс вынужденных колебаний струны, упругая сила, интегральное тождество.*

1⁰. Введение. В данной работе в терминах обобщенного решения неоднородного волнового уравнения $u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t)$, $0 < x < l$, $0 < t < T$, с конечной энергией изучается вопрос о граничном управлении, производимом упругой силой на конце $x=0$, процесса вынужденных колебаний струны при условии, что конец $x=l$ закреплён. Для случая $T \leq 2l$ установлены необходимые и достаточные условия существования единственного граничного управления $u_x(0,t) = \mu(t)$, переводящего процесс вынужденных колебаний струны из начального состояния $\{u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x)\}$ в финальное состояние $\{u(x,T) = \varphi_1(x), u_t(x,T) = \psi_1(x)\}$, и это граничное управление представлено в явном аналитическом виде.

Отметим, что аналогичная задача для процесса свободных колебаний, т.е. колебаний, описываемых однородным волновым уравнением, была рассмотрена в [1].

Для решения различных задач, связанных с граничными управлениями В.А.Ильин, Е.И.Моисеев и их ученики опубликовали целый ряд работ (см., например, [2-5]). Из более ранних работ, относящихся к данной тематике, приведем [6-9].

Ранее, опубликованные нами работы [10-19] также посвящены изучаемой тематике.

2⁰. Постановка задачи и необходимые определения. В прямоугольнике $Q_T = (0 \leq x \leq l) \times (0 \leq t \leq T)$ рассмотрим в обобщённой трактовке следующие задачи.

Смешанная задача I:

$$Lu \equiv u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = f(x, t) \quad \text{в } Q_T, \quad (1)$$

$$u_x(0, t) = \mu(t), \quad u(l, t) = 0 \quad \text{при } 0 \leq t \leq T, \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x) \quad \text{при } 0 \leq x \leq l, \quad (3)$$

в которой $f(x, t) \in L_2(Q_T)$, $\mu(t) \in L_2[0, T]$, $\varphi(x) \in W_2^1[0, l]$, $\psi(x) \in L_2[0, l]$ и выполнено условие согласования

$$\varphi(l) = 0 \quad (4)$$

Задача граничного управления II: (1), (2), (3) и финальное условие

$$u(x, T) = \varphi_1(x), \quad u_t(x, T) = \psi_1(x) \quad \text{при } 0 \leq x \leq l, \quad (5)$$

в которой $f(x, t) \in L_2(Q_T)$, $\varphi(x), \varphi_1(x) \in W_2^1[0, l]$, $\psi(x), \psi_1(x) \in L_2[0, l]$ и выполнено условия согласования (4) и $\varphi_1(l) = 0$.

Решение поставленных задач будем искать в классе $\hat{W}_2^1(Q_T)$, впервые введенном в работе [2]. Приведем определение этого класса.

Определение 1. Будем говорить, что функция двух переменных $u(x, t)$ принадлежит классу $\hat{W}_2^1(Q_T)$, если она непрерывна в замкнутом прямоугольнике Q_T и имеет в нем обобщенные частные производные первого порядка, каждая из которых принадлежит классу $L_2(Q_T)$, и кроме того, принадлежит классу $L_2[0 \leq x \leq l]$ при любом фиксированном $t \in [0, T]$ и принадлежит классу $L_2[0 \leq t \leq T]$ при любом фиксированном $x \in [0, l]$.

Естественность этого класса для рассматриваемых задач обоснована в [2].

Теперь дадим определения решений задач I и II.

Определение 2. Решением из класса $\hat{W}_2^1(Q_T)$ смешанной задачи I назовем функцию $u(x, t)$ из этого класса, которая удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned} & \int_0^l \int_0^T u(x, t) [\Phi_{tt}(x, t) - \Phi_{xx}(x, t)] dx dt + \int_0^l [\varphi(x) \Phi_t(x, 0) - \psi(x) \Phi(x, 0)] dx + \\ & + \int_0^T \mu(t) \Phi(0, t) dt - \int_0^l \int_0^T f(x, t) \Phi(x, t) dx dt = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

для произвольной функции $\Phi(x, t)$ из класса $\hat{W}_2^2(Q_T)$, подчиненной условиям $\Phi_x(0, t) \equiv 0$, $\Phi(l, t) \equiv 0$ при $0 \leq t \leq T$ и условиям $\Phi(x, T) \equiv 0$, $\Phi_t(x, T) \equiv 0$ при $0 \leq x \leq l$.

Определение 3. Решением из класса $\hat{W}_2^1(Q_T)$ задачи граничного управления II назовем решение $u(x, t)$ из этого класса смешанной задачи I, которое обеспечивает выполнение первого равенства (5) в классическом смысле, а второго равенства (5) – в смысле совпадения элементов $L_2[0, l]$.

3⁰. Вспомогательные утверждения. Из тождества (6) и схемы рассуждений, изложенной в работе [20], вытекает следующее

Утверждение 1. Для любого $T > 0$ смешанная задача I может иметь только одно решение из класса $\hat{W}_2^1(Q_T)$.

Рассмотрим теперь смешанную задачу I, у которой $\varphi(x) \equiv 0$ на сегменте $[0, l]$, $\psi(x) = 0$ почти всюду на $[0, l]$, а граничное значение $\mu(t)$ является произвольной функцией из класса $L_2[0, T]$. При этом в силу условия согласования (4) должно выполняться равенство $\mu(0) = 0$. Обозначим символом $\underline{\mu}(t)$ функцию, совпадающую с $\mu(t)$ при $0 \leq t \leq T$ и продолженную нулем при $t < 0$. Очевидно, что $\underline{\mu}(t) \in W_2^1[-\varepsilon, T]$, $\forall \varepsilon > 0$.

Утверждение 2. Пусть $T \leq 2l$. Тогда единственное решение $u(x, t)$ из класса $\hat{W}_2^1(Q_T)$ смешанной задачи I, при приведенных предположениях определяется равенством

$$u(x, t) = - \int_0^{t-x} \underline{\mu}(\tau) d\tau + \int_0^{t+x-2l} \underline{\mu}(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (7)$$

где подынтегральная функция f получена из функции правой части уравнения (1) соответственно четным и нечетным продолжением относительно границ $x=0$ и $x=l$ прямоугольника Q_T .

Доказательство. С помощью свойств функций $\underline{\mu}(t)$ и $f(x, t)$ тривиально проверяется, что при $T \leq 2l$ функция (7) удовлетворяет условию $u_x(0, t) = \mu(t)$ для почти всех $t \in [0, T]$, условию $u(l, t) = 0$ для любого $t \in [0, T]$ и первому начальному условию $u(x, 0) = 0 \quad \forall x \in [0, l]$, а второму начальному условию $u_t(x, 0) = 0$ - почти всюду на $[0, l]$. Поэтому достаточно убедиться в том, что она удовлетворяет тождеству (6), в котором $\varphi(x) \equiv 0 \quad \forall x \in [0, l]$, а $\psi(x)$ является нулевым элементом $L_2[0, l]$, т.е. соотношению

$$L_{u, f, \Phi} \equiv \int_0^l \int_0^T [u(x, t) L\Phi(x, t) - f(x, t) \Phi(x, t)] dx dt + \int_0^T \mu(t) \Phi(0, t) dt = 0 \quad (8)$$

для любой функции $\Phi(x, t)$ из определения 2. С помощью интегрирования по частям придадим левой части (8) следующий вид:

$$L_{u, f, \Phi} = \int_0^l \int_0^T [u_x(x, t) \Phi_x(x, t) - u_t(x, t) \Phi_t(x, t) - f(x, t) \Phi(x, t)] dx dt. \quad (9)$$

Итак, нам надо доказать, что правая часть (9) равна нулю. Обозначим через $\hat{f}(x, t)$ произвольную первообразную по x функции $f(x, t)$. Найдя из (7) с $u_x(x, t)$, $u_t(x, t)$ и подставляя их в правую часть (9), далее с помощью интегрирования по частям и с учетом свойств функций $\underline{\mu}(t)$ и $\Phi(x, t)$ получим:

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \left\{ \int_0^l [\underline{\mu}(t-x) + \underline{\mu}(t+x-2l)] \Phi_x(x,t) dx \right\} dt - \int_0^l \left\{ \int_0^T [-\underline{\mu}(t-x) + \underline{\mu}(t+x-2l)] \Phi_t(x,t) dt \right\} dx + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ \int_0^T \left(\int_0^t [f(x+t-\tau, \tau) - f(x-t+\tau, \tau)] d\tau \right) \Phi_x(x,t) dt \right\} dx - \\
& - \frac{1}{2} \int_0^T \left\{ \int_0^l \left(\int_0^t [f(x+t-\tau, \tau) + f(x-t+\tau, \tau)] d\tau \right) \Phi_t(x,t) dx \right\} dt - \int_0^l \int_0^T f(x,t) \Phi(x,t) dx dt = \\
& = \left[\int_0^T \Phi_x(x,t) \left(- \int_0^{t-x} \underline{\mu}(\tau) d\tau + \int_0^{t+x-2l} \underline{\mu}(\tau) d\tau \right) dt \right]_0^l - \int_0^l \int_0^T \left(- \int_0^{t-x} \underline{\mu}(\tau) d\tau + \int_0^{t+x-2l} \underline{\mu}(\tau) d\tau \right) \Phi_{xt}(x,t) dx dt - \\
& - \left[\int_0^l \Phi_t(x,t) \left(- \int_0^{t-x} \underline{\mu}(\tau) d\tau + \int_0^{t+x-2l} \underline{\mu}(\tau) d\tau \right) dx \right]_0^T + \int_0^l \int_0^T \left(- \int_0^{t-x} \underline{\mu}(\tau) d\tau + \int_0^{t+x-2l} \underline{\mu}(\tau) d\tau \right) \Phi_{tx}(x,t) dx dt - \\
& - \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^T \left(\int_0^t [\hat{f}(x+t-\tau, \tau) + \hat{f}(x-t+\tau, \tau)] d\tau \right) \Phi_{xt}(x,t) dx dt + \\
& + \int_0^T \left\{ \int_0^l \left(\int_0^t \hat{f}(x, \tau) d\tau \right) \Phi_{xt}(x,t) dx \right\} dt + \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^T \left(\int_0^t [\hat{f}(x+t-\tau, \tau) + \hat{f}(x-t+\tau, \tau)] d\tau \right) \Phi_{tx}(x,t) dx dt - \\
& - \int_0^l \int_0^T f(x,t) \Phi(x,t) dx dt = - \int_0^l \left\{ \int_0^T \left[\int_0^t f(x, \tau) d\tau \right] \Phi_t(x,t) dt \right\} dx - \int_0^l \int_0^T f(x,t) \Phi(x,t) dx dt = \\
& = \int_0^l \int_0^T f(x,t) \Phi(x,t) dx dt - \int_0^l \int_0^T f(x,t) \Phi(x,t) dx dt = 0.
\end{aligned}$$

Утверждение 2 доказано.

Повторяя рассуждения, приведенные в [1] можно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Утверждение 3. Для любого $T \leq 2l$ может существовать только одно решение из класса $\hat{W}_2^1(Q_T)$ задачи граничного управления II.

4⁰. Построение граничного управления при времени, меньшем или равном критическому¹. В этом разделе рассмотрим задачу граничного управления II в случае, когда момент времени T принадлежит полусегменту $(0, 2l]$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Для того чтобы при $T \leq 2l$ для наперед заданных пяти функций $\varphi(x), \varphi_1(x) \in W_2^1[0, l]$, $\psi(x), \psi_1(x) \in L_2[0, l]$ и $f(x, t) \in L_2(Q_T)$, существовало единственное решение задачи граничного управления II из класса $\hat{W}_2^1(Q_T)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись

1) условия закрепления $\varphi(l) = 0, \varphi_1(l) = 0$;

¹ Под термином «критический» понимается момент времени, при котором решение изучаемой задачи граничного управления существует и единственно при минимальных ограничениях. Для рассматриваемого случая критический момент времени является $T=2l$.

2) функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$ и $f(x,t)$ дополнительно удовлетворяли:

а) для случая $0 < T < l$ трем тождествам:

$$\hat{\psi}_1(t) + \varphi_1(t) - \hat{\psi}(t+T) - \varphi(t+T) - \int_0^T \hat{f}(t+T-\tau, \tau) d\tau \equiv 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq l-T, \quad (10)$$

$$\hat{\psi}_1(t) + \varphi_1(t) - \hat{\psi}(2l-T-t) + \varphi(2l-T-t) - \int_0^T \hat{f}(t+T-\tau, \tau) d\tau \equiv 0 \quad \text{при} \quad l-T \leq t \leq l, \quad (11)$$

$$\hat{\psi}_1(t) - \varphi_1(t) - \hat{\psi}(t-T) + \varphi(t-T) - \int_0^T \hat{f}(t-T+\tau, \tau) d\tau \equiv 0 \quad \text{при} \quad T \leq t \leq l, \quad (12)$$

в которых символами $\hat{\psi}(x)$, $\hat{\psi}_1(x)$ и $\hat{f}(x,t)$ обозначены соответственно первообразные функций $\psi(x)$, $\psi_1(x)$ и $f(x,t)$ по x , удовлетворяющие соотношениям

$$\hat{\psi}_1(0) + \varphi_1(0) - \hat{\psi}(T) - \varphi(T) - \int_0^T \hat{f}(T-\tau, \tau) d\tau = 0, \quad (13)$$

$$\hat{\psi}_1(l) - \varphi_1(l) - \hat{\psi}(l-T) + \varphi(l-T) - \int_0^T \hat{f}(l-T+\tau, \tau) d\tau = 0; \quad (14)$$

б) для случая $l \leq T < 2l$ тождеству

$$\hat{\psi}_1(t) + \varphi_1(t) - \hat{\psi}(2l-T-t) + \varphi(2l-T-t) - \int_0^T \hat{f}(t+T-\tau, \tau) d\tau \equiv 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq 2l-T, \quad (15)$$

в котором символами $\hat{\psi}(x)$, $\hat{\psi}_1(x)$ и $\hat{f}(x,t)$ обозначены соответственно первообразные функций $\psi(x)$, $\psi_1(x)$ и $f(x,t)$ по x , удовлетворяющие соотношению

$$\hat{\psi}_1(0) + \varphi_1(0) - \hat{\psi}(2l-T) + \varphi(2l-T) - \int_0^T \hat{f}(T-\tau, \tau) d\tau = 0. \quad (16)$$

При $T=2l$ необходимым и достаточным условиями существования единственного решения из класса $\hat{W}_2^1(Q_T)$ задачи граничного управления II является только требование 1) (см. [19]).

При выполнении этих условий решение указанной задачи дается формулой

$$u(x,t) = F(t+x) - F(t-x+2l) + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (17)$$

где функция $F(t)$ определяется выражениями

$$\frac{1}{2} [\hat{\psi}(t) + \varphi(t)] \quad \text{при} \quad 0 \leq t \leq l, \quad (18)$$

$$\frac{1}{2}[\hat{\psi}(2l-t) - \varphi(2l-t)] \quad \text{при } l \leq t \leq 2l, \quad (19)$$

$$\frac{1}{2} \left[\hat{\psi}_1(t-T) + \varphi_1(t-T) - \int_0^T \hat{f}(t-\tau, \tau) d\tau \right] \quad \text{при } T \leq t \leq T+l, \quad (20)$$

$$\frac{1}{2} \left[\hat{\psi}_1(2l+T-t) - \varphi_1(2l+T-t) - \int_0^T \hat{f}(2l-t+\tau, \tau) d\tau \right] \quad \text{при } T+l \leq t \leq T+2l. \quad (21)$$

в которых символы $\hat{\psi}(x)$, $\hat{\psi}_1(x)$ и $\hat{f}(x,t)$ обозначают соответственно первообразные функций $\psi(x)$, $\psi_1(x)$ и $f(x,t)$ по x , удовлетворяющие в случае $0 < T < l$ соотношениям (13) и (14), в случае $l \leq T < 2l$ соотношению (16), а в случае $T = 2l$ соотношению

$$\hat{\psi}_1(0) + \varphi_1(0) - \hat{\psi}(0) + \varphi(0) - \int_0^{2l} \hat{f}(\tau, \tau) d\tau = 0. \quad (22)$$

При этом искомое граничное управление $u_x(0,t) = \mu(t) \in L_2[0,T]$, переводящее процесс вынужденных колебаний из начального состояния (3) в финальное состояние (5), имеет следующий вид:

а) в случае $0 < T < l$

$$\mu(t) = \frac{1}{2} \left[\psi(t) + \varphi'(t) + \psi_1(T-t) - \varphi'_1(T-t) + \int_0^T f(\tau-t, \tau) d\tau \right];$$

б) в случае $l \leq T < 2l$

$$\mu(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\psi(t) + \varphi'(t) - \psi_1(2l-T+t) - \varphi'_1(2l-T+t) + \int_0^T f(t+2l-\tau, \tau) d\tau \right] & \text{при } 0 \leq t \leq T-l, \\ \frac{1}{2} \left[\psi(t) + \varphi'(t) + \psi_1(T-t) - \varphi'_1(T-t) + \int_0^T f(t-\tau, \tau) d\tau \right] & \text{при } T-l \leq t \leq l, \\ \frac{1}{2} \left[\varphi'(2l-t) - \psi(2l-t) + \psi_1(T-t) - \varphi'_1(T-t) + \int_0^T f(t-\tau, \tau) d\tau \right] & \text{при } l \leq t \leq T; \end{cases}$$

в) в случае $T=2l$

$$\mu(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\psi(t) + \varphi'(t) - \psi_1(t) - \varphi'_1(t) + \int_0^{2l} f(t+2l-\tau, \tau) d\tau \right] & \text{при } 0 \leq t \leq l, \\ \frac{1}{2} \left[\varphi'(2l-t) - \psi(2l-t) + \psi_1(2l-t) - \varphi'_1(2l-t) + \int_0^{2l} f(t-\tau, \tau) d\tau \right] & \text{при } l \leq t \leq 2l. \end{cases}$$

Доказательство необходимости. Необходимость требования 1) вытекает из граничного условия $u(l,t) \equiv 0 \quad \forall t \in [0,T]$. Перейдем к обоснованию

необходимости требования 2). Сначала рассмотрим частный случай, когда в задаче II $\varphi(x) \equiv 0$ на сегменте $[0, l]$, а $\psi(x) = 0$ почти всюду на $[0, l]$. В этом случае, если решение $u(x, t)$ из класса $\hat{W}_2^1(Q_T)$ задачи II существует, то оно является одновременно решением из того же класса смешанной задачи I, у которой $\varphi(x) \equiv 0$ на $[0, l]$, а $\psi(x)$ есть нулевой элемент $L_2[0, l]$. Единственное решение последней задачи в силу утверждения 2 представляется в виде (7).

Сначала будем рассматривать подслучай $0 < T < l$. Для него второй член в правой части равенства (7) является тождественным нулем для всех $x \in [0; l]$ и $t \in [0; T]$. Из получаемого соотношения имеем:

$$\psi_1(x) = -\underline{\mu}(T-x) + \frac{1}{2} \int_0^T [f(x+T-\tau, \tau) + f(x-T+\tau, \tau)] d\tau, \quad (23)$$

$$\varphi'_1(x) = \underline{\mu}(T-x) + \frac{1}{2} \int_0^T [f(x+T-\tau, \tau) - f(x-T+\tau, \tau)] d\tau, \quad (24)$$

которые выполнены для почти всех $x \in [0; l]$.

Из (23) и (24) вытекает справедливое в смысле равенства элементов $L_2[0; l]$ соотношение

$$\psi_1(x) + \varphi'_1(x) = \int_0^T f(x+T-\tau, \tau) d\tau. \quad (25)$$

Интегрируя (25) по x в пределах от нуля до t , получим справедливое для всех $t \in [0; l]$ соотношение

$$\hat{\psi}_1(t) + \varphi_1(t) - \int_0^T \hat{f}(t+T-\tau, \tau) d\tau = \hat{\psi}_1(0) + \varphi_1(0) - \int_0^T \hat{f}(T-\tau, \tau) d\tau, \quad (26)$$

в котором символами $\hat{\psi}_1(x)$ и $\hat{f}(x, t)$ обозначены пока произвольные первообразные соответственно функций $\psi_1(x)$ и $f(x, t)$ по x . Если мы потребуем, чтобы эти первообразные удовлетворяли условию

$$\hat{\psi}_1(0) + \varphi_1(0) - \int_0^T \hat{f}(T-\tau, \tau) d\tau = 0, \quad (27)$$

то получим справедливое для всех $t \in [0; l]$ тождество

$$\hat{\psi}_1(t) + \varphi_1(t) - \int_0^T \hat{f}(t+T-\tau, \tau) d\tau \equiv 0. \quad (28)$$

Теперь предположим, что $x \in [T; l]$. Вычитая из (23) равенство (24), получим соотношение

$$\psi_1(x) - \varphi'_1(x) = \int_0^T f(x-T+\tau, \tau) d\tau, \quad (29)$$

понимаемое как равенство элементов $L_2[T;l]$.

Интегрируя (29) по x в пределах от t до l , получим справедливое для всех $t \in [T;l]$ соотношение

$$\hat{\psi}_1(t) - \varphi_1(t) - \int_0^T \hat{f}(t-T+\tau, \tau) d\tau = \hat{\psi}_1(l) - \varphi_1(l) - \int_0^T \hat{f}(l-T+\tau, \tau) d\tau, \quad (26)$$

в котором $\hat{\psi}_1(x)$ и $\hat{f}(x,t)$ - пока произвольные первообразные соответственно функций $\psi_1(x)$ и $f(x,t)$ по x . Если мы потребуем, чтобы эти первообразные удовлетворяли условию

$$\hat{\psi}_1(l) - \varphi_1(l) - \int_0^T \hat{f}(l-T+\tau, \tau) d\tau = 0, \quad (31)$$

то получим справедливое для всех $t \in [T;l]$ тождество

$$\hat{\psi}_1(t) - \varphi_1(t) - \int_0^T \hat{f}(t-T+\tau, \tau) d\tau \equiv 0. \quad (32)$$

Рассмотрение подслучая $0 < T < l$ завершено. Переходим к рассмотрению подслучая $l \leq T < 2l$. На этот раз из (7) мы получим соотношение

$$\psi_1(x) = -\underline{\mu}(T-x) + \underline{\mu}(T+x-2l) + \frac{1}{2} \int_0^T [f(x+T-\tau, \tau) + f(x-T+\tau, \tau)] d\tau, \quad (33)$$

справедливое для почти всех $x \in [0;l]$.

Проинтегрировав (33) по x в пределах от нуля до t , мы получим, что для любого $t \in [0;2l-T]$ справедливо соотношение

$$\hat{\psi}_1(t) - \hat{\psi}_1(0) = - \int_{T-t}^T \underline{\mu}(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^T \hat{f}(t+T-\tau, \tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^T \hat{f}(t-T+\tau, \tau) d\tau, \quad (34)$$

в котором символами $\hat{\psi}_1(x)$ и $\hat{f}(x,t)$ обозначены пока произвольные первообразные соответственно функций $\psi_1(x)$ и $f(x,t)$ по x .

Из равенства (7) при $x=t, t=T$ и $x=0, t=T$ вытекает соответственно следующие равенства:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= - \int_0^{T-t} \underline{\mu}(\tau) d\tau + \frac{1}{2} \int_0^T \hat{f}(t+T-\tau, \tau) d\tau - \frac{1}{2} \int_0^T \hat{f}(t-T+\tau, \tau) d\tau, \\ \varphi_1(0) &= - \int_0^T \underline{\mu}(\tau) d\tau + \int_0^T \hat{f}(T-\tau, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Из последних двух равенств и равенства (34), получим:

$$\hat{\psi}_1(t) + \varphi_1(t) - \int_0^T \hat{f}(t+T-\tau, \tau) d\tau = \hat{\psi}_1(0) + \varphi_1(0) - \int_0^T \hat{f}(T-\tau, \tau) d\tau. \quad (35)$$

Из (35) вытекает, что если через $\hat{\psi}_1(x)$ и $\hat{f}(x,t)$ обозначить те первообразные функций $\psi_1(x)$ и $f(x,t)$ по x , которые удовлетворяют соотношению вида (27), то для всех $t \in [0; 2l - T]$ будет справедливо тождество вида (28). Тем самым, для частного случая, когда $\varphi(x) \equiv 0$ на сегменте $[0, l]$, а $\psi(x) = 0$ почти всюду на $[0, l]$, необходимость требования 2) доказана.

Рассмотрим теперь общий случай, когда $\varphi(x)$ является произвольной функцией из класса $W_2^1[0, l]$, удовлетворяющей условию $\varphi(l) = 0$, а $\psi(x)$ - произвольный элемент пространства $L_2[0, l]$.

Продолжим функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ сначала на сегмент $[l, 2l]$ нечетно относительно точки $x=l$, а затем на сегмент $[-l, 0]$ в подслучае $0 < T < l$ и на сегменты $[-2l, 0]$ и $[2l, 3l]$ в подслучае $l \leq T \leq 2l$ так, чтобы $\varphi(x) \in W_2^1[-l, 2l]$, $\psi(x) \in L_2[-l, 2l]$ в подслучае $0 < T < l$ и $\varphi(x) \in W_2^1[-2l, 3l]$, $\psi(x) \in L_2[-2l, 3l]$ в подслучае $l \leq T < 2l$ и в этом последнем подслучае функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ оставались нечетными относительно точки $x=l$ в пределах сегмента $[-l, 3l]$.

Продолжим также функцию $f(x,t)$ по первой переменной чётно относительно точки $x=0$ на сегмент $[-l, 0]$ и нечётно относительно точки $x=l$ на $[l, 2l]$.

С так продолженными функциями $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x,t)$ рассмотрим функцию

$$v(x,t) = \tilde{v}(x,t) + \frac{1}{2} \int_0^t [\hat{f}(x+t-\tau, \tau) - \hat{f}(x-t+\tau, \tau)] d\tau, \quad (36)$$

в которой $\tilde{v}(x,t) = \frac{1}{2} [\varphi(x+t) + \varphi(x-t) + \hat{\psi}(x+t) - \hat{\psi}(x-t)]$, а $\hat{\psi}(x)$ и $\hat{f}(x,t)$ обозначают пока произвольные первообразные соответственно функций $\psi(x)$ и $f(x,t)$ по x .

Заметим, что эти первообразные будут четными относительно точки $x=l$ функциями в пределах сегмента $[0, 2l]$ в подслучае $0 < T < l$ и в пределах сегмента $[-l, 3l]$ в подслучае $l \leq T < 2l$.

Убедимся в том, что функция (36) в обоих случаях является обобщенным решением из класса $\hat{W}_2^1(Q_T)$ смешанной задачи типа I, у которой $v(x, 0) = \varphi(x) \quad \forall x \in [0, l]$, $v_t(x, 0) = \psi(x)$ почти всюду на $[0, l]$, $v(l, t) \equiv 0 \quad \forall t \in [0, T]$, а граничное значение $v_x(0, t) = \mu(t)$ берётся из (36). Нужно только доказать, что

она удовлетворяет интегральному тождеству (6), в котором $u(x,t)$ и $\mu(t)$ заменены соответственно на $v(x,t)$ и $v_x(0,t)$ для любой фигурирующей в определении 2 функции $\Phi(x,t)$.

С помощью интегрирования по частям перепишем (6) в виде

$$\int_0^l \int_0^T [v_x(x,t)\Phi_x(x,t) - v_t(x,t)\Phi_t(x,t)] dx dt - \int_0^l \int_0^T f(x,t)\Phi(x,t) dx dt = \int_0^l v_t(x,0)\Phi(x,0) dx. \quad (37)$$

В [1] показано, что функция $\tilde{v}(x,t)$ удовлетворяет соотношению (37) в случае, когда в нем отсутствует $\int_0^l \int_0^T f(x,t)\Phi(x,t) dx dt$. Поэтому нам достаточно доказать, что для интегрального слагаемого, стоящего в правой части (36), справедливо (37), но это уже сделано при доказательстве утверждения 2.

Таким образом, функция (36) является обобщенным решением из класса $\hat{W}_2^1(Q_T)$ смешанной задачи типа I. Отсюда следует, что разность $[u(x,t) - v(x,t)]$ удовлетворяет всем требованиям рассмотренного выше частного случая. Поэтому для неё будут справедливы тождества вида (28) и (32) с условиями (27) и (31) для определения первообразных в подслучае $0 < T < l$ и тождество вида (28) с условием для определения первообразных (27) подслучае $l \leq T < 2l$. Эти тождества имеют следующий вид:

а) в случае $0 < T < l$:

$$[\hat{\psi}_1(t) - \hat{v}_t(t, T)] + [\varphi_1(t) - v(t, T)] \equiv 0 \quad \text{при } 0 \leq t \leq l, \quad (38)$$

$$[\hat{\psi}_1(t) - \hat{v}_t(t, T)] - [\varphi_1(t) - v(t, T)] \equiv 0 \quad \text{при } T \leq t \leq l \quad (39)$$

со справедливыми соотношениями

$$[\hat{\psi}_1(0) - \hat{v}_t(0, T)] + [\varphi_1(0) - v(0, T)] = 0, \quad (40)$$

$$[\hat{\psi}_1(l) - \hat{v}_t(l, T)] - [\varphi_1(l) - v(l, T)] = 0, \quad (41)$$

б) $l \leq T < 2l$:

$$[\hat{\psi}_1(t) - \hat{v}_t(t, T)] + [\varphi_1(t) - v(t, T)] \equiv 0 \quad \text{при } 0 \leq t \leq 2l - T \quad (42)$$

со справедливым соотношением

$$[\hat{\psi}_1(0) - \hat{v}_t(0, T)] + [\varphi_1(0) - v(0, T)] = 0, \quad (43)$$

в которых символ $\hat{v}_t(x, t)$ обозначает первообразную функции $v_t(x, t)$ по x и определяется равенством

$$\begin{aligned} \hat{v}_t(x, t) = & \frac{1}{2} [\varphi(x+t) - \varphi(x-t) + \hat{\psi}(x+t) + \hat{\psi}(x-t) + \\ & + \int_0^t [\hat{f}(x+t-\tau, \tau) + \hat{f}(x-t+\tau, \tau)] d\tau]. \end{aligned} \quad (44)$$

Равенства (36) и (44) позволяют переписать (38) - (43) в следующем виде:

$$\hat{\psi}_1(t) + \varphi_1(t) - \varphi(t+T) - \hat{\psi}(t+T) - \int_0^T \hat{f}(t+T-\tau, \tau) d\tau \equiv 0 \quad \text{при } 0 \leq t \leq l, \quad (45)$$

$$\hat{\psi}_1(t) - \varphi_1(t) + \varphi(t-T) - \hat{\psi}(t-T) - \int_0^T \hat{f}(t-T+\tau, \tau) d\tau \equiv 0 \quad \text{при } T \leq t \leq l$$

со справедливыми соотношениями

$$\hat{\psi}_1(0) + \varphi_1(0) - \varphi(T) - \hat{\psi}(T) - \int_0^T \hat{f}(T-\tau, \tau) d\tau = 0 \quad \text{при } 0 \leq t \leq l,$$

$$\hat{\psi}_1(l) - \varphi_1(l) + \varphi(l-T) - \hat{\psi}(l-T) - \int_0^T \hat{f}(l-T+\tau, \tau) d\tau = 0 \quad \text{при } T \leq t \leq l;$$

$$\hat{\psi}_1(t) + \varphi_1(t) - \varphi(t+T) - \hat{\psi}(t+T) - \int_0^T \hat{f}(t+T-\tau, \tau) d\tau \equiv 0 \quad \text{при } 0 \leq t \leq 2l-T \quad (46)$$

со справедливым соотношением

$$\hat{\psi}_1(0) + \varphi_1(0) - \varphi(T) - \hat{\psi}(T) - \int_0^T \hat{f}(T-\tau, \tau) d\tau = 0 \quad \text{при } 0 \leq t \leq l. \quad (47)$$

Таким образом, для установления справедливости соотношений (10) - (16) нам остается заметить, что так как относительно точки $x=l$ функция $\varphi(x)$ является нечетной, а функция $\hat{\psi}(x)$ - четной, то всякий раз, когда аргумент $t+T$ или T больше или равен l , справедливы равенства $\varphi(t+T) = -\varphi(2l-T-t)$ и $\hat{\psi}(t+T) = \hat{\psi}(2l-t-T)$. Отсюда следует, что тождество (45) должно быть переписано в виде двух тождеств (10) и (11), а тождество (46) и соотношение (47) должны быть переписаны в виде (15) и (16). Необходимость соотношений (10) - (12) и (15) полностью доказана.

Доказательство достаточности. Для того чтобы доказать, что функция $u(x, t)$, определяемая равенством (17), принадлежит классу $\hat{W}_2^1(Q_T)$, достаточно убедиться в том, что функция $F(t)$, определяемая соотношениями (18) - (21), принадлежит классу $W_2^1[0, T+2l]$. Соотношения (18) - (21) позволяют утверждать, что функция $F(t)$ принадлежит классу W_2^1 на каждом из сегментов $[0, l]$, $[l, 2l]$, $[T, T+l]$ и $[T+l, T+2l]$.

Поэтому в случае $0 < T < l$, т. е. когда $0 < T < l < T+l < 2l < T+2l$, для доказательства принадлежности $F(t)$ классу $W_2^1[0, T+2l]$ достаточно показать, что: 1) значения $F(t)$, определяемые равенствами (18) и (20), совпадают между собой при $T \leq t \leq l$; 2) значения $F(t)$, определяемые равенствами (19) и (20),

совпадают между собой при $l \leq t \leq T+l$; 3) значения $F(t)$, определяемые равенствами (19) и (21), совпадают между собой при $T+l \leq t \leq 2l$. Но это сразу вытекает из тождеств (10) – (12).

В случае $l \leq T \leq 2l$, то есть когда $0 < l \leq T \leq 2l \leq T+l \leq 3l \leq T+2l$, для доказательства принадлежности $F(t)$ классу $W_2^1[0, T+2l]$ достаточно убедиться в том, что: 1) значения $F(l)$, определяемые из равенств (18) и (19), совпадают между собой; 2) значения $F(T+l)$, определяемые из равенств (20) и (21), совпадают между собой; 3) в случае $l \leq T < 2l$, значения $F(t)$, определяемые из равенств (19) и (20), совпадают между собой при $T \leq t \leq 2l$; 4) в случае $T=2l$ значения $F(2l)$, определяемые из равенств (19) и (20), совпадают между собой. Но 1) и 2) проверяются непосредственно из соотношений (18) – (21), справедливость 3) сразу вытекает из тождества (15), а справедливость 4) - из соотношения (22).

Итак, $F(t)$ принадлежит классу $W_2^1[0, T+2l]$ и поэтому функция $u(x, t)$, определяемая равенством (17), принадлежит классу $\hat{W}_2^1(Q_T)$.

С помощью соотношений (18) – (21) легко проверяется, что для всех $x \in [0, l]$ справедливы равенства $u(x, 0) = \varphi(x)$, $u(x, T) = \varphi_1(x)$ и для почти всех $x \in [0, l]$ - равенства $u_t(x, 0) = \psi(x)$, $u_t(x, T) = \psi_1(x)$.

Остается доказать, что для функции $u(x, t)$, определяемой равенством (17) и для граничного управления $u_x(0, t) = \mu(t)$, взятого как указано в условии теоремы, справедливо тождество (6) для произвольной функции $\Phi(x, t)$ из определения 2.

В силу (37) достаточно доказать справедливость соотношения

$$\int_0^l \int_0^T [u_x(x, t) \Phi_x(x, t) - u_t(x, t) \Phi_t(x, t)] dx dt - \int_0^l \int_0^T f(x, t) \Phi(x, t) dx dt = \int_0^l \psi(x) \Phi(x, 0) dx. \quad (48)$$

Отметим, что справедливость соотношения (48) для функции (17) без интегрального слагаемого, стоящего в ее правой части, установлена в [1]. Поэтому нам достаточно доказать, что для указанного интегрального слагаемого справедливо соотношение (48), в котором правая часть отсутствует, а это уже показано в процессе доказательства утверждения 2. Теорема полностью доказана.

Замечание. Полученные результаты можно использовать при исследовании аналогичных задач для телеграфного уравнения с переменным коэффициентом вида

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) - q(x, t)u(x, t) = f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < T.$$

Литература

1. Никитин А.А. Граничное управление упругой силой на одном конце струны / А.А.Никитин // ДАН России. –2006. –Т.406. – №4. – С. 458-461.
2. Ильин В.А. Граничное управление процессом колебаний на двух концах в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией / В.А.Ильин // Дифференциальные уравнения. –2000. – Т. 36. – №11. – С. 1513-1528.
3. Ильин В. А. Минимизация за произвольный достаточно большой промежуток времени T интеграла от модуля производной производимого смещением граничного управления, возведенного в произвольную степень $p \geq 1$. / В. А. Ильин, Е. И. Моисеев // Дифференциальные уравнения. – 2006. –Т. 42. – №11. –С. 1558-1570.
4. Моисеев Е.И. Оптимальное граничное управление смещением колебаниями струны с нелокальным условием нечетности первого рода / Е.И. Моисеев, А.А.Холмеева // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т. 46. – №11. – С. 1623-1630.
5. Никитин А.А. Оптимизация граничного управления, производимого третьим краевым условием / А.А.Никитин, А.А.Кулешов // Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т. 44. – №5. – С. 681-690.
6. Lions J.L. Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems / J. L. Lions // SIAM Review. – 1988. – V. 30. – № 1. – P. 1-68.
7. Бутковский А. Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами: монография / А.Г.Бутковский. – М.: Наука, 1985.
8. Егоров А.Е. Управление упругими колебаниями / А.Е. Егоров // ДАН УССР. Сер. Физ-мат. и техн. Наук. – 1986. – №5. – С. 60-63.
9. Приближенное решение двойственных задач управления и наблюдения: монография / Ф.П.Васильев, М.А.Куржанский, М.М.Потапов, А.В.Разгулин. – М.: Макс пресс, 2010.
10. Абдукаримов М.Ф. Граничное управление процессом колебаний, описываемым неоднородным волновым уравнением / М.Ф.Абдукаримов // Известия АН РТ. – 2011. – №3(144). – С. 33-40.
11. Abdugarimov M. F. On a boundary control problem for forced string oscillations / M.F.Abdugarimov // Azerbaijan journal of mathematics. – 2012. V. 2. – №2. – P. 105-116.
12. Абдукаримов М.Ф. О граничном управлении на двух концах вынужденными колебаниями струны / М.Ф.Абдукаримов // ДАН РТ. – 2012. – Т. 55. – №4. – С. 291-299.

13. Абдукаримов М.Ф. О граничном управлении смещением на одном конце при закрепленном втором процесса вынужденных колебаний струны / М.Ф.Абдукаримов // Сборник статей молодых ученых факультета ВМК МГУ. – 2013. – №10. – С. 7-33.
14. Абдукаримов М.Ф. Задача граничного управления для одномерного уравнения Клейна – Гордона – Фока с переменным коэффициентом. Случай управления смещением на одном конце при закрепленном втором / М.Ф.Абдукаримов, Л.В.Крицков // Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т. 49. – №6. – С.759-771.
15. Абдукаримов М.Ф. Задача граничного управления для одномерного уравнения Клейна – Гордона – Фока с переменным коэффициентом. Случай управления смещениями на двух концах / М.Ф.Абдукаримов, Л.В.Крицков // Дифференциальные уравнения. – 2013. – Т. 49. – №8. – С. 1036-1046.
16. Абдукаримов М.Ф. Граничное управление на одном конце при свободном втором для процесса, описываемого телеграфным уравнением с переменным коэффициентом / Л.В.Крицков, М.Ф.Абдукаримов // ДАН России. – 2013. – Т.450. – №6. – С. 640-643.
17. Abdukarimov M.F. Boundary control by the displacement for the telegraph equation with a variable coefficient and the Neumann boundary condition / L.V.Kritskov, M.F.Abdukarimov // Caspian journal of applied mathematics, ecology and economics. – 2013. – V.1. – №1. P. 51-69.
18. Абдукаримов М. Ф. Об оптимальном граничном управлении процесса вынужденных колебаний смещением на одном конце струны при закрепленном втором / М.Ф.Абдукаримов // Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т. 50. – №5. – С. 680-691.
19. Абдукаримов М.Ф. О граничном управлении упругой силой на одном конце при закрепленном втором процесса вынужденных колебаний струны / М.Ф.Абдукаримов // ДАН РТ. – 2015. – Т. 58. – №10. – С. 894-900.
20. Ильин В.А. О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений / В.А.Ильин // Успехи математических наук. – 1960. – Т. 15. – вып.2(92). – С. 97-154.

**ДОИР БА ИДОРАКУНИИ САРҲАДИИ РАВАНДИ ЛАПИШҲОИ МАҶБУРӢ БО
ЁРИИ ҚУВВАИ ЧАНДИРИИ АВВАЛИ ТОР ҲАНГОМИ МУСТАҲКАМ БУДАНИ
ОХИРИ ОН ДАР ВАҚТҲОИ ХУРД**

Абдукаримов М.Ф.

Филиали ДДМ ба номи М.В.Ломоносов дар ш.Душанбе

Дар мақола масъалаи идоракунии сарҳадии раванди лапишҳои маҷбурӣ тавассути қувваи чандирии аввали тор ҳангоми мустаҳкам будани охири он дида баромада шудааст. Ҳангоми $T \leq l$ будан, ки дар ин ҷо l - дарозии тор ва T - лаҳзаи вақт мебошад, муносибатҳое оварда шудаанд, ки яққимата ҳалшавандагии идоракунии сарҳадии ҷустуҷӯшавандаро таъмин менамоянд. Инчунин, барои ҳисоби он формулаи аналитикии ошкор ҳосил карда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: идоракунии сарҳадӣ, раванди лапишҳои маҷбурии тор, қувваи чандирӣ, айнияти интегралӣ.

ON THE BOUNDARY CONTROL PRODUCED BY AN ELASTIC FORCE PROCESS AT ONE END OF THE SECOND IS FIXED THE FORCED STRINGS OSCILLATIONS FOR SMALL TIMES

Abdulkarimov M.F.

Dushanbe branch of Lomonosov Moscow State University

In this article we consider the problem of boundary control of the elastic force at one end with the second fixed the process of forced vibrations of a string. When $T \leq 2l$, where l - length of the string and the T - point in time, given the ratio, ensuring the unique solubility of the desired boundary control. Explicit analytical formula to calculate it is also obtained.

Key words: boundary control, process of forced vibrations of a string, the elastic force, the integral identity.

Сведения об авторе. Абдукаримов Махмадсалим Файзуллоевич – кандидат физико-математических наук, заместитель исполнительного директора филиала МГУ имени М. В. Ломоносова в городе Душанбе. Телефон: 919 96 24 44. E-mail: mahmadsalim_86@mail.ru

УДК 517.968.2

О ЯВНОМ РЕШЕНИИ ОДНОГО ДВУМЕРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Джангибеков Г., Арабзода К.

Таджикский национальный университет

В работе найдено явное решение одного двумерного интегрального уравнения в серии весовых банаховых пространств функций $\tilde{E}^\beta(|z| < 1)$, где интеграл понимается в специальном смысле, а также в обычном смысле главного значения по Коши

Ключевые слова: сингулярные интегральные операторы, ограниченные операторы, ряд Фурье, коэффициенты Фурье.

В работе [1] дано исследование интегрального уравнения

$$f(z) - \frac{\lambda}{\pi} \frac{z}{z} \iint_{|\zeta| < 1} \frac{f(\zeta) dS_\zeta}{(\zeta - z)^2} = g(z), \quad |z| \leq 1, \quad (1)$$

где $z = x + iy = r \exp(i\varphi)$, $\zeta = \xi + i\eta = \rho \exp(i\alpha)$, $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ – произвольный комплексный параметр, ds_ζ – элемент площади, интеграл наряду с обычным главным значением по Коши (когда он понимается как предел интеграла по области с вырезанным кругом с центром в точке z), также понимается в специальном смысле. Предполагается, что $f(z)$ и $g(z)$ в области $|z| \leq 1$ принадлежат одному из серии специально построенных банаховых пространств функций $\tilde{E}_\beta : \tilde{C}_\beta, \tilde{C}_\beta^0, \tilde{M}_\beta, \tilde{L}_{\beta-2/p}^p, 0 < \beta < 2, 1 < p < \infty$ (определение см. в [1]).

Доказано, что картина разрешимости (1) зависит от значений параметров λ и β , и конечно от того, в каком смысле понимается интеграл из (1). В настоящей заметке, опираясь на эти результаты, мы даем явное решение интегрального уравнения (1) в серии пространств функций $\tilde{E}_\beta (|z| < 1)$.

1. Уравнение (1) со специальным определением интеграла.

Рассмотрим уравнение (1) со следующим определением интеграла

$$\frac{1}{\pi} \frac{z}{z} \iint_{|\zeta| < 1} \frac{f(\zeta) ds_\zeta}{(\zeta - z)^2} \equiv \frac{1}{\pi} \frac{z}{z} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \iint_{|\zeta| < |z| - \varepsilon} + \iint_{|z| + \varepsilon < |\zeta| \leq 1} \right\}, \quad (2)$$

где $0 < |z| < 1$, $f(z)$ – суммируемая функция. В точках $z = 0, |z| = 1$ левая часть (2) доопределяется своими предельными значениями, если они существуют. В дальнейшем оператор, определенный равенством (2), будем обозначать через $(Qf)(z)$, а уравнение (1) с этим оператором обозначим через (1_1) . В этом пункте рассматривается уравнение

$$f(z) - \lambda(Qf)(z) = g(z). \quad (1_1)$$

Прежде всего докажем, что имеет место

Лемма 1. Если в (1) функция $f(\zeta)$ удовлетворяет условию Гельдера, то интеграл существует в смысле определения (2) для всякого $z \neq 0$.

Доказательство. Пусть z внутренняя точка

$$\frac{z}{z} \iint_{|\zeta| < 1} \frac{f(\zeta) ds_\zeta}{(\zeta - z)^2} = \frac{z}{z} \iint_{|\zeta| < 1} \frac{(f(\zeta) - f(z)) ds_\zeta}{(\zeta - z)^2} + f(z) \frac{z}{z} \iint_{|\zeta| < 1} \frac{ds_\zeta}{(\zeta - z)^2}.$$

Первый интеграл существует в обычном смысле, а второй интеграл

$$\frac{1}{\pi} \frac{z}{z} \iint_{|\zeta| < 1} \frac{ds_\zeta}{(\zeta - z)^2} \equiv \frac{1}{\pi} \frac{z}{z} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \iint_{|\zeta| < |z| - \varepsilon} + \iint_{|z| + \varepsilon < |\zeta| \leq 1} \right\}.$$

Производя замену $\zeta = \sigma z$ и переходя к полярным координатам $\sigma = \tau \exp(i\gamma)$, получим

$$\frac{1}{\pi} \frac{z}{z} \iint_{|\zeta| < |z| - \varepsilon} \frac{ds_\zeta}{(\zeta - z)^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{1-\frac{\varepsilon}{|z|}} \tau d\tau \int_0^{2\pi} \frac{d\gamma}{(\tau e^{i\gamma} - 1)^2}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{\pi} \frac{z}{z} \iint_{|\zeta| < |z| - \varepsilon} \frac{ds_\zeta}{(\zeta - z)^2} = 2 \int_0^{1 - \frac{\varepsilon}{|z|}} \tau d\tau = (1 - \frac{\varepsilon}{|z|})^2$$

и существует предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{z}{z} \iint_{|\zeta| < |z| - \varepsilon} \frac{ds_\zeta}{(\zeta - z)^2} = 1.$$

Этот предел существует и для z лежащего на границе, т.е. $|z| = 1$. Далее

$$\frac{1}{\pi} \frac{z}{z} \iint_{|z| + \varepsilon < |\zeta| < 1} \frac{ds_\zeta}{(\zeta - z)^2} = \frac{1}{\pi} \int_{1 + \frac{\varepsilon}{|z|}}^{\frac{1}{|z|}} \tau d\tau \int_0^{2\pi} \frac{d\gamma}{(\tau e^{i\gamma} - 1)^2} = 0.$$

Если z лежит на границе, то исходя из существования первого предела, исходный предел нужно понимать как его предел.

Таким образом, при $z \neq 0$

$$\frac{z}{z\pi} \iint_{|\zeta| < 1} \frac{f(\zeta) ds_\zeta}{(\zeta - z)^2} = \frac{z}{z\pi} \iint_{|\zeta| < 1} \frac{(f(\zeta) - f(z)) ds_\zeta}{(\zeta - z)^2} + f(z).$$

Это фактически означает, что интеграл в круге может рассматриваться как повторный интеграл.

Лемма 2. Если $f(z) \in \tilde{E}_\beta (|z| < 1)$, то интеграл в смысле (2) существует (для $f \in \tilde{L}_{\beta-2/p}^p (|z| < 1)$ почти при всех $r, 0 < r < 1$), сходится равномерно относительно $\varphi = \arg z$ и определяет оператор $(Qf)(z)$ ограниченный в $\tilde{E}_\beta (|z| < 1)$, причем

$$\|Q\|_{\tilde{E}_\beta} \leq \begin{cases} \frac{2}{\beta}, & \text{при } 0 < \beta \leq 1, \\ \frac{2}{2 - \beta}, & \text{при } 1 \leq \beta < 2. \end{cases}$$

Доказательство. а). Случай $f(z) \in \tilde{L}_p (|z| < 1), 1 < p < \infty$.

Представим функцию $f(\zeta)$ в виде её ряда Фурье по углу $\alpha = \arg \zeta$

$$f(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k(\rho) e^{ik\alpha}, \quad f_k(\rho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho e^{i\alpha}) e^{-ik\alpha} d\alpha. \quad (3)$$

Прежде всего покажем, что ряд (3) сходится при почти всех ρ равномерно относительно α . Он сходится также в норме $\tilde{L}_p (|\zeta| < 1)$ и $L_p (|\zeta| < 1)$, если $f_k(\rho)$

таковы, что $\rho^{\frac{1}{p}} f_k(\rho) \in L_p(0, 1)$.

Действительно для всякой функции $f(\zeta) \in \tilde{L}_p (|\zeta| < 1), p > 1$, сходится ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_0^1 \rho |f_k(\rho)| d\rho,$$

что следует из неравенства

$$\int_0^1 |\rho f_k(\rho)| d\rho \leq \left\{ \int_0^1 |\rho^{\frac{1}{p}} f_k(\rho)|^p d\rho \right\}^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_0^1 \rho^{(1-\frac{1}{p})q} d\rho \right\}^{\frac{1}{q}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{q}}} \|f_k\|_{L^p_{\frac{1}{p}}(0,1)} < \infty.$$

Отсюда следует, что почти для всех ρ сходится ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |f_k(\rho)| d\rho$, откуда в свою очередь вытекает равномерная сходимость ряда Фурье функции $f(\zeta)$ почти для всех ρ относительно α .

Далее, если $f_k(r)$ таковы, что $\rho^{\frac{1}{p}} f_k(\rho) \in L_p(0,1)$ и

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^1 |\rho^{\frac{1}{p}} f_k(\rho)|^p d\rho \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad (4)$$

то ряд (3) сходится в смысле $L_p(|z| < 1)$ к некоторой функции $f(\zeta)$, для которой $f_k(\rho)$ являются коэффициентами Фурье. Действительно сходимость вытекает непосредственно из сходимости ряда (4), а возможность почленного интегрирования по α следует из равномерной относительно α сходимости почти для всех ρ .

Итак, рассмотрим оператор

$$\omega(z) = (Qf)(z) = \frac{z}{z\pi} \iint_{|\zeta| < 1} \frac{f(\zeta) ds_{\zeta}}{(\zeta - z)^2}, \quad (5)$$

где интеграл понимается в смысле (2). Прежде всего докажем, что интеграл (5) существует для всех φ , при почти всех r , причем сходится равномерно относительно φ и дает непрерывную функцию по φ . Подставляя ряд (3) в (5), производя замену $\zeta = \sigma z$, $\sigma = \tau \exp i\gamma$, $\rho = \tau$, $\alpha = \gamma + \varphi$, получим

$$\omega(z) = (Qf)(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{1-\frac{\varepsilon}{|z|}} \tau d\tau \int_0^{2\pi} \frac{\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k(\tau) e^{ik(\gamma+\varphi)} d\gamma}{(\tau e^{i\gamma} - 1)^2} + \int_{1+\frac{\varepsilon}{|z|}}^1 \tau d\tau \int_0^{2\pi} \frac{\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k(\tau) e^{ik(\gamma+\varphi)} d\gamma}{(\tau e^{i\gamma} - 1)^2} \right\}.$$

Поскольку ряд (3) почти при всех ρ сходится равномерно относительно α , то ряды, стоящие под знаками интегралов можно почленно интегрировать по γ . В результате будем иметь

$$\begin{aligned} \omega(z) = (Qf)(z) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ 2 \int_0^{r-\varepsilon} \sum_{k=-\infty}^0 (1-k) e^{ik\varphi} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{1-k} \frac{1}{r} f_k(\rho) d\rho + \right. \\ &\quad \left. + 2 \int_{r+\varepsilon}^1 \sum_{k=1}^{\infty} (1-k) e^{ik\varphi} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{1-k} \frac{1}{r} f_k(\rho) d\rho \right\} \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (I_1^{\varepsilon} + I_2^{\varepsilon}). \end{aligned}$$

Покажем, что интегралы I_1^ε и I_2^ε для всех φ и почти всех r имеют конечные пределы при $\varepsilon \rightarrow 0$, причем пределы даже существуют каждый в отдельности.

С этой целью прежде всего заметим, что по своему построению, стоящие под знаком интегралов, ряды в I_1^ε и I_2^ε , при каждом φ сходятся почти везде – первый в области $(0 < r < 1, 0 < \rho < r)$, а второй – в области $(0 < r < 1, r < \rho < 1)$ и дают измеримые функции. Выделим из ряда нулевой член, т.е. $\frac{1}{r^2} \int_0^{r-\varepsilon} \rho f_0(\rho) d\rho$.

Предел этого интеграла для $r > 0$ существует, ибо если $f(\zeta) \in L_p(|z| < 1)$, $p > 1$, то $\rho f_0(\rho) \in L(0,1)$.

Рассмотрим теперь интеграл

$$J_1 = \int_0^1 r dr \int_0^r \sum_{k=-\infty}^{-1} (1-k) e^{ik\varphi} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{1-k} \frac{1}{r} f_k(\rho) d\rho$$

и покажем, что он конечен для всех φ . Действительно

$$\begin{aligned} |J_1| &\leq \sum_{k=-\infty}^{-1} |1-k| \int_0^1 dr \int_0^r \left(\frac{\rho}{r}\right)^{1-k} |f_k(\rho)| d\rho \leq \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{-1} (1+|k|) \int_0^1 \rho |f_k(\rho)| d\rho \int_1^\infty t^{k-1} dt < 2 \sum_{k=-\infty}^{-1} \int_0^1 \rho f_k(\rho) d\rho. \end{aligned}$$

Поскольку $f(\zeta) \in \tilde{L}_p(|\zeta| < 1)$, то, как указывалось выше, последний ряд сходится. Из конечности интеграла J_1 следует, что для всех φ и почти всех r существует конечный интеграл

$$\int_0^1 \sum_{k=-\infty}^{-1} (1-k) e^{ik\varphi} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{1-k} \frac{1}{r} f_k(\rho) d\rho.$$

Отсюда ясно, что для почти всех r , $0 < r < 1$ и всех φ существует предел

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_1^\varepsilon = \int_0^r \sum_{k=-\infty}^{-1} (1-k) e^{ik\varphi} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{1-k} \frac{1}{r} f_k(\rho) d\rho.$$

причем поскольку все выполненные выше оценки равномерны по φ , то сходимость будет равномерной относительно φ , откуда в частности следует непрерывность предельной функции по φ (дело в том, что при всяком $\varphi \int_0^{r-\varepsilon}$ дает непрерывную функцию по φ , ибо подинтегральный ряд сходится равномерно относительно φ).

Аналогичным образом доказывается существование непрерывного предела (по φ)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_2^\varepsilon = \int_r^1 \sum_{k=1}^{\infty} (1-k) e^{ik\varphi} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{1-k} \frac{1}{r} f_k(\rho) d\rho.$$

Таким образом доказано, что если $f(z) \in \tilde{L}_p(|z| < 1), 1 < p < \infty$, то интеграл (5) существует и дает непрерывную по φ функцию $\omega(z)$:

$$\omega(z) = 2 \left\{ \int_0^r \sum_{k=-\infty}^0 (1-k) e^{ik\varphi} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{1-k} \frac{1}{r} f_k(\rho) d\rho - \int_0^r \sum_{k=1}^{\infty} (1-k) e^{ik\varphi} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{1-k} \frac{1}{r} f_k(\rho) d\rho \right\}.$$

Теперь покажем, что оператор $(Qf)(z)$ ограничен в $\tilde{L}_p(|z| < 1), 1 < p < \infty$, причем его норма

$$\|Q\|_{\tilde{L}_p} \leq \begin{cases} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}}, & \text{если } 1 < p \leq 2, \\ p, & \text{если } p \geq 2. \end{cases}$$

Согласно выше доказанному, для всякой функции $f(\zeta) \in \tilde{L}_p(|z| < 1)$ интеграл (5) существует почти для всех $r = |z|$ и дает непрерывную функцию по φ . Поэтому для функции $\omega(z) = (Qf)(z)$ почти для всех r существует коэффициенты Фурье. Найдем эти коэффициенты, для чего умножим $\omega(z)$ на $\frac{1}{2\pi} \exp(-ik\varphi)$ и интегрируем по φ от 0 до 2π . Будем иметь

$$\omega_k(r) = 2 \int_0^r \frac{1-k}{r} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{1-k} f_k(\rho) d\rho, \quad \text{при } k \leq 0,$$

$$\omega_1(r) = 0, \tag{6}$$

$$\omega_k(r) = 2 \int_r^1 \frac{1-k}{r} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{1-k} f_k(\rho) d\rho, \quad \text{при } k \geq 2.$$

Проверим сходимость ряда

$$\|\omega(z)\|_{\tilde{L}_p} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^1 |r^{\frac{1}{p}} \omega_k(r)|^p dr \right\}^{\frac{1}{p}},$$

для чего оценим его члены. Пользуясь оценками для норм интегральных операторов (6) в $L_{p, \frac{1}{p}}(0,1) (r^{\frac{1}{p}} f(r) \in L_p(0,1))$, будем иметь: при $k \geq 0$

$$\|\omega_k\|_{L_{p, \frac{1}{p}}} = \left\{ \int_0^1 \left| r^{\frac{1}{p}} \omega_k(\rho) \right|^p dr \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \begin{cases} 2 \|f_k(r)\|_{L_{p, \frac{1}{p}}}, & \text{если } p \leq 2, \\ \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} \|f_k(r)\|_{L_{p, \frac{1}{p}}}, & \text{если } 1 < p \leq 2. \end{cases}$$

Если $k \leq 2$, то аналогично получим

$$\|\omega_k\|_{L_{p, \frac{1}{p}}} \leq \begin{cases} p \|f_k(r)\|_{L_{p, \frac{1}{p}}}, & \text{если } p \leq 2, \\ 2 \|f_k(r)\|_{L_{p, \frac{1}{p}}}, & \text{если } 1 < p \leq 2. \end{cases}$$

Таким образом

$$\|\omega_k\|_{\tilde{L}_p} \leq \begin{cases} p \|f_k(r)\|_{L_{p, \frac{1}{p}}}, & \text{если } p \leq 2, \\ \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} \|f_k(r)\|_{L_{p, \frac{1}{p}}}, & \text{если } 1 < p \leq 2. \end{cases}$$

Это неравенство показывает, что оператор $(Qf)(z)$ ограничен в пространстве $\tilde{L}_p(|z| < 1), 1 < p < \infty$, причем

$$\|Q\|_{\tilde{L}_p} \leq \begin{cases} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}}, & \text{если } 1 < p \leq 2, \\ p, & \text{если } p \geq 2. \end{cases}$$

Этим доказательство леммы 2 в **случае а)** завершается.

б). Случай $f(z) \in \tilde{L}_{p, \beta}(|z| < 1), -2/p < \beta < 2/p, 1 < p < \infty$.

Пусть $f(\zeta) = |z|^\beta F(\zeta)$, $F(\zeta) \in \tilde{L}_p(|z| < 1)$. Ясно, что вместо оператора $(Qf)(z)$ достаточно рассмотреть сдвинутый оператор

$$(\Omega f)(z) = \frac{z}{z\pi} \iint_{|z| < 1} \left(\frac{|\zeta|}{|z|}\right)^{-\beta} \frac{F(\zeta)}{(\zeta - z)^2} ds_\zeta.$$

Далее, доказательство существования интеграла и оценки нормы оператора $(Qf)(z)$ завершается теми же рассуждениями, что в пункте а):

$$\|Q\|_{\tilde{L}_{p, \beta}} \leq \begin{cases} \frac{2}{\beta + \frac{2}{p}}, & \text{при } \beta < \frac{2}{p} \leq 1, \\ \frac{2}{2 - \beta - \frac{2}{p}}, & \text{при } \beta + \frac{2}{p} \geq 1. \end{cases}$$

Покажем, что указанные оценки являются точными значениями норм.

Пусть $\beta + \frac{2}{p} \geq 1$. Возьмем в качестве $F(\zeta)$ функцию $F_\varepsilon(\zeta) = (p\varepsilon)^{\frac{1}{p}} \rho^{-\frac{2}{p} + \varepsilon}$. Нетрудно проверить, что

$$\|F_\varepsilon(\zeta)\|_{\tilde{L}_p} = (p\varepsilon)^{\frac{1}{p}} \left\{ \int_0^1 (\rho^{\frac{1}{p}} \rho^{-\frac{2}{p}+\varepsilon})^p d\rho \right\}^{\frac{1}{p}} = 1.$$

В данном случае все коэффициенты Фурье, кроме нулевого, равны нулю.

Поэтому, учитывая, что $\Omega_0(r) = \frac{(p\varepsilon)^{\frac{1}{p}}}{2-\beta-\frac{2}{p}+\varepsilon} r^{-\frac{2}{p}+\varepsilon},$

$$\|\Omega(z)\|_{\tilde{L}_p} = \left\{ \int_0^1 |r^{\frac{1}{p}} \Omega_0(r)|^p d\rho \right\}^{\frac{1}{p}} = \frac{(p\varepsilon)^{\frac{1}{p}}}{2-\beta-\frac{2}{p}+\varepsilon} \left\{ \int_0^1 r^{-1+p\varepsilon} dr \right\}^{\frac{1}{p}} = \frac{2}{2-\beta-\frac{2}{p}+\varepsilon}.$$

Таким образом, существуют нормированные функции, на которых норма значения оператора сколь угодно близка к $\frac{2}{2-\beta-\frac{2}{p}+\varepsilon},$ что и требовалось.

Пусть теперь $\beta + \frac{2}{p} < 1.$ Возьмем в качестве $F(\zeta)$ следующую функцию

$$\tilde{F}(\zeta) = \tilde{F}_2(\rho) e^{2i\varphi}, \text{ где } \rho^{\frac{1}{p}} \tilde{F}_2(\rho) \in L_p(0,1) \text{ и } \left\{ \int_0^1 |\rho^{\frac{1}{p}} \tilde{F}_2(\rho)|^p d\rho \right\}^{\frac{1}{p}} = 1. \text{ Ясно, что}$$

$$\|Q\|_{\tilde{L}_{p,\beta}} = \sup_{\|f\|=1} \|Qf\| \geq \sup_{\|\tilde{f}\|=1} \|Q\tilde{f}\|, \quad \tilde{f} = |\zeta|^{-\beta} \tilde{F}.$$

Далее, учитывая формулы для коэффициентов Фурье значения оператора, имеем

$$(Q\tilde{f})(z) = \frac{2}{r} \int_r^1 \left(\frac{\rho}{r}\right)^{-1} \tilde{f}_2(\rho) d\rho = (G_2 \tilde{f}_2)(r).$$

Таким образом, вопрос сводится к отысканию нормы одномерного оператора G_2 в пространстве $L_{p, \beta + \frac{1}{p}}(0,1).$ С этой целью рассмотрим сопряженный оператор в сопряженном пространстве $L_{q, -(\beta + \frac{1}{p})}(0,1):$

$$(G_2^* \psi)(r) = \frac{2}{r} \int_0^r \psi(\rho) d\rho, \quad 0 < r < 1.$$

Нетрудно видеть, что

$$\|G_2^*\|_{L_{q, -(\beta + \frac{1}{p})}} = \frac{2}{\beta + \frac{2}{p}}.$$

Поэтому

$$\|G_2\|_{L_{p, -(\beta + \frac{1}{p})}} = \frac{2}{\beta + \frac{2}{p}} = \sup_{\|\tilde{f}\|=1} \|Q\tilde{f}\|.$$

Таким образом,

$$\|Q\|_{\tilde{L}_{p,\beta}} \geq \frac{2}{\beta + \frac{2}{p}}.$$

Сравнивая это неравенство с оценкой нормы сверху, находим окончательно

$$\|Q\|_{\tilde{L}_{p,\beta}} = \frac{2}{\beta + \frac{2}{p}}.$$

с). Случай $f(z) \in \tilde{C}_\beta(|z| < 1)$ и $\tilde{M}_\beta(|z| < 1)$. Прежде всего покажем, что если $f(z) \in \tilde{C}_\beta(|z| < 1)(\tilde{M}_\beta(|z| < 1))$, то интеграл существует для всех $0 < r < 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$, причем сходится равномерно относительно φ . Действительно, имеем

$$\begin{aligned} \omega(z) = (Qf)(z) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ 2 \int_0^{r-\varepsilon} \sum_{k=-\infty}^0 (1-k) e^{ik\varphi} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{1-k} \frac{f_k(\rho)}{r} d\rho + \right. \\ &\quad \left. + 2 \int_{r+\varepsilon}^1 \sum_{k=2}^{\infty} (1-k) e^{ik\varphi} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{1-k} \frac{f_k(\rho)}{r} d\rho \right\}. \end{aligned}$$

Покажем, что существует пределы каждого из интегралов в фигурных скобках. Для этого достаточно показать существование первого интеграла в пределах $0, r$ и второго в пределах $r, 1$. Имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^r \sum_{k=-\infty}^0 (1-k) e^{ik\varphi} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{1-k} \frac{f_k(\rho)}{r} d\rho &\leq \sum_{k=-\infty}^0 \int_0^r |1-k| e^{ik\varphi} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{1-k} \frac{\rho^{-\beta} |F_k(\rho)|}{r} d\rho \leq \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^0 |1-k| r^{-\beta} \|F_k\|_C \int_0^1 \rho^{1-k-\beta} d\rho \leq \frac{2r^{-\beta}}{2-\beta} \sum_{k=-\infty}^0 \|F_k\|_C. \end{aligned}$$

Учитывая сходимость последнего ряда, мы и получаем требуемое утверждение. Аналогично получим

$$\int_r^1 \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) e^{ik\varphi} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{1-k} \frac{f_k(\rho)}{r} d\rho \leq \frac{2r^{-\beta}}{\beta} \sum_{k=2}^{\infty} \|F_k\|_C$$

и последний ряд сходится.

Переходим к доказательству ограниченности оператора. Используя вычисленные ранее коэффициенты Фурье значения оператора $|z|^\beta \omega(z) = \Omega(z)$, будем иметь

$$\begin{aligned} \|\omega(z)\|_{\tilde{M}_\beta} &= \|\Omega(z)\|_{\tilde{M}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|\Omega_k(r)\|_{M(0,1)} = \sum_{k=-\infty}^0 \left\| 2 \int_0^r (1-k) \left(\frac{\rho}{r}\right)^{1-k-\beta} \frac{F_k(\rho)}{r} d\rho \right\|_{M(0,1)} + \\ &\quad \sum_{k=2}^{\infty} \left\| 2 \int_r^1 (1-k) \left(\frac{\rho}{r}\right)^{1-k-\beta} \frac{F_k(\rho)}{r} d\rho \right\|_{M(0,1)} \leq \sum_{k=-\infty}^0 \left\| 2 \int_0^1 (1-k) \left(\frac{\rho}{r}\right)^{1-k-\beta} \|F_k\|_{M(0,1)} + \right. \end{aligned}$$

$$+ \sum_{k=2}^0 2 \int_1^{\infty} (1-k) \left(\frac{\rho}{r}\right)^{1-k-\beta} \|F_k\|_{M(0,1)} = 2 \left\{ \sum_{k=-\infty}^0 \frac{1-k}{2-k-\beta} + \sum_{k=-\infty}^0 \frac{k-1}{k+\beta-2} \right\} \|F_k\|_{M(0,1)}.$$

Поскольку при $k \leq 0$

$$\frac{1-k}{2-k-\beta} \leq \begin{cases} 1, & \text{при } 0 < \beta \leq 1, \\ \frac{1}{2-\beta}, & \text{при } 1 \leq \beta < 2 \end{cases}$$

и при $k \geq 2$

$$\frac{1-k}{2-k-\beta} \leq \begin{cases} \frac{1}{\beta}, & \text{при } 0 < \beta \leq 1, \\ 1, & \text{при } 1 \leq \beta < 2, \end{cases}$$

то получаем нужную оценку

$$\|Q\|_{\tilde{M}_\beta} \leq \begin{cases} \frac{2}{\beta}, & \text{при } 0 < \beta \leq 1, \\ \frac{2}{2-\beta}, & \text{при } 1 \leq \beta < 2. \end{cases}$$

Что касается пространств $\tilde{C}_\beta(|z| < 1)$, то достаточно заметить, что коэффициенты Фурье $\Omega_k(r)$ являются непрерывными функциями на $[0,1]$, причем $\Omega_k(0) = 0$ при $k \neq 0$, что следует из того же факта для $F_k(r)$ и ограниченности одномерных интегральных операторов в $C_\beta^0(0,1)$ (числители непрерывной функции обращается в нуль при $r = 0$).

Нетрудно видеть, что указанные оценки нормы дают ее точное значение. Для этого достаточно, при $1 \leq \beta < 2$ взять в качестве $f(z)$ функцию $\frac{1}{|z|^\beta}$, а при $0 < \beta \leq 1$ функцию $|z|^{\varepsilon-\beta} e^{2i\varphi}$.

Перейдем теперь к рассмотрению неоднородного интегрального уравнения (1₁), где интеграл понимается в смысле определения (2). В [1] дана полная картина разрешимости уравнение в серии банаховых пространств функций $\tilde{E}(|z| < 1)$ (см.теорему 2 из [1]). В частности из указанной работы следует, что если выполнено условие

$$Re \lambda \leq \begin{cases} \frac{2}{\beta}, & \text{при } 0 < \beta \leq 1, \\ \frac{2}{2-\beta}, & \text{при } 1 \leq \beta < 2, \end{cases} \quad (7)$$

то уравнение (1₁) безусловно разрешимо единственным образом в $E^\beta(|z| < 1)$. Здесь нас интересует вопрос нахождения явного вида указанного решения.

По схеме [1], умножая уравнение (1₁) на $(2\pi)^{-1} \exp(-ik\varphi)$ и интегрируя по φ от 0 до 2π , для нахождения коэффициентов Фурье искомой функции по аргументу φ получим следующую систему независимых между собой одномерных интегральных уравнений с ядрами, однородными порядка (-1):

$$\begin{aligned} (I - \lambda Q_k) f_k &\equiv f_k(r) - 2\lambda \int_0^r \frac{1-k}{r} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{1-k} f_k(\rho) d\rho = g_k(r), \quad k \leq 0, \\ (I - \lambda Q_k) f_k &\equiv f_k(r) - 2\lambda \int_r^1 \frac{k-1}{r} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{1-k} f_k(\rho) d\rho = g_k(r), \quad k \geq 1. \end{aligned} \quad (8)$$

Согласование классов приводит к заключению, что если исходное уравнение (1₁) рассматривается в $E^\beta (|z| < 1)$, то одномерные интегральные уравнения (8) следует рассматривать в пространствах $C_\beta, C_\beta^0, M_\beta, L_{\beta-\frac{1}{p}}^p$ на отрезке $[0,1]$. Нетрудно проверить выполнение условий суммируемости на ядра уравнений (8) (см.[2],[3]).

Пусть теперь условие (7) выполнено. Тогда покажем, что каждое из одномерных уравнений (8) имеют единственные решения вида

$$\begin{aligned} f_k(r) &= g_k(r) + 2\lambda \int_0^r \frac{1-k}{r} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\mu-1} g_k(\rho) d\rho \equiv (I + \lambda G_k^1) g_k, \quad k \leq 0, \\ f_k(r) &= g_k(r) + 2\lambda \int_r^1 \frac{k-1}{r} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\mu-1} g_k(\rho) d\rho \equiv (I + \lambda G_k^2) g_k, \quad k \geq 1, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\mu = 2 - k - 2\lambda(1-k)$.

Прежде всего нетрудно проверить, что если $g_k(r)$ принадлежит одному из пространств $\tilde{E}_\beta(0,1)$, то такой же будет $f_k(r)$, т.е. операторы $I - \lambda G_k^{1,2}$ переводят эти пространства в себя.

Действительно условие суммируемости при $k \leq 0$ имеет вид

$$\int_0^1 |\rho^{\mu-1-\beta}| d\rho < \infty,$$

т.е. $2 - k - 2\operatorname{Re}\lambda(1-k) - \beta > 0$, а поскольку λ удовлетворяет неравенству (7), то условие выполнено.

Условие суммируемости при $k \geq 2$ во второй формуле (9) имеет вид

$$\int_1^\infty |\rho^{\mu-1-\beta}| d\rho < \infty,$$

т.е. $2 - k - 2\operatorname{Re}\lambda(1-k) - \beta < 0$, что также в силу (7) выполнено.

Оценка нормы операторов $(Q_k f_k)(r)$ во всех пространствах $E_\beta(0,1)$ будет одной и той же. Например, если $0 < \beta < 1, k \leq 0$ и $2\operatorname{Re}\lambda < 1$, то обозначив через

$$\theta(r, \rho) = \frac{2(1-k)}{r} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\mu-1}, \quad F_k(\rho) = \rho^{-(\beta-\frac{1}{p})} f_k(\rho)$$

имеем

$$\begin{aligned}
\| Q_k f_k \|_{L^p_{\beta-\frac{1}{p}}(0,1)}^p &= \int_0^1 r^{\beta-\frac{1}{p}} \left| \int_0^r \theta(r, \rho) \rho^{-(\beta-\frac{1}{p})} f_k(\rho) d\rho \right|^p dr = \\
&= \int_0^1 \left| \int_0^r \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\beta-\frac{1}{p}} \theta(r, \rho) F_k(\rho) d\rho \right|^p dr \leq \\
&\leq \int_0^1 \left\{ \left[\int_0^r \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\frac{\beta-1}{q}} |\theta(r, \rho)|^{\frac{1}{q}} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\frac{1}{pq}} \left[\left(\frac{r}{\rho}\right)^{\frac{\beta-1}{p}} |\theta(r, \rho)|^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\frac{1}{pq}} |F_k(\rho)| d\rho \right] \right] dr \right\} dr.
\end{aligned}$$

Применяя к внутреннему интегралу неравенство Гельдера, получим:

$$\| Q_k f_k \|_{L^p_{\beta-\frac{1}{p}}(0,1)}^p \leq \int_0^1 \left\{ \left[\int_0^r \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\beta} |\theta(r, \rho)| d\rho \right]^{\frac{p}{q}} \int_0^r \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\beta-1} |\theta(r, \rho)| \cdot |F_k(\rho)|^p d\rho \right\} dr.$$

Поскольку

$$\int_0^r \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\beta} |\theta(r, \rho)| d\rho = 2 \int_0^r \frac{1-k}{r} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{1-k-2\operatorname{Re}\lambda(1-k)-\beta} d\rho = \frac{2(1-k)}{2-k-2\operatorname{Re}\lambda(1-k)-\beta} = l(k, \beta),$$

то

$$\begin{aligned}
\| Q_k f_k \|_{L^p_{\beta-\frac{1}{p}}(0,1)}^p &\leq (l(k, \beta))^{\frac{p}{q}} \int_0^1 dr \int_0^r \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\beta-1} |\theta(r, \rho)| \cdot |F_k(\rho)|^p d\rho \leq \\
&\leq \| Q_k f_k \|_{L^p_{\beta-\frac{1}{p}}(0,1)}^p \leq (l(k, \beta))^{\frac{p}{q}} \int_0^1 |F_k(\rho)|^p d\rho \int_0^1 \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\beta-1} |\theta(r, \rho)| dr \leq \\
&\leq (l(k, \beta))^{\frac{p}{q}} | (l(k, \beta))^{\frac{p}{q}} l(k, \beta) \| f_k \|_{L^p_{\beta-\frac{1}{p}}(0,1)}^p = l(k, \beta) \| f_k \|_{L^p_{\beta-\frac{1}{p}}(0,1)}^p
\end{aligned}$$

Таким образом

$$\| Q_k \|_{L^p_{\beta-\frac{1}{p}}(0,1)} \leq \frac{2(1-k)}{2-k-2\operatorname{Re}\lambda(1-k)-\beta} = \frac{2}{1-2\operatorname{Re}\lambda + \frac{1-\beta}{1-k}} \leq \frac{2}{1-2\operatorname{Re}\lambda},$$

если же $1 \leq \beta < 2$, то

$$\| Q_k \|_{L^p_{\beta-\frac{1}{p}}(0,1)} \leq \frac{2}{2-\beta-2\operatorname{Re}\lambda}.$$

Теперь, если функция $g_k(r)$ принадлежит пространству $\tilde{E}_\beta(0,1)$ (при любых $-\infty < k < \infty$), то функция $f_k(r)$ определяемое по формуле (9), удовлетворяет

уравнению (8). Действительно это следует из легко проверяемого тождества для операторов Q_k и G_k из (8) и (9):

$$\lambda Q_k G_k = G_k - Q_k. \quad (10)$$

Теперь из решения (9) одномерных интегральных уравнений (8) по формуле $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k(r) e^{ik\varphi}$ составим решение исходного уравнение (1₁)

$$f(z) = g(z) + 2\lambda \sum_{k=-\infty}^0 \int_0^r \frac{1-k}{r} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\mu-1} e^{ik\varphi} g_k(\rho) d\rho - \\ - 2\lambda \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^r \frac{1-k}{r} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{\mu-1} e^{ik\varphi} g_k(\rho) d\rho.$$

Просуммировав полученный ряд, окончательно получим

Теорема 1. Пусть $g(z)$ принадлежит одному из банаховых пространств функций $\tilde{E}^\beta(|z| < 1): \tilde{M}_\beta, \tilde{C}_\beta, \tilde{L}_{\beta-\frac{2}{p}}^p, 0 < \beta < 2, 1 < p < \infty$, и параметр λ удовлетворяет условию

$$Re \lambda < \begin{cases} \frac{2}{\beta}, & \text{если } 0 < \beta \leq 1 \\ \frac{2}{2-\beta}, & \text{если } 1 \leq \beta < 2 \end{cases}$$

Тогда уравнение (1₁) в $\tilde{E}^\beta(|z| < 1), 0 < \beta < 2$ безусловно разрешимо единственным образом:

$$f(z) = \frac{\lambda}{\pi} \frac{z}{z} \iint_{|\zeta| < 1} \frac{|z\zeta|^{-2\lambda} g(\zeta) ds_\zeta}{(\zeta|\zeta|^{-2\lambda} - z|z|^{-2\lambda})^2} + g(z), \quad |z| < 1, \quad (11)$$

где интеграл понимается в специальном смысле (2).

2. Уравнение (1) с обычным главным значением интеграла.

Переходим к рассмотрению уравнения (1₂) с обычным главным значением интеграла

$$\omega(z) = (Pf)(z) = \frac{z}{z\pi} \iint_{|\zeta| < 1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} ds_\zeta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{z}{z\pi} \iint_{(|\zeta| < 1) \cap (|\zeta - z| > \varepsilon)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} ds_\zeta. \quad (12)$$

Теорема 2. Оператор $(Pf)(z)$ ограничен в каждом из пространств $\tilde{E}^\beta(|z| < 1): \tilde{M}_\beta, \tilde{C}_\beta, \tilde{L}_{\beta-\frac{2}{p}}^p, 0 < \beta < 2, 1 < p < \infty$ и для его нормы имеют место оценки

$$\|P\|_{E^\beta} \leq \begin{cases} \frac{2}{\beta} + 1, & \text{при } 0 < \beta \leq 1, \\ \frac{2}{2-\beta} + 1, & \text{при } 1 \leq \beta < 2, \end{cases}$$

$$\|P\|_{E^\beta} \geq \begin{cases} \frac{2}{\beta}, & \text{при } 0 < \beta \leq 1, \\ \frac{2}{2-\beta}, & \text{при } 1 \leq \beta < 2. \end{cases}$$

Доказательство. Когда $f(\zeta)$ принадлежит одному из указанных пространств, то интеграл (12) существует для почти всех ζ . Действительно, если $f(\zeta) \in C_\beta(|\zeta| < 1)$ или $M_\beta(|\zeta| < 1)$ при $0 < \beta < 2$, то очевидно, $f(\zeta) \in L^q(|\zeta| < 1)$ с некоторым $q > 1$, а тогда утверждаемый факт известен (см. напр. [4]).

Покажем, что, если $f(\zeta) \in L^p_{\beta-\frac{2}{p}}(|\zeta| < 1)$, то также $f(\zeta) \in L^{q_0}(|\zeta| < 1)$ с некоторым $q_0 > 1$. В самом деле, представим

$$f(\zeta) = \frac{f_0(\zeta)}{|\zeta|^{\beta-\frac{2}{p}}},$$

где $f_0(\zeta) \in L^p(|\zeta| < 1)$. При $\beta \leq \frac{2}{p}$ утверждаемый факт ясен ибо в этом случае $f(\zeta) \in L^p(|\zeta| < 1)$.

Пусть $1 < q_0 < p$. Тогда $f_0(\zeta) \in L_{q_0}(|\zeta| < 1)$.

$$\iint_{|\zeta| < 1} |f(\zeta)|^{q_0} ds_\zeta = \iint_{|\zeta| < 1} \frac{|f_0(\zeta)|^{q_0}}{|\zeta|^{q_0\beta-\frac{2q_0}{p}}} ds_\zeta.$$

Полагая $\beta = 2 - \delta$ и выбирая q_0 и $q > 1$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$q_0 q \leq p \quad \text{и} \quad q > p - \frac{p\delta}{2}, \quad (13)$$

будем иметь

$$\iint_{|\zeta| < 1} |f(\zeta)|^{q_0} ds_\zeta = \left\{ \iint_{|\zeta| < 1} |f_0(\zeta)|^{q_0 q} ds_\zeta \right\}^{\frac{1}{q}} \left\{ \iint_{|\zeta| < 1} \frac{ds_\zeta}{|\zeta|^{q_0 q' \beta - \frac{2q_0 q'}{p}}} \right\}^{\frac{1}{q'}}. \quad (14)$$

С учетом (13)

$$q_0 q' \left(\beta - \frac{2}{p} \right) = \frac{q_0 q}{q-1} \frac{(2-\delta)p-2}{p} \leq \frac{(2-\delta)p-2}{q-1} < \frac{(2-\delta)p-2}{p - \frac{p\delta}{2} - 1} = 2.$$

Поэтому второй множитель в (14) конечен и, следовательно

$$\iint_{|\zeta|<1} |f(\zeta)|^{q_0} ds_\zeta < \infty.$$

Преследуя цель вычисления коэффициентов Фурье по $\varphi = \arg z$ значения оператора $(Pf)(z)$, покажем прежде всего допустимость интегрирования по φ под знаком интеграла в (12), причем предварительно в (12) произведем замену $\zeta = \sigma z$. Эти замены допустимы, так как их можно мыслить сделанными до предельного перехода, определяющего главное значение интеграла, а полученный после замен интеграл понимать как предел индуцированный первоначальным пределом. При этом будем сначала предполагать, что $f(z)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем α .

Итак имеем

$$(Pf)(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \iint_{(|\sigma| < \frac{1}{|z|}) \cap (|\sigma-1| > \frac{\varepsilon}{|z|})} \frac{f(\sigma z)}{(\sigma-1)^2} ds_\sigma,$$

причем, как уже указывалось выше этот предел существует почти для всех z , когда $f(z)$ принадлежит одному из рассматриваемых пространств (пока $f(\zeta) \in H_\alpha$ и интеграл непрерывен по φ при фиксированных $|z| \neq 0, 1$).

Для того, чтобы установить возможность интегрирования по φ под знаком рассматриваемого интеграла, достаточно показать, что предел достигается равномерно относительно φ , иными словами, что для всякого δ найдется такое ε_0 , что

$$\left| \iint_{|\sigma-1| < \frac{\varepsilon}{|z|}} \frac{f(\sigma z)}{(\sigma-1)^2} ds_\sigma \right| < \delta$$

для $\varepsilon < \varepsilon_0$ и всех $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Имеем

$$\iint_{|\sigma-1| < \frac{\varepsilon}{|z|}} \frac{f(\sigma z)}{(\sigma-1)^2} ds_\sigma = \iint_{|\sigma-1| < \frac{\varepsilon}{|z|}} \frac{f(\sigma z) - f(z)}{(\sigma-1)^2} ds_\sigma + f(z) \iint_{|\sigma-1| < \frac{\varepsilon}{|z|}} \frac{1}{(\sigma-1)^2} ds_\sigma.$$

Второй интеграл, понимаемый в смысле главного значения, равен нулю, а первый оценивается интегралом, который сколь угодно мал при достаточно малом ε и не зависит от φ . Таким образом, равномерная сходимость относительно φ , а тем самым допустимость интегрирования под знаком интеграла для $f(z)$ непрерывных по Гельдеру доказана.

Переходя к вычислению коэффициентов Фурье значения оператора $(Pf)(z) = \omega(z)$, примем во внимание, что функция $f(\zeta)$, принадлежащая одному из рассматриваемых пространств, является также элементом $L^q(|\zeta| < 1)$ с некоторым $q > 1$, аппроксимируем ее функциями $f^{(n)}(\zeta)$, непрерывными по

Гельдеру, в норме $L^q(|\zeta| < 1)$. Вычисляя с помощью вычетов полученный интеграл по углу $\alpha = \arg \zeta$ будем им

$$\omega_k^{(n)}(r) = \begin{cases} (G_k^1 f_k^{(n)})(r) - f_k^{(n)}(r), & \text{при } k \leq 0, \\ (G_k^2 f_k^{(n)})(r) - f_k^{(n)}(r), & \text{при } k \geq 1, \end{cases} \quad (15)$$

где операторы $(G_k^{1,2} f_k^{(n)})(r)$ определены в (9). Покажем теперь, что коэффициенты Фурье для значения оператора $\omega(z)$ на функции $f(z)$, принадлежащей одному из рассматриваемых пространств, также выражаются формулами вида (15).

С этой целью прежде всего заметим, что в силу непрерывности оператора $(Pf)(z)$ в $L^q(|z| < 1)$ из сходимости $f^{(n)}(z) \rightarrow f(z)$ в норме $L^q(|z| < 1)$ вытекает, что $\omega^{(n)}(z) \rightarrow \omega(z)$ в норме $L^q(|z| < 1)$. Далее отметим, что если $g(z)$ принадлежит $L^q(|z| < 1), q > 1$, то ее коэффициенты Фурье, обладают свойством: $r^{\frac{1}{q}} g_k(r) \in L^q(0,1)$, ибо

$$\int_0^1 |r^{\frac{1}{q}} g_k(r)|^q dr = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 dr \left| \int_0^{2\pi} g(z) e^{ik\varphi} d\varphi \right|^q \leq \frac{1}{2\pi} \iint_{|z| < 1} |g(z)|^q ds_z.$$

Кроме того, если при $n \rightarrow \infty$ $g^{(n)}(z) \rightarrow g(z)$ в норме $L^q(|z| < 1)$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 |g_k^{(n)}(r) - g_k(r)|^q dr = 0.$$

Поскольку интегральные операторы в (15) непрерывны в $L^q_{\frac{1}{q}}(0,1)$, то переходя в (15) к пределу при $n \rightarrow \infty$, для любой $f(z)$, принадлежащей одному из пространств $\tilde{E}^\beta(|z| < 1)$ получим

$$\omega_k(r) = \begin{cases} (G_k^1 f_k)(r) - f_k(r), & \text{при } k \leq 0, \\ (G_k^2 f_k)(r) - f_k(r), & \text{при } k \geq 1. \end{cases} \quad (16)$$

Переходим теперь непосредственно к доказательству ограниченности оператора $(Pf)(z)$ в пространствах $\tilde{C}^\beta(|z| < 1), \tilde{M}^\beta(|z| < 1), \tilde{L}^p_{\beta-\frac{2}{\beta}}(|z| < 1)$, $0 < \beta < 2, 1 < p < \infty$. Прежде всего отметим, что интегральные операторы $G_k^{1,2}$ ограничены в пространствах $C_\beta(0,1), M_\beta(0,1), L^p_{\beta-\frac{1}{p}}(0,1)$, причем

$$\|G_k^1\| = \frac{2(1-k)}{2-k-\beta}, \quad k \leq 0, \quad \|G_k^2\| = \frac{2(1-k)}{2-k-\beta}, \quad k \geq 1.$$

Согласно определению нормы в $\tilde{M}_\beta(|z| < 1)$, учитывая (16), имеем

$$\|Pf\|_{\tilde{M}^\beta(|z| < 1)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|\omega_k\|_{M^\beta(0,1)} \leq \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2|1-k|}{|2-k-\beta|} + 1 \right) \|f_k\|_{M^\beta(0,1)}.$$

Отсюда вытекает ограниченность оператора в $\tilde{M}_\beta(|z| < 1)$ и оценка

$$\|P\|_{\tilde{M}_\beta} \leq \begin{cases} \frac{2}{\beta} + 1, & \text{при } 0 < \beta \leq 1, \\ \frac{2}{2-\beta} + 1, & \text{при } 1 \leq \beta < 2. \end{cases} \quad (17)$$

Что касается пространства $\tilde{C}^\beta(|z| < 1)$, то достаточно заметить, что при этом $f_k(r) \in C_\beta(0,1)$, операторы $G_k^{1,2}$ отображают $C_\beta(0,1)$ в себя, что влечет $\omega_k(r) \in C_\beta(0,1)$, причем ряд

$$|z|^\beta \omega(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^\beta \omega_k(r) e^{ik\varphi}$$

равномерно сходится, откуда $\omega(z) \in \tilde{C}_\beta(|z| < 1)$.

Ограниченность оператора в $\tilde{L}_{\beta-\frac{2}{p}}^p(|z| < 1)$ устанавливается точно также, как для $\tilde{M}^\beta(|z| < 1)$, причем остается в силе оценка (17). Необходимо отметить при этом, что оценка (17), видимо является довольно грубой.

Сравнение (6) и (16) показывает, что между операторами в смысле (2) $(Qf)(z)$ и оператором в обычном смысле главного значения $(Pf)(z)$ имеет место соотношение

$$(Pf)(z) = (Qf)(z) - (If)(z), \quad (18)$$

где I — единичный оператор. Отсюда сразу вытекает ограниченность оператора $(Pf)(z)$ и оценка (17) для его нормы. Кроме того, учитывая, что в лемме 2 были найдены точные значения нормы оператора $(Qf)(z)$, то получим

$$\|P\|_{E^\beta} \leq \begin{cases} \frac{2-\beta}{\beta}, & \text{при } 0 < \beta \leq 1, \\ \frac{\beta}{2-\beta}, & \text{при } 1 \leq \beta < 2. \end{cases}$$

Вернемся теперь к интегральному уравнению (1) с оператором $(Pf)(z)$, понимаемым в смысле главного значения (12)

$$f(z) = \lambda(Pf)(z) + g(z) \quad (19)$$

в пространствах $\tilde{E}_\beta(|z| < 1)$. В силу связи оператора $(Pf)(z)$ с оператором $(Qf)(z)$, где интеграл понимается в специальном смысле (2), уравнение (19) может быть переписано в виде

$$f(z) = \lambda(Qf)(z) - \lambda f(z) + g(z)$$

или

$$f(z) = \frac{\lambda}{1+\lambda}(Qf)(z) + \frac{g(z)}{1+\lambda}.$$

Отсюда ясно, что если $\lambda \neq -1$, то для (19) справедливы все ранее доказанные теоремы о разрешимости уравнения (1₁) с заменой в них λ на $\frac{\lambda}{1+\lambda}$.

Теорема 3. Пусть $g(z)$ принадлежит одному из банаховых пространств функций $\tilde{E}_\beta(|z| < 1): \tilde{M}_\beta, \tilde{C}_\beta, \tilde{L}_{\beta-\frac{2}{p}}^p, 0 < \beta < 2, 1 < p < \infty$, и λ лежит в круге $|\lambda - \lambda_0| < R_0$,

где

$$\lambda_0 \leq \begin{cases} \frac{1-\beta}{\beta-2}, & \text{при } 0 < \beta \leq 1, \\ \frac{1-\beta}{\beta}, & \text{при } 1 \leq \beta < 2. \end{cases}$$

$$R_0 \leq \begin{cases} \frac{1}{2-\beta}, & \text{при } 0 < \beta \leq 1, \\ \frac{1}{\beta}, & \text{при } 1 \leq \beta < 2. \end{cases}$$

Тогда уравнение (1₂) в $\tilde{E}^\beta(|z| < 1), 0 < \beta < 2$ безусловно разрешимо единственным образом:

$$f(z) = \frac{\nu}{\pi} \frac{z}{z} \iint_{|\zeta| < 1} \frac{|z\zeta|^{-2\nu} G(\zeta) ds_\zeta}{(\zeta|\zeta|^{-2\nu} - z|z|^{-2\nu})^2} + g(z), \quad |z| < 1, \quad \nu = \frac{\lambda}{1+\lambda}, \quad (20)$$

где интеграл понимается в смысле главного значения (12), $G(z) = \frac{g(z)}{1+\lambda}$ и интегральный оператор из правой части (20) ограничен в пространствах $\tilde{E}^\beta(|z| < 1), 0 < \beta < 2$.

В пространствах $\tilde{E}_\beta(|z| < 1)$ рассмотрим интегральный оператор из правой части (20)

$$(Pg)(z) = \frac{z}{z\pi} \iint_{|\zeta| < 1} \frac{|z\zeta|^{-2\nu} g(\zeta) ds_\zeta}{(\zeta|\zeta|^{-2\nu} - z|z|^{-2\nu})^2}, \quad |z| < 1, \quad (21)$$

где $\nu = \frac{\lambda}{1+\lambda}$, а λ принадлежит кругу $|\lambda - \lambda_0| < R_0$, а интеграл понимается в обычном смысле главного значения (12). Имеет место

Лемма 3. Если в (20) функция $g(\zeta)$ удовлетворяет условию Гельдера, то интеграл существует в смысле главного значения для всякого $z \neq 0$.

Действительно

$$(Pg)(z) = \frac{z}{z\pi} \iint_{|\zeta| < 1} \frac{|z\zeta|^{-2\nu} (g(\zeta) - g(z)) ds_\zeta}{(\zeta|\zeta|^{-2\nu} - z|z|^{-2\nu})^2} + g(z) \frac{z}{z\pi} \iint_{|\zeta| < 1} \frac{|z\zeta|^{-2\nu} ds_\zeta}{(\zeta|\zeta|^{-2\nu} - z|z|^{-2\nu})^2}.$$

Первый интеграл существует в обычном смысле. Покажем, что второй интеграл существует в смысле главного значения (12) и равно нулю. Применяя формулу дифференцирования интегралов со слабой особенностью (см. [5] стр. 65) и далее применяя теорию вычетов получим

$$\frac{z}{z\pi} \iint_{|\zeta| < 1} \frac{|z\zeta|^{-2\nu} ds_\zeta}{(\zeta|\zeta|^{-2\nu} - z|z|^{-2\nu})^2} = \frac{z}{z(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\pi} \iint_{|\zeta| < 1} \frac{|\zeta|^{-2\nu} ds_\zeta}{\zeta|\zeta|^{-2\nu} - z|z|^{-2\nu}} =$$

$$= \frac{z}{(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\pi} \iint_{|\sigma| < \frac{1}{|z|}} \frac{|\sigma|^{-2\nu} ds_\sigma}{\sigma |\sigma|^{-2\nu} - 1} = \frac{z}{(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \int_0^1 d\tau \frac{1}{\pi} \int_{|t|=1} \frac{dt}{t(t-\tau^{2\nu-1})} = 0.$$

Переходим к вычислению коэффициентов Фурье значения оператора $(Pg)(z)$ $\omega(z)$. Принимая во внимание, что функция $g(z)$, принадлежащая одному из рассматриваемых пространств $\tilde{E}_\beta(|z| < 1)$, является элементом пространства $L^q(|z| < 1)$ с некоторым $q > 1$, аппроксимируем ее функциями $g^{(n)}(z)$, непрерывными по Гельдеру, в норме L^q . Коэффициент Фурье $\omega_k(r)$ значения оператора $(Pg)(z)$ равен $(z = re^{i\varphi}, \zeta = \rho e^{i\alpha}, \sigma = \zeta z = \tau e^{i\gamma})$:

$$\omega_k(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\varphi} d\varphi \frac{z}{z\pi} \iint_{|\zeta| < 1} \frac{|z\zeta|^{-2\nu} g(\zeta) ds_\zeta}{(\zeta |\zeta|^{-2\nu} - z |z|^{-2\nu})^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\varphi} d\varphi \frac{1}{\pi} \iint_{|\sigma| < \frac{1}{r}} \frac{|\sigma|^{-2\nu} g(\sigma z) ds_\sigma}{(\sigma |\sigma|^{-2\nu} - 1)^2}.$$

Поскольку во внутреннем интеграле предел достигается равномерно относительно $\varphi = \arg z$, то поменяв порядок интегрирования, получим

$$\omega_k(r) = \frac{1}{\pi} \iint_{|\sigma| < \frac{1}{r}} \frac{|\sigma|^{-2\nu} ds_\sigma}{(\sigma |\sigma|^{-2\nu} - 1)^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\sigma z) e^{-ik\varphi} d\varphi = \frac{1}{\pi} \iint_{|\sigma| < \frac{1}{r}} \frac{|\sigma|^{-2\nu} e^{ik\gamma} g_k(\tau) ds_\sigma}{(\sigma |\sigma|^{-2\nu} - 1)^2}.$$

Произведя теперь обратную замену $\sigma = \zeta/z$, получим

$$\omega_k(r) = \left(\frac{|z|}{z}\right)^{k-2} \frac{1}{\pi} \iint_{|\zeta| < 1} \frac{|z\zeta|^{-2\nu} \left(\frac{\zeta}{|z|}\right)^k g_k(\rho) ds_\zeta}{(\zeta |\zeta|^{-2\nu} - z |z|^{-2\nu})^2}.$$

Поскольку функция $(\zeta/|z|)^k g_k(\rho)$ по крайней мере ограничена (в силу аппроксимации функциями Гельдера!), то на основании дифференцирования интегралов со слабой особенностью получим

$$\omega_k(r) = \frac{1}{1-\nu} \left(\frac{|z|}{z}\right)^{k-2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\pi} \iint_{|\zeta| < 1} \frac{|\zeta|^{-2\nu} \left(\frac{\zeta}{|z|}\right)^k g_k(\rho) ds_\zeta}{\zeta |\zeta|^{-2\nu} - z |z|^{-2\nu}}.$$

Вычисляя с помощью вычетов интеграл, стоящий под знаком производной, найдем

$$\frac{1}{\pi} \iint_{|\zeta| < 1} \frac{|\zeta|^{-2\nu} \left(\frac{\zeta}{|z|}\right)^k g_k(\rho) ds_\zeta}{\zeta |\zeta|^{-2\nu} - z |z|^{-2\nu}} = \frac{z^{k-1}}{|z|^{k-2}} \int_0^{\frac{1}{r}} g_k(\tau) d\tau \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{ik\gamma}}{e^{i\gamma} - \tau^{2\nu-1}} d\gamma =$$

Отсюда

$$\omega_k(r) = -\frac{2}{1-\nu} \left(\frac{|z|}{z}\right)^{k-2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{z^{k-1}}{|z|^{2(1-k)\nu}} \int_0^r \rho^{(1-k)(1-2\nu)} g_k(\rho) d\rho =$$

$$= 2 \int_0^r \frac{1-k}{r} \left(\frac{\rho}{r} \right)^{(1-k)(1-2\nu)} g_k(\rho) d\rho - \frac{g_k(r)}{1-\nu} \quad \text{при } k \leq 0$$

При $k \geq 1$

$$\begin{aligned} \omega_k(r) &= \frac{2}{1-\nu} \left(\frac{|z|}{z} \right)^{k-2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{z^{k-1}}{|z|^{2(1-k)\nu}} \int_r^1 \rho^{(1-k)(1-2\nu)} g_k(\rho) d\rho = \\ &= 2 \int_r^1 \frac{k-1}{r} \left(\frac{\rho}{r} \right)^{(1-k)(1-2\nu)} g_k(\rho) d\rho - \frac{g_k(r)}{1-\nu} \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\omega_k(r) = \begin{cases} 2 \int_0^r \frac{1-k}{r} \left(\frac{\rho}{r} \right)^{(1-k)(1-2\nu)} g_k(\rho) d\rho - \frac{g_k(r)}{1-\nu} & \text{при } k \leq 0, \\ 2 \int_r^1 \frac{k-1}{r} \left(\frac{\rho}{r} \right)^{(1-k)(1-2\nu)} g_k(\rho) d\rho - \frac{g_k(r)}{1-\nu} & \text{при } k \geq 1. \end{cases} \quad (22)$$

Если обозначить через $(\Omega g)(z)$ интегральный оператор

$$(\Omega g)(z) = \frac{z}{2\pi} \iint_{|\zeta|<1} \frac{|z\zeta|^{-2\nu} g(\zeta) d s_\zeta}{(\zeta|\zeta|^{-2\nu} - z|z|^{-2\nu})^2}, \quad |z|<1,$$

где интеграл понимается в смысле (2), то из (22) следует, что имеет место соотношение

$$(Pg)(z) = (\Omega g)(z) - \frac{g(z)}{1-\nu},$$

где слева интеграл понимается в обычном смысле главного значения (12).

Переходим теперь непосредственно к доказательству ограниченности оператора $(Pg)(z)$ в пространствах $\tilde{E}_\beta : \tilde{C}_\beta, \tilde{C}_\beta^0, \tilde{M}_\beta, \tilde{L}_{\beta-2/p}^p, 0 < \beta < 2, 1 < p < \infty$ в круге $|z|<1$.

Прежде всего отметим, что интегральные операторы

$$(\Omega_k^{(1)} g)(r) = 2 \int_0^r \frac{1-k}{r} \left(\frac{\rho}{r} \right)^{(1-k)(1-2\nu)} g_k(\rho) d\rho \quad \text{при } k \leq 0,$$

$$(\Omega_k^{(2)} g)(r) = 2 \int_r^1 \frac{k-1}{r} \left(\frac{\rho}{r} \right)^{(1-k)(1-2\nu)} g_k(\rho) d\rho \quad \text{при } k \geq 1$$

ограничены в пространствах $C_\beta(0,1), M_\beta(0,1), L_{\beta-\frac{1}{p}}^p(0,1)$ причем при всех значениях

параметра λ из круга $|\lambda - \lambda_0| < R_0$ оценка нормы этих операторов будет одной и той же в пространствах $L_{\beta-\frac{1}{p}}^p, C_\beta, M_\beta$ на $(0,1)$. Итак, при $k \leq 0$ имеем следующие

оценки в $E^\beta(0,1)$:

$$\|\Omega_k^{(1)}\| \leq \frac{2(1-k)}{2-k-2\operatorname{Re} \nu(1-k)-\beta} \leq \frac{2}{1-2\operatorname{Re} \nu + \frac{1-\beta}{1-k}} \leq \frac{2}{1-2\operatorname{Re} \nu}, 0 < \beta \leq 1,$$

$$\|\Omega_k^{(1)}\| \leq \frac{2|\nu|}{1-2\operatorname{Re} \nu - (\beta-1)} = \frac{2}{2-\beta-2\operatorname{Re} \nu}, 1 \leq \beta < 2.$$

Аналогично при $k \geq 2$ имеем:

$$\|\Omega_k^{(1)}\| \leq \frac{2(k-1)}{\beta+k-2-2\operatorname{Re} \nu(k-1)} \leq \frac{2}{1-\frac{1-\beta}{k-1}-2\operatorname{Re} \nu} \leq \frac{2}{\beta-2\operatorname{Re} \nu}, 0 < \beta \leq 1,$$

$$\|\Omega_k^{(1)}\| \leq \frac{2(k-1)}{2\operatorname{Re} \nu(1-k)-(2-k-\beta)} = \frac{2}{1-2\operatorname{Re} \nu + \frac{\beta-1}{k-1}} \leq \frac{2}{1-2\operatorname{Re} \nu}, 1 \leq \beta < 2.$$

Аналогичные оценки получаются для операторов $\Omega_k^{(2)}$.

Отсюда вытекает ограниченность оператора $(Pg)(z)$ в пространствах $\tilde{E}^\beta (|z| < 1)$ и оценка

$$\|Pg\|_{\tilde{E}^\beta} \leq \begin{cases} \frac{2}{\beta-2\operatorname{Re} \nu} + \frac{1}{|1-\nu|}, & \text{при } 0 < \beta \leq 1, \\ \frac{2}{2-\beta-2\operatorname{Re} \nu} + \frac{1}{|1-\nu|}, & \text{при } 1 \leq \beta < 2. \end{cases}$$

Теорема 3 доказана.

Литература

1. Бильман Б.М. О разрешимости одного особого двумерного интегрального уравнения / Б.М.Бильман, Г.Джангибеков // ДАН РТ. –1977. –Т.20. –С.3-7.
2. Михайлов Л.Г. Интегральные уравнения с ядром, однородным степени -1 / Л.Г.Михайлов // Душанбе: Дониш, 1966. – 49 с.
3. Бильман Б.М. Об интегральных уравнениях с переменными пределами интегрирования, ядра которых имеют особенность типа однородной функции степени -1 / Б.М.Бильман // В сб: Дифференциальные и интегральные уравнения с сингулярными коэффициентами. - Душанбе, 1969. – С.19-40.
4. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции / И.Н.Векуа // М.: Физматгиз, 1959. – 507 с.
5. Михлин С.Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения / С.Г.Михлин // М.: Физматгиз, 1962. – 254 с.

ҲАЛЛИ ОШКОРИ ЯК МУОДИЛАИ ИНТЕГРАЛИИ ДУЧЕНАКА

Ҷангибеков Г., Арабзода К.

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Дар мақола ҳалли ошкори як муодилаи интегралӣ дученака дар силсилаи фазоҳои вазндори функсияҳои $\tilde{E}_\beta$ ($|z| < 1$) ёфта шудааст, ки дар он интеграл ба таври махсус ва инчунин ба маънои қимати асосии Коши ҷаҳмида мешаванд.

Калимаҳои калидӣ: оператори интегралӣ сингулярӣ, маҳдудияти операторҳо, қатори Фурйе, коэффисиентҳои Фурйе.

OF SOME SINGULAR INTEGRAL OPERATOR WITH EVEN CHARACTERISTIC

Jangibekov G., Arabzoda K.

Tajik national University

In explores some classes of systems of two dimensional singular integral operators and on a limited area. Found effective necessary and sufficient conditions for Noetherian in the space of lebeg and the formula for the rate us index.

Key words: singular integral operators, noetherian operators, the index of operator, operator.

Сведения об авторах. Джангибеков Гулходжа, доктор физико-математических наук, профессор кафедры ФАДУ Таджикского национального университета. 734025, Республика Таджикистан, г. Душанбе, пр. Рудаки, 17. Тел.: +992 (93) 503-6342, E-mail: gulkhoja@list.ru

Арабзода К., аспирант кафедры ФАДУ Таджикского национального университета. Тел.: +992 (93) 526-0291.

УДК 517.968.73

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ МОДЕЛЬНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПРАВОЙ СИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ В ЯДРЕ

Зарипов С.К.

Таджикский национальный университет

Для одного модельного интегро-дифференциального уравнения первого порядка с одной правой сингулярной точкой в ядре, в зависимости от корней характеристического уравнения, найдены интегральные представления многообразия решений. Построены аналоги теоремы Фредгольма для данного интегро-дифференциального уравнения. Используемый метод можно применять для изучения модельных и немодельных интегро-дифференциальных уравнений высшего порядка.

Ключевые слова: модельное интегро-дифференциальное уравнение, граничные сингулярные точки, интегральные представления, интегральные уравнения, характеристическое уравнение.

ВВЕДЕНИЕ

Теория интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтера, начиная с классических, и в то же время оригинальных работ самого В. Вольтера, и в настоящее время находит своё развитие. Имеется обширный список публикаций [1]–[20], посвящённых исследованию различных классов интегро-дифференциальных уравнений типа Фредгольма и Вольтера. Например, в [2] рассматривается обыкновенное интегро-дифференциальное уравнение

$$L_x[u] = \lambda T[u] + f(x),$$

где λ - вещественный параметр и

$$L_x[u] = u^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^n a_k(x) u^{(n-k)}(x), \quad T[u] = \int_a^{\xi} F[x, y, u(y), u'(y), \dots, u^{(m)}(y)] dy,$$

причём либо $\xi = b$, либо $\xi = x$. Это уравнение в линейном случае, т.е., когда

$$T[u] = \int_a^{\xi} K(x, t) P_y[u] dy, \quad P_y[u] = \sum_{i=0}^m b_i(y) u^{(m-i)}(y),$$

и $\xi = b$ изучено в известной работе А.И. Некрасова [3], а в других случаях - его последователями.

Многие задачи, имеющие важное значение, приводятся к изучению сингулярного интегро-дифференциального уравнения вида

$$\sum_{r=0}^m \left[a_r(t_0) \varphi^{(r)}(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{K(t_0, t) \varphi^{(r)}(t) dt}{t - t_0} \right] = f(t_0),$$

которое впервые рассмотрел Л.Г. Магнарадзе в работе [4]. Частным случаем этого уравнения является сингулярное интегро-дифференциальное уравнение Прандтля

$$\frac{\Gamma(x)}{B(x)} - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Gamma'(t)}{t - x} dt = f(x),$$

нахождению решения которого посвящено большое число работ, в частности работы И.Н. Векуа [6] и Л.Г. Магнарадзе [5].

Также в последние годы теория линейных и нелинейных прямых и обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений, которые рассмотрены в работах [7]–[15], представляет собой активно развивающееся направление в современной теории интегро-дифференциальных уравнений.

Важно заметить, что в последние годы в работах Н. Раджабова [16]–[18] была создана новая методика для изучения интегральных уравнений с сингулярными ($\alpha = 1$) и сверхсингулярными ($\alpha > 1$) ядрами вида

$$y(x) + \int_a^x \frac{K(x, t)}{(t - a)^\alpha} y(t) dt = f(x).$$

Заметим, что до настоящего времени, в основном, изучались интегро-дифференциальные уравнения с регулярными коэффициентами или сингулярные интегро-дифференциальные уравнения с интегралами, понимаемыми в смысле главного значения по Коши. В связи с этим вопрос об изучении интегро-дифференциальных уравнений ядра, которых имеют особенности первого порядка и выше, до настоящего времени остаётся открытым. Поэтому в отличие от вышеуказанных работ мы в данной статье будем рассматривать интегро-дифференциальное уравнение, ядро которого имеет особенности первого порядка и с интегралами, понимаемыми не в смысле главного значения по Коши.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ЕЕ РЕШЕНИЕ

Пусть $\Gamma = \{x: a < x < b\}$ - множество точек на вещественной оси. На Γ рассмотрим модельное интегро-дифференциальное уравнение первого порядка с одной правой сингулярной точкой в ядре

$$y'(x) + \frac{M}{b-x} y(x) + \int_x^b \frac{N}{(b-t)^2} y(t) dt = g(x), \quad (1)$$

где M, N - заданные постоянные числа, $g(x)$ - заданная функция на Γ , $y(x)$ - искомая функция.

Определение 1. Уравнение (1) будем называть интегро-дифференциальным уравнением первого порядка с сингулярным коэффициентом, когда степень выражения $(b-t)$ в знаменателе под интегралом равна двум; со сверхсингулярным коэффициентом, когда эта степень больше двух и со слабосингулярным коэффициентом, когда она меньше двух.

Как видно из (1) ядро этого уравнения является не фредгольмовым и поэтому существует такое мнение, что изучение таких уравнений не является актуальным, так как находящиеся там интегралы будут расходящимися. Оказывается, что в зависимости от того, в каком классе мы будем искать решение уравнения (1), вопрос об изучении уравнения (1) становится актуальным и, причём даёт такие эффекты, которые в существующей теории не наблюдались, и они в некотором смысле обобщают эту теорию.

Прежде всего, через $C'_b[a, b]$ обозначим класс таких функций, которые имеют производные первого порядка и в точке $x=b$ обращаются в нуль с асимптотическим поведением

$$y(x) = o[(b-x)^{\gamma_1}], \quad \gamma_1 > 1. \quad (2)$$

Используя методы, разработанные в [19]–[20], решение однородного уравнения (1) будем искать в классе $C'_b[a, b]$, т.е. в виде $y(x) = (b - x)^\mu$, где $\mu > 1$. Тогда для определения μ получим алгебраическое уравнение

$$\mu^2 - (1 + M)\mu + M - N = 0, \quad (3)$$

которое назовём его характеристическим уравнением соответствующего однородного уравнения (1). В зависимости от корней характеристического уравнения (3) решение уравнения (1) получим в следующем виде:

I. 1. Пусть $D = (1 + M)^2 - 4(M - N) > 0$, тогда общее решение однородного уравнения (1) даётся при помощи формулы

$$y(x) = (b - x)^{\mu_1} c_1 + (b - x)^{\mu_2} c_2,$$

где $\mu_{1,2} = \frac{1 + M \pm \sqrt{D}}{2}$, c_1, c_2 - произвольные постоянные числа.

Пусть корни характеристического уравнения (3) удовлетворяют неравенству $1 < \mu_1 < \mu_2$, тогда, используя метод вариации произвольных постоянных, решение неоднородного уравнения (1), легко находим в таком виде:

$$y(x) = (b - x)^{\mu_1} c_1 + (b - x)^{\mu_2} c_2 + \frac{1}{\sqrt{D}} \int_x^b \left[(\mu_1 - 1) \left(\frac{b - x}{b - t} \right)^{\mu_1} - (\mu_2 - 1) \left(\frac{b - x}{b - t} \right)^{\mu_2} \right] g(t) dt \equiv E_1^-[c_1, c_2, g(x)] \quad (4)$$

Для сходимости интегралов в правой части (4), требуем, чтобы функция $g(x)$ в точке $x = b$ обращалась в нуль с асимптотическим поведением:

$$g(x) = o[(b - x)^{\delta_1}], \quad \delta_1 > \mu_2 - 1. \quad (5)$$

Заметим, что если выполняется неравенство $1 < \mu_1 < \mu_2$, тогда полученное решение (4) принадлежит классу $C'_b[a, b]$.

Подставляя выражения (4) в уравнение (1) легко находим, что оно в действительности удовлетворяет этому уравнению.

Таким образом, доказано:

Теорема 1. Пусть в интегро-дифференциальном уравнении (1) коэффициенты M и N такие, что корни характеристического уравнения (3) являются вещественными и разными и $1 < \mu_1 < \mu_2$. Функция $g(x) \in C[a, b]$ и $g(b) = 0$ с асимптотическим поведением (5).

Тогда однородное уравнение (1) имеет два линейно независимых решения, а неоднородное уравнение (1) в классе функций $y(x) \in C'_b[a, b]$, обращающихся в нуль в точке $x = b$, всегда разрешимо и его общее решение содержит две произвольных постоянных и даётся при помощи формулы (4).

Теперь пусть $\mu_1 < 1 < \mu_2$. В этом случае из выражения (4) следует, что если решение уравнения (1) при $\mu_1 < 1$ существует, то для того, чтобы оно принадлежало классу $C'_b[a, b]$, произвольная постоянная c_1 должна быть равна нулю, т.е. в этом случае решение уравнения (1) имеет вид:

$$y(x) = (b-x)^{\mu_2} c_2 + \frac{1}{\sqrt{D}} \int_x^b \left[(\mu_1 - 1) \left(\frac{b-x}{b-t} \right)^{\mu_1} - (\mu_2 - 1) \left(\frac{b-x}{b-t} \right)^{\mu_2} \right] g(t) dt \equiv E_1^-[0, c_2, g(x)]. \quad (6)$$

В этом случае тоже для сходимости интегралов в правой части (6) функция $g(x)$ должна обращаться в нуль с асимптотическим поведением (5).

Таким образом, имеет место следующая теорема:

Теорема 2. Пусть в интегро-дифференциальном уравнении (1) коэффициенты M и N такие, что корни характеристического уравнения (3) являются вещественными и разными и $\mu_1 < 1 < \mu_2$. Функция $g(x) \in C[a, b]$ и $g(b) = 0$ с асимптотическим поведением (5).

Тогда однородное уравнение (1) имеет одно линейно независимое решение, а неоднородное уравнение (1) в классе функций $y(x) \in C'_b[a, b]$, обращающихся в нуль в точке $x = b$, всегда разрешимо и его общее решение содержит одну произвольную постоянную и даётся при помощи формулы (6).

Если $\mu_1 < \mu_2 < 1$, тогда для того, чтобы решение уравнения (1) принадлежало классу $C'_b[a, b]$, обе произвольных постоянных c_1 и c_2 должны равняться нулю, т.е. в этом случае однородное уравнение (1) имеет только нулевое решение, а неоднородное уравнение для каждой функции $g(x) \in C[a, b]$ и $g(b) = 0$ имеет единственное решение, которое даётся при помощи формулы:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{D}} \int_x^b \left[(\mu_1 - 1) \left(\frac{b-x}{b-t} \right)^{\mu_1} - (\mu_2 - 1) \left(\frac{b-x}{b-t} \right)^{\mu_2} \right] g(t) dt \equiv E_1^-[0, 0, g(x)] \quad (7)$$

Таким образом, имеет место следующая теорема:

Теорема 3. Пусть в интегро-дифференциальном уравнении (1) коэффициенты M и N такие, что корни характеристического уравнения (3) являются вещественными и разными и $\mu_1 < \mu_2 < 1$. Функция $g(x) \in C[a, b]$ и $g(b) = 0$. Тогда однородное уравнение (1) имеет только тривиальное решение, а неоднородное уравнение (1) имеет единственное решение, которое даётся при помощи формулы (7).

Объединяя вышеприведённые результаты для интегро-дифференциального уравнения (1), можно построить аналог об альтернативе Фредгольма в таком виде:

Аналог теоремы об альтернативе Фредгольма для интегро-дифференциального уравнения (1) в случае, когда корни характеристического уравнения (3) являются вещественными и разными: Если корни характеристического уравнения (3) удовлетворяют условию $\mu_1 < \mu_2 < 1$, то однородное уравнение (1) имеет только тривиальное решение, а неоднородное уравнение (1) для каждой функции $g(x) \in C[a, b]$ и $g(b) = 0$ имеет решение, и притом единственное, которое даётся по формуле (7). Если корни характеристического уравнения (3) удовлетворяют условию $\mu_1 < 1 < \mu_2$, то однородное уравнение (1) имеет нетривиальное решение и его общее решение содержит одну произвольную постоянную, а неоднородное уравнение (1) разрешимо тогда и только тогда, когда его правая часть удовлетворяет условию (5). В этом случае неоднородное уравнение (1) имеет бесконечное число решений и его общее решение тоже содержит одну произвольную постоянную, которое даётся при помощи формулы (6). Если корни характеристического уравнения (3) удовлетворяют условию $1 < \mu_1 < \mu_2$, то однородное уравнение (1) имеет два линейно независимых решения и его общее решение содержит две произвольных постоянных, а неоднородное уравнение (1) разрешимо тогда и только тогда, когда его правая часть удовлетворяет условию (5). В этом случае тоже неоднородное уравнение (1) имеет бесконечное число решений и его общее решение зависит от двух произвольных постоянных, которое даётся по формуле (4).

II. Пусть $D = 0$ и $\mu = \frac{1+M}{2} > 1$, тогда легко можно показать, что общее решение однородного уравнения (1) даётся при помощи формулы

$$y(x) = (b-x)^\mu c_3 + (b-x)^\mu \ln(b-x) c_4,$$

а решение неоднородного уравнения (1) даётся при помощи формулы

$$y(x) = (b-x)^\mu c_3 + (b-x)^\mu \ln(b-x) c_4 - \int_x^b \left(\frac{b-x}{b-t} \right)^\mu \left[(\mu-1) \ln \left(\frac{b-x}{b-t} \right) + 1 \right] g(t) dt \equiv E_2^-[c_3, c_4, g(x)], \quad (8)$$

где c_3, c_4 - произвольные постоянные числа.

Заметим, что если поведение функции $g(x)$ в точке $x=b$ определяется из асимптотической формулы

$$g(x) = o[(b-x)^{\delta_2}], \quad \delta_2 > \mu-1, \quad \text{когда } x \rightarrow b, \quad (9)$$

тогда интегралы в правой части (8) будут сходящимися.

Таким образом, имеет место следующая теорема:

Теорема 4. Пусть в интегро-дифференциальном уравнении (1) коэффициенты M и N такие, что корни характеристического уравнения (3) являются вещественными и равными и $\mu = \frac{1+M}{2} > 1$. Функция $g(x) \in C[a, b]$ и $g(b) = 0$ с асимптотическим поведением (9). Тогда однородное уравнение (1) имеет два линейно независимых решения, а неоднородное уравнение всегда разрешимо и его общее решение содержит две произвольных постоянных и даётся при помощи формулы (8).

Если $\mu < 1$, тогда для того чтобы решение вида (8) принадлежало классу $C'_b[a, b]$, произвольные постоянные c_3 и c_4 должны равняться нулю, т.е. $c_3 = 0$, $c_4 = 0$. В этом случае решение уравнения (1) имеет вид:

$$y(x) = - \int_x^b \left(\frac{b-x}{b-t} \right)^\mu \left[(\mu-1) \ln \left(\frac{b-x}{b-t} \right) + 1 \right] g(t) dt \equiv E_2^-[0, 0, g(x)]. \quad (10)$$

Заметим, что в этом случае неоднородное уравнение (1) для каждой функции $g(x) \in C[a, b]$ и $g(b) = 0$ имеет единственное решение.

Теорема 5. Пусть в интегро-дифференциальном уравнении (1) коэффициенты M и N такие, что корни характеристического уравнения (3) являются вещественными и равными и $\mu < 1$. Функция $g(x) \in C[a, b]$ и $g(b) = 0$.

Тогда однородное уравнение (1) имеет только нулевое решение, а неоднородное уравнение имеет единственное решение, которое даётся при помощи формулы (10).

В этом случае аналог об альтернативе Фредгольма можно построить в таком виде.

Аналог теоремы об альтернативе Фредгольма для интегро-дифференциального уравнения (1) в случае, когда корни характеристического уравнения (3) являются вещественными и равными.

Если корни характеристического уравнения (3) удовлетворяют условию $\mu < 1$, то однородное уравнение (1) имеет только тривиальное решение, а неоднородное уравнение (1) для каждой функции $g(x) \in C[a, b]$ и $g(a) = 0$ имеет решение и притом единственное, которое даётся по формуле (10). Если корни характеристического уравнения (3) удовлетворяют условию $\mu > 1$, то однородное уравнение (1) имеет два линейно независимых решения и его общее решение содержит две произвольных постоянных, а неоднородное уравнение (1) разрешимо тогда и только тогда, когда его правая часть удовлетворяет условию (9). В этом случае неоднородное уравнение (1) имеет бесконечное число решений и его общее решение зависит от двух произвольных постоянных, которое даётся по формуле (8).

III. Если $D < 0$, $\mu_{1,2} = \frac{1+M}{2} \pm \frac{\sqrt{4(M-N)-(1+M)^2}}{2} i = \alpha \pm \beta i$ и $\alpha = \frac{1+M}{2} > 1$, тогда

решение однородного уравнения (1) даётся по формуле

$$y(x) = (b-x)^\alpha \cos[\beta \ln(b-x)]c_5 + (b-x)^\alpha \sin[\beta \ln(b-x)]c_6. \quad (11)$$

Используя метод, подобный методу вариации произвольных постоянных, решение неоднородного уравнения (1) легко находим в таком виде:

$$\begin{aligned} y(x) = & (b-x)^\alpha \cos[\beta \ln(b-x)]c_5 + (b-x)^\alpha \sin[\beta \ln(b-x)]c_6 - \\ & - \frac{1}{\beta} \int_x^b \left(\frac{b-x}{b-t} \right)^\alpha \left[(\alpha-1) \sin \left[\beta \ln \left(\frac{b-x}{b-t} \right) \right] + \right. \\ & \left. + \beta \cos \left[\beta \ln \left(\frac{b-x}{b-t} \right) \right] \right] g(t) dt \equiv E_3^- [c_5, c_6, g(x)] \end{aligned} \quad (12)$$

Для сходимости интегралов в правой части равенства (12) требуем, чтобы функция $g(x)$ в точке $x \rightarrow b$ обращалась в нуль с асимптотическим поведением

$$g(x) = o[(b-x)^{\delta_3}], \quad \delta_3 > \alpha - 1, \text{ когда } x \rightarrow b. \quad (13)$$

Таким образом, имеет место следующая теорема:

Теорема 6. Пусть в интегро-дифференциальном уравнении (1) коэффициенты M и N такие, что корни характеристического уравнения (3) являются комплексно-сопряженными и $\alpha = \frac{1+M}{2} > 1$. Кроме того $g(x) \in C[a, b]$ и в точке $x=b$ обращается в нуль с асимптотическим поведением (13). Тогда однородное уравнение (1) имеет два линейно независимых решения и его общее решение даётся при помощи формулы (11). В этом случае неоднородное уравнение (1) всегда разрешимо и его общее решение тоже содержит две произвольных постоянных, которое даётся при помощи формулы (12).

Пусть в интегральном представлении (12) $\alpha < 1$, тогда если решение уравнения (1) из класса $C_b'[a, b]$ при $\alpha < 1$ существует, то оно имеет вид:

$$\begin{aligned} y(x) = & - \frac{1}{\beta} \int_x^b \left(\frac{b-x}{b-t} \right)^\alpha \left[(\alpha-1) \sin \left[\beta \ln \left(\frac{b-x}{b-t} \right) \right] + \right. \\ & \left. + \beta \cos \left[\beta \ln \left(\frac{b-x}{b-t} \right) \right] \right] g(t) dt \equiv E_3^- [0, 0, g(x)], \end{aligned} \quad (14)$$

т.е. в этом случае произвольные постоянные c_5, c_6 должны равняться нулю.

В этом случае тоже от функции $g(x)$ никаких условий, кроме ее непрерывности, т.е. $g(x) \in C[a, b]$ и $g(b) = 0$ не требуется.

Таким образом, имеем:

Теорема 7. Пусть в интегро-дифференциальном уравнении (1) коэффициенты M и N такие, что корни характеристического уравнения (3) являются комплексно-сопряженными и $\alpha < 1$. Кроме того $g(x) \in C[a, b]$ и $g(b) = 0$. Тогда однородное уравнение (1) имеет только нулевое решение а неоднородное уравнение имеет единственное решение, которое даётся при помощи формулы (14).

Теперь можно сформулировать следующий аналог об альтернативе Фредгольма для интегро-дифференциального уравнения (1).

Аналог теоремы об альтернативе Фредгольма для интегро-дифференциального уравнения (1) в случае, когда корни характеристического уравнения (3) являются комплексно сопряжёнными.

Если корни характеристического уравнения (3) являются комплексно сопряжёнными и $\alpha < 1$, то однородное уравнение (1) имеет только тривиальное решение, а неоднородное уравнение (1) для каждой функции $g(x) \in C[a, b]$ и $g(b) = 0$ имеет решение, и притом единственное и даётся по формуле (14). Если корни характеристического уравнения (3) такие, что выполняется условие $\alpha > 1$, то однородное уравнение (1) имеет два линейно независимых решения и его общее решение содержит две произвольных постоянных, а неоднородное уравнение (1) разрешимо тогда и только тогда, когда его правая часть удовлетворяет условию (13). В этом случае неоднородное уравнение (1) имеет бесконечное число решений и его общее решение зависит от двух произвольных постоянных, которое даётся при помощи формулы (12).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение заметим, что в общей теории интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтера решение содержит столько произвольных постоянных, каков наибольший порядок производной, входящей в уравнение, и эти произвольные постоянные легко находятся с помощью постановок различных начальных и краевых задач. В отличие от этого мы определили класс таких интегро-дифференциальных уравнений, решение которых в зависимости от ядра этого уравнения могут содержать от одного до n произвольных постоянных больше, чем порядок производных, входящих в эти уравнения. Например, уравнение (1) это интегро-дифференциальное уравнение первого порядка, а его решение в общем случае содержит две произвольные постоянные. Также выделяются случаи, когда уравнение (1) содержит одну произвольную постоянную или имеет единственное решение без постановки каких-либо начальных или краевых задач. Отсюда вытекает, что только в одном

случае найденное нами решение согласуется с существующей теорией, а в двух других случаях найденные решения выходят за рамки этой теории и показывают новизну данной работы. Далее заметим, что обычно для интегро-дифференциального уравнения типа Вольтера аналог теоремы Фредгольма не строится. Но природа уравнений вида (1) и его решение таковы, что построение таких аналогов для этих уравнений становятся важным.

Далее интегральные представления, полученные в данной статье, могут быть использованы для постановки и решения различных начальных и краевых задач.

Литература

1. Вольтера В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений / В. Вольтера // Пер. с англ. Под ред. П.И. Кузнецова. – М., Наука. – 1982. – 304 с.
2. Вейнберг М.М. Интегро-дифференциальные уравнения / М.М. Вейнберг // Итоги науки, Сер. Мат. анализ. Теор. вероятн. Регулир. – 1964. – С. 5–37.
3. Некрасов А.И. Об одном классе линейных интегро-дифференциальных уравнений / А.И. Некрасов // – ГТТИ. М.– Л. – 1934. – С. 1–17.
4. Магнарадзе Л.Г. Об одной системе линейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений и о линейной граничной задаче Римана / Л.Г. Магнарадзе // Сообщ. АН Груз. ССР. – 1943. Т. 5. – №1. – С. 3–9.
5. Магнарадзе Л.Г. Об одном новом интегральном уравнении теории крыла самолёта. / Л.Г. Магнарадзе // Сообщ. АН Груз. ССР. – 1942. Т. 3. – №6. – С. 503–508.
6. Векуа И.Н. Об интегро-дифференциальном уравнении Прандтля / И.Н. Векуа // Прикл. матем. и мех. – 1945. – Т. 9. – №2. – С. 143–150.
7. Дурдиев Д.К. Глобальная разрешимость одной обратной задачи для интегро-дифференциального уравнения электродинамики / Д.К. Дурдиев // Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т. 44. – №7. – С. 867–873.
8. Сафаров Ж.Ш. Оценки устойчивости решений некоторых обратных задач для интегро-дифференциальных уравнений / Ж.Ш. Сафаров // Вестник Удмуртского университета. Серия: Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2014. – №3. – С. 75–82.
9. Бьянка К. Асимптотический предел интегро-дифференциального уравнения, моделирующего сложные системы / К. Бьянка, М. Феррара, L. Guerrini // Изв. РАН. Сер. матем. – 2014. – Т. 78. – №6. – С. 49–64.
10. Юлдашев Т.К. Обратная задача для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка / Т.К. Юлдашев // Вестник Самарского государственного университета. Естественная серия. – 2013. – №1. – С. 58–66.

11. Юлдашев Т.К. Об обратной задаче для нелинейных интегро–дифференциальных уравнений высшего порядка / Т.К. Юлдашев // Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика, математика. – 2014. – №1. – С. 153–163.
12. Бободжанов А. А. Метод нормальных форм в сингулярно возмущенных системах интегро–дифференциальных уравнений Фредгольма с быстро изменяющимися ядрами / А. А. Бободжанов, В. Ф. Сафонов // Матем. сб.– 204:7. – С. 47–70.
13. Бободжанов А. А. Задача с обратным временем для сингулярно возмущенного интегро–дифференциального уравнения с диагональным вырождением ядра высокого порядка / А. А. Бободжанов, В. Ф. Сафонов // Известия Российской академии наук. Серия математическая. – 2016. – 80:2. – С. 3–15.
14. Фалалеев М. В. Сингулярные интегро– дифференциальные уравнения специального вида в банаховых пространствах и их приложения / М. В. Фалалеев // Изв. Иркутского гос.ун– та. Сер. Математика. – 2013. – Т.6. – №4. – С. 128–137.
15. Фалалеев М. В. Вырожденные интегро – дифференциальные уравнения типа свертки в банаховых пространствах / М. В. Фалалеев // Изв. Иркутского гос. ун–та. Сер. Математика. – 2016. – Т.17. – С. 77–85.
16. Раджабов Н. Интегральные уравнения типов Вольтера с фиксированными граничными и внутренними сингулярными и сверхсингулярными ядрами и их приложения / Н. Раджабов // – Душанбе: Деваштич, 2007. – 221 с.
17. Раджабов Н. Многомерное интегральное уравнение вольтеровского типа с сингулярными граничными областями в ядрах / Н. Раджабов // ДАН России. – 2011. – Т. 437. – №2. – С. 158–161.
18. Раджабов Н. К теории одного класса интегральных уравнений Вольтерра первого рода с фиксированными граничными и внутренними сингулярными точками / Н. Раджабов // Доклады Академии наук Республики Таджикистан. –2015. –Т.58. – №7. – С. 549-557.
19. Зарипов С.К. Об одном классе модельного интегро–дифференциального уравнения первого порядка с одной сингулярной точкой в ядре / С.К. Зарипов // Вестник Таджикского национального университета. – 2015. – №1/3(164). – С. 27–32.
20. Зарипов С.К. Об одном классе модельных интегро–дифференциальных уравнений первого порядка со сверхсингулярной точкой в ядре / С.К. Зарипов // Вестник Таджикского национального университета. – 2015. – №1/6(191). – С. 6–12.

ДАР БОРАИ ЯК СИНФИ МУОДИЛАҲОИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНСИАЛИИ МОДЕЛИИ ТАРТИБИ ЯКУМ БО НУҚТАИ РОСТИ СИНГУЛЯРӢ ДАР ЯДРОЯШ

Зарипов С.К.

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Барои як синфи муодилаҳои интегро-дифференсиалии тартиби якум бо нуқтаи рости сингулярӣ, вобаста аз решаҳои муодилаи характеристикӣ, тасвири интегралӣ ҳал бо ёрии доимҳои ихтиёрӣ ёфта шудааст. Шабехи теоремаҳои Фредгоlm барои муодилаи омӯхташаванда сохта шудааст. Методи овардашударо барои омӯзиши муодилаҳои интегро-дифференсиалии моделӣ ва ғайримоделии тартибашон баланд низ истифода бурдан мумкин аст.

Калимаҳои калидӣ: муодилаи интегро-дифференсиалии моделӣ, нуқтаҳои сарҳадии сингулярӣ, тасвири интегралӣ ҳал, муодилаи интегралӣ, муодилаи характеристикӣ.

ABOUT ONE CLASS OF FIRST ORDER MODEL INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH RIGHT SINGULAR POINT IN THE KERNEL

Zaripov S.K.

Tajik national University

In this work for the one class first order model integro-differential equation with right singular point in the kernel, obtained integral representation manifold solution by two arbitrary constants. It was built the analogue of theorems of Fredholm for given integro-differential equation. The method of solving this problem can be used for the solving of higher order model and non-model integro-differential equations with singular coefficients.

Key words: integro-differential equation, boundary singular points, manifold solution, integral representation, integral equation.

Сведения об авторе. Зарипов Сарвар Кахрамонович, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры математического анализа и теории функций, Таджикский национальный университет, Республика Таджикистан, 734025, г. Душанбе, пр. Рудаки 17, E-mail: sarvar8383@list.ru.

УДК 512.54

ЗАМЕЧАНИЕ О КВАЗИНОРМАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ

Икрамов Х.Д.

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Существует ряд обобщений понятия “нормальный оператор” на случай бесконечных матриц и линейных операторов, действующих в бесконечномерных пространствах. Показано, что одно из этих обобщений, а именно, понятие квазинормального оператора бессодержательно в конечномерном случае в том смысле, что класс квазинормальных операторов совпадает с классом обычных нормальных операторов.

Ключевые слова: квазинормальные операторы, унитарные матрицы, собственные значения

Существует ряд обобщений понятия “нормальный оператор” на случай бесконечных матриц и линейных операторов, действующих в бесконечномерных пространствах. Некоторые из этих обобщений вполне содержательны и в конечномерном случае. Таково, например, понятие бинормального оператора, обсуждаемое в работе [1]. Есть, однако, и “не работающие” обобщения, не расширяющие класс конечных нормальных матриц. Рассмотрим с этой точки зрения определение квазинормального оператора. Назовем оператор A квазинормальным, если A коммутирует с оператором A^*A , т.е.

$$[A, A^*A] = 0.$$

Пусть A — квазинормальный оператор в C^n и $e_1, e_2, \dots, e_n$ — ортонормированный базис из собственных векторов самосопряженного оператора A^*A . При наличии кратных собственных значений у A^*A выберем этот базис так, чтобы векторы, отвечающие одному и тому же собственному значению, были занумерованы в базисе последовательными индексами. В выбранном базисе оператор A^*A имеет диагональную матрицу

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n).$$

В этом же базисе всякий оператор, коммутирующий с A^*A , приобретает блочно-диагональную форму, в которой каждый блок порядка 2 и выше соответствует группе совпадающих собственных значений оператора A^*A . Это справедливо, в частности, для операторов A и A^* .

Предположим, что оператор A вырожден. Тогда вырожден и оператор A^*A и, как известно, оба оператора имеют одно и то же ядро. Это означает, что группе из k_0 нулевых собственных значений матрицы Λ отвечает такая же группа диагональных нулей в матрице M оператора A .

Рассмотрим теперь ненулевое кратное собственное значение λ оператора A^*A . Если L — соответствующее собственное подпространство этого оператора, то сужение A на L удовлетворяет равенству

$$(A_L)^*(A_L) = \lambda I,$$

т.е. A_L с точностью до множителя является унитарным оператором.

Тем самым квазинормальный оператор A оказывается ортогональной суммой операторов, пропорциональных унитарным операторам, и, возможно, нулевого оператора. Такой оператор нормален. С другой стороны, всякий нормальный оператор A коммутирует с A^* и, следовательно, с A^*A . Это означает, что классы нормальных и квазинормальных операторов тождественны.

Литература

Икрамов Х.Д. Бинормальные матрицы. Зап. научн. семинаров ПОМИ. – 2017. – Т. 463. – С. 132-141.

ЭЗОҲ ДОИР БА ОПЕРАТОРҲОИ КВАЗИНОРМАЛӢ

Икрамов Ҳ.Д.

Донишгоҳи давлатии Москва ба номи М.В. Ломоносов

Як қатор мафҳумҳои умумикардашудаи «оператори нормалӣ» дар ҳолати матрисаҳои беохир ва операторҳои хаттии дар фазоҳои беченака амалкунанда мавҷуданд. Нишон дода шудааст, ки яке аз ин умумикуниҳо, хусусан, мафҳуми оператори квазинормалӣ дар ҳолати ченақдор будан дарбарнагиранда аст, ба он маъно, ки синфи операторҳои квазинормалӣ бо синфи операторҳои нормалии одӣ мувофиқат мекунад.

Калимаҳои калидӣ: операторҳои квазинормалӣ, матрисаҳои унитарӣ, қиматҳои хос.

A NOTE ON QUASI-NORMAL OPERATORS

Ikramov Kh.D.

Lomonosov Moscow State University

There exists a number of extensions of the concept of a normal operator to the case of infinite matrices and linear operators acting in infinite-dimensional spaces. We show that one of these extensions, namely, the concept of a quasinormal operator is meaningless in the finite-dimensional case in the sense that the class of quasi-normal operators is identical to the class of conventional normal operators.

Keywords: quasi-normal operators, unitary matrices, eigenvalues.

Сведения об авторе. Икрамов Хаким Дододжанович – д.ф.м.н., профессор, Московский государственный университет. 119991 Россия, Москва, Ленинские горы, д.1 E-mail: ikramov@cs.msu.su

УДК 574.6:477.63/64

О ТЕХНОЛОГИЯХ ВЫРАЩИВАНИЯ ОПЫТНОГО НАГУЛЬНОГО РЫБОВОДНОГО ПРУДА

Комилов Ф.С., Мирзоев С.Х.

Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе

Статья посвящена технологиям выращивания опытного рыбного пруда, его зарыбления, кормления и управления весовым ростом рыб. В ней проанализированы экспериментальные данные, полученные по опытному пруду, с целью дальнейшей разработки его компьютерно-математической модели – эффективного инструмента по изучению, исследованию и прогнозированию закономерностей функционирования экосистем рыбных прудов.

Ключевые слова: технология, выращивание, экосистема, рыбоводный пруд, рыба, зарыбление, управление, биомасса, белый толстолобик, карп, белый амур.

Высоких показателей от выращивания рыбы в рыбоводном пруду можно получить только в том случае, если в его экосистеме заранее проводить соответствующие нормативно-санитарные мероприятия. Например, в 1986 г. рыбоводный 8-мигектарный нагульный опытный пруд, находящийся в хозяйстве им. А. Джамии Хатлонской области Республики Таджикистан, до заполнения его водой был подготовлен к выращиванию в нём рыбы путём проведения следующих мероприятий [1, 2]:

- просушка ложа пруда;
- перепашка донных отложений перед водовыпуском, где скопился слой ила;
- обработка хлорной известью мест скопления не просыхающих иловых отложений;
- перенос негашеной извести на остальную часть рыбоводного пруда;
- удаление высохшей прошлогодней растительности, попавшей под залив воды;
- завоз навоза в пруд в количестве 26 тонн;
- засыпка грунтом мест фильтрации воды через дамбы.

После завершения подготовительных и санитарных мероприятий, в начале второй декады мая (11-го мая) приступили к заливке пруда водой. Когда температура воды в пруду достигла 22 °C, в него внесли минеральные удобрения в количестве 500 кг аммиачной селитры и 350 кг суперфосфата. При этом объём воды экосистемы пруда составил около 40 тыс.м³, концентрация азота в воде была около 5 мг/л, а фосфора около 1 мг/л. В результате такого развития экосистемы пруда уже на третий день наблюдалось интенсивное развитие водорослей, а на отдельных его участках началось «цветение» воды [3, 4].

Следует отметить, что в 1985-1987 гг. научными сотрудниками Института зоологии и паразитологии АН Республики Таджикистан совместно с учёными различных научно-исследовательских институтов и высших учебных заведений республики были проведены комплексные научно-исследовательские работы по подготовке к функционированию экосистемы опытного рыбоводного пруда, изучению и исследованию его гидро-климатических, биологических, физико-химических особенностей и состояния. В связи с этим, все данные, использованные в настоящей работе, в основном, базировались на этих экспериментах [3, 4].

Так как все рыбоводные пруды южного региона Таджикистана относятся к тёпловодным прудам, в их экосистемах, в основном, выращиваются теплолюбивые виды рыб, такие как белый и пёстрый толстолобики, белый амур, карп, буффало и т.д.

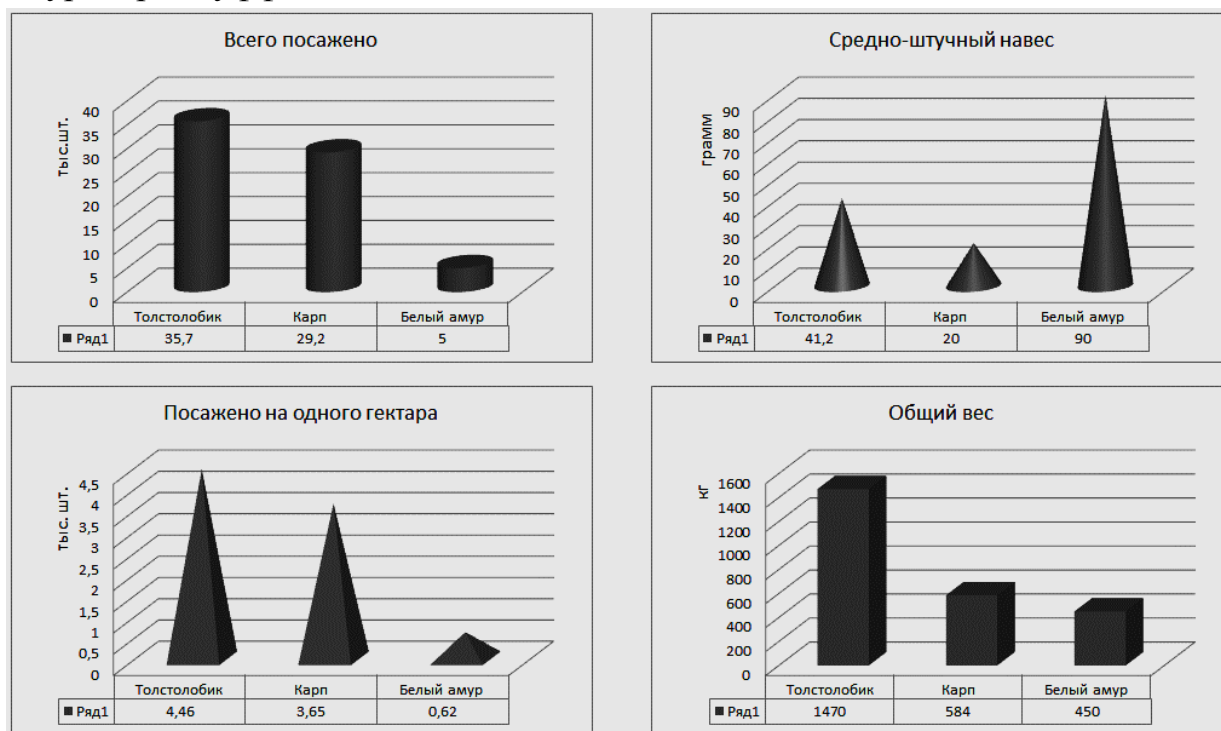


Рис. 1. Зарыбление 8-ми гектарного опытного рыбоводного пруда им. А. Джами (1986 г).

Зарыбление опытного нагульного рыбоводного пруда им. А. Джами годовиками белого толстолобика, карпа и белого амура проводилось в той же (второй) декаде мая (с 13-го по 19-го мая) 1986 года. В опытный пруд (8 га) всего было зарыблено 69,9 тыс.шт. рыб с общим весом в 2504 кг. В том числе, белый толстолобик 35,7 тыс.шт. (1470 кг), карп 29,2 тыс.шт. (584 кг) и белый амур 5 тыс.шт. (450 кг). Средние биомассы этих рыб составили соответственно 41,2 г для белого толстолобика, 20 г для карпа и 90 г для белого амура [3, 4] (рис. 1).

Питательные вещества (минеральные удобрения) для фитопланктона – излюбленного и основного корма белого толстолобика – со второй декады мая до середине июля в опытный пруд вносили вручную с лодки, разбрасывая их в сухом виде по воде. Начиная с конца июля и до конца сентября их начали вносить с помощью специально разработанной установки (отперфорированной трубы) по внесению растворённых минеральных удобрений, стационарно установленной над водной поверхностью пруда.

Кормление карпа комбикормами и куколкой тутового шелкопряда осуществляли с 22-го мая один раз в сутки. Карпа кормили в зависимости от поедаемости. С повышением температуры воды в пруду и ростом карпа

соответственно увеличивали норму и кратность внесения кормов до 2-3 раз в сутки. В тот же время одновременно поднимали и горизонт воды пруда.

Точно таким же образом происходила процедура кормления белого амура. Основным его кормом является кормовое растение. Белого амура также кормили в зависимости от поедаемости 1-2 раза в сутки. Кормовые растения в пруд вносили вручную, разбрасывая их по его акватории.

Для проведения физиологических исследований и определения темпа роста рыб один раз, а иногда два раза в месяц проводили контрольные отловы. По рис. 2 видно, что абсолютные величины прироста веса белого толстолобика были хорошими в основном в июле-августе. Белый толстолобик ежедневно прибавлял в весе от 7,74 до 10 г. Его привесы уменьшились до 0,6-1,66 г/сутки только лишь в сентябре-октябре. В июне-июле его относительные приросты веса составляли 3.07-3.09%, а в сентябре-октябре они уменьшились до 0.07-0.22% (рис. 3).

Проведённые исследования показали, что темп роста белого толстолобика был связан с высокой температурой воды в пруду в июне-июле (27-29 °C), а также с усиленным внесением в пруд минеральных удобрений и, соответственно, хорошим развитием фитопланктона. Понижение температуры воды в сентябре-октябре до 18-20 °C сразу же отразилось и на снижении темпа роста белого толстолобика.

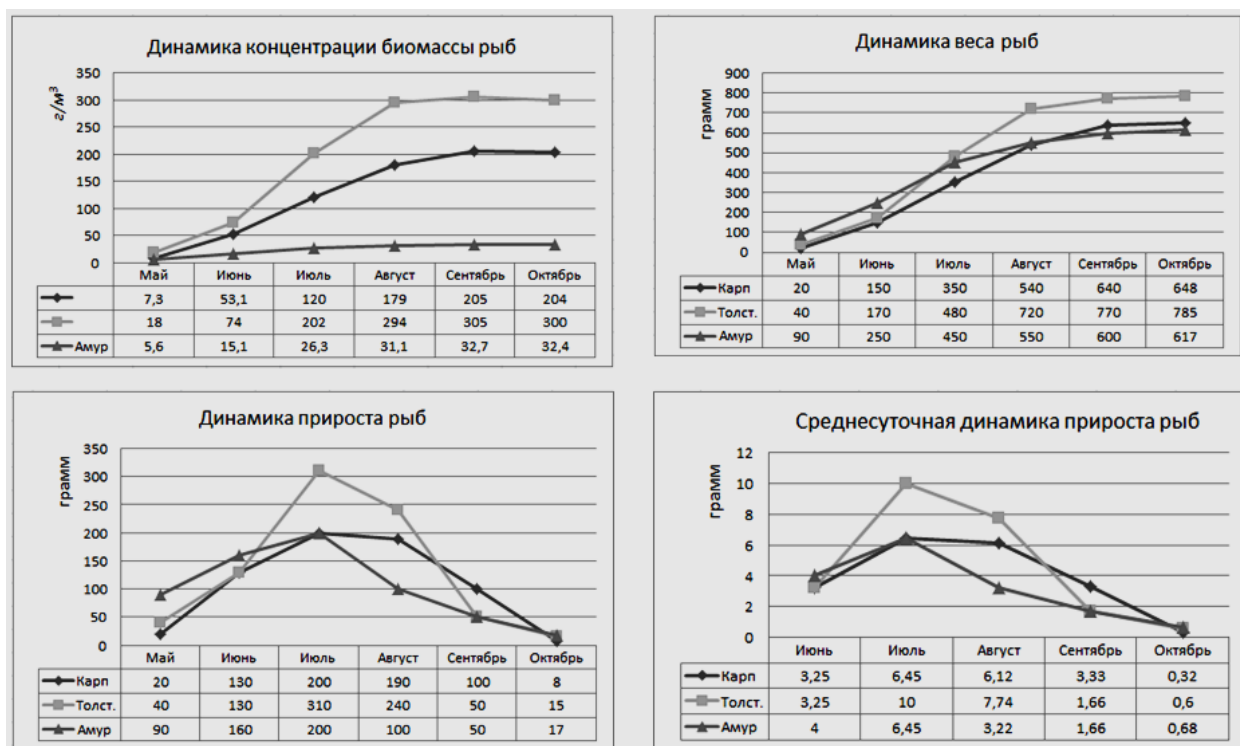


Рис. 2. Весовой рост рыб в опытном пруду им. А. Джамии (1986 г).

Приведённые данные на рис. 2 свидетельствуют о том, что ежесуточные абсолютные приросты веса карпа были высокими в начале и середине вегетационного периода, достигшие в июле 6,45 г/сутки. Относительный прирост веса карпа в июне составлял 3,82%. В связи с уменьшением абсолютного привеса карпа в октябре (0,32 г/сутки) его относительный прирост уменьшился особенно резко, составив в среднем 0,04% за сутки (рис.3). Исследования показали, что темп роста карпа прежде всего зависел от нормы внесения кормов в пруд.

Темп роста белого амура также иллюстрирован на рис. 2. Из диаграммы видно, что белый амур особенно хорошо прибавлял в весе в июне-июле – от 4 до 6,45 г/сутки. Это произошло из-за того, что в этот период в пруду было много высшей водной растительности. В конце вегетационного периода с уменьшением концентрации макрофитов суточный привес белого амура снизился до 0,68 г/сутки. Его самый высокий относительный прирост наблюдался в начале вегетационного периода от 1,84 до 2,35% в среднем за сутки. В сентябре-октябре относительный прирост белого амура понизился до 0,11-0,14% за сутки (рис.3).

В целом, в экспериментальном 1986 году на 8-мигектарном опытный нагульный пруд им. А. Джамии всего израсходовано 106500 кг комбикорма, 220 кг куколок тутового шелкопряда, 107055 кг кормовых растений, 28950 кг аммиачной селитры, 14550 кг суперфосфата, 330 кг негашеной извести и 40 кг хлорной извести. Корма расходовали по месяцам в следующем соотношении: май – 1,6%, июнь – 11,3%, июль – 44,8%, август – 23,3%, сентябрь – 14,1% и октябрь – 4,9% [3, 4]. Проведённые нормативно-санитарные мероприятия позволили получить соответствующие расчёты рыбоводного эффекта по опытному пруду, показанные на рис. 3.

Отлов опытного пруда осуществляли в конце октября. Всего было получено 42825 кг товарной рыбы, в том числе: 24130 кг белого толстолобика со средней массой 785 г, 16100 кг карпа со средней массой 648 г и 2595 кг белого амура со средней массой 617 г. Рыбопродуктивность опытного нагульного пруда составила 50,4 ц/га. Процент карпа в общем улове товарной рыбы составил 37,6%, а растительоядных (белого толстолобика и белого амура) – 62,4% (рис. 3).

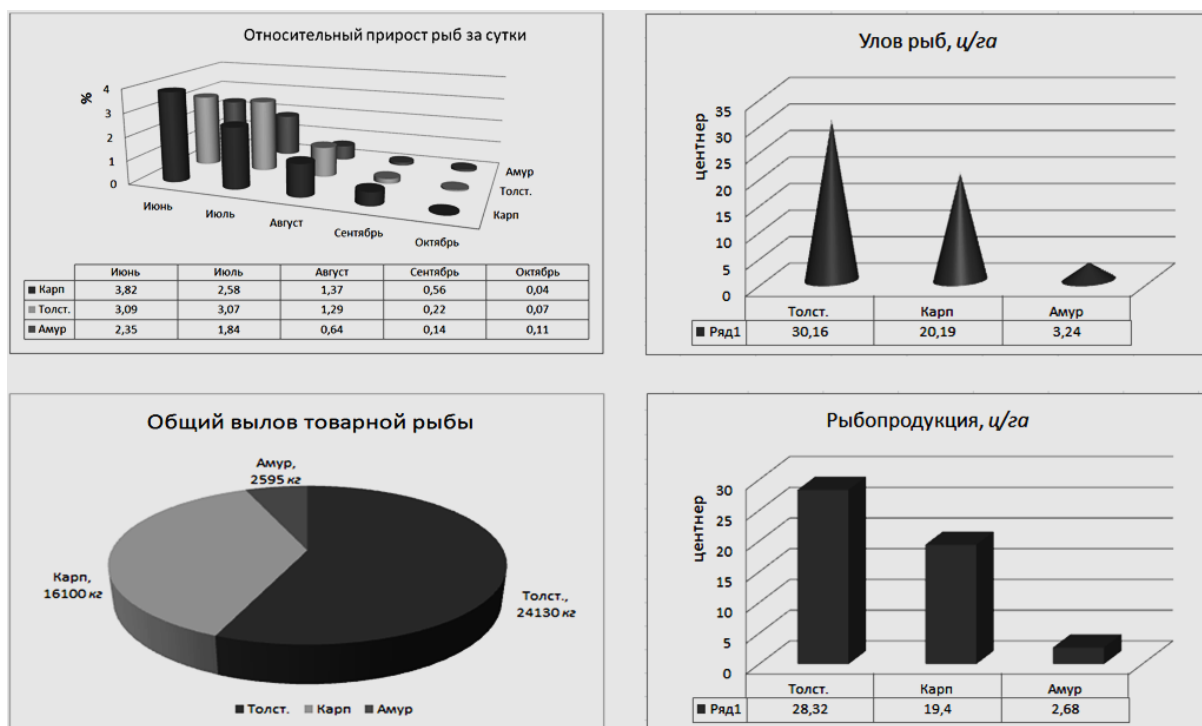


Рис. 3. Расчёты рыбоводного эффекта по опытному нагульному пруду.

Показано, что высокопродуктивная экосистема рыбоводного пруда при нормативных посадках белого толстолобика позволяет получить высокий урожай всего комплекса посаженных видов рыб (1986 г. – 50 ц/га). При увеличении плотности посадок белого толстолобика общая продуктивность посаженных в пруд рыб несколько уменьшилась (1987 г. – 49 ц/га) [4].

Проанализированные экспериментальные данные по опытному рыбоводному пруду будут использованы для разработки его компьютерно-математической модели – эффективного инструмента по изучению и прогнозированию закономерностей функционирования экосистем рыбоводных прудов.

Таким образом, полученные по опытному нагульному пруду экспериментальные результаты позволяют сделать следующие выводы научно-методологического характера:

Высокой рыбопродуктивности можно достигнуть только путём правильного подбора видового состава рыб, которые бы максимально использовали высокопродуктивную кормовую базу рыбоводного пруда.

Экосистема рыбоводного пруда может стать высокопродуктивной только в том случае, если биологические процессы всех звеньев её биотической цепи будут протекать на высокопродуктивном уровне.

Высокий процент рыбопродукции можно получить в поликультуре рыб, состоящей из карпа, белого толстолобика и белого амура. Принято считать, что это соотношение видов оптимально из-за наиболее полного использования ими

естественной кормовой базы пруда: белый толстолобик потребляет фитопланктон, карп – бентос и зоопланктон, белый амур – макрофит.

Поликультура позволяет получить высокий урожай всего комплекса посаженных видов рыб только при нормативных посадках белого толстолобика, так как рыбопродуктивность пруда теснейшим образом связана с продукцией органического вещества за счёт фотосинтеза фитопланктона, т.е. плотность посаженных рыб должна соответствовать уровню первично-продукционных процессов.

Литература

1. Комилов Ф.С. Учёт гидро-климатических и физико-химических характеристик экосистемы рыбоводного пруда при её компьютерном моделировании / Ф.С.Комилов, С.Х.Мирзоев, Ф.Акобирзода // Вестник Таджикского национального университета, сер.естеств.наук. –1/1(156). – 2015. – С.19-27.
2. Комилов Ф.С. Микробиологические основы компьютерного моделирования экосистемы рыбоводного пруда / Ф.С.Комилов, С.Х.Мирзоев, Ф.Акобирзода, И.Эргашбоев // Известия АН РТ, отд.биол. и мед.наук. –№2(190). – 2015. – С. 54-62.
3. Комилов Ф.С. Имитационная модель динамики экосистемы макрофитного рыбоводного пруда / Ф.С.Комилов, И.Л.Косимов // LAP LAMBERT Academic Publishing (Project ID: #130070; ISBN 978-3-659-80543-1) / <https://www.lap-publishing.com/> – LAP: OmniScriptum GmbH & Co. KG, Bahnhofstraße 28, D-66111 Saarbrücken. – 135 с.
4. Богданов Н.И. Отчёт по биологическим основам управления высокопродуктивной экосистемой рыбоводного пруда / Н.И.Богданов, Ф.С.Комилов, М.К.Юнусов, А.А.Воинов, М.С.Эгамов // Душанбе: ИЗИП, 1988. – 24 с.

ТЕХНОЛОГИЯИ ПАРВАРИШИ ТАҶРИБАВИИ МОҲИПАРВАРӢ ДАР КӢЛҲО

Комилов Ф.С., Мирзоев С.Х.

Филиали ДДМ ба номи М.В.Ломоносов дар ш.Душанбе

Мақолаи мазкур ба технологияи парвариши моҳии ботаҷрибаи ҳавзӣ, захираи он, ғизо ва идоракунии болоравии вазни моҳӣ бахшида шудааст. Он маълумоте, ки аз таассуроти таҷрибавӣ гирифта шудааст, барои таҳияи минбаъдаи модели компютери математикӣ - як воситаи самарабахш барои омӯзиш, таҳқиқ ва пешгӯи қардани ғайолияти мунтазами экосистема аз ҳавзҳои моҳигирӣ истифода мегардад.

Калимаҳои калидӣ: технология, парвариш, экосистема, ҳавзи моҳипарварӣ, моҳӣ, моҳипарварӣ, идоракунии, биомасса, толстолобик сафед, карп, амури сафед.

TECHNOLOGIES FOR EXPERIMENTAL CULTIVATION OF FISHPONDS

Komilov F.S., Mirzoev S.H.

Dushanbe branch of Lomonosov Moscow State University

The article is devoted to the technology of preparation of experimental cultivation of fishpond, its stocking feeding and managing fish weight and growth. The collected data was analyzed for further development its computer-mathematical model which would be an effective tool for study, research and prediction of regularities of fishponds ecosystems.

Key words: technology, growing, ecosystem, fishpond, fish, fish stocking, management, biomass, white silver carp, carp, white grass carp.

Сведения об авторах. Комилов Файзали Саъдуллоевич – д.ф.-м.н., проф., старший научный сотрудник сектора науки и инноваций филиала МГУ им. М.В. Ломоносова в г.Душанбе. 734002, Республика Таджикистан, г.Душанбе, ул. Бохтар, 35/1. Тел.: 988685014. E-mail: komfaiz@mail.ru

Мирзоев Саидаъло Хабибуллоевич – к.ф.-м.н., доцент, исполнительный директор филиала МГУ им. М.В. Ломоносова в г.Душанбе. 734002, Республика Таджикистан, г.Душанбе, ул. Бохтар, 35/1. Тел.: 985072787. E-mail: saidalo.mirzoev.1967@mail.ru

УДК 517. 946

ДВУХСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СОПРЯЖЕННОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Мирзорахимов М.Х.

Финансово-экономический институт Таджикистана

В работе для классического решения одной сопряженной смешанной задачи для волнового уравнения в трехмерном пространстве получены априорные оценки в нормах пространства Соболева W_2^1 , из которых следует непрерывная зависимость решения от правой части уравнения.

Ключевые слова: *априорные оценки, сопряженная смешанная задача, волновое уравнение в трехмерном пространстве, нелокальная задача.*

В ряде работ В.А.Ильина и М.Исматии (см.[1]-[6]) были рассмотрены различные типы уравнений в частных производных второго порядка. Ими были рассмотрены нелокальные задачи уравнения математической физики для неоднородного волнового уравнения.

В настоящей работе рассматриваются двухсторонние оценки сопряженной смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения.

Рассмотрим следующую смешанную задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \Delta W + f(x, y, z), (x, y, z, t) \in D \times D \times D \times [0, T], D = (0, 1) \\ W(x, y, z, 0) = W_t(x, y, z, 0) = 0, (x, y, z) \in \bar{D} \times \bar{D} \times \bar{D}, \bar{D} = [0, 1] \\ W(0, y, z, t) = 0, W_x(0, y, z, t) = W_x(1, y, z, t), (y, z, t) \in \bar{D} \times \bar{D} \times [0, T] \\ W(x, 0, z, t) = 0, W_y(x, 0, z, t) = W_y(x, 1, z, t), (x, z, t) \in \bar{D} \times \bar{D} \times [0, T] \\ W(x, y, 0, t) = 0, W_z(x, y, 0, t) = W_z(x, y, 1, t), (x, y, t) \in \bar{D} \times \bar{D} \times [0, T] \end{array} \right. \quad (1)$$

Решение поставленной задачи понимается в классическом смысле и ищется в классе Соболева.

Имеет место.

Теорема 1. Для решения $W(x, y, z, t)$ задачи (1) при $f(x, y, z, t) = f(x, y, z)$ справедливы следующие двухсторонние оценки:

$$\sqrt{\frac{r}{RM}} \|f(x, y, z)\| \leq \|W(x, y, z, t)\| \leq \sqrt{\frac{RM}{r}} \|f(x, y, z)\|, \quad (2)$$

где $r = \frac{27}{28}$, $R = 4160$, $M = A_1 + A_2 T^2 + A_3 T^4 + A_4 T^6$, а положительные постоянные A_1, A_2, A_3, A_4 определены ниже.

Доказательство. Из [7-8] известно, что с доказательством об одной несамосопряжённой задаче получим

$$\begin{aligned} r \|W(x, y, z, t)\|^2 &\leq \sum_{n,m,k=1}^{\infty} W_{n,m,k}^2(t) \leq \frac{f_{0,0,0}^2}{4} t^4 + \sum_{n,m,k=1}^{\infty} \left\{ \frac{f_{2n-1,2m-1,2k-1}^2}{\lambda^2} (1 - \cos \sqrt{\lambda} t)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{1 - \cos \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} f_{2n,2m-1,2k-1} + \right. \right. \\ &\quad \left. + \frac{P_n}{\sqrt{\lambda}} f_{2n-1,2m-1,2k-1} \left(\frac{1 - \cos \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} - \frac{t \sin \sqrt{\lambda} t}{2} \right) \right]^2 + \left[\frac{1 - \cos \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} f_{2n-1,2m,2k-1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{P_m}{\sqrt{\lambda}} f_{2n-1,2m-1,2k-1} \left(\frac{1 - \cos \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} - \frac{t \sin \sqrt{\lambda} t}{2} \right) \right]^2 + \left[\frac{1 - \cos \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} f_{2n-1,2m-1,2k} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{P_k}{\sqrt{\lambda}} f_{2n-1,2m-1,2k-1} \left(\frac{1 - \cos \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} - \frac{t \sin \sqrt{\lambda} t}{2} \right) \right]^2 + \left[\frac{1 - \cos \sqrt{\lambda} t}{\lambda} f_{2n,2m,2k-1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{P_n}{\lambda \sqrt{\lambda}} f_{2n-1,2m,2k-1} \left(\frac{1 - \cos \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} - \frac{t \sin \sqrt{\lambda} t}{1} \right) + \frac{P_m}{\lambda \sqrt{\lambda}} f_{2n,2m-1,2k-1} \left(\frac{1 - \cos \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} - \frac{t \sin \sqrt{\lambda} t}{1} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2P_n P_m}{\lambda^2} f_{2n-1,2m-1,2k-1} \left(\frac{1 - \cos \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} - \frac{3t \sin \sqrt{\lambda} t}{2} \right) \right]^2 + \left[\frac{1 - \cos \sqrt{\lambda} t}{\lambda} f_{2n,2m-1,2k} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{P_n}{\lambda\sqrt{\lambda}} f_{2n-1,2m-1,2k} \left(\frac{1-\cos\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}} - \frac{t\sin\sqrt{\lambda}t}{1} \right) + \frac{P_k}{\lambda\sqrt{\lambda}} f_{2n,2m-1,2k-1} \left(\frac{1-\cos\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}} - \frac{t\sin\sqrt{\lambda}t}{1} \right) + \\
& + \frac{2P_n P_k}{\lambda^2} f_{2n-1,2m-1,2k-1} \left(\frac{1-\cos\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}} - \frac{3t\sin\sqrt{\lambda}t}{2} \right) \Bigg]^2 + \left[\frac{1-\cos\sqrt{\lambda}t}{\lambda} f_{2n-1,2m,2k} + \right. \\
& + \frac{P_m}{\lambda\sqrt{\lambda}} f_{2n-1,2m-1,2k} \left(\frac{1-\cos\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}} - \frac{t\sin\sqrt{\lambda}t}{1} \right) + \frac{P_k}{\lambda\sqrt{\lambda}} f_{2n-1,2m,2k-1} \left(\frac{1-\cos\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}} - \frac{t\sin\sqrt{\lambda}t}{1} \right) + \\
& + \frac{2P_m P_k}{\lambda^2} f_{2n-1,2m-1,2k-1} \left(\frac{1-\cos\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}} - \frac{3t\sin\sqrt{\lambda}t}{2} \right) \Bigg]^2 + \left[\frac{1-\cos\sqrt{\lambda}t}{\lambda} f_{2n,2m,2k} + \right. \\
& + \frac{P_n}{\lambda\sqrt{\lambda}} f_{2n-1,2m,2k} \left(\frac{1-\cos\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}} - \frac{t\sin\sqrt{\lambda}t}{2} \right) + \frac{P_m}{\lambda\sqrt{\lambda}} f_{2n,2m-1,2k} \left(\frac{1-\cos\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}} - \frac{t\sin\sqrt{\lambda}t}{2} \right) + \\
& + \frac{P_k}{\lambda\sqrt{\lambda}} f_{2n,2m,2k-1} \left(\frac{1-\cos\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}} - \frac{t\sin\sqrt{\lambda}t}{2} \right) + \\
& + \frac{2P_n P_m}{\lambda^2} f_{2n-1,2m-1,2k} \left(\frac{1-\cos\sqrt{\lambda}t}{\lambda} - \frac{5t\sin\sqrt{\lambda}t}{8\sqrt{\lambda}} - \frac{t^2\cos\sqrt{\lambda}t}{8} \right) + \\
& + \frac{2P_n P_k}{\lambda^2} f_{2n-1,2m,2k-1} \left(\frac{1-\cos\sqrt{\lambda}t}{\lambda} - \frac{5t\sin\sqrt{\lambda}t}{8\sqrt{\lambda}} - \frac{t^2\cos\sqrt{\lambda}t}{8} \right) + \\
& + \frac{2P_m P_k}{\lambda^2} f_{2n,2m-1,2k-1} \left(\frac{1-\cos\sqrt{\lambda}t}{\lambda} - \frac{5t\sin\sqrt{\lambda}t}{8\sqrt{\lambda}} - \frac{t^2\cos\sqrt{\lambda}t}{8} \right) + \\
& + \frac{3P_n P_m P_k}{24\lambda^2\sqrt{\lambda}} f_{2n-1,2m-1,2k-1} \cdot \frac{t^3\sin\sqrt{\lambda}t}{1} \Bigg]^2 \leq \frac{f_{0,0,0}^2}{4} t^4 + \sum_{n,m,k=1}^{\infty} \left\{ \frac{4}{\lambda^2} f_{2n-1,2m-1,2k-1}^2 + 3 \cdot \left[\frac{4}{\lambda} f_{2n,2m-1,2k-1}^2 + \right. \right. \\
& + \frac{P_n^2}{\lambda} \left(\frac{4}{\lambda} + \frac{t^2}{4} \right) f_{2n-1,2m-1,2k-1}^2 + 3 \cdot \left[\frac{4}{\lambda} f_{2n-1,2m,2k-1}^2 + \frac{P_m^2}{\lambda} \left(\frac{4}{\lambda} + \frac{t^2}{4} \right) f_{2n-1,2m-1,2k-1}^2 \right] + \\
& + 3 \cdot \left[\frac{4}{\lambda} f_{2n-1,2m-1,2k}^2 + \frac{P_k^2}{\lambda} \left(\frac{4}{\lambda} + \frac{t^2}{4} \right) f_{2n-1,2m-1,2k-1}^2 \right] + 7 \cdot \left[\frac{4}{\lambda^2} f_{2n,2m,2k-1}^2 + \frac{P_n^2}{\lambda^3} \left(\frac{4}{\lambda} + \frac{t^2}{1} \right) f_{2n-1,2m,2k-1}^2 + \right. \\
& + \frac{P_m^2}{\lambda^3} \left(\frac{4}{\lambda} + \frac{t^2}{1} \right) f_{2n,2m-1,2k-1}^2 + \frac{4P_n^2 P_m^2}{\lambda^4} \left(\frac{4}{\lambda} + \frac{9t^2}{4} \right) f_{2n-1,2m-1,2k-1}^2 \Bigg] + 7 \cdot \left[\frac{4}{\lambda^2} f_{2n,2m-1,2k}^2 + \frac{P_m^2}{\lambda^3} \left(\frac{4}{\lambda} + \frac{t^2}{1} \right) f_{2n-1,2m-1,2k}^2 + \right. \\
& + \frac{P_k^2}{\lambda^3} \left(\frac{4}{\lambda} + \frac{t^2}{1} \right) f_{2n-1,2m,2k-1}^2 + \frac{4P_n^2 P_k^2}{\lambda^4} \left(\frac{4}{\lambda} + \frac{9t^2}{4} \right) f_{2n-1,2m-1,2k-1}^2 \Bigg] + 7 \cdot \left[\frac{4}{\lambda^2} f_{2n-1,2m,2k}^2 + \frac{P_k^2}{\lambda^3} \left(\frac{4}{\lambda} + \frac{t^2}{1} \right) f_{2n,2m-1,2k-1}^2 + \right. \\
& + \frac{P_n^2}{\lambda^3} \left(\frac{4}{\lambda} + \frac{t^2}{1} \right) f_{2n-1,2m-1,2k}^2 + \frac{4P_m^2 P_k^2}{\lambda^4} \left(\frac{4}{\lambda} + \frac{9t^2}{4} \right) f_{2n-1,2m-1,2k-1}^2 \Bigg] + 17 \cdot \left[\frac{4}{\lambda^2} f_{2n,2m,2k}^2 + \frac{P_n^2}{\lambda^3} \left(\frac{4}{\lambda} + \frac{t^2}{4} \right) f_{2n-1,2m,2k}^2 + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{P_m^2}{\lambda^3} \left(\frac{4}{\lambda} + \frac{t^2}{4} \right) f_{2n,2m-1,2k}^2 + \frac{P_k^2}{\lambda^3} \left(\frac{4}{\lambda} + \frac{t^2}{4} \right) f_{2n,2m,2k-1}^2 + \frac{4P_n^2 P_m^2}{\lambda^4} \left(\frac{4}{\lambda^2} + \frac{25t^2}{64\lambda} + \frac{t^4}{64} \right) f_{2n-1,2m-1,2k}^2 + \\
& + \frac{4P_n^2 P_k^2}{\lambda^4} \left(\frac{4}{\lambda^2} + \frac{25t^2}{64\lambda} + \frac{t^4}{64} \right) f_{2n-1,2m,2k-1}^2 + \frac{4P_m^2 P_k^2}{\lambda^4} \left(\frac{4}{\lambda^2} + \frac{25t^2}{64\lambda} + \frac{t^4}{64} \right) f_{2n,2m-1,2k-1}^2 + \frac{9P_n^2 P_m^2 P_k^2}{576\lambda^5} \cdot \frac{t^6}{1} f_{2n-1,2m-1,2k-1}^2 \Bigg] \leq \\
& \leq \frac{f_{0,0,0}^2}{4} t^4 + \sum_{n,m,k=1}^{\infty} \left\{ \frac{4}{\lambda^2} f_{2n-1,2m-1,2k-1}^2 + \frac{12}{\lambda} (f_{2n,2m-1,2k-1}^2 + f_{2n-1,2m,2k-1}^2 + f_{2n-1,2m-1,2k}^2) + \left(\frac{28}{\lambda^4} + \frac{7t^2}{\lambda^3} \right) \cdot (P_n^2 f_{2n-1,2m-1,2k}^2 + \right. \\
& + P_m^2 f_{2n,2m-1,2k-1}^2 + P_k^2 f_{2n-1,2m,2k-1}^2) + \left(\frac{112}{\lambda^5} + \frac{252t^2}{4\lambda^4} \right) \cdot (P_n^2 P_m^2 + P_n^2 P_k^2 + P_m^2 P_k^2) f_{2n-1,2m-1,2k-1}^2 + \frac{68}{\lambda^2} f_{2n,2m,2k}^2 + \\
& + \left(\frac{68}{\lambda^4} + \frac{17t^2}{4\lambda^3} \right) \cdot (P_n^2 f_{2n-1,2m,2k}^2 + P_m^2 f_{2n,2m-1,2k}^2 + P_k^2 f_{2n,2m,2k-1}^2) + \left(\frac{272}{\lambda^6} + \frac{425t^2}{16\lambda^5} + \frac{17t^4}{16\lambda^4} \right) \cdot (P_n^2 P_m^2 f_{2n-1,2m-1,2k}^2 + \\
& \left. + P_n^2 P_k^2 f_{2n-1,2m,2k-1}^2 + P_m^2 P_k^2 f_{2n,2m-1,2k-1}^2) + \frac{17t^6}{64\lambda^5} f_{2n-1,2m-1,2k-1}^2 \right\}.
\end{aligned}$$

Воспользовавшись неравенствами типа Бесселя и неравенством

$$\sum_{n,m,k=1}^{\infty} f_{n,m,k}^2 \leq \|f\|^2 \cdot 4160 \frac{P_n^2 P_m^2 P_k^2}{\lambda^2} \leq \left(\frac{P_n^2}{\lambda} = \frac{P_m^2}{\lambda} = \frac{P_k^2}{\lambda} \right) \leq 8,$$

получим

$$\begin{aligned}
r\|W(x,y,z,t)\|^2 & \leq \frac{f_{0,0,0}^2}{4} t^4 + \sum_{n,m,k=1}^{\infty} \left\{ \left[\left(\frac{288}{\lambda_{1,1,1}} + \frac{4}{\lambda_{1,1,1}^2} + \frac{2688}{\lambda_{1,1,1}^3} \right) + \left(18 + \frac{1512}{\lambda_{1,1,1}^2} \right) \cdot t^2 + \frac{17}{8\lambda_{1,1,1}^3} \cdot t^6 \right] \cdot f_{2n-1,2m-1,2k-1}^2 + \right. \\
& + \left[\left(\frac{12}{\lambda_{1,1,1}} + \frac{192}{\lambda_{1,1,1}^2} + \frac{2176}{\lambda_{1,1,1}^4} \right) + \left(\frac{56}{\lambda_{1,1,1}} + \frac{425}{2\lambda_{1,1,1}^3} \right) \cdot t^2 + \frac{17}{2\lambda_{1,1,1}^2} \cdot t^4 \right] \cdot (f_{2n,2m-1,2k-1}^2 + f_{2n-1,2m,2k-1}^2 + f_{2n-1,2m-1,2k}^2) + \\
& \left. + \left[\left(\frac{28}{\lambda_{1,1,1}^2} + \frac{544}{\lambda_{1,1,1}^3} \right) + \frac{34}{\lambda_{1,1,1}^2} t^2 \right] \cdot (f_{2n,2m,2k-1}^2 + f_{2n,2m-1,2k}^2 + f_{2n-1,2m,2k}^2) + \frac{68}{\lambda_{1,1,1}^2} f_{2n,2m,2k}^2 \right\}.
\end{aligned}$$

Так как

$$f_{0,0,0}^2 = (f, W_{0,0,0})^2 = 64\|f\|^2, \quad f_{n,m,k}^2 = (f, W_{n,m,k})^2 = 512\|f\|^2, \quad (n, m, k = 1, 2, \dots),$$

то последнее неравенство можем переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
r\|W(x,y,z,t)\|^2 & \leq \frac{t^4}{4} \cdot 64\|f\|^2 + \left[\left(\frac{288}{\lambda_{1,1,1}} + \frac{4}{\lambda_{1,1,1}^2} + \frac{2688}{\lambda_{1,1,1}^3} \right) + \left(18 + \frac{1512}{\lambda_{1,1,1}^2} \right) \cdot t^2 + \frac{17}{8\lambda_{1,1,1}^3} \cdot t^6 \right] \cdot 512 \cdot \|f\|^2 + \\
& + \left[\left(\frac{12}{\lambda_{1,1,1}} + \frac{192}{\lambda_{1,1,1}^2} + \frac{2176}{\lambda_{1,1,1}^4} \right) + \left(\frac{56}{\lambda_{1,1,1}} + \frac{425}{2\lambda_{1,1,1}^3} \right) \cdot t^2 + \frac{17}{2\lambda_{1,1,1}^2} \cdot t^4 \right] \cdot 1536 \cdot \|f\|^2 + \\
& + \left[\left(\frac{28}{\lambda_{1,1,1}^2} + \frac{544}{\lambda_{1,1,1}^3} \right) + \frac{34}{\lambda_{1,1,1}^2} t^2 \right] \cdot 1536 \cdot \|f\|^2 + \frac{68}{\lambda_{1,1,1}^2} 512 \cdot \|f\|^2 = \left\{ t^4 \cdot \left[16 + \frac{17 \cdot 768}{\lambda_{1,1,1}^2} \right] + \right. \\
& + \left[\frac{288 \cdot 512 + 12 \cdot 1536}{\lambda_{1,1,1}} + \frac{72 \cdot 512 + 220 \cdot 1536}{\lambda_{1,1,1}^2} + \frac{26 \cdot 88 \cdot 512 + 544 \cdot 1536}{\lambda_{1,1,1}^3} + \frac{2176 \cdot 1536}{\lambda_{1,1,1}^4} \right] + \\
& \left. + t^2 \cdot \left[18 \cdot 512 + \frac{56 \cdot 1536}{\lambda_{1,1,1}} + \frac{1512 \cdot 512 + 34 \cdot 1536}{\lambda_{1,1,1}^2} + \frac{425 \cdot 768}{\lambda_{1,1,1}^3} \right] + \frac{64 \cdot 17}{\lambda_{1,1,1}^3} \cdot t^6 \right\} \|f\|^2 = C_1(t) \|f\|^2, \tag{3}
\end{aligned}$$

где

$$C_1(t) = \left\{ t^4 \cdot \left[16 + \frac{17 \cdot 768}{\lambda_{1,1,1}^2} \right] + \dots \right\}.$$

Поскольку $0 \leq t \leq T$, то неравенство (3) можем переписать в виде

$$r \|W(x, y, z, t)\|^2 \leq C_1(T) \|f\|^2, \quad (4)$$

где $C_1(T) = C_1(t)|_{t=T}$.

Из (4) аналогично получим:

$$\|W(x, y, z, t)\| \leq R \|f\|, \quad (5)$$

где $R = \sqrt{\frac{C_1(T)}{r}}$. Это есть правая часть первого неравенства (5). Левая часть доказывается аналогично.

Теперь переходим к доказательству справедливости второй оценки (2). Действительно, в силу второй оценки (5) для фиксированного значения t , получим:

$$\begin{aligned} R^{-1} \|W(x, y, z, t)\|^2 &\leq W_{n,m,k}^2(t) = \left[\frac{t^2}{2} f_{0,0,0} \right]^2 + \sum_{n,m,k=1}^{\infty} \left\{ \frac{f_{2n-1,2m-1,2k-1}^2}{\lambda^2} (1 - \cos \sqrt{\lambda} t)^2 + \right. \\ &+ \left[(1 - \cos \sqrt{\lambda} t) \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left(f_{2n,2m-1,2k-1} + \frac{P_n}{\sqrt{\lambda}} f_{2n-1,2m-1,2k-1} \right) + \frac{t \sin \sqrt{\lambda} t}{2\sqrt{\lambda}} P_n f_{2n-1,2m-1,2k-1} \right]^2 + \\ &+ \left[(1 - \cos \sqrt{\lambda} t) \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left(f_{2n-1,2m,2k-1} + \frac{P_m}{\sqrt{\lambda}} f_{2n-1,2m-1,2k-1} \right) + \frac{t \sin \sqrt{\lambda} t}{2\sqrt{\lambda}} P_m f_{2n-1,2m-1,2k-1} \right]^2 + \\ &+ \left[(1 - \cos \sqrt{\lambda} t) \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left(f_{2n-1,2m-1,2k} + \frac{P_k}{\sqrt{\lambda}} f_{2n-1,2m-1,2k-1} \right) + \frac{t \sin \sqrt{\lambda} t}{2\sqrt{\lambda}} P_k f_{2n-1,2m-1,2k-1} \right]^2 + \\ &+ \left[\frac{(1 - \cos \sqrt{\lambda} t)}{\lambda} \left(f_{2n,2m,2k-1} + \frac{P_n}{\lambda} f_{2n-1,2m,2k-1} + \frac{P_m}{\lambda} f_{2n,2m-1,2k-1} + \frac{2P_n P_m}{\lambda \sqrt{\lambda}} f_{2n-1,2m-1,2k-1} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{t \sin \sqrt{\lambda} t}{\lambda} \left(\frac{P_n}{\sqrt{\lambda}} f_{2n-1,2m,2k-1} + \frac{P_m}{\sqrt{\lambda}} f_{2n,2m-1,2k-1} + \frac{3P_n P_m}{\lambda} f_{2n-1,2m-1,2k-1} \right) \right]^2 + \\ &+ \left[\frac{(1 - \cos \sqrt{\lambda} t)}{\lambda} \left(f_{2n,2m-1,2k} + \frac{P_n}{\lambda} f_{2n-1,2m-1,2k} + \frac{P_k}{\lambda} f_{2n,2m-1,2k-1} + \frac{2P_n P_k}{\lambda \sqrt{\lambda}} f_{2n-1,2m-1,2k-1} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{t \sin \sqrt{\lambda} t}{\lambda} \left(\frac{P_n}{\sqrt{\lambda}} f_{2n-1,2m-1,2k} + \frac{P_k}{\sqrt{\lambda}} f_{2n,2m-1,2k-1} + \frac{3P_n P_k}{\lambda} f_{2n-1,2m-1,2k-1} \right) \right]^2 + \\ &+ \left[\frac{(1 - \cos \sqrt{\lambda} t)}{\lambda} \left(f_{2n-1,2m,2k} + \frac{P_m}{\lambda} f_{2n-1,2m-1,2k} + \frac{P_k}{\lambda} f_{2n-1,2m,2k-1} + \frac{2P_m P_k}{\lambda \sqrt{\lambda}} f_{2n-1,2m-1,2k-1} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{t \sin \sqrt{\lambda} t}{\lambda} \left(\frac{P_m}{\sqrt{\lambda}} f_{2n-1,2m-1,2k} + \frac{P_k}{\sqrt{\lambda}} f_{2n-1,2m,2k-1} + \frac{3P_m P_k}{\lambda} f_{2n-1,2m-1,2k-1} \right) \right]^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{(1 - \cos \sqrt{\lambda} t)}{\lambda} \left(f_{2n,2m,2k} + \frac{P_n}{\lambda} f_{2n-1,2m,2k} + \frac{P_m}{\lambda} f_{2n,2m-1,2k} + \frac{P_k}{\lambda} f_{2n,2m,2k-1} + \frac{2P_n P_m}{\lambda^2} f_{2n-1,2m-1,2k} + \right. \right. \\
& + \frac{2P_n P_k}{\lambda^2} f_{2n-1,2m,2k-1} + \left. \frac{2P_m P_k}{\lambda^2} f_{2n,2m-1,2k-1} \right) + \frac{t \sin \sqrt{\lambda} t}{2\lambda \sqrt{\lambda}} (P_n f_{2n-1,2m,2k} + P_m f_{2n,2m-1,2k} + P_k f_{2n,2m,2k-1}) + \\
& + \frac{5t \sin \sqrt{\lambda} t}{4\lambda^2 \sqrt{\lambda}} (P_n P_m f_{2n-1,2m-1,2k} + P_n P_k f_{2n-1,2m,2k-1} + P_m P_k f_{2n,2m-1,2k-1}) + \frac{t^2 \cos \sqrt{\lambda} t}{4\lambda^2} (P_n P_m f_{2n-1,2m-1,2k} + \\
& + P_n P_k f_{2n-1,2m,2k-1} + P_m P_k f_{2n,2m-1,2k-1}) + \left. \frac{t^3 \sin \sqrt{\lambda} t}{8\lambda^2 \sqrt{\lambda}} P_n P_m P_k f_{2n-1,2m-1,2k-1} \right]^2 \Bigg\} \quad (6)
\end{aligned}$$

Воспользовавшись неравенствами типа Бесселя и неравенством $|1 - \cos \sqrt{\lambda} t| \leq 2$, из (6) получим:

$$\begin{aligned}
R^{-1} \|W(x, y, z, t)\|^2 & \leq \left[\frac{t^2}{2} f_{0,0,0} \right]^2 + \sum_{n,m,k=1}^{\infty} \left\{ \frac{4}{\lambda^2} f_{2n-1,2m-1,2k-1}^2 + \left[\frac{2}{\sqrt{\lambda}} (f_{2n,2m-1,2k-1} + \frac{P_n}{\sqrt{\lambda}} f_{2n-1,2m-1,2k-1}) + \right. \right. \\
& + \frac{t}{2\sqrt{\lambda}} P_n f_{2n-1,2m-1,2k-1} \left. \right]^2 + \left[\frac{2}{\sqrt{\lambda}} (f_{2n-1,2m,2k-1} + \frac{P_m}{\sqrt{\lambda}} f_{2n-1,2m-1,2k-1}) + \frac{t}{2\sqrt{\lambda}} P_m f_{2n-1,2m-1,2k-1} \right]^2 + \\
& + \left[\frac{2}{\sqrt{\lambda}} (f_{2n-1,2m-1,2k} + \frac{P_k}{\sqrt{\lambda}} f_{2n-1,2m-1,2k-1}) + \frac{t}{2\sqrt{\lambda}} P_k f_{2n-1,2m-1,2k-1} \right]^2 + \\
& + \left[\frac{2}{\lambda} (f_{2n,2m,2k-1} + \frac{P_n}{\lambda} f_{2n-1,2m,2k-1} + \frac{P_m}{\lambda} f_{2n,2m-1,2k-1} + \frac{2P_n P_m}{\lambda \sqrt{\lambda}} f_{2n-1,2m-1,2k-1}) + \right. \\
& + \frac{t}{\lambda} \left(\frac{P_n}{\sqrt{\lambda}} f_{2n-1,2m,2k-1} + \frac{P_k}{\sqrt{\lambda}} f_{2n,2m-1,2k-1} + \frac{3P_n P_m}{\lambda} f_{2n-1,2m-1,2k-1} \right) \left. \right]^2 + \\
& + \left[\frac{2}{\lambda} (f_{2n-1,2m,2k} + \frac{P_n}{\lambda} f_{2n-1,2m-1,2k} + \frac{P_k}{\lambda} f_{2n,2m-1,2k-1} + \frac{2P_n P_k}{\lambda \sqrt{\lambda}} f_{2n-1,2m-1,2k-1}) + \right. \\
& + \frac{t}{\lambda} \left(\frac{P_n}{\sqrt{\lambda}} f_{2n-1,2m-1,2k} + \frac{P_k}{\sqrt{\lambda}} f_{2n,2m-1,2k-1} + \frac{3P_n P_k}{\lambda} f_{2n-1,2m-1,2k-1} \right) \left. \right]^2 + \\
& + \left[\frac{2}{\lambda} (f_{2n-1,2m,2k} + \frac{P_m}{\lambda} f_{2n-1,2m-1,2k} + \frac{P_k}{\lambda} f_{2n-1,2m,2k-1} + \frac{2P_m P_k}{\lambda \sqrt{\lambda}} f_{2n-1,2m-1,2k-1}) + \right. \\
& + \frac{t}{\lambda} \left(\frac{P_m}{\sqrt{\lambda}} f_{2n-1,2m-1,2k} + \frac{P_k}{\sqrt{\lambda}} f_{2n-1,2m,2k-1} + \frac{3P_m P_k}{\lambda} f_{2n-1,2m-1,2k-1} \right) \left. \right]^2 + \\
& + \left[\frac{2}{\lambda} (f_{2n,2m,2k} + \frac{P_n}{\lambda} f_{2n-1,2m,2k} + \frac{P_m}{\lambda} f_{2n,2m-1,2k} + \frac{P_k}{\lambda} f_{2n,2m,2k-1} + \frac{2P_n P_m}{\lambda^2} f_{2n-1,2m-1,2k} + \right. \\
& + \frac{2P_n P_k}{\lambda^2} f_{2n-1,2m,2k-1} + \left. \frac{2P_m P_k}{\lambda^2} f_{2n,2m-1,2k-1} \right) + \frac{t}{2\lambda \sqrt{\lambda}} (P_n f_{2n-1,2m,2k} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + P_m f_{2n,2m-1,2k} + P_k f_{2n,2m,2k-1}) + \frac{5t}{4\lambda^2 \sqrt{\lambda}} (P_n P_m f_{2n-1,2m-1,2k} + \\
& + P_n P_k f_{2n-1,2m,2k-1} + P_m P_k f_{2n,2m-1,2k-1}) + \frac{t^2}{4\lambda^2} (P_n P_m f_{2n-1,2m-1,2k} + \\
& + P_n P_k f_{2n-1,2m,2k-1} + P_m P_k f_{2n,2m-1,2k-1}) + \frac{t^3}{8\lambda^2 \sqrt{\lambda}} P_n P_m P_k f_{2n-1,2m-1,2k-1} \Bigg]^2 \Bigg\} \leq \\
& \leq \frac{t^4}{4} \cdot \frac{1}{27} \|f\|^2 + \left[\left(\frac{4}{\lambda^2} + \frac{72}{\lambda} + \frac{2688}{\lambda^3} \right) + \left(18 + \frac{1512}{\lambda^2} \right) t^2 + \frac{17}{8\lambda^3} t^6 \right] \cdot \frac{1}{8} \|f\|^2 + \\
& + \left[\left(\frac{12}{\lambda} + \frac{224}{\lambda^3} + \frac{1088}{\lambda^3} \right) + \left(\frac{112}{\lambda^2} + \frac{425}{\lambda^3} \right) t^2 + \frac{17}{2\lambda^2} t^4 \right] \cdot \frac{1}{8} \|f\|^2 + \\
& + \left[\left(\frac{12}{\lambda} + \frac{224}{\lambda^3} + \frac{1088}{\lambda^3} \right) + \left(\frac{112}{\lambda^2} + \frac{425}{\lambda^3} \right) t^2 + \frac{17}{2\lambda^2} t^4 \right] \cdot \frac{1}{8} \|f\|^2 + \\
& + \left[\left(\frac{12}{\lambda} + \frac{224}{\lambda^3} + \frac{1088}{\lambda^3} \right) + \left(\frac{112}{\lambda^2} + \frac{425}{\lambda^3} \right) t^2 + \frac{17}{2\lambda^2} t^4 \right] \cdot \frac{1}{8} \|f\|^2 + \left[\frac{572}{\lambda^2} + \frac{34t^2}{\lambda} \right] \cdot \frac{1}{8} \|f\|^2 + \\
& + \left[\frac{572}{\lambda^2} + \frac{34t^2}{\lambda} \right] \cdot \frac{1}{8} \|f\|^2 + \left[\frac{572}{\lambda^2} + \frac{34t^2}{\lambda} \right] \cdot \frac{1}{8} \|f\|^2 + \frac{68}{\lambda^2} \cdot \frac{1}{8} \|f\|^2 \leq \left[\left(\frac{27}{2\lambda_{1,1,1}} + \frac{447}{2\lambda_{1,1,1}^2} + \frac{828}{\lambda_{1,1,1}^3} \right) + \right. \\
& + \left. \left(\frac{9}{2} + \frac{51}{4\lambda_{1,1,1}} + \frac{231}{\lambda_{1,1,1}^2} + \frac{1275}{8\lambda_{1,1,1}^3} \right) \cdot t^2 + \left(\frac{1}{108} + \frac{51}{16\lambda_{1,1,1}^2} \right) \cdot t^4 + \frac{17}{64\lambda_{1,1,1}^3} \cdot t^6 \right] \cdot \|f\|^2. \quad (7)
\end{aligned}$$

Таким образом, мы получим оценку

$$r\|W(x, y, z, t)\|^2 \leq R(A_1 + A_2 t^2 + A_3 t^4 + A_4 t^6) \|f\|^2, \quad (8)$$

где $A_1 = \frac{27}{2\lambda_{1,1,1}} + \frac{447}{2\lambda_{1,1,1}^2} + \frac{828}{\lambda_{1,1,1}^3}$, $A_2 = \frac{9}{2} + \frac{51}{4\lambda_{1,1,1}} + \frac{231}{\lambda_{1,1,1}^2} + \frac{1275}{8\lambda_{1,1,1}^3}$, $A_3 = \frac{1}{108} + \frac{51}{16\lambda_{1,1,1}^2}$, $A_4 = \frac{17}{64\lambda_{1,1,1}^3}$.

Если для всех $0 \leq t \leq T$ ввести обозначения $M = A_1 + A_2 t^2 + A_3 t^4 + A_4 t^6$, то оценки (7) принимают такой вид:

$$r\|W(x, y, z, t)\|^2 \leq RM \|f\|^2. \quad (9)$$

Воспользовавшись оценкой (7), получим

$$\begin{aligned}
\|f\|^2 = (f, f) & \leq \sum_{n,m,k=1}^{\infty} f_{n,m,k} \cdot \bar{f}_{n,m,k} \leq \sum_{n,m,k=1}^{\infty} W_{n,m,k}(t) \leq \left(\sum_{n,m,k=1}^{\infty} W_{n,m,k}^2(t) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{n,m,k=1}^{\infty} \bar{f}_{n,m,k}^2(t) \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq \left(\sum_{n,m,k=1}^{\infty} \bar{f}_{n,m,k}^2(t) \right)^{\frac{1}{2}} \cdot (RM \|f\|^2)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{1}{r} \|W(x, y, z, t)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot (RM \|f\|^2)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Отсюда получим $\|f\| \cdot \left[\|f\| - \sqrt{\frac{RM}{r}} \|W(x, y, z, t)\| \right] \leq 0$, поскольку $\|f\| \geq 0$, то в

свою очередь отсюда получим:

$$\|W(x, y, z, t)\| \geq \sqrt{\frac{r}{RM}} \|f\|. \quad (10)$$

Объединяя неравенство (9), получим двухсторонние оценки

$$\sqrt{\frac{r}{RM}} \|f(x, y, z)\| \leq \|W(x, y, z, t)\| \leq \sqrt{\frac{RM}{r}} \|f(x, y, z)\|, \quad (11)$$

что и требовалось доказать.

Имеет место

Теорема 2. *Решение смешанной задачи (1) при $f(x, y, z, t) = f(x, y, z)$ непрерывно зависит от правой части уравнения $f(x, y, z)$.*

Доказательство теоремы 2 непосредственно следует из второй части оценки (11).

Литература

1. Ильин В.А. О равномерной сходимости разложений по собственным функциям во всей замкнутой области / В.А. Ильин // Успехи мат. наук. – 1960. – Т. 15. – №2. – С. 97-154.
2. Исмати М. О некоторых самосопряженных и несамопряженных смешанных задачах математической физики: автореф. дисс. д.ф-м.н. / М. Исмати // – М., 2003. – 29 с.
3. Исмати М. Априорные оценки. Корректная разрешимость смешанных задач для уравнения колебаний мембраны / М. Исмати, З. Махмадуллоев // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. – 2007. – № 3. – С. 7-15.
4. Махмадуллоев З.Н. О корректной разрешимости сопряженных смешанных задач для уравнения колебаний мембраны / З.Н. Махмадуллоев // Вестник Института предпринимательства и сервиса. – 2005. – №13. – С. 62-65.
5. Исмати М. Об одной несамопряженной задаче / М. Исмати // ДАНТаджССР. – 1985. – Т. 8. – № 11. – С. 619-622.
6. Исматов М.И. О разрешимости неклассических задач / М.И. Исматов // Изв. АН ТаджССР. отд. физ. мат. – 1986. – № 3. – С. 56-58.
7. Мирзорахимов М.Х. О разрешимости одной сопряженной смешанной задачи для волнового уравнения в трёхмерном пространстве / М.Х. Мирзорахимов // ДАН РТ. – 2013. – Т. 56. – №1. – С. 26-34.
8. Мирзорахимов М.Х. Решение сопряженной смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения / М.Х. Мирзорахимов // ДАН РТ. – 2013. – Т. 56. – №9. – С. 658-665.

**БАҶОИ ДУТАРАФА БАРОИ ҲАЛЛИ МАСЪАЛАИ ОМЕХТАИ ҲАМРОҲШУДА
БАРОИ МУОДИЛАИ МАВҶИ ДАР ФАЗОИ СЕЧЕНАКА**

Мирзораҳимов М.Х.

Донишқадаи молия ва иқтисодии Тоҷикистон

Дар мақолаи мазкур барои ҳалли классикии як масъалаи омехтаи ҳамроҳшуда барои муодилаи мавҷӣ дар фазои сеченака баҳои априорӣ дар фазои Соболев W_2^1 ҳосил шудааст, ки ин баҳо аз бефосилагии тарафи рост муодила вобастаги дорад.

Калимаҳои калидӣ: баҳои априорӣ, масъалаи омехтаи ҳамроҳшуда, муодилаи мавҷӣ дар фазои сеченака, масъалаи ғайрилокалӣ.

**BILATERAL ESTIMATES FOR THE SOLUTION OF CONJUGATE MIXED
PROBLEM FOR THE INHOMOGENEOUS WAVE EQUATION IN THREE
DIMENSIONS**

Mirzorakhimov M.H.

Financial and Economic Institute of Tajikistan

In an article for the classical solution of a conjugate of a mixed problem for the wave equation in three-dimensional space, a priori estimates in the norms of Sobolev W_2^1 spaces, from which it follows the continuous dependence of the solution on the right side of the equation.

Key words: a priori estimates, ad joint mixed problem, wave equation in three-dimensional space, non-local problem.

Сведения об авторе. Мирзорахимов Муродали Хасанбоевич, ассистент кафедры высшей математики Финансово-экономического института Таджикистана. E-mail: murodali6161 @ mail.ru. Телефон: (+992) 985-61-30-61.

УДК 524.1

ПОПЕРЕЧНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧЕРЕНКОВСКОГО СВЕТА ШИРОКИХ АТМОСФЕРНЫХ ЛИВНЕЙ ОТ РАЗЛИЧНЫХ ЯДЕР С ЭНЕРГИЕЙ 1 ПЭВ НА ВЫСОТЕ 4250М НАД УРОВНЕМ МОРЯ

Латинова С.З., Галкин В.И., Шозиёв Г.П.

Филиал МГУ имени М. В. Ломоносова в г. Душанбе

Таджикский национальный университет

НИИЯФ, МГУ имени М. В. Ломоносова

В данной работе проводилось моделирование черенковского света от широких атмосферных ливней в условиях высокогорья Памира. Изучались аппроксимированные данные по функции пространственных распределений ливней, флуктуации поперечного распределения от первичных ядер He, p, N, S, Fe с энергией 1 ПэВ.

Введение

Изучение природы черенковского света от широких атмосферных ливней (ШАЛ) берет начало с 50-х годов XX века. Пространственное распределение черенковского света от широких атмосферных ливней изучается уже более 70 лет. В ранних работах изучали также интенсивности черенковского света от ШАЛ [1].

Эффект Вавилова — Черенкова или излучение Вавилова — Черенкова есть свечение [2, 3, 4], вызываемое в прозрачной среде заряженной частицей, которая движется со скоростью, превышающей фазовую скорость распространения света в этой среде ($v > \frac{c}{n}$).

Угол под которым среда излучает этот свет равна $\cos \theta_{cher} = \frac{1}{n\beta}$. Черенковские фотоны испускаемые единичным релятивистским фотоном на длине пути определяется формулой:

$$\frac{dN_{\gamma}^{(1)}}{dX} = \frac{2\pi\alpha}{\rho} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(1 - \frac{1}{n^2\beta^2}\right) \frac{d\lambda}{\lambda^2}, \quad (1)$$

где π и α — постоянные, ρ — плотность среды (г/см^3), n — коэффициент преломления среды, β — лоренц-фактор, λ — длина волны излучения.

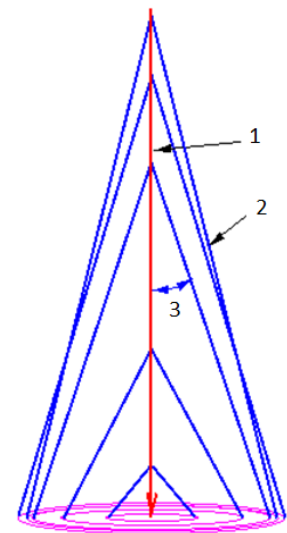


Рисунок 2. Схема излучения фотонов от первично падающего релятивистского электрона в атмосфере земли.

На рисунке 1 приведена схема рождения фотонов на разных высотах в атмосфере от первичного релятивистского электрона, где 1 – траектория движения электрона, 2 – излучаемые световые конусы различных фотонов, 3 – угол раствора черенковского конуса, который меняется в зависимости от плотности и состава атмосферы.

В твёрдых веществах и жидкостях условие (1) начинает выполняться для электронов уже при энергиях $\sim 10^5$ эВ, для протонов, масса которых в ~ 2000 раз больше электронной, при энергиях $\sim 10^8$ эВ.

Черенковское излучение широко используется в космических лучах в физике высоких энергий [5, 6].

В работах [7-15] в рамках нового метода расчета функции пространственного распределения (ФПР) черенковского света (ЧС) в ШАЛ были отработаны и использованы гибридные схемы расчетов для оценки энергии эксперимента ЯкуШАЛ. Учитывая также и данные работы было промоделировано прохождение ШАЛ до уровня наблюдения в условиях гор Памира.

Выбор параметров и моделирование

Классическими задачами физики космических лучей являются определение массового состава и энергетического спектра первичного космического излучения (ПКИ). В области сверхвысоких энергий ($E_0 > 10^{15}$ эВ) эти задачи решаются путем измерения энергии, направления прихода и типа первичной частицы от ШАЛ. Для измерения основных параметров ливня используется пространственное, угловое и временное распределение черенковского света ШАЛ, посредством которых можно исследовать массовый состав ПКИ в условиях высокогорья.

Анализ пространственно-углового распределения (ПУР) ЧС ШАЛ с использованием традиционных и вновь вводимых параметров углового изображения на различных расстояниях от оси показывает, что можно измерить массу первичной частицы с достаточно высоким разрешением с помощью набора черенковских телескопов с полем зрения не менее 20° и размером пикселя $0,5-0,8^\circ$ при поддержке сети быстрых оптических детекторов с размером ячейки ~ 25 м. Критерий разделения событий по массе первичного ядра требует точного определения направления первичной частицы (с ошибкой не более $0,1$ градуса дуги). Создан алгоритм оценки первичного направления в расчетные модели черенковского фронта и поперечного распределения черенковского света ШАЛ от разных первичных ядер.

В данной работе моделирование проводилось с помощью пакета CORSIKA [6]. Была проведена аппроксимация средних функций и флуктуаций фронта и поперечного распределения ЧС. В качестве первичных ядер мы выбрали протоны, ядра He, N, S, Fe с энергией 1 ПэВ на высоте наблюдения 4250м над уровнем моря. Под фронтом в данной работе понимается геометрическое место точек движущихся черенковских фотонов, соответствующих фазе τ черенковского импульса, определяемой как момент достижения интегралом от импульса уровня 50%. Сетка быстрых детекторов позволяет определять направления прихода ливней по задержкам фронта, а положения осей и энергии по полным интегралам импульсов, дающим поперечные распределения черенковского света.

Флуктуации поперечного распределения ЧС ШАЛ

Были промоделированы и посчитаны функции пространственного распределения (ФПР) ШАЛ для протона и различных ядер. На рисунке 2 приводится пример для ядра He с энергией 1ПэВ и линия аппроксимации среднего поперечного распределения. Из данного рисунка легко видеть флуктуации поперечного сечения в зависимости от расстояния от оси ливня. Флуктуации ФПР растут на расстоянии менее 1 метра от оси и с удалением свыше 500 метров. Данными флуктуации в моделировании можно пренебречь при повышении статистики событий на несколько порядков.

Аппроксимации ФПР ($Q(R)$), флуктуации ($\delta Q(R)$), время прихода ($\tau(R)$), флуктуации времени прихода ($\delta\tau(R)$) для протонных ливней были использованы для создания процедуры определения положения оси и направления прихода протонных ливней с различными зенитными ($0-30^\circ$) и азимутальными углами ($0-360^\circ$) [2]. Направления ливней восстанавливались со средней точностью не хуже 0.1° , а положения осей — с точностью ~ 1 м.

На рисунке 3 приведены аппроксимации среднего фронта ($\tau(R)$) и флуктуация фронта ($\delta\tau(R)$) света ШАЛ от первичных ядер p, He, N, S, Fe с энергией 1 ПэВ на высоте 4250м над уровнем моря.

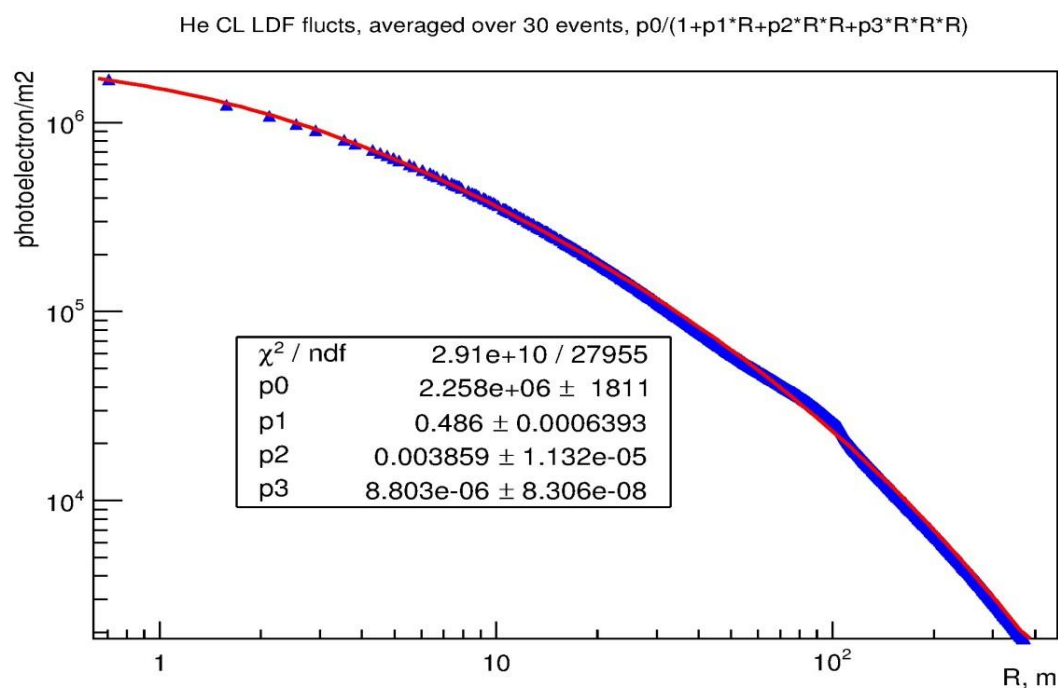
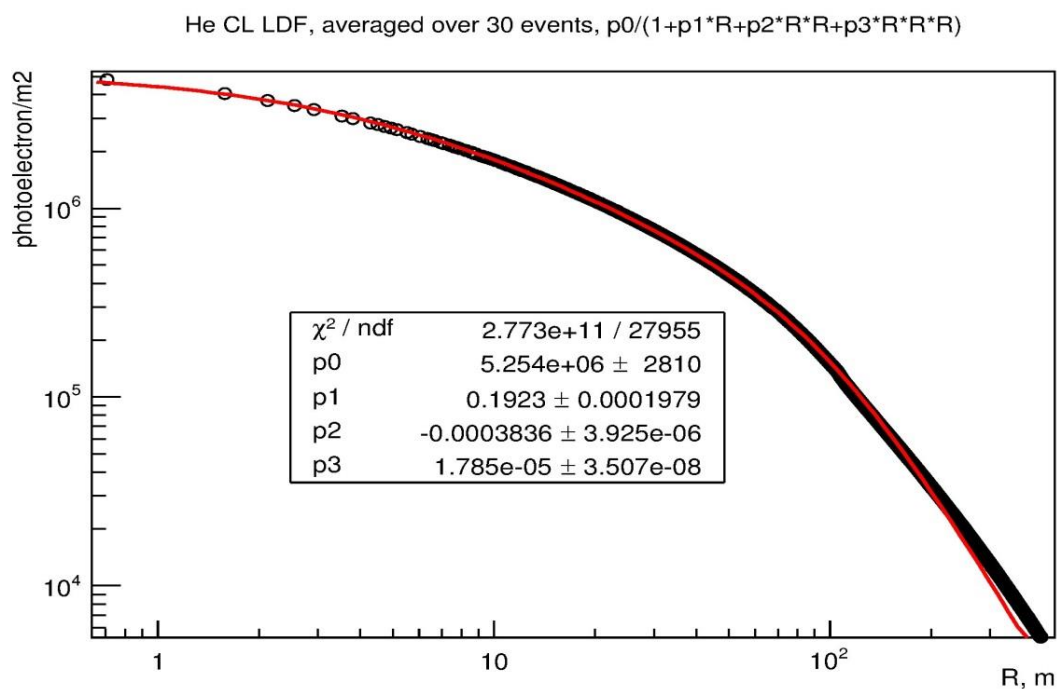
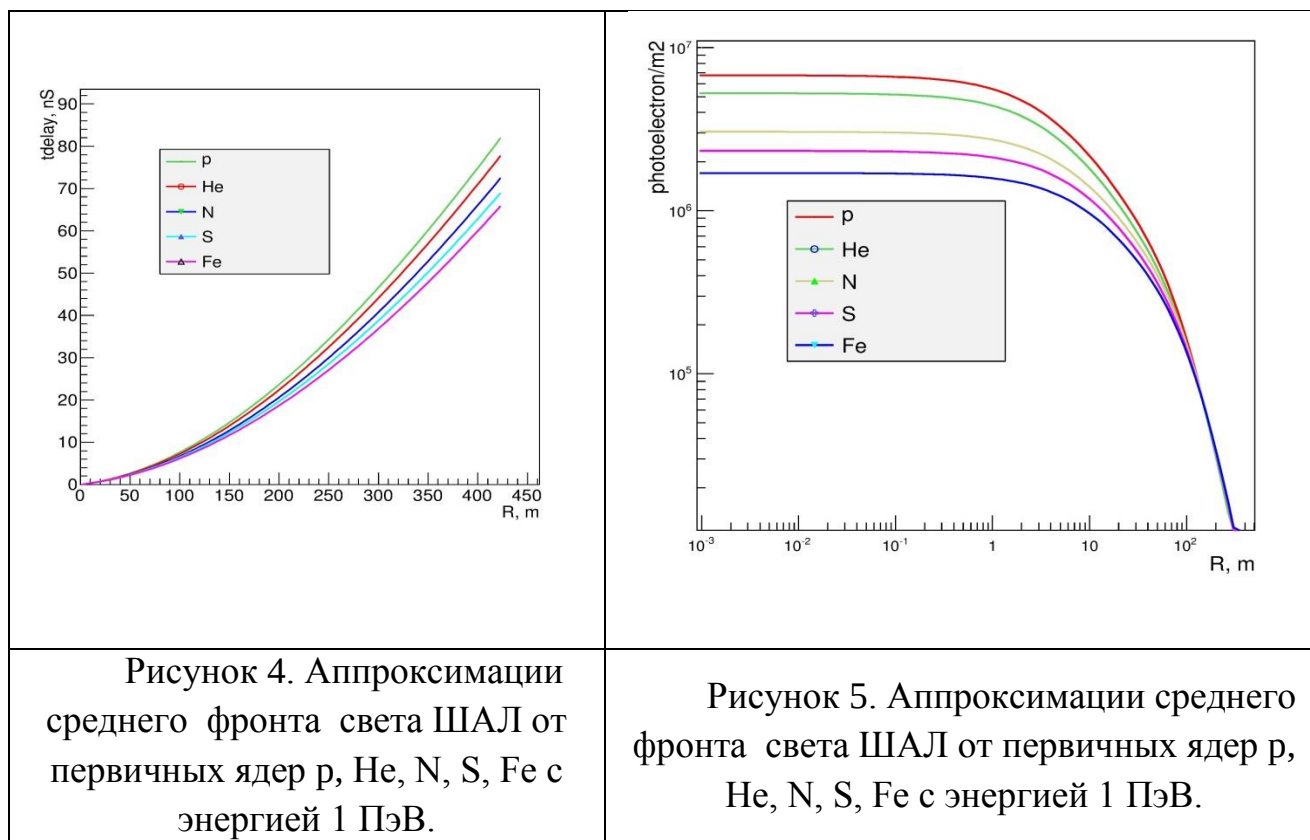


Рисунок 3. Аппроксимации (линии) среднего поперечного распределения и флуктуаций поперечного распределения черенковского света ШАЛ от первичного ядра He с энергии 1 ПэВ и расчетные данные (кружки и треугольники).



На рисунках 3 и 4 приведены кривизна фронта и поперечное распределение черенковского света в зависимости от типа первичной частицы. Данные зависимости могут быть использованы как вспомогательные данные для определения типа первичной частицы.

Выводы

По результатам подсчетов по принятой модели нами получены следующие выводы:

- 1) Форма фронта и особенно форма поперечного распределения света зависят от массы первичного ядра.
- 2) Решение обратной задачи для протонных ливней показало, что точность полученных аппроксимаций достаточна для определения направления ливня с неопределенностью $\sim 0,1$ град и точки падения оси с неопределенностью ~ 1 м.

Литература

1. Зацепин В. И., Чудаков А. Е. Пространственное распределение интенсивности черенковского света от широких атмосферных ливней // Журнал теоретической и экспериментальной физики. – 1962. – Т. 42. – С. 1622–1628.

2. Черенков П. А., Видимое свечение чистых жидкостей под действием g-радиации // ДАН СССР. –1934. – Т. 2, №. 8. –С. 451.
3. Вавилов С. И., О возможных причинах синего g-свечения жидкостей // ДАН СССР. –1934. – Т. 2, №. 8. – С. 457.
4. Тамм И. Е., Франк И. М., Когерентное излучение быстрого электрона в среде, там же, 1937. – Т. 14, №. 3. – С. 107.
5. Джелли Дж., Черенковское излучение и его применения, пер. с англ., М. 1960
6. Зрелое В. П., Излучение Вавилова–Черенкова и его применение в физике высоких энергий. М., 1968. – Т. 1–2,.
7. Деденко Л. Г., Роганова Т. М., Шозиёев Г. П. Новый метод расчета функции пространственного распределения (ФПР) черенковского света в гигантских атмосферных ливнях (ГАЛ) // Сборник трудов межд. конф. по фундаментальным наукам “Ломоносов-2006”. – Т. 1 из секция “Физика”. – МГУ, физический факультет Москва, 2006. – С. 21–21.
8. Расчет функций пространственного распределения черенковского света ШАЛ в рамках многоуровневой схемы / Л. Г. Деденко, Д. А. Подгрудков, Т. М. Роганова и др. // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика, астрономия. –2008. –№ 4. – С. 6–11.
9. Employing cherenkov radiation and fluorescence light in calibrating the energy of giant air showers / L. G. Dedenko, D. A. Podgrudkov, T. M. Roganova et al. // Physics of Atomic Nuclei. –2007. – Vol. 70, no. 10. –P. 1759–1763.
10. Methods for estimating the energy of extensive air showers / L. G. Dedenko, D. A. Podgrudkov, T. M. Roganova, G. P. Shozieev // Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics. – 2007. – Vol. 71, no. 4. – P. 451–453.
11. New estimates of energy of giant air showers observed at the yakutsk array / L. G. Dedenko, D. A. Podgrudkov, T. M. Roganova et al. // Nuclear Physics B. – 2007. – Vol. 165. – P. 27–32.
12. Various approaches of energy estimation of giant air showers / L. G. Dedenko, D. A. Podgrudkov, G. P. Shoziyoev et al. // Proc. of the 14th Int. Seminar QUARKS’2006. – Vol. 2. –2007. – P. 333–340.
13. Калибровка энергии гигантских атмосферных ливней с использованием черенковского и флуоресцентного света / Л. Г. Деденко, Д. А. Подгрудков, Т. М. Роганова и др. // Ядерная физика. –2007. –Т. 70, № 10. –С. 1806–1811.
14. Методы получения оценок энергии широких атмосферных ливней / Л. Г. Деденко, Д. А. Подгрудков, Т. М. Роганова и др. // Известия Российской академии наук. Серия физическая. –2007. – Т. 71, № 4. – С. 470–472.
15. A calibration of energy estimates of giant air showers with help of the cherenkov radiation / L. G. Dedenko, G. F. Fedorova, V. I. Galkin et al. // Proc.

29th ICRC, Tata Institute of Fundamental Research, Homi Bhabha Marg, Navy Nagar, Colaba Mumbai, Pune, India, 2005. Pune, India. – V. 7. – P. 219–222.

**ТАҚСИМОТИ АМУДИИ РУШНОИИ ЧЕРЕНКОВ АЗ СЕЛИ ЗАРРАҲОИ
АТМОСФЕРӢ АЗ ЗАРРАҲОИ ЯДРОИИ ГУНОГУНИ ЭНЕРГИЯШОН 1 ПЭВ ДАР
БАЛАНДИИ 4250 МЕТР АЗ САТҲИ БАҲР**

Латипова С., Галкин В.И., Шозиёев Г.П.

Филиали Донишгоҳи давлатии Москва ба номи М.В.Ломоносов дар ш.Душанбе

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Донишгоҳи давлатии Москва ба номи М.В.Ломоносов

Дар ин кори илмӣ моделиронии равшании Черенков аз сели зарраҳои атмосферӣ дар сатҳи баландкуҳҳои Помир дида баромада шудааст. Маълумоти тақрибӣ дар бораи функсияҳои тақсими паҳншавии селҳои зарраҳо, тағйирёбии тақсими амудӣ дар ядроии элементҳои p, He, N, S, Fe бо энергияи 1 ПэВ омӯхта шуданд.

Калимаҳои калидӣ: сели зарраҳои атмосферӣ, тақсими амудӣ, флукуатсия.

**LDF DISTRIBUTION OF CHERENKOV LIGHT OF EAS FROM DIFFERENT
NUCLEI WITH ENERGY 1 PEV ON HEIGHT OF 4250M OVER THE SEA LEVEL**

Latipova S.Z., Galkin V.I., Shoziyoyev G.P.

Dushanbe branch of Lomonosov Moscow State University

Tajik National University

Lomonosov Moscow State University

In this paper, we simulated Cherenkov light from extensive air showers in the highlands of the Pamirs. Approximated data on the function of the spatial distributions of showers, fluctuations of the transverse distribution on the primary p, He, N, S, Fe nuclei with an energy of 1 PeV were studied.

Keywords: extensive air showers, spatial distribution, fluctuations.

Сведения об авторах. Латипова Сарвиноз Зариповна – старший преподаватель, Таджикский национальный университет, Душанбе, Таджикистан. Тел.: +992 (93) 114-3794, E-mail: latipovas@mail.ru

Шозиёев Гулмурод Парвонашоевич – главный специалист сектора науки и инноваций Филиала МГУ им. М.В. Ломоносова в г. Душанбе, Душанбе, Таджикистан; Старший научный сотрудник ФИАН РФ, Россия. Тел.: +992 (93) 114-3794, E-mail: gulmurod@mail.ru

Галкин Владимир Игоревич – д.ф.-м.н., профессор НИИЯФ МГУ им. М.В. Ломоносова. Тел.: +7 (926) 629-4742, E-mail: glk@mail.ru

УДК 53(075)

**ИЗУЧЕНИЕ КОНТУРА МАГНИТНОГО ПОЛЯ ПОСРЕДСТВОМ
ДАТЧИКА ХОЛЛА ВОКРУГ КАТУШКИ, ПО КОТОРОМУ ТЕЧЕТ ТОК**

Ахмеджанова К.М., Зоирова З.О., Рахмонов Р. К.

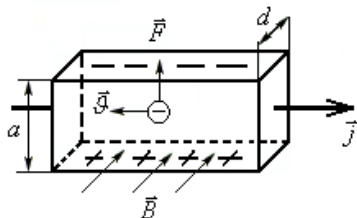
Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе

В статье подробно проанализировано измерение магнитного поля по контуру вокруг катушки круговой формы, по которому течет ток методом эффекта Холла. Как проявляет себя поле образованное одной катушкой и двумя катушками вдоль и в поперечное сечение катушек. Экспериментально изучено увеличение магнитного поля с увеличением тока, влияние на него различных факторов, таких как: суперпозиция магнитных полей прямого и кругового проводника, по которым течет ток и активность солнца.

Известно, что если по проводнику течет ток, то вокруг проводника образуется магнитное поле. На изучение этого очевидного сейчас закона физики, после открытия Эрстеда, ушло много лет и получением электричества из магнитного поля занимался английский ученый Майкл Фарадей. Делались различной формы и размеров проводники и магниты, искали варианты их взаимного расположения. И только, видимо, случайно ученый обнаружил, что для получения на концах проводника ЭДС необходимо еще одно слагаемое – движение магнита, т.е. магнитное поле должно быть обязательно переменным.

Сейчас это никого уже не удивляет. Именно так работают все электрические генераторы, при вращении ротора электроэнергия вырабатывается. Остановили, перестали вращать, и лампочка погасла.

Если поместить пластинку из проводника или полупроводника по которому течет ток в магнитное поле, направление у которого перпендикулярно направлению вектору плотности тока, электроны испытывают действие силы Лоренца и у верхнего края пластинки возникнет повышенная концентрация электронов, он зарядится отрицательно, а у нижнего недостаток электронов зарядится положительно, в результате этого между краями пластинки возникает дополнительное поперечное электрическое поле, которое впервые экспериментально показал Холл. Этот эксперимент был назван эффектом Холла.



Сила Лоренца приведет к расслаиванию зарядов, перераспределение зарядов прекратится, когда кулоновская сила притяжения между пластинами уравнивает силу Лоренца. Приравняем этих две силы и получим:

$$F_{кл} = F_{л}, \quad (1)$$

$$F_{кл} = eE, \quad (2)$$

$$F_{\text{Л}} = e \mathcal{B} v, \quad (3)$$

подставляя (2) и (3) в (1), получаем:

$$E = \mathcal{B} v, \quad (4)$$

где v - скорость заряженных частиц в магнитном поле с индукцией B , E - вектор напряженности электрического поля который связан с разностью потенциалов следующим образом:

$$E = \frac{\Delta \varphi}{d}, \quad (5)$$

где $\Delta \varphi$ - разность потенциалов между положительно и отрицательно заряженными плоскостями, d - расстояния между плоскостями (м).

Учитывая (4) и (5), получим:

$$\Delta \varphi = \mathcal{B} v d, \quad (6)$$

Связывая ток и скорость, получим:

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{eN}{t} = \frac{enV}{t} = \frac{en v l}{t} = en v, \quad (7)$$

далее:

$$v = \frac{I}{en}. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (6), имеем:

$$\Delta \varphi = \frac{I}{en} B d = \frac{I B d}{en a} = \frac{I B}{en a} = \frac{1}{en} \frac{I B}{a},$$

т. е.

$$\Delta \varphi = \frac{1}{en} \frac{I B}{a}, \quad (9)$$

где n - концентрация электронов (м^{-3}), e - заряд электрона, I - величина тока (А), B - вектор индукции магнитного поля (Тл), a - ширина плоскости (м). В формуле (9) величина

$$R = \frac{1}{en}, \quad (10)$$

R - постоянная Холла.

Исследования ЭДС Холла привели к удивительным выводам. Зная постоянную Холла, можно определит одно из фундаментальных констант заряда электрона. Из формулы (9) можно найти число носителей заряда:

$$n = BI / e a \Delta \varphi \quad (11)$$

Благодаря тому, что выходной эффект определяется произведением величин B и I , датчики Холла имеют весьма широкое применение.

Металл (сплав)	T, К	B, Тл	R, м ³ /Кл
Алюминий	300	0,54	0,39
Золото	300	0,54	0,721
Серебро	190	0,54	0,925
Железо	300	0,3...1,7	+5,5

В таблице приведены коэффициенты Холла для различных металлов и сплавов. Обозначения: T – температура (К); B - магнитный поток (Тл); R – постоянная Холла в единицах м³/Кл. Бесконтактные клавишные переключатели на основе эффекта Холла применялись довольно широко. Достоинства этого переключателя - высокая надежность и долговечность, малые габариты, а недостатки - постоянное потребление энергии и сравнительно высокая стоимость.

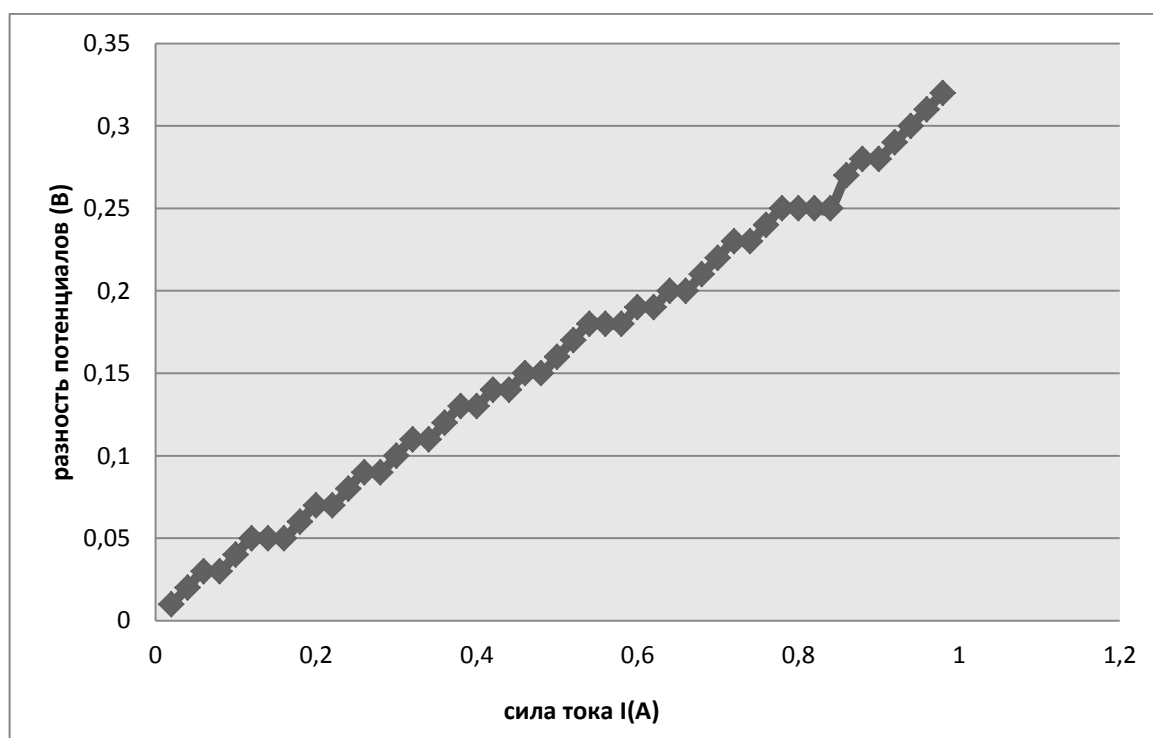


Рис.1. Зависимость разности потенциалов от силы тока

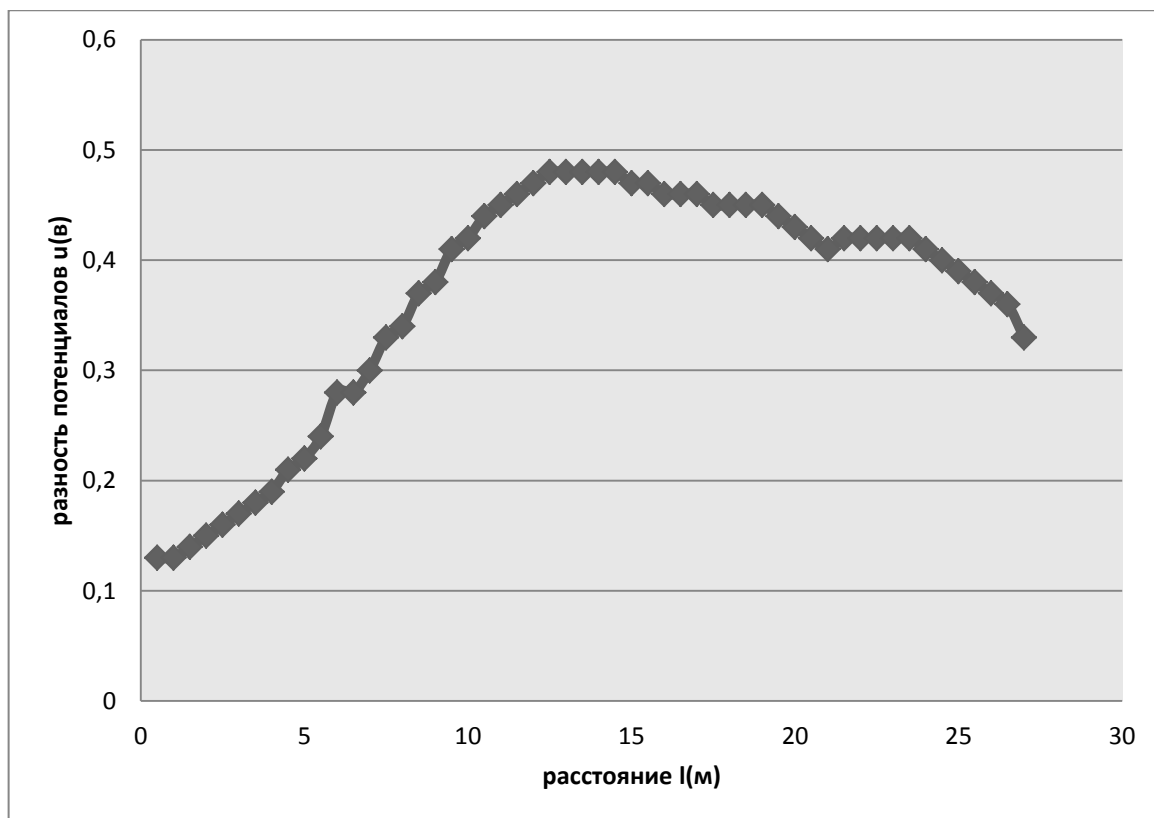


Рис.2. Зависимость разности потенциалов от расстояния (вторая катушка)

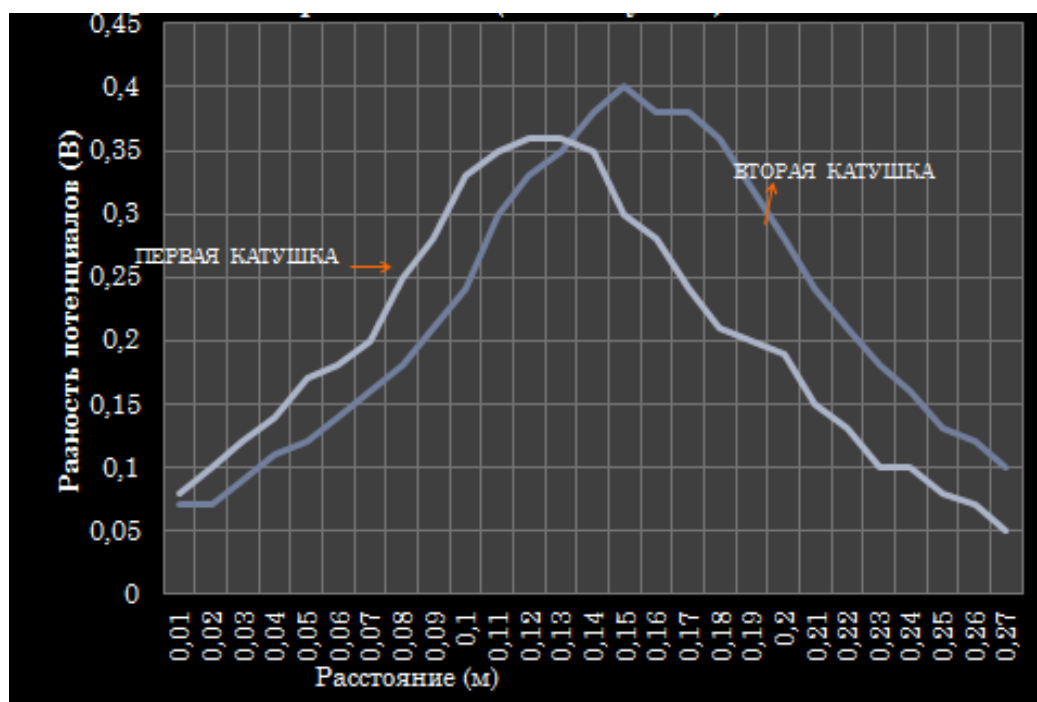


Рис.3. Зависимость разности потенциалов от расстояния для обеих катушек.

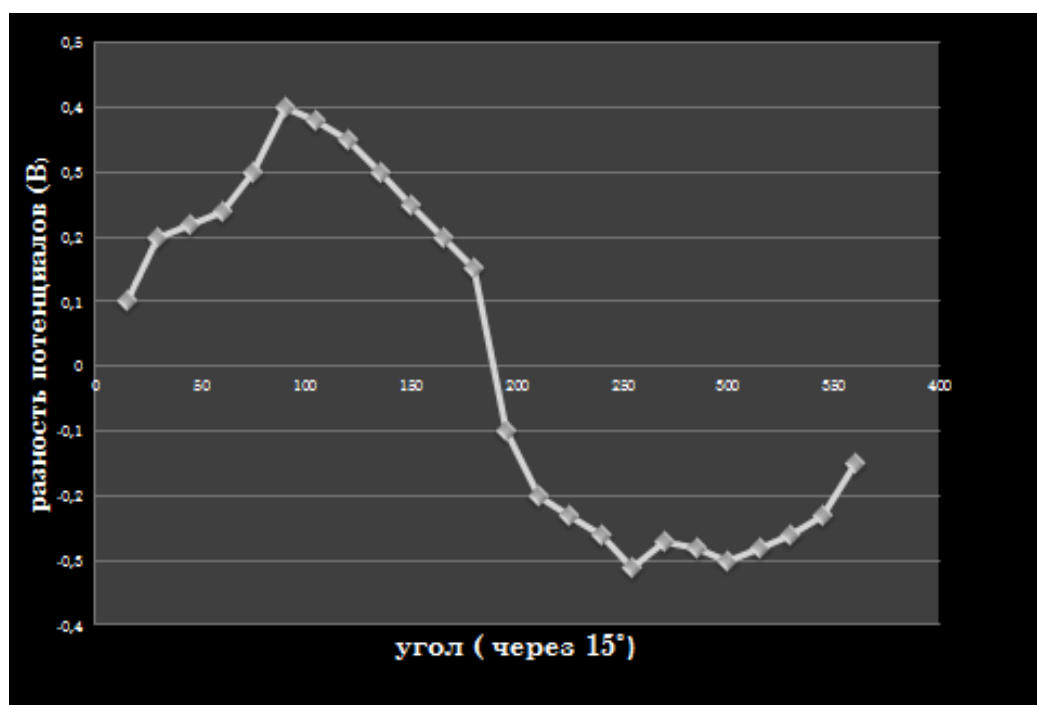


Рис. 4. Зависимость разности потенциалов от угла (шаг – 15°).

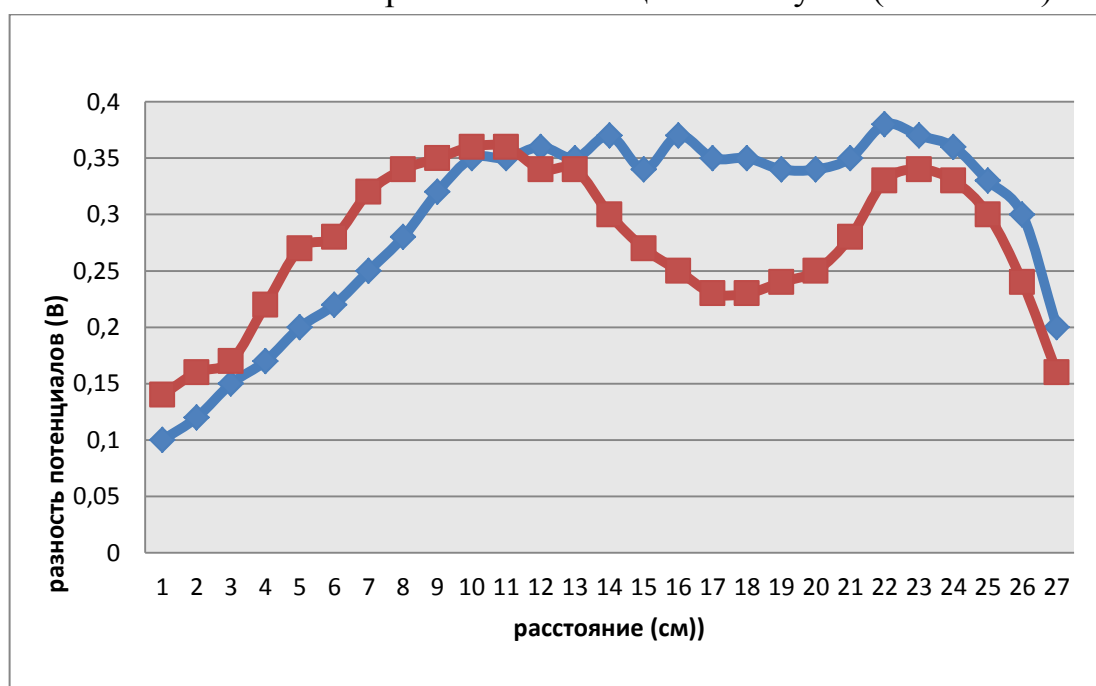


Рис. 5. Зависимость разности потенциалов от расстояния (сравнение).

В нижепереведенном графике приведена зависимость вектора магнитной индукции от расстояния на продолжении оси, проходящей через центр кругового проводника с током экспериментально, как видно из рисунка с увеличением расстояния вектор магнитной индукции уменьшается, что соответствует теории. Теоретическая кривая проведена на основе расчета вектора магнитной индукции посредством закона Био–Савара–Лапласа.

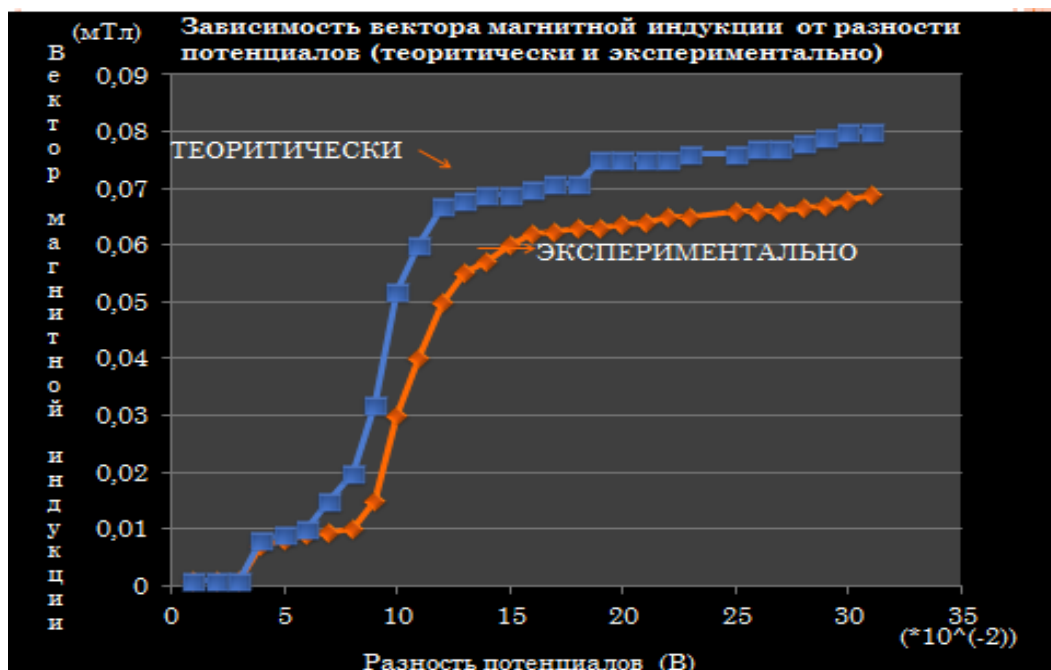


Рис. 6. Зависимость вектора магнитной индукции от разности потенциалов.

При изучении магнитного поля катушек, посредством дополнительных опытов, ошибка экспериментатора оказалась закономерностью и повторялась в каждом опыте. Эта закономерность была вызвана суперпозицией магнитных полей проводника и круговую катушку, по которым течет постоянный ток, т. е. происходило сложение магнитных полей проводник с током и самих катушек (Рисунок 1, 2).

Мы провели ряд экспериментов при помощи катушек Гельмгольца и датчика Холла. Нами было измерено поле магнитной индукции в зависимости: разности потенциала от силы тока; разности потенциала от расстояния; вектор магнитной индукции по контуру вокруг катушек. (Рисунок 3,4,5,6).

Литература

1. Трофимова Т. И. Курс физики. – М.: Высш. Шк., 1990 – 478с.
2. Сивухин Д. В. Электричество. – М.: Наука, 1977. – 688с.
3. Т.Х. Салихов, А. Махмалатиф, Ю.П. Ходжаев, Рахмонов Р. К. Нелинейный фотоакустический отклик оптически неоднородных твердотельных образцов: I. математическая модель проблемы // Вестник ТНУ. – 2014. № 1/3(134). – С.66-70.
4. Т.Х. Салихов, Ю.П. Ходжаев, Р.К.Рахмонов. Теория генерации второй гармоники нелинейного фотоакустического сигнала двухслойными непрозрачными образцами // Вестник ТНУ, 2014.-№ 1/4(153). – С.174-1801.

5. Рахмонов Р. К. Методикаи таълими ходисаи эффекти холл. ТТУ Энергетический факультет. Материалы республиканской научно-практической конференции. «Состояние и будущее энергетики Таджикистана». Душанбе 2009. – С.120-123.
6. Рахмонов Р. К. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов. ТТУ Энергетический факультет. Материалы республиканской научно-практической конференции. «Состояние и будущее энергетики Таджикистана». Душанбе 2009. – С.139-1437. Изучение контура магнитного поля посредством датчика Холла вокруг катушки, по которому течет ток.
7. Рахмонов Р. К. Материалы республиканской научно-практической конференции "Современные проблемы естественных наук". Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе, 2017. стр. 92-96.

ОМУХТАНИ ТАКСИМОТИ МАЙДОНИ МАГНИТИ ДАР АТРОФИ ГАЛТАКХОИ ДАВРАШАКЛИ ЧАРАЁНДОР БО ВОСИТАИ ДАТЧИКИ ХОЛЛ

Рахмонов Р.К., Ахмеджанова К.М., Зоирова З.О.

Филиали Донишгоҳи давлатии Москва ба номи М.В.Ломоносов дар ш.Душанбе

Дар мақола тақсимоти майдони магнити дар атрофи галтакҳои даврашакли чараёндор бо воситаи датчики Холл ба таври экспериментали муайян карда шудааст. Тақсимоти майдони магнити дар давоми тири аз маркази галтаки чараёндор гузаранда ба равишҳои қадди амуди ва даврави омухта шудааст. Инчунин суперпозицияи майдонҳои магнити ва таъсири майдонҳои беруна ба мисли хуручи офтоб низ таҳлил шудааст.

Калимаҳои калидӣ: Датчики Холл, майдони магнитӣ, чараён, фарқи потенциал, даврашакл, индуксияи ва майдон.

STUDYING THE CONTOUR OF THE MAGNETIC FIELD BY MEANS OF A HALL SENSOR IN A CIRCULAR-SHAPED COIL OVER WHICH THE CURRENT FLOWS

Rakhmonov R.K., Akhmedzhanova K.M., Zoirova Z.O .

Dushanbe branch of Lomonosov Moscow State University

The article gives a detailed analysis of the measurement of the magnetic field along the contour around a circular- shaped coil over which the current flows by the Hall Effect method. As manifested by the field formed by a single coil and two coils along and into the cross section of the coils. Experimentally studied the increase of the magnetic field with increasing current. Influence of various factors on it, such as: superposition of magnetic fields of direct and circular conductors along which the current flows and the activity of the sun.

Key words: Hall Effect, superposition of magnetic fields, activity of the sun and magnetic fields.

Сведения об авторе. Рахмонов Р. К. – кандидат физико-математических наук, декан ЕНФ филиала МГУ имени М. В. Ломоносова в городе Душанбе. Тел.: 935-24-26-21, E-mail: rahmonov@mail.ru

Ахмеджанова К. М. и Зоирова З. О. – студентки 2 курса направления ХФММ Филиала МГУ им. М. В. Ломоносова в г. Душанбе. E-mail: akhmedzhanova98@mail.ru ; 915931759@mail.ru .

УДК 536.12.34.65

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛООТДАЧИ (число Био) НАНОКОМПОЗИТОВ

**Сафаров М.М., Мирзоев С.Х., Зарипова М.А., Гуломов М.М., Давлатов Б.Н.,
Собиров Дж.Ф., Файзиев Б.Г.**

**Филиал МГУ имени М. В. Ломоносова в г. Душанбе
Курган-тибинский государственный университет им.Н.Хусрава
Технический колледж ТТУ им. акад. М.С.Осими**

В работе приводятся результаты разработанной модели для расчета коэффициента теплоотдачи (число Био) нанокompозитов на основе теплофизическим свойств, т.е. коэффициента теплопроводности, удельной теплоемкости, плотности и температуропроводности, которые получены экспериментальными методами при различных температурах и концентрациях наночастиц.

Ключевые слова: коэффициент теплоотдачи, число Био, нанокompозит, коэффициент теплопроводности, удельная теплоемкость, плотность и температуропроводность.

Физические и математические модели основаны на базе экспериментальных работ. Рассмотрим некоторые из моделей, применяемых при теоретических расчетах и объяснении механизмов передачи тепла, электричества, магнетизма, химических и физических явлений.

Первая модель привычна для теоретика, и он может забыть, что это только модель реальной физической системы. В качестве примера рассмотрим некоторые из них.

А. Классический - континуальные газы или наножидкости.

Эта модель обычно включает в себя три гипотезы:

- а) применимость классической механики,
- б) парный характер сил взаимодействия,
- в) центральные силы

Действительно, использование классической механики кажется вполне допустимой для большинства газов и наножидкостей вблизи их критических температур и давлений.

Квантово-механический расчет сил взаимодействия между атомами, молекулами, фононами и др. в проблеме многих наночастиц показали, что

гипотеза б) не совсем корректна. Однако, за исключением очень плотных сред, тройные (и более высокого порядка) силы взаимодействия могут быть малы и, по-видимому, в первом приближении ими можно пренебречь вблизи критических плотностей (ρ_c обычно порядка $1/3$ от $\rho_{\max}$).

Надо отметить, что гипотеза (б) в случае наножидкостей (углеродные нанотрубки, нанометаллы, наноксиды и органические жидкости) сравнима и можно при моделировании их учесть.

Гипотеза (в) о центральном характере сил с потенциалом $\varphi(r)$ была бы вполне правильной для одноатомных газов. Вероятно, она менее точна для двухатомных и более сложных молекул, в частности наножидкостей, однако закон соответственных состояний убедительно показывает, что это несущественно при рассмотрении критических явлений.

Известно, конечно, что правильный парный потенциал $\varphi(r)$, как учитывает модель Монте-Карло, должен иметь область сильного отталкивания, затем неглубокую потенциальную яму и, наконец, область притяжения, убывающего как $1/r^6$. Однако для теоретических целей часто полезно рассматривать потенциал лишь в ограниченной области [$\varphi(r) \equiv 0$ при $r > b$]; такое предположение не должно слишком влиять на результат.

Рассматривая $\varphi(r)$ как «эффективный потенциал взаимодействия» между молекулами одного сорта и пренебрегая взаимодействием молекулами другого сорта, мы можем, таким образом, использовать эту модель при рассмотрении бинарных растворов и наножидкостей.

Из трех описанных выше моделей наиболее реалистична модель классического континуального газа или наножидкостей системы (органические жидкости и наночастицы). К сожалению, она слишком сложна для математического рассмотрения, за исключением случая малых плотностей, который, в сущности, не может быть полезен при расчете критического состояния. Поэтому при составлении математической модели принимают пути упрощения и схематизации.

Тем не менее, эта модель, как мы покажем дальше, математически эквивалентна модели (в) бинарных сплавов (кроме знака $\varphi(\sigma)$) и приводит к неожиданной точности при расчете явлений в критической точке, особенно к критической точке жидких простых эфиров.

Наконец, упростим модель Гейзенберга, которая во многих отношениях проще модели континуального газа (так, она строго, хотя и асимптотически, описывает низкотемпературные свойства в терминах спиновых волн; можно, кроме того, получить некоторые результаты и в области высоких температур). Однако некоммутативность операторов в модели Гейзенберга приводит к значительным вычислительным трудностям. Конечно, такие трудности были в

прошлом веке. В настоящее время с появлением новой техники и века информационных технологий эти трудности преодолимы.

Одно из наиболее искусственных допущений модели Изинга – ее анизотропность, которая приводит к полному отсутствию спиновых волн при низких температурах. Однако для нас более интересна область высоких температур, близких к критической точке, где можно ожидать, что: этот недостаток менее важен (и понятие о спиновых волнах уже неприменимо) [1]. С другой стороны, обнаружены некоторые сильно анизотропные магнитные кристаллы (антиферромагнитный диспрозиево–алюминиевый гранат [2,3]), которые должны хорошо аппроксимироваться моделью Изинга даже при низких температурах.

Выбрав модель физической системы, мы должны рассчитать ее термодинамические свойства при помощи статистической механики. Для уяснения наших обозначений выпишем основные формулы, которыми и будем пользоваться в дальнейшем.

В случае классической системы N одинаковых частиц массы m с координатами $r_1, \dots, r_N$, находящихся в некоторой области Ω объема $V=V(\Omega)$, канонический конфигурационный интеграл имеет вид:

$$Q(N, \Omega) = \frac{1}{N!} \int_{\Omega} dr_1 \dots \int dr_N e^{-\beta U_N}, \quad (1)$$

где $\beta = \frac{1}{kT}$, а $U_N = U_N(r_1, \dots, r_N)$ – полная потенциальная энергия взаимодействия. Множитель $(1/N!)$ появляется из-за необходимости учесть только различные конфигурации наночастиц и крупных частиц.

Связь с термодинамической характеристикой определяется следующим образом:

$$-\frac{F}{kT} = -\frac{F_N}{NkT} = \frac{1}{N} \ln Q(N, \Omega) - 3 \ln \Lambda, \quad (2)$$

где свободная энергия Гельмгольца на одну частицу предполагается функцией температуры T (или β) и удельного объема

$$\vartheta = \frac{1}{\rho} = \frac{V}{N}, \quad (3)$$

и где

$$\Lambda^2 = \frac{h^2}{2\pi m kT}, \quad (4)$$

(h – постоянная Планка).

Уравнение состояния имеет вид:

$$P = -\left(\frac{\partial F_N}{\partial V}\right)_T = -\left(\frac{\partial F}{\partial \vartheta}\right)_\beta = P(\beta, \vartheta), \quad (5)$$

Если предположить, что бинарные системы различные (материалы 1 и 2), то можно вычислить баллистический перенос исходя из следующих допущений. Во-первых, в этом случае на границе имеет место отражение фононов. Во-вторых, если коэффициенты отражения и прохождения фононов не зависят от их частоты, то

$$q_\Sigma = q_{1 \rightarrow 2} - q_{2 \rightarrow 1} = \sum_{12} (v_{g1}/4) \text{ и } (T_1) - \sum_{21} \left(\frac{v_{g2}}{4}\right) \text{ и } (T_2) = \sum_{12} \frac{v_{gi} C_1 T_1}{4} - \sum_{21} v_{g2} C_2 T_2 / 4, \quad (6)$$

где v_1, v_2 - групповая скорость фононов в материалах 1 и 2 соответственно; $U(T)$ – внутренняя энергия в i – м материале.

Для вычислений коэффициент термического сопротивления и коэффициент теплопроводности наножидкостей системы (органический жидкостей и наночастиц) необходимо использовать модель Максвелла.

Для такого вычисления можно использовать диффузионную модель рассогласования, что дает для коэффициентов прохождения следующие условия:

$$\sum_{12} = 1 - \sum_{21} \quad (7)$$

В соответствии с данным соотношением и принципом детального баланса легко показать, что

$$q = \sum_{12} \frac{v_{gi} C_1 (T_1 - T_2)'}{4} = \frac{(T_1 - T_2)}{R_b} \quad (8)$$

$$\text{где} \quad R_b = \frac{4}{(\sum_{12} C_1 v_{g1})} \quad (9)$$

- хорошо известное граничное термосопротивление для кругового контакта.

$$R_\Sigma = (1/4\lambda_1 a) + (R_b/\pi a^2) + (1/4\lambda_2 a), \quad (10)$$

где λ_1, λ_2 – теплопроводность первой и второй сред соответственно.

В работе [4] пренебрегался вклад баллистического термосопротивления R_b в суммарное термическое сопротивление на границе различных материалов. Поэтому равенство (10) можно переписать в виде:

$$R_\Sigma = (1/2\bar{\lambda}a)[1 + (2/\pi)(R_b\bar{\lambda}a)] = (1/2\bar{\lambda}a)[1 + (2/\pi)Bi_{ph}] \quad (11)$$

где Bi_{ph} - число Био для фононов, зависящее от наноразмера a (радиуса контакта);

$$\bar{\lambda} = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad (12)$$

$\bar{\lambda}$ - средняя теплопроводность двух материалов, Вт/(м·К).

Число Био подчеркивает важность доминирования поверхности в термосопротивлении. Последнее соотношение показывает, что если число Bi_{ph} большое, то преобладает поверхностное термосопротивление. Число Bi_{ph} велико для малых значений a , больших значений R_b или больших λ . Типичная величина R_b для твердых тел в области температур 150-300К лежит в диапазоне значений $R_b \approx 1 \cdot 10^{-8} \div 5 \cdot 10^{-8} \text{ К} \cdot \text{м}^2/\text{Вт}$.

Характерный радиус контакта между наночастицей и плоской поверхностью вследствие деформации $a \approx 1-5 \text{ нм}$. Если теплопроводность кристаллических наночастиц лежит в диапазоне $\lambda \approx 1-10 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, то число Био для фононов $Bi_{ph} \approx 2-500$. Такой порядок величины показывает, что в R_Σ доминирует R_b по сравнению с диффузионным сопротивлением.

Для интерфейса нанопроволка – плоская подложка имеем:

$$R_\Sigma = \frac{1}{L} \left[(1/\pi\lambda_{nw}) \ln(2D/a) - \left(\frac{1}{2\lambda_{nw}} \right) + \left(\frac{1}{\pi\lambda_s} \right) \ln \left(\frac{2D}{a} \right) + R_b/2a \right]. \quad (13)$$

В работе [5] была выбрана модель [6] для определения контактного теплового сопротивления УНТ и плоской платиновой поверхности. Найденная величина составляет $R_\Sigma = 0,15 \text{ К} \cdot \text{м}^2/\text{Вт}$.

Вместе с тем из экспериментов [5] следует, что $R_\Sigma = 3,6 \text{ К} \cdot \text{м}^2/\text{Вт}$, что примерно на порядок выше, чем предсказывает теория. Используя ранее указанное значение $R_b \approx 1 \cdot 10^{-8} \div 5 \cdot 10^{-8} \text{ К} \cdot \text{м}^2/\text{Вт}$ и соотношение (14), а также полагая, что контактная область составляет $a \approx 5 \text{ нм}$, получим, что $R_b \approx 1,15 - 5,15 \text{ К} \cdot \text{м}^2/\text{Вт}$, что ближе к опытным данным работы [5].

$$(R_g^{eff})^{-1} = 2L\lambda_g \int_a^{D/2} \left[(D/2) - \sqrt{\frac{D^2}{4} - \zeta^2} + 2g\Lambda_a \right]^{-1} ds \quad (14)$$

Интересны также исследования по термическому сопротивлению, когда внутри зазора находится не воздух, а вода [6,9]. Поскольку размер зазора мал, термические граничные сопротивления между нанопроволокой и водой, а также водой и подложкой играют важную роль в теплопереноса через водяной зазор. Последние эксперименты [7,8] по баллистическому теплосопротивлению между водой и различными твердыми телами показывают, что $R_b \approx 10^{-8} \text{ К} \cdot \text{м}^2/\text{Вт}$.

В рассматриваемом случае величина R_e^{eff} может быть найдена для жидкости по следующей формуле:

$$(R_e^{eff})^{-1} = 2L\lambda_e \left[(D/2) - \sqrt{\frac{D^2}{4} - \zeta^2} + 2\lambda_b R_{be} \right]^{-1} d\zeta \quad (15)$$

где R_{be} – термическое граничное сопротивление жидкости.

Вычисления по соотношению (15) показывают, что баллистический вклад в сопротивление существенно выше, чем диффузионный; кроме того, для наноразмерных геометрий термическое граничное сопротивление между жидкостью и твердым телом может быть определяющим.

Литература

1. Вакс В.Г., Ларкин А.И., Пикин С.А. Препринт ИАЭ-1314.
2. Ball M., Leask M.I.M., Wolf W.P., Wyatt A.F.G. Journ.Appl.Phys.34,1104,(1963).
3. Ball M., Hutchings M.T., Leask M.J.M., Wolf W.P., Proc S. Intern, Congr. On Low Temperature Physies,Toronto,1960.
4. Prasher R.S.Transverse thermal conductivity of porous materials made from aligned nano- and mierocylindrical pores.//Journal Applied Physies.100. 064302.2006.
5. Yu C., Shi L., Casstll A. et al. Proceedings of the ASME Summer Heat Transfer Conference. San Francisco. CA. 2005; paper no HT2005-72320/
6. Bahadur V.,Xu J., Liu Y. et al. Thermal Resistance of Nanowire-Plane Interfaces// Journal of Heat Transfer.127.2005.pp.664-668.
7. Wilson O.M., Hu X., Cahill D.G. et al. Colloidal metal particles as probes of nanoscale thermal transport in fluids //Physical Revierv B.66.224301.2002.
8. Huxtable S., Cahell D.G. Shenogin S. et.al. Interfacial heat flow in carbon nanotube suspensions// Nature Materials.2003. 273p.
9. Джураев Д.С., Холиков М.М., Сафаров М.М. Экспериментальное исследование темпера-туропроводности, теплопроводности и теплоемкости магнитных жидкостей в зависимости от давления при комнатной температуре// Вестник Таджикского национального универ-ситета, (Научный журнал), Серия естественных наук, Душанбе, Сино,2006,1/4(216). С.216-221.

**МОДЕЛИ ҲИСОБ НАМУДАНИ КОЭФФИЦИЕНТИ ГАРМИДИҲИ (адади Био)
БАРОИ НАНОКОМПОЗИТҲО**

**Сафаров М.М., Мирзоев С.Х., Зарипова М.А., Гуломов М., Давлатов Б., Собиров
Ч., Файзиев Б.**

Филиали Донишгоҳи давлатии Москва ба номи М.В.Ломоносов дар ш.Душанбе

Донишгоҳи давлатии Қўрғонтеппа ба номи Н. Хусрава

Коллеҷи техникии Донишгоҳи техникӣ ба номи М.С.Осими

Дар мақолаи мазкур модели ҳисоб намудани коэффисиенти гармидиҳии нанокон-
позитҳо (адади Био) оварда шудааст. Бояд зикр намуд, ки модели сохташуда дар асоси
натиҷаҳои таҷрибавии ҳосиятҳои гармофизикии наноконпозитҳо ба даст оварда шудааст.
Модели тартиб додашуда имконият медиҳад, ки коэффисиенти гармидиҳии наноконпо-
зитҳо вобаста бо ҳарорат ва консентратсияи нанозарачаҳо ҳисоб кардан мумкин аст.

Калимаҳои калидӣ: коэффисиенти гармидиҳи, адади Био, наноконпозитҳо,
коэффисиенти гармигузарони, гармигунҷоиши хос, зичи ва ҳароратгузарони.

**MODELING OF HEAT TRANSFER COEFFICIENT (number of Bio)
NANOCOMPOSITES**

**Safarov M.M., Mirzoev S.Kh., Zaripova M.A., Gulomov M.M., Davlatov B.N., Sobirov
J.F., Faiziev B.G.**

Dushanbe branch of Lomonosov Moscow State University

Kurgan-Tube State University named after N. Khusrav

Technical College of Osimi Technical University

The results of the developed model for calculating the coefficient of heat transfer (the number
of Bio) of nanocomposites based on the obtained data on the thermal and physical properties of the
thermal conductivity, specific heat, density and temperature conductivity, which are obtained by
experimental methods at various temperatures and concentrations of nanoparticles.

Key words: heat transfer coefficient, Bio number, nanocomposite, thermal conductivity,
specific heat capacity, density and temperature conductivity.

Сведения об авторах. Сафаров Махмадали Махмадиевич – 1952 г.р., доктор
технических наук, профессор, Заслуженный Деятель науки и техники Таджикистана, Филиал
МГУ им.М.В.Ломоносова в г.Душанбе, контактная информация: Тел: (+992) 951-63-15-85. Е-
mail: mahmad1@list.ru

Мирзоев Сайёло Хабибуллоевич-1967г.р., кандидат физико-математических наук,
доцент, исполнительный директор филиала МГУ им. М.В. Ломоносова в г.Душанбе,
контактная информация: Тел: (+992) 985 07 27 87, Е –mail: saialo.mirzoev.1967@mail.ru

Зарипова Мохира Абдусаломовна-1969г.р., доктор технических наук, доцент, ТТУ им.
Акад. М.С.Осими, контактная информация: Тел: (+992) 93 181 57 11, Е - mail: mohirai69
@mail.ru

Гуломов Масрур Мирзохонович –1988 г.р. зам. директор Таджикского технического
колледжа им. Академика М.С. Осими. контактная информация: Тел: (+992) 917-75-20-88.
Email: masrur.gulomov.88@mail.ru

Давлатов Наджибулло Бахромович-1990 г.р. ТТУ им.академика М.С. Осими, контакт-
ная информация; Тел.: (+992) 93-845-23-41, Е-mail: NadgibulloDavlatov@mail.ru

Собиров Джурабой Файзалиевич.- 1960 г.р., кандидата физико-математических наук, КГУ им. Носира Хусрава, г. Курган-тюбе, контактная информация: Тел: (+992) 988 88 12 32, E - mail: s.j.f60@mail.ru

Файзиев Бахром -1989 г.р. аспирант кафедры общей физики ТГПУ им.С.Айни: контакт-ная информация: Тел: (+992) 918 872 233, E - mail: bahrom@mail.ru

УДК 536.12.63

ВЯЗКОСТЬ ТУРБИННОГО МАСЛА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

Тагоев С.А., Зоиров Х.А., Сафаров М.М.

**Таджикский технический университет имени М.С.Осими,
Филиал МГУ имени М. В. Ломоносова в г. Душанбе**

Данная статья посвящена исследованию влияния температуры на вязкость турбинного масла, применяемого на ДТЭЦ-2. По результатам экспериментальных измерений предложена эмпирическое уравнение, устанавливающая зависимость вязкости исследуемого объекта от температуры.

Ключевые слова: динамическая и кинетическая вязкость, трубопровод, турбинное масло, температурная зависимость, эмпирическое уравнение.

Вязкость турбинных масел является важным параметром, характеризующий их эксплуатационные свойства. От него зависит надежность смазки трущихся поверхностей.

Различают абсолютную (динамическую и кинематическую) и условную вязкости. Динамическая вязкость представляет собой коэффициент внутреннего трения, равный по величине отношению силы трения, действующей на поверхность жидкости при градиенте скорости, равном единице, к площади этого слоя. В системе СИ динамическая вязкость измеряется в Па·с - это вязкость такой жидкости, которая оказывает сопротивление взаимному перемещению двух слоев жидкости площадью 1 м^2 , находящихся на расстоянии 1 м друг от друга и перемещающихся относительно друг друга со скоростью 1 м/с и силой в 1 Н .

Кинематической вязкостью называется коэффициент внутреннего трения или отношение динамической вязкости при температуре t . Кинематическая вязкость измеряется в системе СИ в $\text{м}^2/\text{с}$. Условная вязкость - величина безразмерная, показывающая, во сколько раз вязкость жидкости больше или меньше в градусах условной вязкости.

Наиболее широко в ГОСТах на нефтепродуктах применяется кинематическая вязкость. Она определяется по ГОСТ 33-82 с помощью стеклянных капиллярных вискозиметрах (ГОСТ 10028-81). Динамическая вязкость используется при плохой текучести под воздействием внешней силы.

При большой вязкости масел затрудняется их прокачиваемость по трубопроводам и магистралям, через фильтры, что затрудняет подвод к трущимся поверхностям и создает большие сопротивления при работе узлов, приводящие к снижению КПД механизмов. Повышение вязкости топлив приводит к плохому распыливанию его при впрыске.

При применении масел с очень малой вязкостью ухудшаются смазочные свойства, в результате чего возрастает износ трущихся поверхностей, затрудняется обеспечение условий жидкостного трения в подшипниках скольжения.

Вязкость жидкостей существенно зависит от температуры, при ее увеличении вязкость снижается, при уменьшении - возрастает вплоть до полной потери подвижностей. Поскольку масла работают в широком диапазоне температур, необходимо, чтобы они обладали достаточной вязкостью, обеспечивающей надежность масляного слоя при рабочих температурах (100°C), а при низких имели достаточную подвижность.

Нами исследованы влияния температуры на динамическую вязкость (η , 10^{-3} , Па·с) и кинематическую вязкость (ν , 10^{-6} , м²/с) турбинного масла (Китайского производителя) системы маслоснабжения турбинного агрегата на ДТЭЦ-2 в интервале температур 293-363 К. (табл. 1) Для измерения вязкости применен метод капиллярного вискозиметра.

Таблица 1. Вязкость турбинного масла системы маслоснабжения турбинного агрегата на ДТЭЦ-2 в зависимости от температуры при атмосферном давлении

Т, К	293	305	315	325	338	350	363
η , 10^{-3} , Па·с	80	45	27	15	6	3	2
ν , 10^{-6} , м ² /с	92,8	52,5	31,7	17,7	7,15	3,6	2,4

Характер изменения динамической вязкости турбинного масла в зависимости от температуры показано на рис. 1.

Зависимость вязкости турбинного масла от температуры при атмосферном давлении подчиняется полиномиальному закону. При увеличении температуры от 293К до 363К вязкость масла уменьшается на 97% от первоначального значения. По результатам экспериментальных измерений

предложено эмпирическое уравнение, устанавливающее зависимость динамической вязкости исследуемого объекта от температуры:

$$\eta = (0,0263T^2 - 18,302T + 3185) \cdot 10^{-3},$$

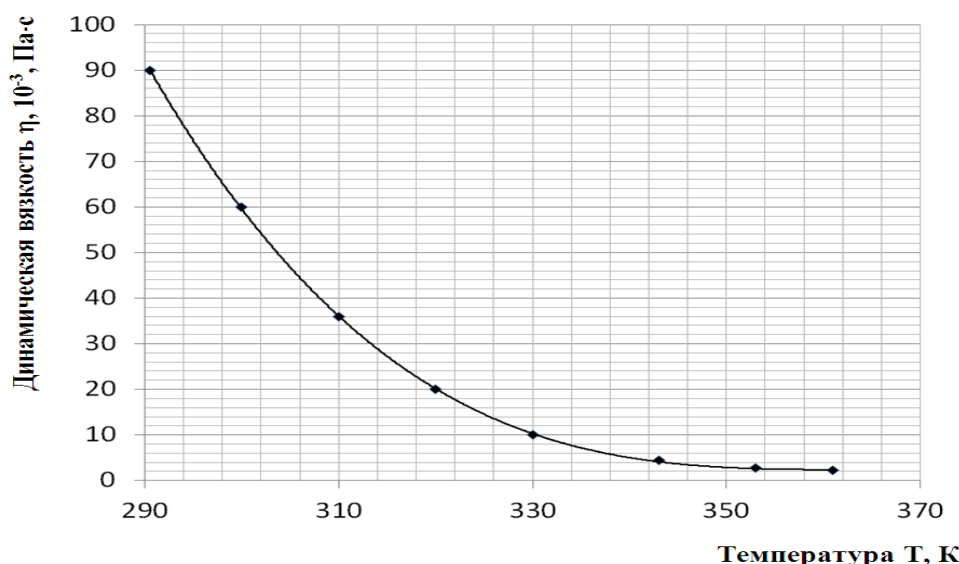


Рис. 1. Зависимость динамической вязкости турбинного масла от температуры

Таким образом, в результате экспериментов выявлено качественное и количественное влияние температуры на вязкость турбинного масла в интервале температур 293-363 К при атмосферном давлении. Предложено эмпирическое уравнение для расчета вязкости турбинного масла в данном интервале температур. Эксперименты показали, вязкость турбинного масла китайского производителя, применяемого для системы маслоснабжения турбинного агрегата на ДТЭЦ-2 ниже вязкости турбинных масел Российских производителей.

Литература

1. ГОСТ 10028-81. Вискозиметры капиллярные стеклянные. Технические условия. – М.: Стандартинформ, 2005.

ЧАСПАКИИ ДИНАМИКИИ РАВҒАНИ ТУРБИНА ВОБАСТА БО ҲАРОРАТ

Тагоев С.А., Зоиров Х.А., Сафаров М.М.

Донишгоҳи техникӣ ба номи М.С.Осими

Филиали Донишгоҳи давлатии Москва ба номи М.В.Ломоносов дар ш.Душанбе

Мақолаи мазкур бо омузиши часпакии равғани трубина, ки дар Маркази гарми ва барқдихии ш.Душанбе (МГБ-2) истифода бурда мешавад, бахшида шудааст. Дар асоси

ченкуниҳои таҷрибавӣ муодилаи эмпирики ҳосил карда шудааст, ки он вобастагии байни ҳаспакии равшанро аз ҳарорат муқаррар менамояд.

Калимаҳои калидӣ: ҳаспакии динамикӣ ва кинематикӣ, трубина, равшани турбина, вобастагии ҳароратӣ, муодилаи эмпирӣ.

VISCOSITY OF TURBINE OIL AS DEPENDENT FROM TEMPERATURE

Tagoyev S.A., Zoirov Kh.A., Safarov M.M.

Tajik Technical University named after M.Osimi

Dushanbe branch of Lomonosov Moscow State University

This article is devoted to the investigation of the influence of temperature on the viscosity of turbine oil used at DTES-2. Based on the results of experimental measurements, an empirical equation is proposed that establishes the dependence of the viscosity of the object under study on temperature.

Key words: dynamic and kinematic viscosity, pipe-line, turbine oil, temperature dependence, empirical equations.

Сведения об авторах. Тагоев Сафовидин Асоевич, кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой «Теплотехника и теплотехническое оборудование» Таджикского технического университета имени академика М.С. Осими. Тел.: (+992) 91 913 26 39. E-mail: safovidin@mail.ru

Зоиров Хикматулло Абдухоликович – кандидат технических наук, ассистент кафедры «Теплотехника и теплотехническое оборудование» ТТУ им. акад. М.С. Осими. Тел: (+992)917-72-47-87; E-mail: kzoirov@inbox.ru.

Сафаров Махмадали Махмадиевич – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры «Фундаментальных и естественных наук» Филиала МГУ имени М.В. Ломоносов в г. Душанбе, Тел.: (+992) 951631585; E-mail: mahmad1@list.ru.

РАЗРАБОТКА МОДЕЛИ МЕЖАТОМНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ И АТОМИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ СТРУКТУР МОНАЦИТОВ ЛЕГКИХ РЕДКОЗЕМЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Еремин Н.Н., Уланова А.С., Марченко Е.И.

Геологический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова

Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова в г. Душанбе

Проведен сравнительный анализ существующих моделей межатомных потенциалов для структурного моделирования монацитов. Показано, что ни одна из существующих моделей не в состоянии одновременно с хорошей точностью описать структурные, упругие и термодинамические свойства изучаемых соединений. Разработан новый набор частично ионных потенциалов межатомного взаимодействия для структурного моделирования монацитов семи легких лантаноидов (La - Gd). Показано, что новый набор обеспечивает отличное описание кристаллических структур монацитов и с хорошей точностью воспроизводит упругие и термодинамические свойства кристаллов.

Ключевые слова: структурное моделирование, моделирование, монациты, редкоземельные элементы.

Введение

Среди природных фосфатов наиболее известными и распространенными являются монацит и ксенотим с общей формулой $TRPO_4$ (TR - лантаноид). Ортофосфаты, содержащие легкие и относительно более крупные редкоземельные элементы (La-Gd), характеризуются моноклинной монацитовой структурой. Монацит - один из источников промышленного получения лёгких лантаноидов и тория. Ортофосфаты, содержащие тяжелые редкоземельные элементы (Tb-Lu) а также Y, кристаллизуются в тетрагональной структуре ксенотима, изоструктурного ортосиликату циркону $ZrSiO_4$. Ксенотим является сырьём для получения иттрия и тяжёлых лантаноидов.

В структурном типе монацита (рис. 1а) изолированные тетраэдры PO_4 с расстояниями P-O $\approx 1.52-1.54$ Å связаны между собой девятивершинниками TRO_9 , объемом от 29 до 33 Å³ с расстояниями TR-O $\approx$ от 2.40 до 2.80 Å. Эти TRO_9 полиэдры являются резервуарами для изоморфного внедрения актиноидов. Все атомы находятся в общих позициях кристаллической структуры, число формульных единиц на ячейку $Z=4$ [1].

С закономерным уменьшением радиуса редкоземельного элемента структурный тип монацита сменяется на родственный ему структурный тип ксенотима (рис. 1б). В этой структуре изолированные тетраэдры PO_4 с

четырьмя структурно-эквивалентными расстояниями P-O ≈ 1.54 Å связаны между собой додекаэдрами Сиамеса TRO_8 существенно меньшего, чем в монацитах, объема: $\approx$ от 21 до 24 Å³. В структуре наблюдаются две серии межатомных расстояний TR-O: $4 \times \text{TR-O}(1)$ и $4 \times \text{TR-O}(2) \approx$ от 2.30 до 2.39 Å. Все атомы находятся в частных позициях кристаллической структуры, $Z=4$ [1].

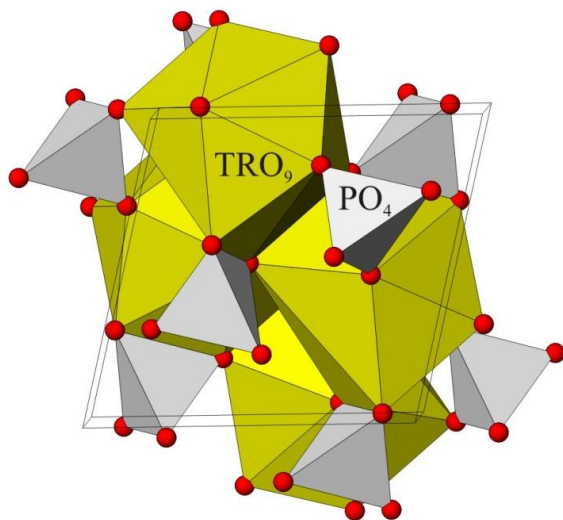


Рис. 1а. Структура монацита (пр. гр. $P2_1/n$). Вид в плоскости $\approx [001]$. Выделена элементарная ячейка.

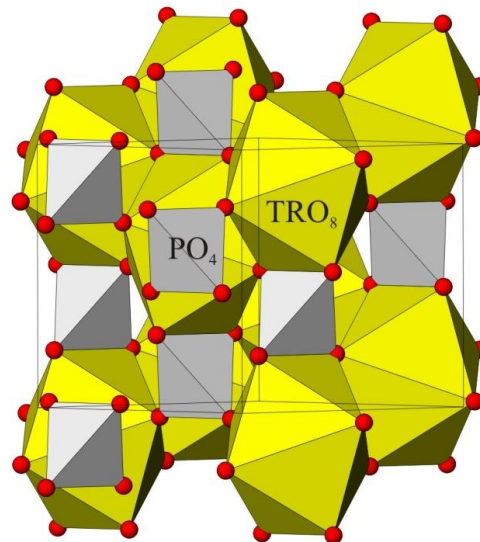


Рис. 1б. Структура ксенотима (пр. гр. $I4_1/amd$). Вид в плоскости $\approx [110]$. Выделена элементарная ячейка.

Несмотря на значительное присутствие в монаците и ксенотиме атомов тория и урана эти фосфаты, в отличие от циркона, достаточно редко находятся в метамиктном состоянии [2]. Поэтому природные редкоземельные фосфаты и их синтетические аналоги достаточно часто рассматриваются как возможные консервирующие матрицы для иммобилизации компонентов высокоактивных радиоактивных отходов. К таким матрицам выдвигаются жесткие эксплуатационные требования: они должны иметь значительную изоморфную емкость в отношении актиноидов и также сохранять радиационную и химическую устойчивость на протяжении длительного времени эксплуатации [3]. Ряд проведенных экспериментальных исследований по изучению радиационной устойчивости этих соединений показал, что фосфаты легких лантаноидов со структурой монацита характеризуются большей радиационной устойчивостью, чем фосфаты, содержащие более тяжелые редкоземельные элементы, кристаллизующиеся в структурном типе циркона-ксенотима [2, 4].

Вместе с тем, необходимо заметить, что подавляющая часть природных минералов представляет собой не чистые стехиометрические соединения, а твердые растворы, не имеющие строгой пространственной регулярности. Это особенно актуально именно для монацита, в природных образцах которого наблюдаются практически все легкие лантаноиды в переменном количестве, а

также существенные примеси радиоактивных актиноидов. Как неоднократно показывалось экспериментально и теоретически, физические свойства таких соединений могут существенно отличаться от свойств исходных веществ, являющихся крайними членами соответствующих изоморфных рядов.

Сложность экспериментальных исследований с объектами, содержащими радиоактивные элементы, вынуждает использовать различные математические эксперименты, дополняющие и заменяющие физические. Так, достаточно достоверную информацию о ряде физических свойств монацитов можно получить теоретически с помощью полуэмпирического структурного моделирования методом межатомных потенциалов, а информацию о радиационной устойчивости соединения – с помощью метода молекулярной динамики (МД). Это определило основную цель настоящей работы: разработать согласованную модель потенциалов межатомного взаимодействия, пригодную для последующего молекулярно-динамического моделирования, способную корректно описать не только структурные, но и механические, термодинамические и энергетические характеристики всех монацитов легких лантаноидов.

Обзор существующих моделей и разработка нового набора межатомных потенциалов для структурного моделирования монацитов

В современных полуэмпирических расчетах кристаллических структур атомы наделяются эффективными зарядами, отличными от формальных значений. Величины этих зарядов зависят от степени ионности - ковалентности химических связей и могут изменяться от нуля (для ковалентных соединений) до значений формальных зарядов (для ионных кристаллов). Кроме кулоновского взаимодействия всех эффективных зарядов между собой, в короткодействующих потенциалах межатомного взаимодействия учитывается отталкивание электронных оболочек атомов и дисперсионные взаимодействия между атомами. Наибольшее распространение получили парные потенциалы вида:

$$\text{а) Букингема: } V(r) = A \cdot \exp(-r / \rho) - C \cdot r^{-6} + D \cdot r^{-12}, \quad (1)$$

где r – расстояние между двумя атомами (Å), A – предэкспоненциальный множитель для члена, характеризующего межатомное отталкивание (eV), ρ – параметр жесткости связи (Å), C и D – силовые параметры Ван-дер-Ваальсового взаимодействия ($\text{eV} \cdot \text{Å}^6$) и ($\text{eV} \cdot \text{Å}^{12}$), соответственно;

$$\text{б) Морзе: } V(r) = D_i \cdot [\exp(-2\alpha(r - r_0)) - 2\exp(-\alpha(r - r_0))], \quad (2)$$

где три варьируемых параметра потенциала D_M (eV), α (Å⁻¹) и r_0 (Å) имеют стартовый физический смысл энергии диссоциации связи между атомами,

параметр «мягкости» химической связи и оптимальной длины межатомного контакта, соответственно.

Заметим, что для решения последующих расчетных задач, которые ставят перед собой авторы настоящей работы (моделирование структур переменного состава, возможность рассчитывать гетеровалентные изоморфные замещения) желательно использовать так называемый согласованный набор межатомных потенциалов, который может быть применен для любого переменного состава. Это накладывает на разрабатываемую модель дополнительные ограничения, а именно: форма потенциала для изоморфно замещающих друг друга атомов должна быть аналогичная, параметры общих потенциалов взаимодействия, например, Р-О и О-О для монацитов разного состава также должны быть одинаковы. Кроме того, атомы одной валентности должны иметь одинаковый эффективный заряд, а при гетеровалентных замещениях баланс атомных зарядов должен строго соблюдаться.

Кристаллические структуры монацитов ранее моделировались методом межатомных баланс потенциалов достаточно редко и не всегда успешно. Так, для воспроизведения физических свойств монацита LnPO_4 в работе [5] были использованы два набора межатомных потенциалов. В качестве стартовых значений параметров потенциалов для набора «Monazite 1» (табл. 1) использовались соответствующие величины из работы [6] дополнительно оптимизированные авторами [5] с привлечением экспериментальных значений структурных параметров и постоянных упругости La-монацита. Результаты вычислений показали (табл. 2), что этот набор межатомных потенциалов воспроизводит как структурные параметры, так и упругие и термодинамические свойства LnPO_4 только удовлетворительно. Так, параметр c элементарной ячейки отклонился более чем на 2% от экспериментального значения, а модуль всестороннего сжатия K на 38% превышает экспериментальную величину. Предсказанное значение S_{298} на 13% меньше экспериментальной величины. В связи с такой относительной неудачей моделирования монацита по первой модели авторами [5] был проведен поиск альтернативного набора межатомных потенциалов, который лучше бы воспроизводил экспериментальные характеристики монацита. Таковым набором «Monazite 2» стала модель потенциалов, разработанная в работе [7] для алюмофосфатов. Результаты вычислений [5] показали (табл. 2), что набор потенциалов «Monazite 2» неплохо воспроизводит термодинамические и упругие свойства соединения при удовлетворительном согласии структурных параметров. Так, параметр c снова оказался завышенным – расхождение с экспериментальной величиной превысило 3%, а параметры a и b , наоборот, занижены более чем на 1%. Отметим, что при таком относительно неудачном

структурном описании данный набор неплохо предсказывает упругие и термодинамические характеристики Ln-монацита.

Среди согласованных наборов потенциалов, известных в литературе, относительное распространение получил набор, разработанный в работе [8]. В этом наборе используется фиксированная степень ионности f всех химических связей (все формальные заряды атомов умножаются на 0,6). В качестве парных потенциалов используется потенциал Морзе (2). Для молекулярно-динамических расчетов дополнительно используется отталкивающий вклад $D \cdot r^{-12}$ потенциала Букингема (1), что не позволяет атомам сближаться на недопустимо близкое расстояние в процессе МД-эксперимента. В [8] показано, что предложенная модель успешно воспроизводит структурные и механические свойства достаточно широкого круга частично ионных соединений (оксиды и силикаты, в которых заряды атомов существенны, но сильно меньше их формальных валентностей). Наличие потенциалов O-O, P-O и трех парных потенциалов TR-O (для Gd, Nd, Er) позволяет использовать этот набор как возможной прототип для решения расчетных задач настоящей работы. Однако непосредственное применение данного набора для моделирования монацитов приводит к весьма посредственным результатам (см. табл. 2).

Таблица 1. Параметры наборов межатомных потенциалов, использованных при моделировании монацитов TRPO₄

Набор «Monazite 1» Заряды на атомах: $q(\text{La}) = 3.0 e_0$, $q(\text{P}) = 1.784 e_0$, $q(\text{O}) = -1.196 e_0$.					
Потенциал Букингема	Связь	A, eV	$\rho, \text{\AA}$	$C, \text{eV} \cdot \text{\AA}^6$	$R_{\text{max}}, \text{\AA}$
	La-O	1928.618	0.332131	0	10.0
	O-O	9070.693	0.263291	0	10.0
Потенциал Морзе	Связь	D_M, eV	$\square, \text{\AA}^{-2}$	$r_0, \text{\AA}$	$R_{\text{max}}, \text{\AA}$
	P-O	3.0	2.83	1.57	10.0
Набор «Monazite 2» Заряды на атомах: $q(\text{La}) = 1.6 e_0$, $q(\text{P}) = 3.2 e_0$, $q(\text{O}) = -1.2 e_0$.					
Потенциал Букингема	Связь	A, eV	$\rho, \text{\AA}$	$C, \text{eV} \cdot \text{\AA}^6$	$R_{\text{max}}, \text{\AA}$
	La-O	11076.219	0.269773	270.216	10.0
	O-O	1388.77	0.351668	175.0	10.0
	P-O	9034.21	0.19264	19.88	10.0
Набор «Pedone» Заряды на атомах: $q(\text{TR}) = 1.8 e_0$, $q(\text{P}) = 2.4 e_0$, $q(\text{O}) = -1.2 e_0$.					
Потенциал Морзе	Связь	D_M, eV	$\square, \text{\AA}^{-2}$	$r_0, \text{\AA}$	$R_{\text{max}}, \text{\AA}$
	O-O	0.042395	1.379316	3.618701	15.0
	P-O	0.831326	2.585833	1.800790	15.0
	Gd-O	0.000132	2.013000	4.351589	15.0
	Nd-O	0.014580	1.825100	3.398717	15.0

	Er-O	0.040448	2.294078	2.837722	15.0
Набор «Pedone2»					
Заряды на атомах: $q(\text{TR}) = 1.8 e_0$, $q(\text{P})=2.4 e_0$, $q(\text{O})=-1.2 e_0$.					
Потенциал Морзе	Связь	D_M , eV	$\square$, Å ⁻²	r_0 , Å	R_{max} , Å
	O-O	0.042395	1.379316	3.618701	15.0
	P-O	0.831326	2.585833	1.800790	15.0
	La-O	0.4447753	3.725337	2.624017	15.0
	Ce-O	0.493151	3.531167	2.600192	15.0
	Pr-O	0.534224	3.439906	2.582575	15.0
	Nd-O	0.572065	3.414647	2.564596	15.0
	Sm-O	0.633084	3.185914	2.538049	15.0
	Eu-O	0.626065	3.004545	2.533469	15.0
	Gd-O	0.702217	3.073984	2.515892	15.0
Новая модель					
Заряды на атомах: $q(\text{TR}) = 1.6 e_0$, $q(\text{P})=1.2 e_0$, $q(\text{O})=-0.7 e_0$.					
Потенциал Морзе	Связь	D_M , eV	$\square$, Å ⁻²	r_0 , Å	R_{max} , Å
	O-O	0.018716	1.374805	3.645169	15.0
	P-O	0.446152	3.263861	1.609157	15.0
	La-O	0.099973	3.456018	2.662300	15.0
	Ce-O	0.117341	3.335213	2.631052	15.0
	Pr-O	0.133622	3.278962	2.607182	15.0
	Nd-O	0.173034	3.563096	2.562213	15.0
	Sm-O	0.190876	3.737843	2.518803	15.0
	Eu-O	0.193661	3.399594	2.518195	15.0
	Gd-O	0.198682	3.172605	2.515892	15.0

Таблица 2. Сравнение экспериментальных и расчетных данных, полученных для Ln- и Gd-монацитов с использованием различных наборов межатомных потенциалов. Для сопоставления использованы структурные данные из работы [1], модули упругости LaPO_4 – из [10], величины S_{298} – из [11, 12].

LaPO_4					
Параметр	Эксперимент	«Monazite 1» (Δ , %)	«Monazite 2» (Δ , %)	«Pedone2» (Δ , %)	«Новая модель» (Δ , %)
a , Å	6.831	6.859 (0.40)	6.744 (-1.28)	6.796 (-0.52)	6.809 (-0.33)
b , Å	7.071	7.072 (0.01)	6.948 (-1.73)	7.078 (0.11)	7.082 (0.16)
c , Å	6.503	6.635 (2.03)	6.719 (3.31)	6.537 (0.51)	6.514 (0.16)
β , °	103.27	103.26 (-0.01)	103.92 (0.63)	103.29 (0.02)	103.27 (0.00)
K , ГПа	99	137.23 (38.62)	111.87 (13.00)	273.73 (176.49)	109,74 (10.84)
G , ГПа	53	67.17 (26.74)	50.31 (-5.08)	111.18 (109.77)	53,98 (1.92)
S_{298} , Дж/(моль·К)	108.7	94.24 (-13.30)	103.88 (-4.43)	77.90 (-28.30)	111,02 (2.13)
GdPO_4					
Параметр	Эксперимент	«Pedone» (Δ , %)	«Pedone2» (Δ , %)	«Новая модель» (Δ , %)	
a , Å	6.644	6.619 (-0.37)	6.609 (-0.52)	6.611 (-0.49)	
b , Å	6.841	6.927 (1.25)	6.856 (0.21)	6.855 (0.19)	
c , Å	6.328	7.422 (17.29)	6.368 (0.64)	6.350 (0.35)	
β , °	103.97	107.07 (2.98)	103.98 (0.01)	103.97 (0.00)	
K , ГПа	-	30.27	305.54	128.45	
G , ГПа	-	19.42	131.73	64.06	
S_{298} , Дж/(моль·К)	124.57	109.63 (-11.99)	66.98 (-46.23)	106,57 (-14.44)	

Таблица 3. Результаты моделирования кристаллических структур монацитов по новой модели межатомных потенциалов. Для сопоставления использованы структурные данные из работы [1] а величины S_{298} – из [12].

CePO ₄		
параметр	эксперимент	расчет
$a, \text{\AA}$	6.788	6.764
$b, \text{\AA}$	7.016	7.029
$c, \text{\AA}$	6.465	6.476
$\beta, ^\circ$	103.43	103.43
TR $x y z$	0.2818	0.2746
	0.1591	0.1549
	0.1001	0.0982
P $x y z$	0.3047	0.3036
	0.1635	0.1642
	0.6124	0.6116
O1 $x y z$	0.2504	0.2534
	0.0055	0.0068
	0.4458	0.4427
O2 $x y z$	0.3811	0.3860
	0.3320	0.3307
	0.4982	0.4979
O3 $x y z$	0.4745	0.4724
	0.1054	0.1109
	0.8042	0.8068
O4 $x y z$	0.1268	0.1263
	0.2164	0.2138
	0.7108	0.7110
K, ГПа	-	112.58
G, ГПа	-	55.73
S_{298} , Дж/(моль·К)	119.97	110.46
PrPO ₄		
параметр	эксперимент	расчет
$a, \text{\AA}$	6.760	6.732
$b, \text{\AA}$	6.981	6.994
$c, \text{\AA}$	6.434	6.448
$\beta, ^\circ$	103.53	103.53
TR $x y z$	0.2818	0.2746
	0.1586	0.1547
	0.0999	0.0982
P $x y z$	0.3040	0.3033

	0.1630	0.1640
	0.6127	0.6117
O1 $x y z$	0.2498	0.2531
	0.0051	0.0062
	0.4441	0.4416
O2 $x y z$	0.3816	0.3865
	0.3327	0.3313
	0.4990	0.4982
O3 $x y z$	0.4744	0.4727
	0.1046	0.1107
	0.8057	0.8082
O4 $x y z$	0.1260	0.1256
	0.2150	0.2136
	0.7120	0.7118
K, ГПа	-	115.64
G, ГПа	-	57.33
S_{298} , Дж/(моль·К)	123.24	109.58
NdPO ₄		
параметр	эксперимент	расчет
$a, \text{\AA}$	6.735	6.703
$b, \text{\AA}$	6.950	6.966
$c, \text{\AA}$	6.405	6.409
$\beta, ^\circ$	103.68	103.68
TR $x y z$	0.2818	0.2745
	0.1581	0.1537
	0.0995	0.0983
P $x y z$	0.3037	0.3035
	0.1626	0.1643
	0.6127	0.6112
O1 $x y z$	0.2501	0.2530
	0.0046	0.0049
	0.4430	0.4415
O2 $x y z$	0.3815	0.3873
	0.3331	0.3306
	0.4987	0.4947
O3 $x y z$	0.4747	0.4730
	0.1040	0.1117
	0.8073	0.8101
O4 $x y z$	0.1249	0.1256
	0.2153	0.2147
	0.7127	0.7118
K, ГПа	-	128.90
G, ГПа	-	63.16

S_{298} , Дж/(моль·К)	125.53	104.26
SmPO₄		
параметр	эксперимент	расчет
a , Å	6.682	6.652
b , Å	6.888	6.903
c , Å	6.365	6.376
β , °	103.97	103.97
TR $x y z$	0.2815 0.1564 0.0981	0.2740 0.1526 0.0962
P $x y z$	0.3034 0.1618 0.6130	0.3025 0.1632 0.6110
O1 $x y z$	0.2499 0.0020 0.4405	0.2539 0.0038 0.4380
O2 $x y z$	0.3822 0.3341 0.5008	0.3887 0.3319 0.4980
O3 $x y z$	0.4748 0.1025 0.8102	0.4717 0.1096 0.8128
O4 $x y z$	0.1217 0.2125 0.7113	0.1229 0.2128 0.7118
K , ГПа	-	134.63
G , ГПа	-	67.07
S_{298} , Дж/(моль·К)	122.49	101.82
EuPO₄		
параметр	эксперимент	расчет
a , Å	6.661	6.630
b , Å	6.862	6.878
c , Å	6.349	6.362
β , °	103.96	103.96
TR $x y z$	0.2815 0.1560 0.0976	0.2742 0.1530 0.0967
P $x y z$	0.3029 0.1615 0.6130	0.3023 0.1631 0.6115
O1 $x y z$	0.2513 0.0012	0.2538 0.0038

	0.4409	0.4373
O2 $x y z$	0.3833 0.3350 0.5017	0.3887 0.3329 0.4996
O3 $x y z$	0.4743 0.1022 0.8116	0.4725 0.1094 0.8133
O4 $x y z$	0.1204 0.2135 0.7119	0.1224 0.2126 0.7131
K , ГПа	-	131.33
G , ГПа	-	65.33
S_{298} , Дж/(моль·К)	117.21	104.78

Так, параметр c элементарной ячейки GdPO_4 превысил экспериментально измеренную величину на 17% при 3% расхождении угла моноклинности β . Крайне заниженными и физическими неоправданными оказались и упругие характеристики – очевидно, что модуль всестороннего сжатия $K(\text{GdPO}_4)$ превосходит аналогичную величину для LaPO_4 , а не в три раза меньше ее, как предсказывает модель. Относительное согласие величины S_{298} следует признать, очевидно, простой случайностью. Причиной такого неудачного предсказания кристаллических структур по модели [8] на наш взгляд является то обстоятельство, что потенциалы Gd-O, Nd-O, Er-O разрабатывались не с привлечением структурной информации по монацитам и ксенотимам, а с использованием только геометрических структурных характеристик соответствующих полуторных оксидов: Gd_2O_3 , Nd_2O_3 и Er_2O_3 , соответственно. Очевидно завышенная степень ионности ($f=0.6$) для связи P-O приводит и к неудачному описанию структурных и упругих характеристик GdPO_4 -монацита.

Это вынудило авторов настоящей работы существенным образом переработать модель [8]. Для разработки потенциалов TR-O (для всех легких лантаноидов) были использованы экспериментальные структурные характеристики монацитов из работы [1]. Учитывая нежелательность варьирования параметрами потенциалов P-O и O-O и значениями зарядов атомов в рамках согласованной модели, в качестве оптимизационных величин выступали лишь параметры D_M , α и r_0 потенциала Морзе вида (2) TR-O парных взаимодействий. В качестве экспериментальных характеристик, участвующих в процессе оптимизационной подгонки потенциала по методике, опубликованной в [9] в каждом случае выступали параметры элементарной ячейки (4 варьируемые величины для моноклинной сингонии) и независимые координаты всех атомов в элементарной ячейке (всего 18 координат). Все расчеты осуществлялись с помощью программного комплекса Gulp 4.0 [9]. Итоговые оптимизационные значения парных потенциалов вида (2) для TR-O парного взаимодействия приведены в таблице 1. Как видно из таблицы 2 использование такого модифицированного набора «Pedone2» позволило даже с оригинальными зарядами и потенциалами P-O и O-O из [8] во всех случаях достичь отличного согласия экспериментальных и модельных кристаллических структур монацитов. Отклонение всех метрических параметров элементарных ячеек не превысило 0.6% при точном описании угла моноклинности β . К сожалению, наложенные на модель согласованные ограничения не позволяют успешно предсказать упругие и термодинамические характеристики соединений. Так, предсказанные модули упругости и рассчитанные значения энтропии для LnPO_4 и GdPO_4 недопустимо сильно отклоняются от доступных

экспериментальных величин из работ [10-12]. Как уже говорилось выше, это связано с переоценкой степени ионности связи Р-О, что приводит к более «жесткому» кристаллу, чем он есть в действительности.

Таким образом, для улучшения согласия экспериментальных и модельных физических характеристик монацитов, очевидно, необходимо провести существенную корректировку величин зарядов на атомах. Опыт многочисленных исследователей показывает, что все модели без исключения оказываются исключительно зависимыми от разумности выбора физически обоснованной зарядовой модели. Информацию о величинах зарядов атомов в кристалле можно получить, например, из *ab-initio* расчетов конечных кластеров [13]. Существует также большое число косвенных методов оценки эффективных зарядов атомов в кристаллах, использующих измерение самых различных физических свойств кристаллов [14, 15]. Проведенный авторами анализ многочисленной прямой и косвенной информации позволяет утверждать, что заряд фосфора в кислородных соединениях не может быть выше, чем $+1.5e$. Степень ионности f связи А-В в кристалле можно также быстро оценить по эмпирическим формулам Полинга, Урусова или Филлипса [16]. При подстановке соответствующих значений в эти формулы можно оценить заряд фосфора в монаците в интервале от $+1.0$ до $+1.5e$, а TR – в интервале от $+1.5$ до $+2.1e$. Поэтому в разрабатываемой модели величины зарядов были понижены до следующих величин: $q(\text{TR}) = 1.6 e_0$, $q(\text{P}) = 1.2 e_0$. В этом случае из условия электронейтральности элементарной ячейки $q(\text{O}) = -\frac{1}{4}(q(\text{P}) + q(\text{TR})) = -0.7 e_0$. Параметры D_M , α и r_0 всех потенциалов Морзе (TR-O, O-O и P-O) оптимизировались с привлечением 22 экспериментальных структурных значений уже с этими значениями атомных зарядов. Оптимизированные параметры разработанных короткодействующих потенциалов для новой модели приведены в таблице 1, а результаты расчетов – в таблицах 2 и 3.

Как видно, в отличие от рассмотренных моделей, новый набор обеспечивает одновременно отличное описание кристаллических структур монацитов и с хорошей точностью воспроизводит упругие и термодинамические свойства кристаллов. На рисунке 2 приведена рассчитанная температурная зависимость энтропии для LaPO_4 в температурном интервале от 200 до 1600 К в сравнении с экспериментальными данными [11]. Видно, что во всем диапазоне температур наблюдается хорошее согласие рассчитанных и экспериментальных значений – максимальные отклонения не превышают 3%. Такое согласие дает возможность использовать новый набор потенциалов для

последующих расчетов энергии образования собственных и примесных дефектов в монацитах, оценки термодинамической стабильности монацитов переменного состава, а также молекулярно-динамических расчетов их радиационной устойчивости.

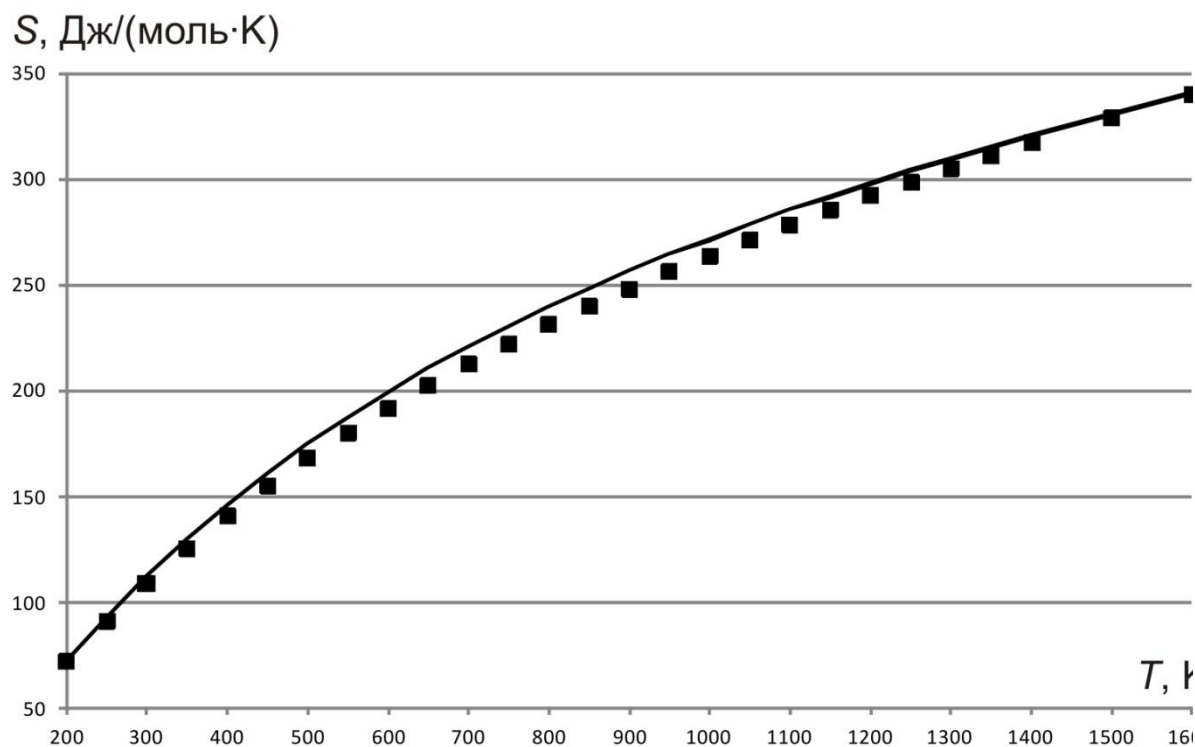


Рис. 2. Температурная зависимость энтропии LaPO_4 в интервале 200 – 1600 К. Квадраты – экспериментальные данные [11], сплошная линия – [12].

Выводы

1. Проведен критический анализ существующих моделей межатомных потенциалов для структурного моделирования монацитов легких редких земель. Определены границы применимости каждой модели. Показано, что ни одна из существующих моделей не в состоянии одновременно с хорошей точностью описать структурные, упругие и термодинамические свойства изучаемых соединений.

2. С использованием данных согласованной модели [8] разработан новый набор потенциалов межатомного взаимодействия для структурного моделирования монацитов семи легких лантаноидов (La - Gd) с эффективными зарядами на атомах $q(\text{TR}) = 1.6 e_0$, $q(\text{P}) = 1.2 e_0$, $q(\text{O}) = -0.7 e_0$.

3. Показано, что новый набор обеспечивает отличное описание кристаллических структур монацитов и с хорошей точностью воспроизводит упругие и термодинамические свойства кристаллов. Это дает возможность

рекомендовать его для последующих расчетов энергетики собственных и примесных дефектов, оценки термодинамической стабильности монацитовых фаз переменного состава и для молекулярно-динамических расчетов их радиационной устойчивости.

Благодарности

Работа поддержана грантами РФФИ №№ 15-05-0475 «Суперкомпьютерное моделирование кристаллических структур и физических свойств минеральных фаз переменного состава применительно к геологии мантии Земли и их радиационной устойчивости» и 15-05-06742 «Симметрия-диссимметрия как ключ к определению степени искажения структуры и механических свойств неупорядоченных твёрдых растворов». Часть расчетов осуществлялась на суперкомпьютере «Ломоносов-МГУ» и на вычислительном кластере кафедры кристаллографии и кристаллохимии Геологического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова.

Литература

1. Ni Y., Hughes J.M., Mariano A.M. Crystal chemistry of the monazite and xenotime structures. *Amer. Miner.* – 2005. – V. 80. – P. 21.
2. Meldrum A., Boatner L.A., Ewing R.C. Displacive radiation effects in the monazite- and zircon-structure orthophosphates. *Phys. Rev.* – 1997, B 56. – P. 13805.
3. Юдинцев С.В., Стефановский С.В., Никонов Б.С. Пироклоровая матрица для изоляции РЗЭ-актинидной фракции отходов переработки отработанного ядерного топлива Доклады Академии наук. – 2014. – Т. 454. – № 2. – С. 211-215.
4. Meldrum A., Zinkle S.J., Boatner L.A., Ewing R.C. Heavy-ion irradiation effects in the ABO_4 orthosilicates: Decomposition, amorphization, and recrystallization. *Phys. Rev.* – 1999, B 59. – P. 3981.
5. Гречановский А.Е., Еремин Н.Н., Урусов В.С. Радиационная устойчивость $LaPO_4$ (структура монацита) и $YbPO_4$ (структура циркона) по данным компьютерного моделирования. *Физика твердого тела.* – 2013. – Т. 55. – № 9. – С.1813–1815.
6. Rabone J.A.L., de Leeuw N.H. Interatomic potential models for natural apatite crystals: Incorporating strontium and the lanthanides. *J. Comp. Chem.* – 2006. – V.27. – P. 253.

7. Kramer G.J., Farragher N.P., van Beest B.W.H., van Santen R.A. Interatomic force fields for silicas, aluminophosphates, and zeolites: Derivation based on ab initio calculations. Phys. Rev. – 1991, B 43. – P. 5068.
8. Pedone A., Malavasi G., Menziani M.C., Cormack A.N., Segre U. A New Self-Consistent Empirical Interatomic Potential Model for Oxides, Silicates, and Silica-Based Glasses. J. Phys. Chem. B. – 2006. – V. 110. – P. 11780.
9. Gale J.D. Rohl A.L. The General Utility Lattice Program (gulp) // Mol. Simul. – 2003. – V.29, №5. – P. 291.
10. Morgan P.E.D., Marshall D.B. Ceramic composites of monazite and alumina. J. Am. Ceram. Soc. – 1995. – V. 78. – P. 1553.
11. Gavrichev K.S., Ryumin M.A., Tyurin A.V., Gurevich V.M., Komissarova L.N. Refined heat capacity of LaPO₄ in the temperature range 0–1600K. Thermochimica Acta. – 2008. – V.474. – P. 47.
12. Thiriet C., Konings R.J.M., Javorsky P., Magnani N., Wastin F. The low temperature heat capacity of LaPO₄ and GdPO₄, the thermodynamic functions of the monazite-type LnPO₄ series. J. Chem. Thermodynamics. – 2005. – V. 37. – P. 131.
13. Catlow C.R.A., Gale J.D., Grimes R.W. Recent computational studies in solid state chemistry. J. Solid State Chem. – 1993. – V. 106. – P. 13.
14. Урусов В.С. Энергетическая кристаллохимия. М.: Наука. – 1975, 334 стр.
15. Catlow C.R.A., Stoneham A.M. Ionicity in solids // J. Phys. C. – 1983. – V. 16. – P. 4321.
16. Урусов В.С., Еремин Н.Н. Кристаллохимия - краткий курс. М.: МГУ, 2010. – 255 стр.

РУШДИ МОДЕЛҲОИ ПОТЕНСИАЛҲОИ БАЙНИАТОМӢ ВА МОДЕЛРОНИИ АТОМИИ СТРУКТУРАҲОИ КРИСТАЛЛИ МОНАСИТИ ЭЛЕМЕНТҲОИ САБУКИ ЛАНТАНИӢ

Еремин Н.Н., Уланова А.С., Марченко Е.И.

**Филиали Донишгоҳи Давлатии Москва ба номи М.В.Ломоносов дар ш. Душанбе
Донишгоҳи Давлатии Москва ба номи М.В.Ломоносов**

Таҳлили муқоисавии моделҳои мавҷудбудаи потенциали байнисохавӣ барои модели сохтории монаситҳо амалӣ карда мешавад. Ин нишон медиҳад, ки ҳеҷ яке аз моделҳои мавҷудбуда ҳамзамон хусусиятҳои сохторӣ, элиматсионӣ ва термодинамикии пайвастагӣҳо бо омӯзиши бо дақиқии хуб тасвир карда метавонанд. Маҷмӯаи нави потенциали байни яксоатаи байнисарҳадӣ барои модели сохтории моназиҳои ҳафт лантаноидҳои сабук (La-Gd) таҳия шудааст. Ин нишонаи он аст, ки маҷмӯи нав тавсифи зебоии иншооти кристаллии моназиҳо ва хусусиятҳои электрограмма ва термодинамалии кристаллҳоро тақрор мекунад.

Калимаҳои калидӣ: симулятсияи структуравӣ, монастирҳо, элементҳои нодир.

THEORETICAL EVALUATION OF MECHANISMS OF ALUMINUM OCCURRENCE IN CA -AND MG - MANTLE PEROVSKITES

Eremin N.N., Ulanova A.S., Marchenko E.I.

Dushanbe branch of Lomonosov Moscow State University

Lomonosov Moscow State University

The comparative analysis of existing models of interatomic potentials for monazites structural modeling was carried out. It was shown that none of the existing models are able to describe simultaneously the structural, elastic and thermodynamic properties of monazites with good accuracy. A new set of partially ionic interatomic potentials for structural modeling of monazites for seven light lanthanides (La-Gd) was developed. The new set provides an excellent description of the monazites crystal structures and reproduces accurately the elastic and thermodynamic properties of the crystals.

Keywords: structure simulation, monazite, rare-earth elements.

Сведения об авторах. Еремин Николай Николаевич – д.х.н., профессор РАН, заведующий кафедрой кристаллографии и кристаллохимии геологического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. (495) 939-55-75 neremin@geol.msu.ru

Уланова Амина Сергеевна – студентка (бакалавр) естественнонаучного факультета филиала МГУ имени М.В.Ломоносова в г. Душанбе kara-2796@mail.ru

Марченко Екатерина Игоревна – аспирант кафедры кристаллографии и кристаллохимии геологического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. (495) 939-38-75 marchenko-ekaterina@bk.ru

УДК 620.193

СИНТЕЗ И ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СПЛАВОВ СИСТЕМЫ Al-Fe (1,8%), МОДИФИЦИРОВАННЫХ ЕВРОПИЕМ

Джалолов Ф. Н., Умарова Т. М.

Филиал МГУ имени М. В. Ломоносова в г. Душанбе

Были синтезированы сплавы системы Al-1,8%(вес.) Fe, модифицированные европием от 0,01% до 0,10%, проведен химический анализ синтезированных сплавов, исследованы микроструктуры.

Ключевые слова: *алюминиевые сплавы, модифицирование, дифрактограмма, микроструктура.*

Как известно, железо всегда присутствует в алюминии являясь его основной примесью. Диаграмма состояния Al-Fe достаточно изучена. Она характеризуется наличием нескольких ИМС: Fe_3Al , $FeAl_2$, Fe_2Al_5 , $FeAl_3$ и одной эвтектики со стороны Al с концентрацией 1,8% Fe по массе. Реакция эвтектического превращения $Ж \leftrightarrow Al + FeAl_3$ [1].

Сплавы системы Al-Fe стали объектом исследований много лет назад. Эти сплавы имеют низкие материальные затраты и более низкий удельный вес. По сравнению с дорогими, стойкими к коррозии сортами стали, они гарантируют экономию элементов, таких как хром, никель и др. Они имеют большую стойкость в сульфидных и оксидных атмосферах, особенно при высоких температурах и поэтому являются перспективными материалами для изготовления, например, структурной части авиации, нагревательных элементов теплообменника, оборудования в химической промышленности [2]. В работах японских исследователей [3] в качестве проводниковых материалов на основе алюминия рекомендованы бинарные сплавы системы Al-Fe. Большим интересом представляют сплавы состава алюминий, железо и редкоземельный металл для использования в качестве электропроводников, работающих в интервале температур 250-300 °С, когда требуется сочетание достаточно высокой прочности с высокой электропроводностью. Примером может служить алюминид $\text{Al}_{10}\text{Fe}_2\text{Ce}$, обладающий удачным сочетанием литейных и высокотемпературных механических свойств [4]. Другие авторы указывают на практическую значимость интерметаллидов данной системы, особенно AlFe_3 и Al_3Fe из-за высокой жаропрочности, что позволяет использовать их в автомобилях в системе газификации угля, системы дожигания выхлопных газов автомобилей и др. [5].

Методика эксперимента и оборудования

Синтез сплавов системы алюминий-железо связан с определенными сложностями из-за большой разницы температур плавления металлов, низкой растворимости железа в алюминии. Для синтеза и исследований сплавов использованы нижеследующие аппаратура и приборы:

- печь KS 400/10 (производство Германия, характеристики: $J=16\text{ A}$, $U=380\text{ В}$ и $T_{\text{max}}=1500^\circ\text{C}$);
- вакуумный пост;
- микроскоп NIKON SMZ 670 (Производство Япония);
- дифрактометр D2 Phaser;

Сплавы для исследования получали из алюминия марки А995 (ГОСТ 11069-74), железа марки ЧДА и европия металлической чистотой 99,9%. С целью избежать окисления и угара (особенно алюминия) сплавы получали в условиях вакуума.

В результате были получены сплавы следующих составов:

Таблица 1. Составы синтезированных сплавов

№	Al (вес.%)	Fe (вес.%)	Eu (вес.%)
1.	98,20	1,8	-
2.	98,19	1,8	0,01
3.	98,18	1,8	0,02
4.	98,15	1,8	0,05
5.	98,10	1,8	0,10

Далее, был проведен рентгенофазовый анализ синтезированных сплавов с помощью дифрактометра в химической лаборатории Рогунской ГЭС. На дифрактограмме можно видеть влияние легирования европия на фазовый состав эвтектического состава сплава системы Al-1,8Fe. С увеличением концентрации европия наблюдается уменьшение количества фаз Al и Fe.

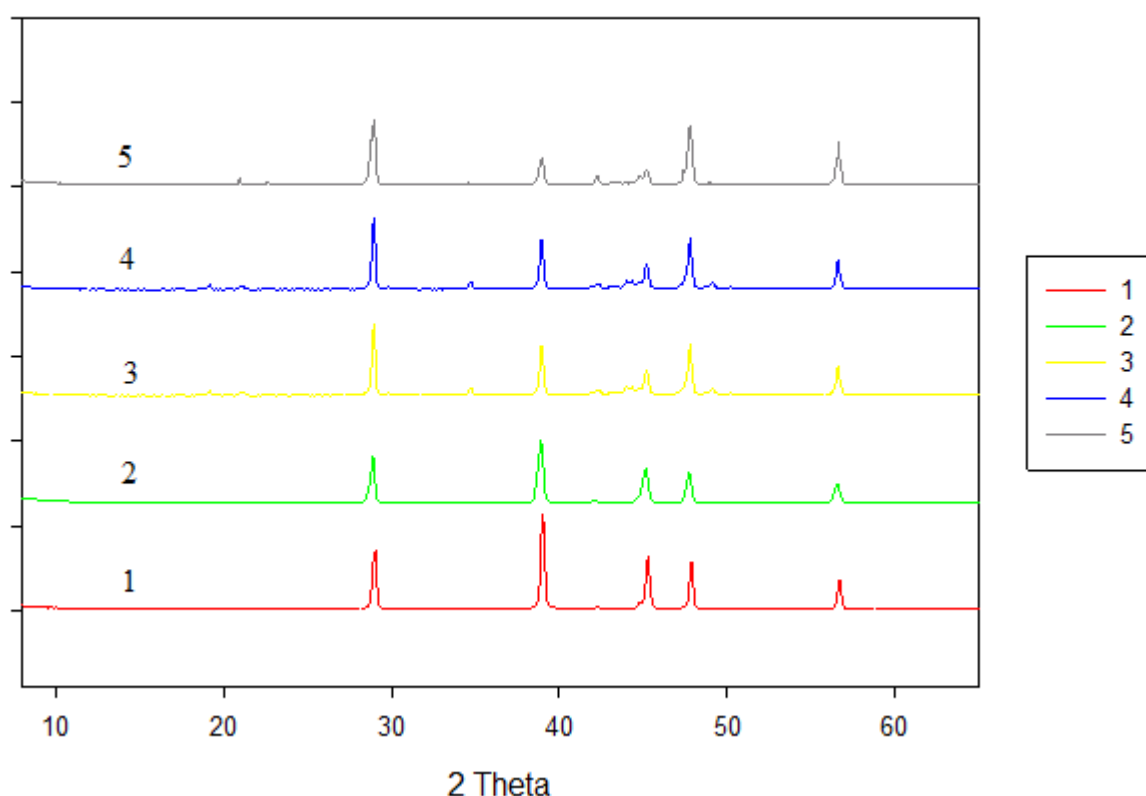
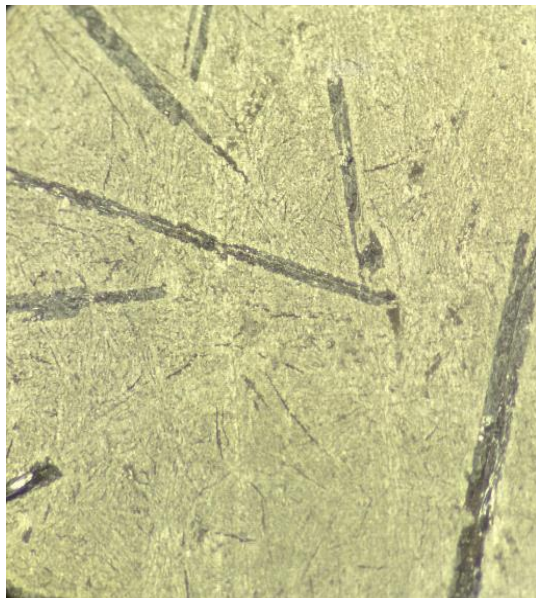


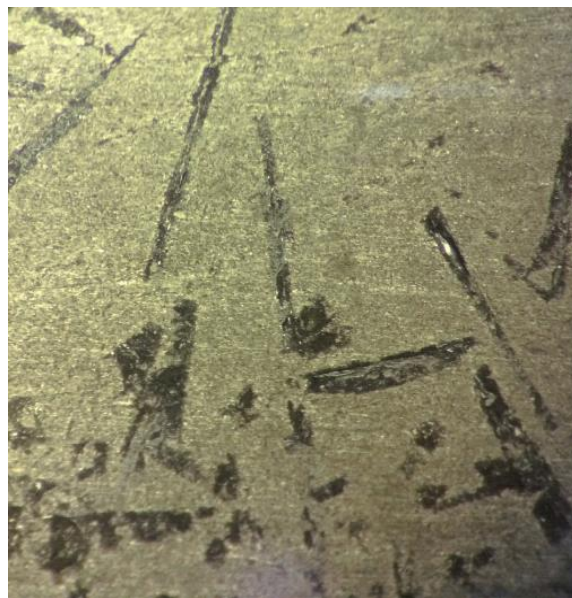
Рис 1. Дифрактограммы порошков сплавов Al-1,8%Fe, модифицированные европием от 0,01% до 0,1%.

Металлографические исследования позволяют наблюдать изменение микроструктуры в зависимости от состава. Микроструктуру сплавов исследовали на оптическом микроскопе “Nikon SMZ 670 ” при 200- кратном увеличении при

фотографировании. Подготовка образцов проводилась согласно рекомендациям авторов [6]. Для выявления микроструктуры исследуемого сплава образцы подвергались травлению различными травителями в зависимости от состава сплава и наличия присутствующей фазы. Так, например, для эвтектической фазы использовали реактив 50 (раствор 1г NaOH на 100 мл H_2O в течение 10 мин при температуре $50^{\circ}C$), в результате травления поверхность образца приобретает матовый оттенок с выраженной структурой, представленной на рисунках 2-3.



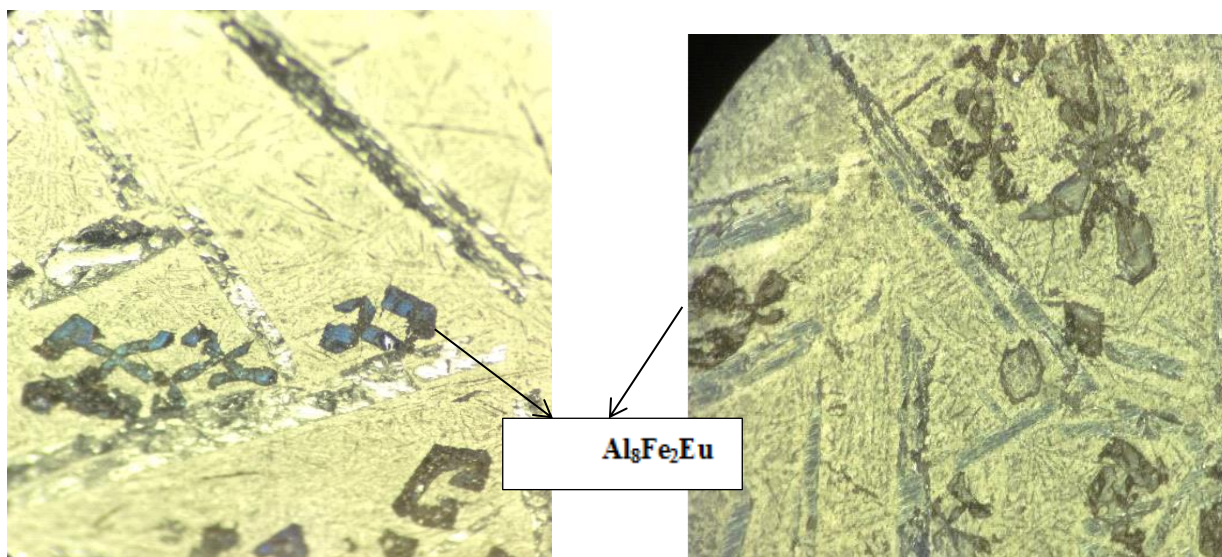
а)



б)

Рис.2. Микроструктура сплава системы Al-Fe (1,8% вес.): а - до травления, б - после травления.

На данных микроструктурах вся картина представлена на фоне эвтектической сетки. По реакции эвтектического превращения на рисунке можно увидеть включения фаз $FeAl_3$ в форме грубых игольчатых выделений.



а)

б)

Рис.3. Микроструктура сплава системы Al-Fe (1,8 вес%), модифицированная европием: а) 0,01 вес % Eu. б) 0,05 вес% Eu.

На данных фотографиях можно заметить включения тройного интерметаллического соединения в области богатой алюминием, предполагаемой формулы $\text{Al}_8\text{Fe}_2\text{Eu}$. Изучение и идентификация данного соединения является будущим этапом исследования его физико-химических свойств.

В завершении работы выражаю благодарность за оказанную помощь: д.х.н., ведущему специалисту Института химии им В.И.Никитина АН РТ.Абдусаламовой М.Н. и младшему научному сотруднику химической лаборатории Рогунской ГЭС Ходжахон М.И.

Литература

1. Лякишева Н.П. Диаграммы состояния двойных металлических систем ред. Машиностроение. – 2000. – С.144-146.
2. Suchanek P., Schindler I. Deformation Resistance and Structure – Forming Processes of Iron Aluminides in Hot Rolling.//Проблемы прочности. – 2008. – №. 1. – С. 44-47.
3. T. Shikagawa, G. Itoh, S. Suzuki. // Materials Science Forum. – 2006. – С.519-521.
4. Белов Н.А., Золоторевский В.С.// Металлы. – 1994. – № 3 – С. 70.
5. Moriss D.G., Nazmy M. Creep resistance in a new alloy based on Fe_3Al // Scr. Met et Mater. – 1994, No 37(2). – P. 173–178.

6. Коваленко В.С. «Металлографические реактивы. Справочник. 3-е издание. – 1981.– С. 27-28.

СИНТЕЗ ВА ОМУЗИШИ МИКРОСТРУКТУРАИ ХҶЛАҲОИ АЛЮМИНИЙ

Джалолов Ф. Н., Умарова Т. М.

Филиали Донишгоҳи давлатии Москва ба номи М.В.Ломоносов дар ш.Душанбе

Хӯлаҳои системаи Al-1,8%(вес.) Fe бо европий аз 0,01% то 0,1% синтез шуда, микроструктураи намунаҳо муайян карда шуда, омузиши кимиеви гузаронрида шудааст. Тавсифи оддии натиҷаҳо оварда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: хӯлаҳои алюминий, микроструктура, дифрактограмма.

SYNTHESIS AND STUDY MICROSTRUCTURE OF ALLOYS ALUMINUM-IRON (1,8%), MODIFIED WITH EUROPIUM.

Dzhalolov F.N., Umarova TM

Dushanbe branch of Lomonosov Moscow State University

Alloys of system Al-1,8% Fe modified with europium from 0,01% before 0,1% were synthesized, the microstructure is studied, chemical analyzed synthesized alloys.

Keywords: aluminum alloys, eutectic alloy, modified, microstructure, diffractogram.

Сведения об авторах: Умарова Татьяна Мухсиновна – д.т.н., Филиал МГУ имени Ломоносова в городе Душанбе, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Бохтар, 17,. Тел.: 227-31-48. E-mail: umarova04@mail.ru.

Джалолов Фаридун Наимович – студент 2 курса направления 04.03.02. естественно-научного факультета филиала МГУ имени Ломоносова в городе Душанбе, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Бохтар, 17, Тел.: 939393456. E-mail: faridun_1812@mail.ru.

УДК 551.736

ГЕОЛОГИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ УГОЛЬНОГО МЕСТОРОЖДЕНИЯ ФАН-ЯГНОБ

Пираков Г., Мирзоев Б., Факеров Г.М., Нёматзода Б.

ГНУ «Научно-исследовательский институт промышленности»

Филиал МГУ имени М. В. Ломоносова в г. Душанбе

Таджикский государственный педагогический университет им. С. Айни

Таджикский национальный университет

В данной статье рассматриваются вопросы изучения геологических характеристик участка №12 Фан-Ягнобского угольного месторождения с целью дальнейшей технологической переработки для получения других энергетических ресурсов.

Ключевые слова: Фан-Ягноб, ордовикская система, силурийская система, уголь, продуктивная часть, биотит, гранит, теплотворность.

Как известно, Таджикистан является горной страной, где 93% территории составляют горы, в недрах которых имеются огромные запасы минерального сырья. Поэтому одно из основных направлений развития промышленности Таджикистана напрямую зависит от результатов геологоразведочных работ и уточнения запасов полезных ископаемых, разработки новых технологий переработки руд.

Таджикскими геологами разведано более 400 месторождений, из них эксплуатируются более 100, из которых последнее время добывают более 100 видов минерального сырья. Однако, некоторые месторождения, в сырье которых остро нуждается промышленность, в частности каменный уголь из – за отсутствия не полного геологического изучения, разработанных и испытанных комплексных технологий, переработки не используются. В промышленности используются различные естественные и искусственные материалы, которые подвергаются тепловой обработке в первую очередь, теплоемкости и коэффициента теплопроводности, которые зависят от выбора технологических решений, конструкций установок и агрегатов, показатели энергопотребления, режимы эксплуатации.

Доля угля в топливном балансе Таджикистана в разные годы менялась в пределах от 10 до 60%. Основу энергетического потенциала Таджикистана в настоящее время составляет уголь. Достигнутые уровни добычи и потребления угля являются основой многих территориально-производственных комплексов Таджикистана, которые определяют специализацию этих комплексов по энергоемким производствам. Таджикистан располагает свыше 7 миллиардов тонн потенциальных угольных запасов, из которых более 320,3 млн. тонн составляют высококалорийные промышленные угли.

В различных районах Таджикистана известно более 30 месторождений углей, наиболее крупными из них являются месторождения Фан – Ягноб на севере Таджикистана. Геологические исследования этих сырьевых ресурсов являются актуальной задачей в плане дальнейшего использования данного вида сырья для химической промышленности Республики Таджикистана.

В геологическом строении угольное месторождение Фан-Ягноб относится к палеозойским, мезозойским и кайнозойским отложениям. Палеозойские отложения в пределах района раскиданы широко и обнажаются в краевых частях месторождения. Среди них выделяются верхнеордовикские, силурийские, девонские и каменноугольные.

Ордовикская система распространена вдоль южной и северной границ Фан-Ягнобского месторождения. Представлена она в разной степени

метаморфизованными терригенными породами аркозового, реже кварцевого состава, включающими подчиненное количество карбонатных и кремнистых пород. Неполная мощность ягнобской свиты меняется от 400 до 600 м [1-3].

Силурийская система характеризуется близкими между собой по литологическому составу зинахской, шингской и шурпазской свитами. Каждая из них содержит карбонатные породы, кварцито-песчаники и серицит-хлорит-кварцевые сланцы и отличается от других лишь количественными соотношениями этих пород.

Неполная мощность этих свит в месторождении в пределах 1200-1300 метров. В нижней части разреза месторождения отмечаются прослои доломитов, а в верхней части черные кремнистые породы. Общая мощность этой свиты достигает от 500 до 550 метров. Акбасайская свита развита на северном склоне Гиссарского хребта в районе к. Пете и на водоразделе рек Джижикрут и Марзич, она представлена кремнистыми породами с небольшим количеством карбонатных и редкокислых вулканитов.

Внизу месторождения обычно выделяется сероцветная пачка слоистых и плитчатой отдельностью яшм с прослоями карбонатных пород. Верхи свиты сложены пестроцветной пачкой ярко-зеленых, малиновых, бордовых, фиолетовых кремнистых пород яшм, кремнистых сланцев. Мощность этой свиты широко варьирует, достигая местами 450-500 метров.

К зеравшано-гиссарскому комплексу относятся Петинская и Яфчская интрузии гранитоидного состава, из них наиболее крупной является Петинская, которая представляет собой штокообразное тело, вытянутое в широтном направлении на 6,5 км при поперечных размерах от 0,5 до 1,5 км, имеющая резкие активные контакты с вмещающими породами. Петинская интрузия, в основном является средне и крупнозернистыми порфировидными биотитовыми гранитами и незначительно связанными с ними аплитавидными гранитами, аплитами и пегматитами. Продуктивная часть разреза юрских отложений (габирудская и джижикрутская свиты) содержат до 38-46 пластов и пропластков угля, из которых 29 имеют значительную площадь распространения свыше 1 м, мощностью на всей площади месторождения или на отдельных его участках обладают лишь 14 пластов: 6, 8, 9, 10, 11, 12^н, 12^с, 12^в, 13, 14^н, 14^в, 15^м, 15^в, 16.

В стратиграфическом разрезе продуктивной толщи отмечается два максимума угленасыщенности. Эти интервалы условно названы нижним и верхним угленосными горизонтами. Нижний угленосный горизонт приурочен к средней части угленосной свиты и содержит основные угольные пласты, определяющие промышленную ценность месторождения: 6, 8, 9, 10, 11, 12

пластов. Верхний угленосный горизонт более компактный, но содержащиеся в нем пласты имеют более низкую мощность, как правило, характеризуются сложным и невыдержанным строением.

Изменение угленосности по площади месторождения имеет также закономерный характер. Максимальная угленосность разреза отмечена в центральной части месторождения (Таблица 1).

Таблица 1. Основные параметры, характеризующие угленосность месторождения Фан-Ягноб

Часть месторождения	Суммарная мощность угольных пачек, пластов	Коэффициент угленосности, %
Западная	27-35	6-8
Центральная	до 67	9-11
Восточная	до 41	6

Кроме того, что Центральная часть, характеризуется наибольшей угленасыщенностью, угленакопление в её пределах имело и наиболее стабильный характер, основные пласты угля здесь хорошо выдерживаются почти на всей площади, имеют значительные мощности и чаще простое или не очень сложное строение. В северо-западном и восточном направлениях, т.е. к краевым частям месторождения, пласты несколько утоняются, расщепляются, строение их усложняется за счет появления прослоев пород.

Характер изменения промышленной угленосности, выраженный через средневзвешенную подсчетную (полезную) мощность основных угольных пластов наглядно иллюстрированы в таблице 2. Из данной таблицы наибольшей промышленной угленосностью обладает Раватский участок Центральной площади. На Западной и Восточной части месторождения промышленная угленосность значительно ниже. Уменьшение промышленной угленосности в Восточной части, в основном, обусловлено уменьшением их количества, или увеличением мощности остальных угольных пластов.

Таблица 2. Средняя мощность основных пластов на отдельных участках месторождения Фан-Ягноб

Индекс пласта	Западная часть	Центральная часть		Восточная площадь
		Раватский участок	Джижикрутский участок	
6	2,4	2,6	2,7	3,8
8	1,5	1,6	-	-

9	1,9	5,2	5,6	6,0
10	2,1	2,9	1,7	-
	-	1,5	0,9	-
11	3,2	6,0	5,9	5,0
12 ^H	2,0	-	-	-
12 ^C	-	1,8	2,1	-
12 ^B	-	-	-	-
13	1,5	6,3	5,5	4,3
14 ^H	1,1	2,4	3,4	2,8
14 ^B	1,0	-	-	-
15 ^H	1,6	-	-	-
15 ^B	1,4	-	-	2,8
16	-	1,9	2,1	3,2
16 ¹	-	1,7	-	-
16 ^a	-	1,4	1,2	1,7
Итого	19,7	35,3	31,1	29,6

Таким образом, район прилегающий к месторождению Фан-Ягноб располагает значительными запасами и ресурсами различных строительных материалов. Наибольшее распространение имеют месторождения строительного камня, т.к. более половины геологических образований района представлены известняками и доломитами, слагающими крупные массивы и кряжи. Большинство этих пород пригодны для производства бутового камня и щебня. Часть известняков можно использовать для приготовления воздушной извести.

Приведенные нами геологические характеристики угольного месторождения были подвергнуты физико-химическому анализу.

Таким образом, в результате проведения геологических исследований выявлено, что наличие крупных минерально-сырьевых ресурсов в сочетании с богатыми топливными и энергетическими ресурсами, открывает большие возможности для получения других полезных продуктов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пути промышленного использования ископаемых углей Зерафшанской долины и их технико-экономическая оценка / Н.М. Караев, З.А. Румянцев, З.И. Певзнер [и др.]. -Душанбе, 1963.

2. Улановский М.Л. К расчету теплоты сгорания твердого топлива / М.Л. Улановский, С.Д. Меньшикова // Углекислотный журнал. – 2001. - №5. - С. 12-14.
3. Контроль зольности угля / А.Г. Разводов, Ю.А. Шептунов [и др.] // Углекислотный журнал. - 2003. - №5-6. – С. 24-27.
4. Зерафшанский угленосный бассейн и его роль в формировании промышленного района Центрального Таджикистана / [М. Куканиев, Дж. Назаров, И.Т. Ходжахонов и др.] // Отчет НИИП центр. – Душанбе, 2006.

ХУСУСИЯТҲОИ ГЕОЛОГИИ КОНИ АНГИШТИ ФОН-ЯҒНОБ

Пираков Г., Мирзоев Б., Факлонов Г., Нозимзода В

Донишқадаи давлатии тадқиқотии саноат,

Филиали Донишгоҳи давлатии Москва ба номи М.В.Ломоносов дар ш.Душанбе

Донишгоҳи давлатии педагогии Тоҷикистон ба номи С. Айни

Донишгоҳи миллии Тоҷикистон

Дар мақолаи мазкур масъалаҳои меъёрҳои минералогӣ, хусусиятҳои геологикабати №12-уми кони ангишти Фон-Яғноб бо мақсади коркарди технологияи аз он гирифтани дигар маҳсулотҳо барои захираҳои энергетикӣ омӯхта шудааст.

Калимаҳои калидӣ: Фон-Яғноб, системаи ордовики, системаи силури, ангишт, қисми маҳсулот, биотит, хоросанг, арзиши гармидихи.

GEOLOGICAL CHARACTERISTICS OF COAL DEPOSIT OF FAN- YAGNOB

Pirakov G., Mirzoev B., Fakarov GM, Neumatzoda B.

Scientific Research State Institute of Industry,

Dushanbe branch of Lomonosov Moscow State University

Ayni Tajik State Pedagogical University

Tajik National University

In this article I consider the issues of studying the geological characteristics of section No. 12 of the Fan-Yagnob coal field with a view to further processing it for obtaining other energy resources.

Keywords: Fan Yagnob, Ordovician System, Silurian System, a coal productive part, stratigraphic, coal-bearing horizon, formation, biotite granite, calorific value.

Сведения об авторах. Г. Пираков – старший научный сотрудник ГНУ «Научно-исследовательский институт промышленности»;

Г.М. Факеров – аспирант кафедры экспериментальной физики Таджикского государственного педагогического университета им. С. Айни. Телефон: 988-83-68-98, 933-17-17-05. E-mail: faqaron_iet1004b@mail.ru;

Б. Мирзоев – кандидат химических наук, с.н.с. ФМГУ им. М.В. Ломоносов в г. Душанбе;

Б. Неъматзода - аспирант кафедры экологии Таджикского национального университета.

СИНТЕЗ И ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СПЛАВОВ СИСТЕМЫ Al-Mn

Сайфуллоев К.Н., Умарова Т. М.

Филиал МГУ имени М. В. Ломоносова в г. Душанбе

Были синтезированы сплавы системы Al-Mn эвтектического состава и интерметаллические соединения Al_4Mn и Al_6Mn , исследованы их микроструктуры, предложено простое теоретическое описание расчетов определения теплостойкости сплава эвтектического состава системы Al-Mn..

Ключевые слова: *алюминиевые сплавы, модифицирование, эвтектический сплав, дифрактограмма, микроструктура.*

Как известно, алюминий является конструкционным материалом, поэтому получение сплавов на его основе с улучшенными физико-химическими свойствами является важной задачей для современного материаловедения. Как известно, метод получения и чистота металла-основы играет важную роль в изучении физико-химических свойств сплавов. Отливки из алюминиевых сплавов можно получать всеми существующими методами литья с большим разнообразием свойств в пределах составов сплавов [1].

Сплавы системы Al-Mn являются термически неупрочняемыми сплавами, с содержанием марганца 1-1,6%, например сплав марки 3003, представляет значительный промышленный интерес. Марганец также широко используется в меньших количествах в качестве легирующей добавки в термически упрочняемых сплавах, таких как сплав марки 2024 с 0,3—0,9 % Mn, и в термически неупрочняемых сплавах и сплав 5182 с 0,20—0,50 % Mn. В целом можно отметить, что марганец повышает прочность деформируемых сплавов и когда он присутствует в виде нерастворимых интерметаллических соединений, пластичность обычно снижается. Другой важной чертой марганца в его влиянии на алюминий и алюминиевые сплавы является снижение склонности к межкристаллитной коррозии и коррозии под напряжением.

В системе Al - Mn марганец лишь незначительно снижает температуру затвердевания алюминия. Эвтектика образуется при 658°C и 1,9% Mn [2]. Предел растворимости марганца в α -твердом растворе составляет 1,8 % при эвтектической температуре. Интерметаллическая фаза, находящаяся в равновесии с алюминиевым твердым раствором, имеет состав, точно соответствующий формуле $MnAl_6$, и выделяется в виде первичной фазы из жидкого раствора, содержащего 1,9—4,1 % Mn. В растворах с более высокой

концентрацией марганца данная фаза образуется в результате перитектической реакции между $MnAl_4$ и жидкостью при 710 °С [3].

На рисунке 1 представлена диаграмма состояния системы Al-Mn.

Для синтеза и исследования физико-химических свойств сплавов использована нижеприведенная аппаратура и приборы:

- шахтная печь, (производство Индия, $T_{max}=1000^{\circ}C$, синтез сплавов);
- микроскоп NIKON 6872 (производство Индия, микроструктурный анализ);
- прибор KLY-ТЕК 6989 для определения теплофизических свойств.

Сплавы для исследования получали из алюминия А995 (ГОСТ 11069-74) и марганцевой лигатуры (10%) получали в открытой шахтной печи, шихтовка сплава проводилась с учетом угара металлов. Расчет шихты произведен по формуле:

$$\omega_x(\%) = \frac{A_{ат}(\%) \cdot M_x}{A_{ат}(\%) \cdot M_x + B_{ат}(\%) \cdot M_y}$$

Для сплава эвтектического состава $\omega(Mn)=1,9\%$, общий вес исследуемого образца составил 25 г. Из полученных сплавов в стальной изложнице отливали цилиндрические образцы диаметром 10 мм и длиной 60 мм.

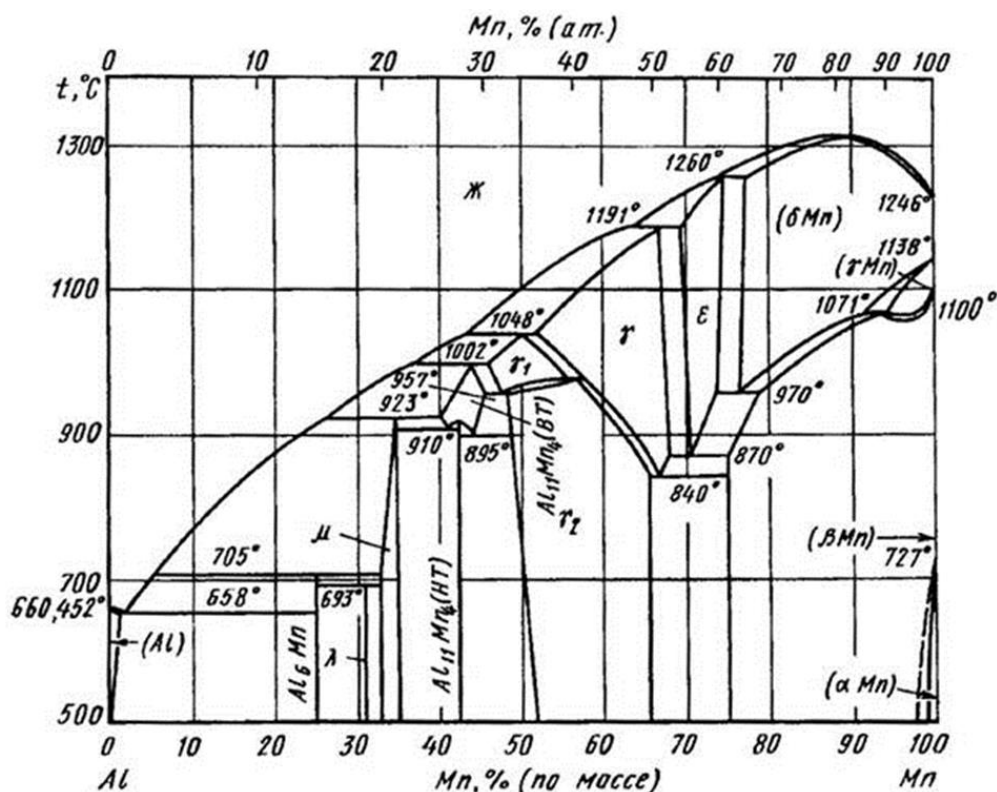


Рис.1. Диаграмма состояния системы Al-Mn [4].

Как известно, металлографические исследования позволяют наблюдать изменение микроструктуры в зависимости от состава. Микроструктуру сплавов исследовали при 200- кратном увеличении при фотографировании. Для выявления микроструктуры исследуемого сплава образцы подвергались травлению различными реактивами в зависимости от состава сплава и наличия присутствующей фазы. Так, например, для эвтектической фазы использовали реактив 50 (раствор 1г NaOH на 100 мл H₂O в течение 10 мин при температуре 50° С) [5]. В результате травления поверхность образца приобретает матовый оттенок с выраженной структурой, представленной на рисунке 2.

На фотографии микроструктуры интерметаллических соединений можно отчетливо видеть твердые фазы MnAl₄ и MnAl₆.

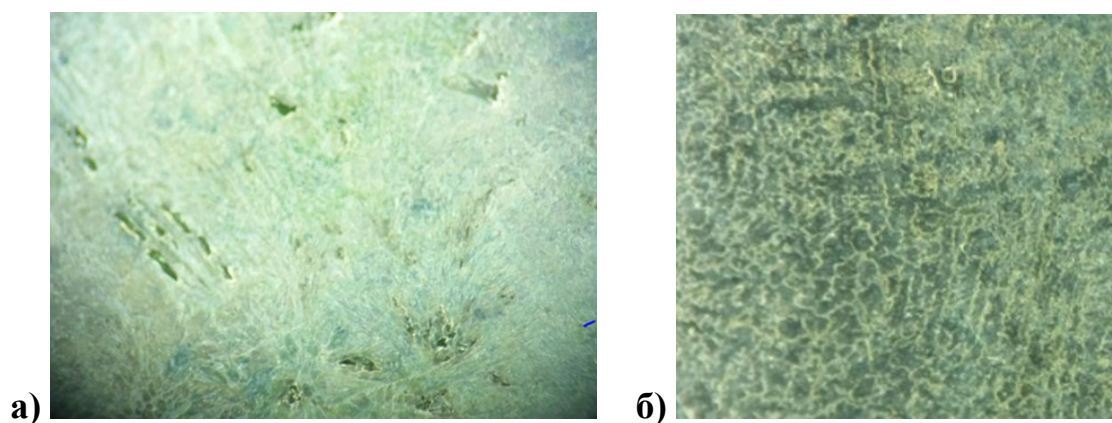


Рис. 2. Микроструктура интерметаллических соединений (x200).

а) Al₄Mn

б) Al₆Mn.

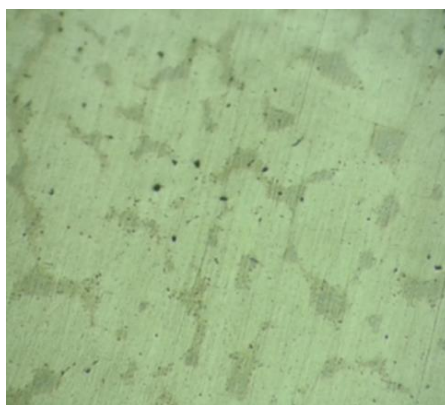


Рис. 3. Микроструктура сплава эвтектического состава системы Al-Mn (x200) до травления.

На рисунке 3 представлена микроструктура сплава системы алюминий-марганец эвтектического состава до травления, в котором заметно проявление зернистой структуры и по границам зерен расположена твердая фаза ИМС $MnAl_6$.

На рисунке 4 представлены фотографии микроструктуры сплава эвтектического состава системы Al-Mn до и после отжига.

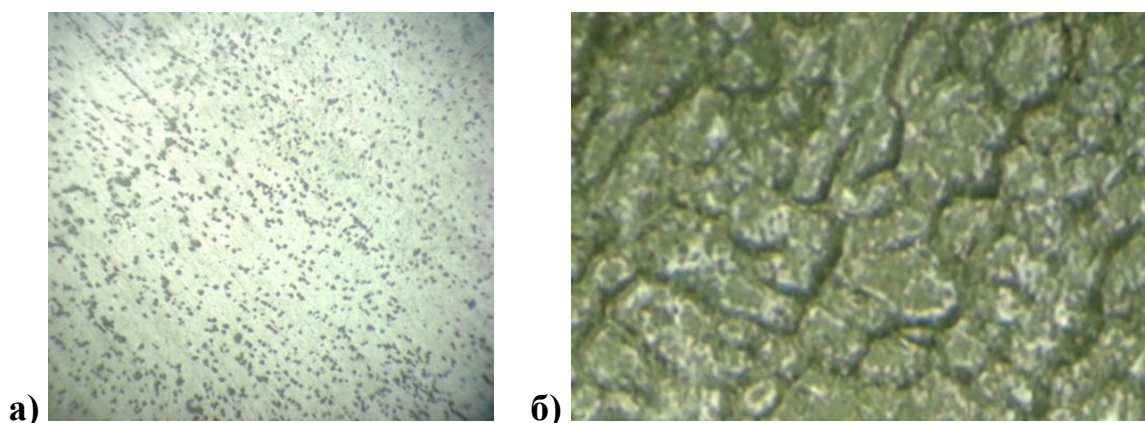


Рис.4. Микроструктура сплава эвтектического состава системы Al-Mn
а) до отжига; б) после отжига (x200).

Далее, с помощью прибора KLY-ТЕК 6989 была исследована теплоемкость синтезированных сплавов. Согласно уравнению теплового баланса:

$$Q_{\text{отд}} = Q_{\text{получ}} \quad (1)$$

где $Q_{\text{получ}} = Q_{\text{воды}} + Q_{\text{кол}}$ (2)

Количество теплоты, которое передается от нагретого образца исследуемого сплава до температуры воды калориметра определяли по формуле:

$$Q_{\text{отдан}} = Q_{\text{тело}} = C_T \cdot m_T \cdot (t - \Theta) \quad (3)$$

Количество теплоты, полученное водой калориметра от исследуемого образца сплава с температурой t_1 и после погружения образца исследуемого сплава до Θ :

$$Q_{\text{воды}} = C_v \cdot m_v \cdot (\Theta - t_1) \quad (4)$$

$$Q_{\text{кол}} = C_k \cdot m_k \cdot (\Theta - t_1) \quad (5)$$

В формуле 5 рассчитывается количество теплоты, полученное калориметром от образца сплава. Подставляя (5), (4) и (3) в (1) получим:

$$C_T \cdot m_T \cdot (t - \Theta) = C_v \cdot m_v \cdot (\Theta - t_1) + C_k \cdot m_k \cdot (\Theta - t_1) \quad (6)$$

Из формулы (6) можем найти удельную теплоемкость сплава:

$$C_T = \frac{C_B \cdot m_B + C_K \cdot m_K}{(t - \Theta) \cdot m_T} \cdot (\Theta - t_1) \quad (7)$$

В результате выполненных расчетов получены результаты, представленные в таблице 1.

Таблица 1. Теплофизические свойства сплава системы Al-Mn
эвтектического состава

№	m_B г	T °C	t_1 °C	Θ °C	C $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot K}$	$\langle C \rangle$ $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot K}$	ΔC $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot K}$	$\langle \Delta C \rangle$ $\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot K}$	δ %
1	50	91	25	27	1060	918,3	141,7	94,4	6,87
2	50	92	26,4	28,3	852		66,3		
3	50	92	29,2	31	843		75,3		

В результате проведенных исследований получен следующий результат:

- синтезированы три сплава системы Al-Mn, сплав эвтектического состава и интерметаллические соединения Al_4Mn и Al_6Mn ;
- изучен микроструктурный анализ вышеназванных сплавов;
- изучены теплофизические свойства синтезированных сплавов системы Al-Mn, определены их теплоемкости с помощью уравнения теплового баланса. Показано, что в отличие от чистого алюминия, теплоёмкость которого равна $903,7 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot K}$ (при комнатной температуре), теплоёмкость синтезированного сплава эвтектического состава Al-Mn(1,9%) незначительно увеличивается до значения $918,3 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot K}$.

Литература

1. Дж.Е.Хэтч, И.Н.Фриндландер. Алюминий: Свойства и физическое металловедение. Справочник. М.: "Металлургия". – 2005. – 365с.
2. L.F. Mondolfo, Manganese in Aluminum Alloys, the Manganese Center, 1978. – Р. 4.
3. L.F. Mondolfo, Manganese in Aluminum Alloys, the Manganese Center, 1978. – Р. 326;
4. Диаграммы состояния двойных металлических систем. М: Под общей редакцией академика РАН Н.П. Лякишева. – Т. 1. – 1996. – С.170.
5. Коваленко В.С. Металлографические реактивы – справочник. Москва: Металлургия, 1981. – 110 с.

SYNTHESIS AND PHYSICO-CHEMICAL PROPERTIES OF Al-Mn SYSTEMS' ALLOYS

Сайфуллоев К.Н., Умарова Т. М.

Dushanbe branch of Lomonosov Moscow State University

The alloys of the eutectic composition of the Al-Mn system and the intermetallic compounds Al_4Mn and Al_6Mn were synthesized, their microstructures were investigated, and a simple theoretical description of the calculation of the heat capacity of the Al-Mn alloy (1.9% by weight) was proposed.

Key words: aluminum alloys, modification, eutectic alloy, diffractogram, microstructure.

СИНТЕЗ ВА ХОСИЯТҲОИ ФИЗИКӢ-ХИМИЯВИИ ХУЛАҲОИ СИСТЕМАИ Al-Mn

Сайфуллоев К.Н., Умарова Т. М.

Филиали Донишгоҳи давлатии Москва ба номи М.В.Ломоносов дар ш.Душанбе

Хулаҳои алюминии эвтектикии таркиби системаи Al-Mn ва пайвастагиҳои хулаҳои Al_4Mn ва Al_6Mn тасниф карда шудаанд, микроструктураҳои онҳо таҳқиқ карда шуданд ва тавсифи оддии ҳисоби гармиғунҷоиши алюминий (1,9% вазн дорад) пешниҳод карда шудааст.

Калимаҳои калидӣ: хулаи алюминий, тағирдиҳӣ, алюминитикӣ, дифрактограмма, микрография.

Сведения об авторах. Умарова Татьяна Мухсиновна – д.т.н., Филиал МГУ имени Ломоносова в городе Душанбе, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Бохтар, 17, . Тел.: 227-31-48. E-mail: umarova04@mail.ru

Сайфуллоев Комрон – студент 2 курса направления 04.03.02 естественнонаучного факультета филиала МГУ имени Ломоносова в городе Душанбе, Республика Таджикистан, г. Душанбе, ул. Бохтар, 17, Тел.: 939393456. E-mail: komron-9-7@mail.ru.

УДК 551.352, 551.736

МЕДЕНОСНОСТЬ ПЕРМО-ТРИАСОВЫХ ОТЛОЖЕНИЙ ПРИГРАНИЧНЫХ ТЕРРИТОРИЙ ТАДЖИКИСТАНА, КЫРГЫЗСТАНА И КИТАЯ (ЗААЛАЙСКИЙ ХРЕБЕТ)

Салихов Ф.С., Бахтдаватов Р.Д., Бобоев С.Н.

Филиал МГУ имени М. В. Ломоносова в г. Душанбе

**Главное управление геологии при Правительстве Республики
Таджикистан**

Приведена краткая характеристика известных медепроявлений и реконструированы условия образования рудовмещающих красноцветных толщ пермо-триасовых отложений приграничных территорий Таджикистана, Кыргызстана и Китая (Заалайский хребет). Выявлены главные закономерности размещения медного оруденения в пределах указанных территорий. Указаны потенциально продуктивные стратиграфические уровни и рекомендованы перспективные площади.

Ключевые слова: пермо-триасовые отложения – Дарваз-Заалайская зона – вулканогенно-осадочные отложения – меденосность.

Пермо-триасовые Заалайского хребта отложения прослеживаются от верховий ледника Кызылсу (правый борт долины р. Муксу) до района пер. Кызыларт на востоке образуя почти непрерывную полосу. Общая протяженность этих выходов достигает 115 – 120 км (рис.1). К сожалению, изученность этого отрезка Дарваз-Заалайской зоны, в сравнении с другими районами, к настоящему времени недостаточна. Имеются лишь отдельные публикации о результатах государственной геологической съемки масштаба 1:200 000 [1,2,3], а также более ранние работы сотрудников Таджикско-Памирской экспедиции АН СССР [4,5]. Специальных работ по изучению меденосности пермо-триасового комплекса здесь не проводилось, хотя еще в 30-х годах красноцветные отложения Дарваза – Заалай, соответствующие иоллихарской серии, описывались как «медистые» [6]. Из других косвенных, но заслуживающих внимания сведений, следует упомянуть указания на добычу меди в окрестностях пер. Кызыларт еще в конце прошлого века [7]. Нелишне при этом вспомнить, что и на Юго-Западном Дарвазе в местах скопления стратиформных медных руд найдены остатки древних горно-металлургических промыслов (рр. Обиравноу, Обимисингарон).

В сравнении с Дарвазом пермские отложения Заалайского хребта отличаются сокращёнными мощностями. Особенно хорошо это видно на примере меденосной иоллихарской серии: её мощность достигает минимальных значений в верховьях долины р. Алтындара – 370 м. Затем она постепенно увеличивается, составляя в бассейне р. Сауксай в среднем около 400 м, а в районе ледника Атджайлау возрастает до 500 м. К западу от Алтындары наблюдается аналогичная тенденция: в верховьях ледника Кызылсу, по данным А.К. Кафарского и И.В. Пыжьянова [2], полная мощность иоллихарской серии превышает 800 м. Таким образом, участок наиболее сокращенных разрезов этой серии приходится на западную половину Заалайского хребта, точнее – на правобережье р. Сауксай и верховья р. Алтындара. В перечисленных пунктах иоллихарские отложения подстилаются

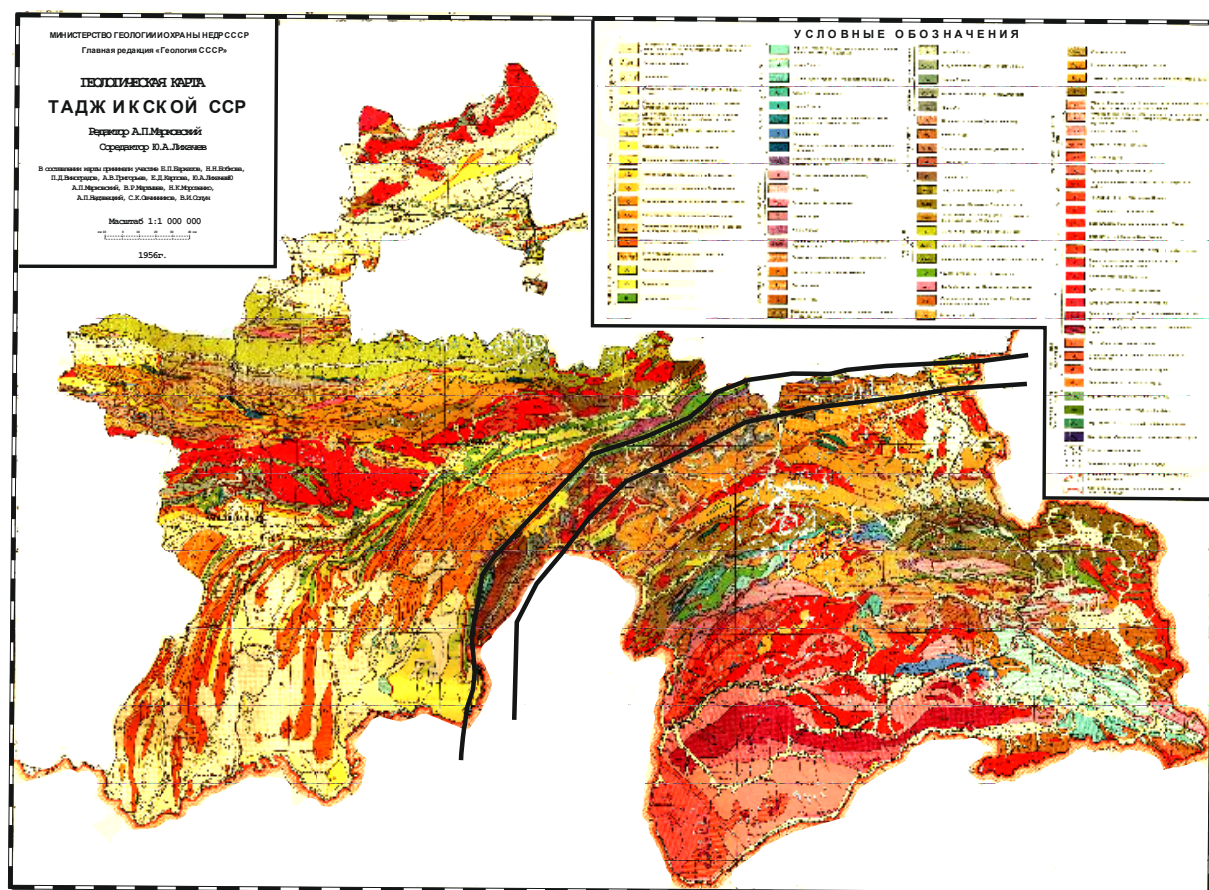
Гундаринской свитой, или же имеют тектонические взаимоотношения с более древними по возрасту пермскими образованиями (по свидетельству И.В. Пыжьянова, И.Г. Власова, [8], в бассейне р. Сауксай иоллихарская серия залегает на сафетдаронской свите, что не подтверждается нашими наблюдениями).

Большую трудность в заалайских разрезах представляет невозможность, на основе визуальных признаков, выделения внутри иоллихарской серии аналогов дарвазских свит. Поэтому нами условно пока принимается соответствие этих разрезов главным образом вальвалякской свите (рис.2). Вместе с тем, нельзя говорить о полном отсутствии каких бы то ни было закономерностей в строении описываемых разрезов. Напротив, в большинстве случаев приходится иметь дело с трёхчастевым (правда, не совсем отчётливым) строением серии: в нижней части преобладают грубообломочные отложения (конгломераты, гравелиты), в средней – преимущественно песчаники, а в верхней последние переслаиваются с алевролитами и, реже, аргиллитами. Сравнительно нечасто отмечаемые туфы и туффиты тяготеют к нижней половине серии. Как видим, основные тенденции в строении разрезов иоллихарских отложений здесь все же сохраняются. Не менее ощутимые отклонения наблюдаются в составе и внешнем облике пород этой серии. На смену преобладающей на Дарвазе красноцветности отложений здесь приходят розово-серые, серые цвета и лишь эпизодически проявляется буроватая окраска пород (справедливости ради заметим, что это в меньшей степени касается разрезов у ледников Аtdжайлау и Кызылсу). В соответствии с этими изменениями находится и петрографический состав отложений. Наряду с уменьшением содержания синхронного пирокластического материала, отмечается сокращение доли железосодержащих обломков вулканитов в вулканотерригенных песчаниках и гравелитах, а также возрастание объема «чужеродной» кластической примеси, представленной гранитоидами, зеленосланцевыми породами, пропилитами, эпидозитами и в различной степени мраморизованными известняками. Все отмеченное, по-прежнему, менее характерно для относительно мощных разрезов Аtdжайлау и Кызылсу. Стратиграфически выше иоллихарской серии в пределах Заалайского хребта залегают, как правило, отложения кызылсуйской свиты триаса. Граница этих отложений носит следы глубокого и неравномерного по площади размыва, что в ряде случаев приводит к залеганию триаса на различных горизонтах пермского разреза. Это хорошо видно, например, в устье р. Мынтеке (бассейн р. Алтындара), где под поверхностью несогласия из иоллихарской серии «выпадает» более чем 150-метровая по мощности пачка песчаников и

алевролитов, представленная в ближайшем разрезе серии по р. Кашкасу (правый приток р. Мынтеке). Судя по всему, наиболее полным в стратиграфическом отношении является разрез иоллихарской серии в верховьях р. Чакманташ (бассейн р. Сауксай). Здесь в кровле серии обнажается 90-метровая пачка переслаивания преимущественно серых мелкозернистых песчаников, алевролитов, глинисто-карбонатных пород и аргиллитов, отсутствующая в других пунктах. Примечательной особенностью этой пачки являются прослой (0,1 – 0,3 м) черных углисто-глинистых пород, насыщенных органическим веществом. Отчетливая ритмичность разреза, наличие специфических известковистых конкреций, а также салатно-серых пластичных глин, обычно встречаемых на уровне меденосных горизонтов – все это дает основание считать описываемые отложения близкими к хамтарминской свите Юго-Западного Дарваза. Однако, с поверхности никаких признаков меденосности этой пачки не обнаружено. В других местах этот потенциально продуктивный (исходящий из дарвазского стратотипа серии) уровень отсутствует, или вследствие предтриасового размыва, или в силу того, что для накопления свойственных ему отложений не было подходящих условий.

В то же время прямые признаки меденосности иоллихарских отложений обнаружены нами на более низком стратиграфическом уровне вблизи восточного окончания полосы выходов пермских отложений Заалая, в левом борту устьевой части ледника Аtdжайлау-II. Здесь описан неполный разрез иоллихарской серии, находящийся в опрокинутом залегании и в сложных тектонических взаимоотношениях с подстилающими карбонатными отложениями себисурхской (по Пыжьянову, Власову, [8]) свиты нижней перми. В верхней трети разреза (ориентировочно в 150 м от предполагаемой кровли серам), внутри пачки переслаивания красновато-серых вулканотерригенных песчаников, гравелитов и алевролитов, обнаружен полуметровый прослой зеленовато-серых мелко-, среднезернистых туфопесчаников (примесь риодацитов пирокластики) с видимой медной минерализацией. Микроскопическое изучение образцов показало, что рудные минералы распределены главным образом в глинисто-хлоритовом цементе породы и представлены халькозином (до 3% на шлиф), борнитом (менее 1%), малахитом (до 1%) и халькопиритом (0,5%). Характер оруденения тонковкрапленный с послойным обогащением различных участков меденосного горизонта. Размер отдельных рудных выделений не превышает 0,1 – 0,2 мм. По данным химического анализа валовое содержание меди в точечных пробах составляет 0,23 – 0,3%. Признаки незначительной малахитизации обнаруживаются и в прикровлевых слоях серии, внутри серых полимиктовых песчаников,

незначительно обогащенных углистым веществом. Наряду с описанной выше сингенетической медной минерализацией, отмечена наложенная медно-колчеданная (халькопирит), контролируемая зонами дробления в соприкасающихся с иоллихарской серией карбонатных породах себисурхской свиты. Признаки меденосности триаса зафиксированы пока в единственном разрезе Заалайского хребта, что, впрочем, может быть объяснено недостаточной изученностью отложений этого возраста. В левом борту р. Кашкасу (бассейн р. Алтындара), в нижней части разреза кызылсуйской свиты, примерно в 150 – 200 м от ее подошвы, выделена пачка (около 20 м) переслаивания кремнекислых туфов, кластолав андезитов, вулканотерригенных песчаников и аргиллитов. В средней части пачки залегают зеленовато-серые псаммитовые ортотуффиты (пирокластический материал по составу отвечает андезитам и дацитам), содержащие ощутимую углистую примесь и примазки малахита (общая мощность 0,6 м). Содержание меди в них, по результатам



точечного опробования, колеблется от сотых до десятых долей процента. В

Рис.1 Дарваз-Заалайская зона Северного Памира на геологической карте масштаба 1:200000.

обломках осыпи, ниже по склону, собраны также вулканотерригенные (с незначительно пирокластической примесью) песчаники с остатками

углефицированной растительности и видимой халькозин-малахитовой минерализацией (содержание меди в них изменяется от 0,43 до 0,83%).

Приведенными данными пока ограничиваются сведения о меденосности пермо-триасового комплекса на территории Заалайского хребта. На имеющихся примерах, однако, прослеживаются следующие тенденции. В отношении меденосности иоллихарской серии можно высказать предположение, что потенциально рудоносными являются такие разрезы, которые имеют наибольшее сходство в строении и составе с ее стратотипом на Юго-Западном Дарвазе. В данном случае является разрез серии в Атджайлау, и, возможно, в верховьях ледника Кызылсу. Однако, в отношении последнего собственными сведениями мы пока не располагаем, а опираемся на уже упоминавшиеся данные А.Х. Кафарского и И.В. Пыжьянова [2]. Что же касается триасовых отложений, то, как и на Дарвазе, в Заалае медное оруденение приурочено к нижней части кызылсуйской свиты, но, как и в первом случае, оно не является повсеместным. Характер этой минерализации и, вероятно, генетический тип одинаковы в обоих случаях и, судя по всему, близки к таковым в иоллихарской серии. Однако, учитывая спорадическую встречаемость медных руд в триасовых отложениях и фрагментарность изучения последних, выводить на этом основании какие-либо общие закономерности преждевременно. Весьма примечательным является и факт обнаружения Н.А. Беляевским [9] в бассейне р. Койдусун (КНР, хр. Куньлунь), в аналогах иоллихарской серии, представленных туфами основного состава, восьми крупных линз с колчеданной минерализацией (халькопирит, пирротин, пирит). Достойными внимания, с этой точки зрения, оказываются и сведения о медной минерализации средне-верхнетриасовых образований в зоне Сурхоб Афганистана [10].

Литература

1. Стажило-Алексеев К.Ф. и др. Геологическое строение северной части листа I-43-VII(отчет Балянд-Киикской партии за 1964 год). ТГФ, Душанбе, 1965.
2. Кафарский А.Х., Пыжьянов И.В. К вопросу о расчленении «мынтекинской» свиты Северного Памира. В кн. «Материалы по геологии Памира», вып. 1. Душанбе, 1963.
3. Соловьева М.Н., Казьмин Ю.Б., Козлов В.В. Геологическое строение и стратиграфия палеозойских отложений Заалайского хребта и Северного Памира. «Изв. АН СССР, сер. геол.», №2, 1962.
4. Ренгартен В.П. Заалайский хребет. В кн. «Тадж. компл. Экпед.» 1932 г., вып. II, Л., 1934.
5. Шабалкин М.И. Хребет Зулумарт (краткий геологический очерк). В кн. «Таджикско-Памирская экспед. 1935 г.» М., 1937.
6. Дуткевич Г.А., Хабаков А.В. Пермские отложения Восточного Памира и палеогеография верхнего палеозоя Центральной Азии. Тр. Тадж. комплекс. экспед. 1932 г. Л., 1934.
7. Бедряга. Рекогносцировка путей: 1)Таш-Курган – Сарез, 2) Маркансу – Кашгар и 3) Кашгар – Гез – Сары-Кол – Рангкуль. В кн. «Сборник географ., топограф. и статист. материалов по Азии», вып. 56. Спб, 1884.
8. Пыжьянов И.В., ВЛАСОВ Н.Г. Новые данные по корреляции разрезов перми Северного Памира. «Докл. АН СССР», т. 195, №1, 1970.
9. Беляевский Н.А. Геология Юго-Западной части Восточного Туркестана (диссертация на соискание уч. степени доктора геол.-минералог. наук). ВСГИ, Л., 1959.
10. Геология и полезные ископаемые Афганистана. М., 1980.

МИСНОКИИ ТАҲШИНИҲОИ ПЕРМ ВА ТРИАСИ ҲУДУДҲОИ НАЗДИСАРҲАДИИ ТОҶИКИСТОН, ҚИРҒИЗИСТОН ВА ЧИН (СИЛСИЛАКУҲИ ПАСИОЛОЙ)

Салихов Ф.С., Бахдодпараст РД, Бобоев С.

**Филиали Донишгоҳи давлатии Москва ба номи М.В.Ломоносов дар ш.Душанбе
Департаменти геологияи назди Ҳукумати Ҷумҳурии Тоҷикистон**

Тавсифи мухтасари конҳои мавҷудаи мис дар ҳудудҳои наздисарҳадии Тоҷикистон, Қирғизистон ва Чин (силсилакуҳи Пасиолой) ва таҷдиди шароити пайдоиши таҳшиниҳои мисдори замони перм ва триас оварда шудааст. Қонуниятҳои ҷойгиршавии маъданҳои мисдор

дар мавзеҳои зикршуда ошкор гардидааст. Маҳсулнокии қабатҳои стратиграфӣ нишон дода шудааст ва майдонҳои пешомад тавсия шудаанд.

Калимаҳои калидӣ: таҳшиниҳои перм ва триас – минтақаи Дарвозу Пасиолой – чинсҳои вулкони-таҳшинӣ – миснокӣ.

COOPER-BEARING PERMIAN-TRIASSIC SEDIMENTS OF BORDER AREAS OF TAJIKISTAN, KYRGYZSTAN AND CHINA (ZAALAY RANGE)

Salikhov F.S., Bahdavlatov R.D., Boboev S.N.

Dushanbe branch of Lomonosov Moscow State University

Department of Geology under the Government of the Republic of Tajikistan

Brief description of the known cooper field and reconstructed conditions of formation of ore-bearing red beds in strata of Permian-Triassic sediments of border areas of Tajikistan, Kyrgyzstan and China (Zaalay range). Identified the main patterns of copper mineralization within the specified territories. Indicated potentially productive stratigraphic levels and recommended promising areas.

Keywords: Permian-Triassic deposits of the Darvaz – Zaalai zone -volcanogenic-sedimentary deposits – cooperbearing.

Сведения об авторах. Салихов Фарид Салохиддинович, кандидат геолого-минералогических наук, заведующий лабораторией геологии филиала Московского государственного университета им.М.В.Ломоносова в г. Душанбе. Тел. (992) 918-61-01-62, ffaarriidd@mail.ru.

Бахтдавлатов Рахмонбек Давлатбекович, первый заместитель начальника Главного управления геологии Республики Таджикистан, главный геолог. Тел.(992) 93-55-51-201, rdavlatbekov@mail.ru.

Бобоев Собир Нуруллоевич, начальник геологического отдела Главного управления геологии Республики Таджикистан. Тел. (992) 908-88-91-08, sabir_boboev@mail.ru.

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

В научном журнале «Вестник Филиала Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе» печатаются статьи, содержащие результаты научных исследований по естественным, гуманитарным и экономическим наукам. При направлении статьи в редколлегию авторам необходимо соблюдать следующие правила: размер статьи не должен превышать 10 страниц компьютерного текста, включая текст, таблицы, библиографию, рисунки и тексты аннотаций на таджикском, русском и английском языках. Статья должна быть подготовлена в системе Microsoft Word, при этом одновременно с распечаткой статьи в 2-х экземплярах сдаются также соответствующие файлы (для каждой статьи на отдельном диске). Рукопись должна быть отпечатана на компьютере (шрифт Times New Roman 14, формат А4, интервал 1,5, поля: верхнее – 3 см, нижнее – 2,5 см, левое – 3 см, правое – 2см;). Все листы статьи должны быть пронумерованы.

Текст статьи должен быть изложен кратко, тщательно отредактирован и подписан всеми авторами с указанием их фамилий, имен и отчеств, номера телефонов. Каждый экземпляр должен содержать: текст статьи, список литературы, тексты резюме на русском, таджикском и английском языках. В каждом резюме после заголовка статьи приводится название учреждения (-ий), в котором (-ых) выполнена данная работа. После каждого резюме отдельной строкой перечисляются ключевые слова на этих языках.

В верхнем правом углу первой страницы рукописи указывается раздел науки, которому соответствует статья, строкой ниже в левом углу страницы указывается индекс статьи по универсальной десятичной классификации (УДК). В центре следующей строки – инициалы и фамилия автора (-ов). Ниже приводится название статьи, затем указывается название организации. Ниже – краткая аннотация (на языке, на котором написана статья) с указанием конкретных результатов работы и вытекающих из них выводов, а также ключевые слова, наиболее полно отражающие область исследования и полученные в работе результаты (до 10 слов) через тире и адрес для корреспонденции (почтовый и электронный). Далее через строку следует основной текст. Сразу после текста статьи приводится список литературы (не более 10 названий) под заголовком «**Литература**» в порядке упоминания, тексты аннотаций и ключевые слова (например, на таджикском и английском языках, если статья написана на русском языке). Ссылки на цитируемую литературу даются в квадратных скобках, например [1].

Список литературы оформляется следующим образом: для книг – фамилия и инициалы автора (-ов), полное название книги, место издания,

издательство, год издания, том или выпуск, общее количество страниц. Для периодических изданий – фамилия и инициалы автора (-ов), название статьи, год издания, том, номер, первая и последняя страницы статьи.

Формулы и символы должны быть напечатаны на компьютере в одном стиле. Написание математических формул в виде рисунков не допускается. Следует избегать громоздких обозначений. Занумерованные формулы пишутся с красной строки, номер формулы в круглых скобках ставится у правого края. Нумеруются лишь те формулы, на которые имеются ссылки.

Сокращения должны быть расшифрованы, за исключением общепринятых.

В десятичных дробях после целой части числа ставится точка.

При упоминании в тексте иностранных фамилий в скобках необходимо давать их оригинальное написание.

Первое упоминание в статье названия вида животного или растения приводится по-русски и по латыни.

В тексте необходимо дать ссылки на все приводимые таблицы, рисунки и фотографии.

Научные статьи, представленные в редакцию журнала, должны иметь направление учреждения, в котором выполнялась данная работа, и экспертное заключение о возможности опубликования. При выполнении работы в нескольких учреждениях представляются направления из каждого учреждения. К статье должна быть приложена заверенная рецензия специалиста.

Редколлегия оставляет за собой право производить сокращения и редакционные изменения статьи. Статьи, не отвечающие настоящим правилам, редколлегией не принимаются.

ПОРЯДОК РЕЦЕНЗИРОВАНИЯ НАУЧНЫХ СТАТЕЙ, ПРЕДСТАВЛЯЕМЫХ В ЖУРНАЛ «ВЕСТНИК ФИЛИАЛА МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА В ГОРОДЕ ДУШАНБЕ»

Статьи, поступающие в редакцию, проходят предварительную экспертизу (проводится членами редколлегии – специалистами по соответствующей отрасли науки) и принимаются в установленном порядке. Требования к оформлению оригинала статей приводятся в каждом номере журнала.

Если рукопись принята, то редакция сообщает автору замечания по содержанию и оформлению статьи, которые необходимо устранить до передачи текста на рецензирование.

Затем статьи рецензируются в обязательном порядке членами редколлегии журнала или экспертами соответствующей специальности (кандидатами и докторами наук).

Рецензия должна содержать обоснованное перечисление качеств статьи, в том числе научную новизну проблемы, её актуальность, фактологическую и историческую ценность, точность цитирования, стиль изложения, использование современных источников, а также мотивированное перечисление её недостатков. В заключении дается общая оценка статьи и рекомендации для редколлегии – опубликовать статью, опубликовать её после доработки, направить на дополнительную рецензию специалисту по определенной тематике или отклонить. Объем рецензии - не менее одной страницы текста. Статья, принятая к публикации, но нуждающаяся в доработке, направляется авторам с замечаниями рецензента и редактора. Авторы должны внести все необходимые исправления в окончательный вариант рукописи и вернуть в редакцию исправленный текст, а также его идентичный электронный вариант вместе с первоначальным вариантом рукописи. После доработки статья повторно рецензируется, и редколлегия принимает решение о ее публикации. Статья считается принятой к публикации при наличии положительной рецензии и если её поддержали члены редколлегии. Порядок и очередность публикации статьи определяется в зависимости от даты поступления её окончательного варианта. Рецензирование рукописи осуществляется конфиденциально. Разглашение конфиденциальных деталей рецензирования рукописи нарушает права автора. Рецензентам не разрешается снимать копии статей для своих нужд. Рецензенты, а также члены редколлегии не имеют права использовать в собственных интересах информацию, содержащуюся в рукописи, до её опубликования.

Ответственный редактор: Шукуров Б.У.
Технический редактор: Рахмет-Заде Т.Н.

Мухаррири масъул: Шукуров Б.У.
Мухаррири техникӣ: Рахмет-Заде Т.Н.

Филиал МГУ имени М.В. Ломоносова, 734003, г. Душанбе, ул. Бохтар, 35/1, тел.: +992 (37) 221-99-41, 221-99-04, E-mail: info@msu.tj, сайт: <http://www.msu.tj>

Филиали ДДМ ба номи М.В. Ломоносов, 734003, ш. Душанбе, кӯч. Бохтар, 35/1, тел.: +992 (37) 221-99-41, 221-99-04, E-mail: info@msu.tj, сайт: <http://www.msu.tj>

Подписано в печать 15.01.2018г.
Заказ 61. Тираж 100 экз.
Отпечатано в издательско-типографическом секторе Филиала МГУ
имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе
г. Душанбе, ул. Бохтар, 35/1