АНАЛИЗ РАЗМЕРНОСТЕЙ

Г. А. ТИРСКИЙ

Московский физико-технический институт (государственный университет), Долгопрудный Московской обл.

DIMENSION ANALYSIS

G. A. TIRSKIY

Without founding on any serious mathematics, which is not necessary here, it have been explained what the dimension analysis is, and how to use it. Giving the samples, profit this dimension analysis gives in the process of the physical regularities determination have been shown, as well as its capability and restrictions. Also dimension analysis application for the theoretical presentation and experimental data processing have been observed.

Не опираясь на сколько-нибудь серьезную математику, которая здесь не нужна, рассказано, что такое анализ размерностей и как его применять при решении задач. На конкретных примерах показано, что дает анализ размерностей при поиске физических закономерностей, его возможности и ограничения, а также его полезность при обработке и представлении теоретических и экспериментальных результатов.

www.issep.rssi.ru

© Тирский Г.А., 2001

Анализ размерностей возник как результат естественного распространения на физические явления понятий геометрического подобия, отношения и пропорции, знакомых еще грекам. Так, Дж. Фурье (1768–1830) упоминал, что греки знали размерности площади и объема. Сам Фурье впервые установил, что существуют определенные основные единицы измерения, относительно которых каждая физическая величина имеет определенные размерности, которые надо записывать как показатели степеней основных единиц измерения.

Еще Г. Галилей (1564–1642) с помощью анализа размерностей впервые пришел к выводу, что величина безопасной нагрузки на единицу объема обратно пропорциональна длине, и предвосхитил многие другие классические результаты в механике. Затем анализ размерностей применяли Э.Д. Мариотт (1620–1684) и И. Ньютон (1643–1727). Дж.У. Рэлей (1842–1919) всегда ссылался на подобие и динамическое сходство. Позже анализ размерностей с успехом использовали в разных областях науки.

Идеи, лежащие в основе анализа размерностей, по сути очевидны и просты и покоятся на физических законах (связи между физическими величинами), они не зависят от произвола в выборе основных единиц измерения. Из этой идеи на основе простых рассуждений и применения простого математического аппарата можно вывести важное следствие: функции, выражающие физические закономерности, должны обладать некоторым фундаментальным свойством, которое в математике называется *обобщенной однородностью* или *симметрией*. Это свойство позволяет записать искомые закономерности в безразмерном виде, инвариантном относительно выбора систем *единиц измерения*, с меньшим числом аргументов (уже безразмерных) и тем самым упростить их (закономерностей) нахождение.

РАЗМЕРНОСТИ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Определение и задание различных физических величин (плотности, скорости, энергии, напряжений и т.д.) и дальнейшее математическое оперирование с ними как с числами, векторами или тензорами связаны с использованием определенных единиц измерения, выбор которых произволен и зависит от исследователя аналогично тому, как выбирается система координат, удобная для исследования данной конкретной задачи.

Единица измерения является мерой, с помощью которой измеряется та или иная физическая величина. Это измерение представляет собой прямое или косвенное сравнение физических характеристик с соответствующими (физически подобными) эталонами, принятыми за единицу и называемыми единицей измерения. Так, период полураспада сравнивается с единицей измерения – годом, скорость самолета сравнивается с единицей измерения скорости, равной скорости равномерного движения, в котором путь в один километр проходится за время, равное одному часу.

Величины, численные значения которых в рассматриваемых вопросах зависят от выбора единиц измерения, называются *размерными величинами*. Например, энергию можно измерять в килограммометрах, калориях, тоннах угля или килограммах урана, рублях и еще во многих других единицах измерения.

Единицы измерения физических величин подразделяются на *основные* и *производные*. Величины, для которых единицы измерения вводятся из опыта с помощью природных или искусственных эталонов, по условию называются *первичными* или *основными*. При этом сами единицы измерения также называются первичными. Так, например, для изучения механических движений известными способами вводятся первичные, или основные, единицы измерения, такие, как длина, время и масса, причем здесь имеется определенный произвол. Так, для описания тех же механических явлений можно принять эталоны для силы, длины и времени.

Единицы измерения для других величин, которые получаются из определения этих величин через первичные, называются *производными* или *вторичными*. Определение физической величины всегда указывает способ ее измерения, по крайней мере мысленный. Так, плотность, согласно определению, представляет собой отношение массы к величине заключающего ее объема.

В различных областях науки и техники выгодно и удобно выбирать в качестве первичных единиц измерения свои местные системы первичных единиц измерения.

Системой единиц измерения называется совокупность основных единиц измерения, достаточная для измерения параметров (характеристик) рассматриваемого класса явлений. Возникли различные системы единиц измерения и как следствие – рутинная задача о переходе (пересчете) от одной системы к другой. Так, для измерения характеристик механических явлений до сих пор употребительна в теоретических исследованиях система CGS. В этой системе в качестве первичных единиц измерения приняты сантиметр, грамм и секунда. Здесь мы считаем, что определения этих первичных единиц измерения известны из общего курса физики (см. также [1]).

Производными в системе CGS являются см/с (скорость), г/см^3 (плотность) и т.д.

Другой системой единиц измерения является система MKS, в которой в качестве основных приняты метр, килограмм-сила (кгс) и секунда. Здесь единица силы (кгс) представляет собой силу, сообщающую массе, равной массе эталона килограмма, ускорение, равное 9,80 665 м/с^2. С 1960 года употребляется также Международная система единиц СИ (System International d'Unites), в которой основными единицами измерения являются метр, килограмм-масса и секунда.

Можно усмотреть, что системы единиц CGS и СИ принадлежат к одному и тому же классу систем, система MKS – к другому. *Классом* систем единиц измерения называется совокупность систем единиц измерения, различающихся между собой только величиной, но не физической природой) основных единиц измерения.

Таким образом, мы видим, что единицы измерения не являются застывшей системой – всякий новый успех в развитии техники измерений, равно как и открытие новых явлений, может вести к переопределению основных единиц измерения [1]. Неоднократно предлагались другие системы, использование которых оказывалось удобным для определенного круга задач. Так, в астрономии удобно вводить единицу длины, называемую астрономической единицей (а.е.), которая является внесистемной единицей длины и равна среднему расстоянию от Земли до Солнца:

$$1 \text{ а.е.} = 1{,}49\,597\,870 \cdot 10^8 \text{ км } (\pm 2 \text{ км}).$$

Таким образом, не существует лучшей или основной системы единиц измерения.

Выражение производной единицы измерения через основные единицы измерения называется ее *размерностью*. Размерность выражает качественную сущность физической величины, измеренной с помощью данной системы единиц измерения, и получается автоматически из определения этой величины. Для обозначения размерности физических величин вводят символы. В системе CGS и СИ символы единиц измерения для основных физических величин будут: L для единицы длины, T для единицы времени и M для единицы массы. Размерность некоторой физической величины f принято по предложению Максвелла обозначать через $[f]$. Важно подчеркнуть, что размерность определяется классом систем единиц измерения и в разных классах систем измерения размерность одной и той же физической величины будет различна. Так, например, размерность силы F в классе LMT будет $[F] = MLT^{-2}$, а в классе

MKS (LKT) она будет $[F] = K$. Таким образом, в формуле (в функции) размерности для какой-либо величины φ,

$$[\varphi] = L^\alpha T^\beta M^\gamma \qquad (\text{в системе CGS}), \tag{1}$$

аргументы L, T, M выступают как отвлеченные положительные числа, которые можно перемножать или делить.

Величины, численное значение которых одинаково во всех системах единиц измерения внутри данного класса, называются *безразмерными*, то есть для таких величин в (1) $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Очевидно, что размерность безразмерной величины равна единице. Все остальные величины называются *размерными*.

В приведенных выше примерах формула (функция) размерности физической величины представляла собой степенной одночлен (1). Естественно возникает вопрос: имеются ли физические величины, для которых это не так, то есть их размерность, например в классе LTM, выражается в виде $M\sin L$ или $\lg T/e^M$? В действительности таких величин нет и размерность любой физической величины всегда представляет собой степенной одночлен. Этот факт следует из простого и естественного, но на самом деле глубокого принципа: все системы единиц измерения внутри данного класса равноправны, то есть среди них нет избранных, чем-то выделенных систем. За неимением здесь места мы отсылаем читателя за доказательством этого факта к книге [2]. Поэтому если отказаться от принципа равноправия всех систем единиц измерения внутри данного класса, то формула (функция) размерности в виде степенного одночлена (1) не будет иметь места.

Говорят, что набор величин $a_1, a_2, \ldots, a_k$ имеет *независимые* размерности, если размерность ни одной из этих величин нельзя представить в виде произведения степеней размерностей остальных величин. Например, размерности плотности $[\rho] = ML^{-3}$, ускорения $[w] = LT^{-2}$ и силы $[F] = MLT^{-2}$ независимы; размерности длины $[l] = L$, скорости $[\upsilon] = LT^{-1}$ и ускорения $[w] = LT^{-2}$ зависимы, так как между размерностями этих последних величин имеет место соотношение $[l] \cdot [w] = [\upsilon^2]$.

П-ТЕОРЕМА

В конкретных теоретических и экспериментальных исследованиях, как правило, проблема сводится к отысканию (одной или нескольких) предполагаемых зависимостей (функций) вида

$$a = f(a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n). \tag{2}$$

Здесь a – определяемая физическая величина, которая в данном исследовании ищется, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – величины, от которых искомая величина a зависит, среди них одни могут быть постоянными в данном явлении, другие – переменными; все они называются определяющими параметрами или аргументами искомой функции f.

Найдем теперь структуру функции f при предположении, что эта функция выражает собой некоторую физическую закономерность – закон, не зависящий от выбора систем единиц измерения.

Разбиение аргументов на две группы в (2) сделано следующим образом: первые k величин $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ($k \le n$) имеют независимые размерности (число основных единиц измерения должно быть больше или равно k, и среди механических величин обычно имеется не более трех с независимыми размерностями), а размерности остальных параметров $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n$ зависимы от них, то есть выражаются в виде произведений степеней от размерностей параметров $a_1, a_2, \ldots, a_k$:

$$\begin{aligned} [a_{k+1}] &= [a_1]^{\alpha_{k+1}} \ldots [a_k]^{\gamma_{k+1}} \\ &\vdots \\ [a_{k+i}] &= [a_1]^{\alpha_{k+i}} \ldots [a_k]^{\gamma_{k+i}} \\ &\vdots \\ [a_n] &= [a_1]^{\alpha_n} \ldots [a_k]^{\gamma_n} \end{aligned} \tag{3}$$

Если размерности всех определяющих параметров независимы, то $k = n$; если все определяющие параметры безразмерны, то $k = 0$. Таким образом, $0 \le k \le n$.

Нетрудно показать от противного, опираясь на предполагаемую зависимость (2), что размерность определяемой величины a должна обязательно выражаться через размерности определяющих параметров первой группы $a_1, a_2, \ldots, a_k$:

$$[a] = [a_1]^\alpha \ldots [a_k]^\gamma. \tag{4}$$

Заменим теперь в (2) параметры с зависимыми размерностями a, $a_{k+1}, \ldots, a_n$ через безразмерные величины $\Pi, \Pi_{k+1}, \ldots, \Pi_n$, определив их выражениями

$$\Pi = \frac{a}{a_1^\alpha \ldots a_k^\gamma},\ \Pi_{k+1} = \frac{a_{k+1}}{a_1^{\alpha_{k+1}} \ldots a_k^{\gamma_{k+1}}},\ \ldots$$
$$\ldots,\ \Pi_{k+i} = \frac{a_{k+i}}{a_1^{\alpha_{k+i}} \ldots a_k^{\gamma_{k+i}}},\ \ldots,\ \Pi_n = \frac{a_n}{a_1^{\alpha_n} \ldots a_k^{\gamma_n}}. \tag{5}$$

Тогда вместо (2) с учетом (4) и (5) получим

$$\Pi = \frac{f(a_1, \ldots, a_n)}{a_1^\alpha \ldots a_k^\gamma} =$$
$$= \frac{1}{a_1^\alpha \ldots a_k^\gamma} f(a_1, a_2, \ldots, a_k, a_1^{\alpha_{k+1}} \ldots a_k^{\gamma_{k+1}} \Pi_{k+1}, \ldots, a_1^{\alpha_n} \ldots a_k^{\gamma_n} \Pi_n)$$

или в других обозначениях

$$\Pi = F(a_1, a_2, \ldots, a_k, \Pi_{k+1}, \ldots, \Pi_n). \tag{6}$$

Теперь покажем, что функция F от параметров a_1, $a_2, \ldots, a_k$ на самом деле не зависит. Очевидно, значения величин $\Pi, \Pi_{k+1}, \ldots, \Pi_n$ вообще не зависят от выбора систем тех единиц измерения, через которые выражаются

k размерно независимых величин $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Далее можно показать почти очевидный факт [3], что всегда можно перейти к такой системе единиц измерения в данном классе, что любой из параметров с независимыми размерностями $a_1, a_2, \ldots, a_k$, например a_1, изменится в произвольное число раз, а остальные размерные параметры $a_2, a_3, \ldots, a_k$ останутся неизменными. При таком переходе, как было сказано выше, останутся неизменными также и безразмерные аргументы $\Pi_{k+1}, \ldots, \Pi_n$ в функции (6) и ее значение Π. Но отсюда следует, что функция F в действительности от аргумента a_1 не зависит. Аналогично показывается, что она не зависит и от аргументов $a_2, a_3, \ldots, a_k$, поэтому вместо (6) будем иметь

$$\Pi = \Phi(\Pi_{k+1}, \ldots, \Pi_n), \tag{7}$$

а сама искомая зависимость (2) принимает вид $(\Pi = f/(a_1^{\alpha}\ldots a_k^{\gamma}))$

$$a = f(a_1, \ldots, a_n) = a_1^{\alpha}\ldots a_k^{\gamma}\Phi\left(\frac{a_{k+1}}{a_1^{\alpha_{k+1}}\ldots a_k^{\gamma_{k+1}}}, \ldots, \frac{a_n}{a_1^{\alpha_n}\ldots a_k^{\gamma_n}}\right) = a_1^{\alpha}\ldots a_k^{\gamma}\Phi(\Pi_{k+1}, \ldots, \Pi_n). \tag{8}$$

Иными словами, *число аргументов в искомой зависимости* (2), *записанной в безразмерном виде* (7), *сокращается на число, равное числу определяющих параметров с независимыми размерностями.* Этот общий вывод и составляет главное содержание анализа размерностей, известное в научной литературе как П-теорема. В нем, собственно, и заключается источник полезных приложений метода теории размерностей к исследованию физических задач.

Сделаем два дополнительных замечания к П-теореме.

1. Анализ размерностей не дает в общем случае способа определения функции Φ в (7) или (8) от $n - k$ аргументов, которая в случае $k = n$ превращается в константу. Для окончательного установления искомой зависимости (8) на этом этапе необходимо обращаться либо к эксперименту, либо к теории, решая соответствующую математическую задачу.

2. Основным и первоначальным этапом в постановке задач является выбор модели и схематизация свойств искомого решения. Если задача сформулирована как математическая (имеются система уравнений, начальные и краевые условия, дополнительные условия на искомое решение), то всегда легко выписать полную таблицу аргументов в искомых функциях вида (2). Опыт показывает, что схематизация и отыскание рациональной постановки задачи и указание существенных определяющих параметров представляют собой наибольшие из всех трудностей при применении анализа размерностей для решения задач. Не пропустить важные определяющие параметры и не включать в этот список малосущественные параметры — вот что здесь главное. Само использование рецептуры анализа размерностей (П-теоремы) просто.

КОЛЕБАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

Математический маятник (рис. 1) представляет собой тяжелую материальную точку массы m, подвешенную на невесомой и нерастяжимой нити длиной l, которая закреплена другим своим концом неподвижно в точке O. Попытаемся определить закон движения и, в частности, период малых колебаний маятника, отклоненного в начальный момент на угол φ_0 и отпущенного из этого положения с нулевой угловой скоростью. Очевидно, закон движения и натяжение нити N будут функциями пяти аргументов:

$$\varphi = \varphi(t, l, g, m, \varphi_0), \qquad N = mgf(t, l, g, m, \varphi_0), \tag{9}$$

где φ и f — безразмерные функции. Ускорение силы тяжести g необходимо ввести в определяющие параметры, так как оно определяет сущность явления. Из анализа размерностей этих аргументов ($[t] = T$, $[l] = L$, $[g] = LT^{-2}$, $[m] = M$, $[\varphi_0] = 1$) следует, что среди них имеются три величины с независимыми размерностями, то есть $k = 3$. Тогда, согласно П-теореме, можно составить $n - k = 5 - 3 = 2$ независимые безразмерные комбинации, которые возьмем в виде $t\sqrt{g/l}$, φ_0. Все другие безразмерные комбинации будут функциями этих двух комбинаций. Итак, согласно П-теореме, можно написать существенно сокращенные зависимости

$$\varphi = \Phi\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}, \varphi_0\right), \qquad N = mgF\left(t\sqrt{\frac{g}{l}}, \varphi_0\right),$$

где Φ и F — безразмерные функции от безразмерных аргументов. Выражение для φ показывает, что закон движения маятника не зависит от массы груза, а натяжение нити прямо пропорционально массе груза!

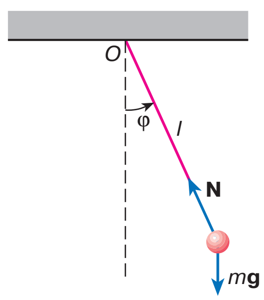

Рис. 1. Математический маятник

Для окончательного определения функций Φ и F, зависящих уже только от двух безразмерных параметров, анализ размерностей никаких рецептов не дает. Из опыта известно, что при малых колебаниях маятник совершает почти периодические колебания. В этом случае период колебаний T будем находить из условия

$$\varphi_0 = \Phi\left(T\sqrt{\frac{g}{l}}, \varphi_0\right), \qquad (10)$$

то есть за время T маятник возвращается в начальное положение φ_0. Разрешая уравнение (10) относительно первого аргумента, получим

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}}\psi(\varphi_0),$$

где $\psi(\varphi_0)$ – неизвестная функция. Далее из соображений симметрии (явление не зависит от правого или левого начального отклонения маятника на угол φ_0) следует, что $\psi(\varphi_0) = \psi(-\varphi_0)$, то есть функция ψ четная. При малых φ_0 функцию ψ можно разложить в ряд

$$\psi(\varphi_0) = C_1 + C_2\varphi_0 + C_3\varphi_0^2 + \ldots = C_1 + C_3\varphi_0^2 + \ldots$$

Здесь принято $C_2 = 0$ в силу четности функции ψ. Для малых колебаний члены со степенями φ_0^2 и выше можно опустить, и тогда для периода малых колебаний получим формулу ($\psi(\varphi_0) = C_1$)

$$T = C_1\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (11)$$

Таким образом, для малых колебаний маятника с помощью анализа размерностей и приведенных выше дополнительных рассуждений формула для периода колебаний определяется с точностью до постоянного множителя. Далее из простого опыта с использованием часов или математического решения этой задачи можно получить значение константы $C_1 = 2\pi$. Конечно, из опыта получаем не 2π, но близкое к нему значение. Формула (11) справедлива для маятников любой длины l и в любом поле силы тяжести (на любой планете).

ЗАДАЧА О ТОЧЕЧНОМ ВЗРЫВЕ

При атомном взрыве происходит быстрое (можно сказать, мгновенное) выделение значительной энергии E в малой области (можно сказать, в точке). Опыт и теория показывают, что в области взрыва возникает сильная сферическая ударная волна (рис. 2), отделяющая окружающую невозмущенную атмосферу от движущегося за ударной волной раскаленного газа. Давление за фронтом ударной волны на начальной стадии взрыва во много тысяч раз больше, чем начальное давление воздуха, влиянием которого на процесс распространения ударной волны можно пренебречь.

Рис. 2. Распространение сферической ударной волны от точечного взрыва

Попытаемся найти закон распространения ударной волны $R = R(t)$ (R – расстояние фронта ударной волны от центра взрыва, t – время). Очевидно, что основными определяющими параметрами в этой задаче будут: $E = a_1$, начальная плотность невозмущенного воздуха $\rho = a_3$ и $t = a_2$. Мы сознательно упрощаем постановку задачи, сокращая число определяющих параметров задачи, надеясь на то, что физические свойства воздуха не будут играть решающей роли. Тогда число определяющих параметров будет $n = 3$. Размерности этих параметров в классе LMT

$$[E] = L^2MT^{-2}, \qquad [t] = T, \qquad [\rho] = ML^{-3}, \qquad (12)$$

и они, как легко заметить, все независимы, так что $k = 3$ и $n - k = 3 - 3 = 0$. Поэтому функция Φ в (7) в данном случае не будет зависеть ни от одного размерного аргумента – она будет постоянной: $\Phi = C = \text{const}$. Размерность определяемой величины $R = a$ выражается через степени размерностей определяющих параметров, как нетрудно убедиться, в следующем виде:

$$[R] = [E]^{1/5}[t]^{2/5}[\rho]^{-1/5},$$

и, стало быть, искомая зависимость запишется так:

$$R(t) = C\left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/5} t^{2/5}. \qquad (13)$$

Соответственно скорость распространения сферической взрывной ударной волны будет

$$\upsilon = \frac{dR}{dt} = \frac{2}{5}C\left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/5} t^{-3/5} = \frac{2}{5}C^{5/2}\left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{R^3}}. \qquad (14)$$

Постоянную C можно найти или решая численно соответствующую газодинамическую (математическую) задачу о сильном взрыве [2], или провести эксперимент с замером функции $R = R(t)$ в разные моменты времени при известной энергии заряда E и плотности ρ. Для этого достаточно одного-единственного эксперимента, например произвести искровой электрический разряд в воздухе с известной вложенной в разряд энергией E. Этот модельный и сравнительно дешевый эксперимент позволяет затем уже с известной константой C определить закон распространения ударной волны от взрыва атомной бомбы с любой энергией E на любой высоте, то есть с любой плотностью ρ.

Формула (13) показывает, что если измерить радиус ударной волны в разные моменты времени, то в логарифмических координатах $\lg t$, $(5/2)\lg R$ экспериментальные точки должны лечь на прямую

$$\frac{5}{2}\lg R = \frac{5}{2}\lg C + \frac{1}{2}\lg\frac{E}{\rho} + \lg t,$$

имеющую наклон в 45° к оси $\lg t$ (рис. 3). Это подтвердил Дж.И. Тейлор (известный механик из Великобритании), обработавший кинофильм о распространении огненного шара, снятый Дж. Маком во время первого американского ядерного взрыва атомной бомбы в Нью-Мехико (1945 год), кадры которого стали доступны Тейлору в 1947 году. Решение соответствующей задачи газовой динамики показало, что значение постоянной C в (13) близко к единице. Зная это, по снятым с кинофильма точкам зависимости $R = R(t)$ (точки *2* на рис. 3) можно по отрезку, отсекаемому на оси ординат, определить энергию взрыва. Публикация Дж.И. Тейлором этой величины [4], оказавшейся равной примерно $7{,}14 \cdot 10^{20}$ эрг, вызвала в свое время, по его словам, немалое смущение в американских правительственных кругах, так как эта цифра считалась строго секретной, хотя фильм Дж. Мака секретным не был.

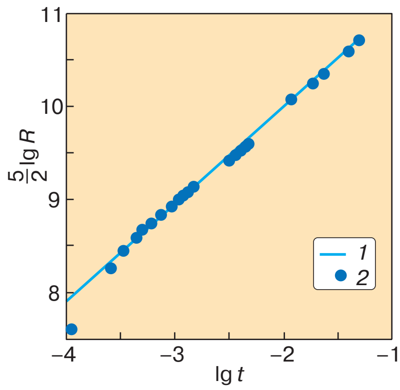

Рис. 3. Сравнение теоретического (*1*) и экспериментального (*2*) закона распространения сферической ударной волны от точечного взрыва в зависимости от времени

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методы исследования различных задач механики, физики, астрофизики [5], геофизики, природных и экологических явлений, основанные на применении анализа размерностей и подобия, просты и доступны школьникам старших классов и поэтому могут быть включены в школьную программу по физике. При применении анализа размерностей и подобия трудность лежит совсем не в использовании простой рецептуры получения закономерностей физических явлений в наиболее простой и наглядной форме, а в схематизации явления с выделением основных (главных) определяющих параметров задачи, вытекающих или из математической постановки задачи, если таковая имеется в виде соответствующих дифференциальных уравнений с начальными и краевыми условиями, или из проникновения (интуиции) в механизм изучаемого явления, если оно не сформулировано по каким-то причинам в виде математической задачи. Здесь важно не пропустить основные определяющие параметры и не усложнить задачу добавлением заведомо несущественных параметров. Тогда результат дается выражением (7) в виде зависимости определяемой (искомой) безразмерной величины Π от определяющих безразмерных аргументов $\Pi_{k+1}, \ldots$ ..., Π_n, число которых меньше числа определяющих размерных параметров n на величину k, равную числу определяющих параметров с независимыми размерностями. Тем самым упрощается нахождение искомой зависимости, выражающей физическую закономерность.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Камке Д.*, *Кремер К.* Физические основы единиц измерения: Пер. с нем. М.: Мир, 1980.
2. *Седов Л.И.* Методы подобия и размерностей в механике. М.: Наука, 1972.
3. *Биркгоф Г.* Гидродинамика: Пер. с нем. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 244 с.
4. *Taylor G.* // Proc. Royal Soc. 1950. Vol. 201, № 1065. P. 159–186.
5. *Курт Р.* Анализ размерностей в астрофизике. М.: Мир, 1975.

Рецензент статьи Ю.Г. Мартыненко

* * *

Григорий Александрович Тирский, доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики Московского физико-технического института, научный руководитель аспирантуры МФТИ, зав. лабораторией физико-химической газодинамики Института механики МГУ, заслуженный деятель науки РФ, действительный член Российской академии естественных наук, член Нью-Йоркской академии наук и ряда отечественных и зарубежных научных обществ. Лауреат премии М.В. Ломоносова МГУ, лауреат первой премии Минвуза СССР, премии МАИК "Наука" за лучшую публикацию года в ее изданиях. Награжден золотой медалью им. С.А.Чаплыгина РАН за выдающиеся теоретические работы по механике, памятной медалью им. П.Л. Капицы "Автор научного открытия". Член редколлегии журнала "Прикладная математика и механика". Область основных научных интересов – физико-химическая газодинамика, теория гиперзвуковых течений, кинетическая теория газов, вычислительная гидродинамика. Автор более 270 научных статей, двух монографий, двух изобретений.