

Граф взаимной строгой ортогональности Биркгофа-Джеймса алгебры $\mathbb{B}(H)$

Научный руководитель – Гутерман Александр Эмилевич

Жилина Светлана Александровна

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра высшей алгебры, Москва, Россия
E-mail: zhilina0sveta@gmail.com

Ортогональность Биркгофа-Джеймса – естественное продолжение понятия ортогональности в гильбертовом пространстве на произвольное нормированное пространство X над полем $\mathbb{F}$. Она определяется следующим образом ([6]):

Элемент $x \in X$ ортогонален в смысле Биркгофа-Джеймса элементу $y \in X$, если $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ для всех $\lambda \in \mathbb{F}$. Обозначение: $x \perp_{BJ} y$.

Понятие строгой ортогональности Биркгофа-Джеймса для произвольной C^* -алгебры $\mathcal{A}$ было введено в работе [2]. Она учитывает не только линейную, но и алгебраическую структуру $\mathcal{A}$.

Элемент $a \in \mathcal{A}$ строго ортогонален в смысле Биркгофа-Джеймса элементу $b \in \mathcal{A}$, если $\|a + bc\| \geq \|a\|$ для всех $c \in \mathcal{A}$. Обозначение: $a \perp_{BJ}^s b$.

В работах [2 - 4] изучены различные свойства этих ортогональностей. В частности, как показано в [4], строгая ортогональность Биркгофа-Джеймса симметрична только при $\mathcal{A} \cong \mathbb{C}$. Таким образом, имеет смысл ввести следующее определение:

Элементы $a, b \in \mathcal{A}$ взаимно строго ортогональны в смысле Биркгофа-Джеймса, если $a \perp_{BJ}^s b$ and $b \perp_{BJ}^s a$. Обозначение: $a \perp\!\!\!\perp_{BJ}^s b$.

Понятие графа ортогональности ассоциативной алгебры было впервые введено в работе [5]. Ниже приведено определение графа ортогональности произвольной C^* -алгебры $\mathcal{A}$, порождённого отношением $\perp\!\!\!\perp_{BJ}^s$.

Графом $\Gamma(\mathcal{A})$ взаимной строгой ортогональности Биркгофа-Джеймса называют граф, множество вершин которого – $V(\Gamma(\mathcal{A})) = \{[a] = \mathbb{C}^*a \mid a \in \mathcal{A} \setminus \{0\}\}$, причём вершины $[a], [b] \in V(\Gamma(\mathcal{A}))$ соединены ребром, если и только если $a \perp\!\!\!\perp_{BJ}^s b$. Мы отождествляем вершины с их представителями, то есть вместо $[a]$ пишем a .

Можно проверить, что $\Gamma(\mathcal{A})$ не содержит петель, а любой обратимый справа элемент является изолированной вершиной. Пусть $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathcal{A})$ – множество ненулевых необратимых справа элементов $\mathcal{A}$. Обозначим за $\Gamma_{\mathcal{S}}(\mathcal{A})$ подграф $\Gamma(\mathcal{A})$ на множестве вершин $\mathcal{S}$.

Целью данной работы является изучение компонент связности $\Gamma(\mathbb{B}(H))$, где $\mathbb{B}(H)$ – алгебра непрерывных линейных операторов, действующих на комплексном гильбертовом пространстве H . Основной результат представлен в следующей теореме.

Теорема 1. Пусть $2 \leq \dim H \leq \infty$.

- 1) Изолированные вершины в $\Gamma(\mathbb{B}(H))$ – это в точности обратимые справа операторы.
- 2) Если $\dim H = 2$, то $\Gamma_{\mathcal{S}}(\mathbb{B}(H))$ несвязен, а множества вершин его компонент связности принимают вид

$$\mathcal{S}_x = \{A \in \mathbb{B}(H) : \text{Im } A = \text{span } \{x\} \text{ или } \text{Im } A = \text{span } \{x\}^{\perp}\}$$

для ненулевых $x \in H$. Диаметр каждой компоненты равен 2.

- 3) Если $\dim H = 3$, то $\Gamma_{\mathcal{S}}(\mathbb{B}(H))$ связан, и его диаметр равен 4.
- 4) Если $4 \leq \dim H \leq \infty$, то $\Gamma_{\mathcal{S}}(\mathbb{B}(H))$ связан, и его диаметр равен 3.

В доказательстве теоремы используется критерий строгой ортогональности элементов $\mathbb{B}(H)$, см. [2, предложение 2.8].

Доклад основан на работе [1].

Источники и литература

- 1) Lj. Arambašić, A. E. Guterman, B. Kuzma, R. Rajić, S. A. Zhilina, *Orthograph related to mutual strong Birkhoff–James orthogonality in C^* -algebras*, Preprint.
- 2) Lj. Arambašić, R. Rajić, *A strong version of the Birkhoff–James orthogonality in Hilbert C^* -modules*, Ann. Funct. Anal. **5**, 1 (2014), 109–120.
- 3) Lj. Arambašić and R. Rajić, *On three concepts of orthogonality in Hilbert C^* -modules*, Linear Multilinear A. **63**, 7 (2015), 1485–1500.
- 4) Lj. Arambašić, R. Rajić, *On symmetry of the (strong) Birkhoff–James orthogonality in Hilbert C^* -modules*, Ann. Funct. Anal. **7**, 1 (2016), 17–23.
- 5) Б.Р. Бахадлы, А.Э. Гутерман, О.В. Маркова, *Графы, определенные ортогональностью*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **428** (2014), 49–80; Переведено в J. Math. Sci. (N. Y.) **207**, 5 (2015), 698–717.
- 6) R.C. James, *Inner products in normed linear spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 559–566.