МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Новодерова Анна Павловна

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАНОСА КОЛЕСНОГО АППАРАТА

01.02.01 — теоретическая механика

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор Влахова А.В.

Москва — 2020

Оглавление

Введение

В.1 Общая характеристика работы

Актуальность темы. Причины возникновения заноса разнообразны и перечислены во многих работах, однако открытых теоретических исследований поведения колесных аппаратов при его возникновении существенно меньше. По коммерческим причинам фирмы, которые занимаются конструированием аппаратов, не дают информации об алгоритмах работы систем, обеспечивающих безопасность их движения. Вместе с тем даже у ведущих фирм возникают проблемы с работоспособностью таких систем. Поэтому исследования, тематика которых связана с изучением динамических свойств разных конструкций колесных аппаратов и проблемой безопасности движения, актуальны и имеют как теоретический, так и практический интерес. Методом, позволяющим провести детальный анализ динамики и управляемости аппаратов еще на стадии их проектирования, служит математическое моделирование. Выбираемая модель должна правильно отражать свойства движения и, в то же время, быть образована достаточно простой системой уравнений, содержащей небольшое число параметров. В работе предложены подходы к математическому моделированию динамики колесных аппаратов, основанные на методах фракционного анализа (разделения движений). Эти методы, объединяющие методы теории размерностей и подобия и методы теории возмущений, позволяют понизить порядок исследуемых уравнений, провести их аналитическое исследование, оценить погрешность и пределы применимости полученных результатов, а также обсудить возможность использования тех или иных гипотез о свойствах исследуемой системы.

Цель работы состоит в исследовании начальной стадии заноса двухосного четырехколесного аппарата при блокировке или пробуксовке колес ведущей оси на однородной опорной плоскости, и при попадании на «микст» — участок опорной плоскости, содержащий области с разными коэффициентами трения.

Научная новизна и основные результаты. Все результаты диссертации являются новыми. Построены аналитические модели движения колесного аппарата при блокировке или пробуксовке колес ведущей оси с возможностью скольжения колес другой оси по однородной опорной плоскости, указаны случаи, когда такое движение может привести к заносу аппарата, исследовано влияние на него поворота передних колес. Предложены аналитические модели переходных процессов выравнивания контактных сил или изменения угловой скорости выходного вала двигателя и модели поперечной и угловой динамики корпуса аппарата на «миксте» для случая, когда коэффициент трения для одного из колес ведущей оси оказывается меньше коэффициента трения для других колес. Получены оценки импульса угловой скорости, приобретаемого корпусом после завершения переходных процессов, для различных условий взаимодействия колес ведущей оси с опорной плоскостью. Исследовано влияние трения верчения в областях контакта колес с опорной плоскостью на занос аппарата.

Теоретическая и практическая значимость. Проведенные исследования расширяют представления о динамике колесных аппаратов и указывают возможности применения классических моделей при ее описании. Построенные в работе модели могут быть использованы при формировании алгоритмов программного обеспечения тренажеров и средств активной безопасности, работающих в режиме реального времени, в частности, систем управления рулем (поворотом передних колес вокруг вертикальной оси) и систем управления вращением колес. Работа имеет теоретический характер. Ее результаты могут применяться при проведении исследований в МГУ имени М.В.Ломоносова, НИИ механики МГУ, Институте проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН и других научно-исследовательских центрах, занимающихся изучением и созданием колесных систем разного назначения.

Методы исследования. Результаты работы получены с использованием подходов теоретической механики, методов динамики неголономных систем и теории систем с трением, методов фракционного анализа и теории возмущений, качественных методов интегрирования дифференциальных уравнений и метода фазовой плоскости.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Движение аппарата с заблокированными или пробуксовывающими колесами одной оси способно привести к заносу, поворот передних колес вокруг вертикальной оси позволяет регулировать его на начальной стадии в случаях: скольжения только пробуксовывающих передних колес; скольжения всех колес или только задних колес, вызванного их блокировкой либо пробуксовкой.

2. Движение аппарата на «миксте», при котором одно колесо ведущей задней оси попадает на участок с меньшим коэффициентом трения, а колеса передней оси, оставшиеся на участке с большим коэффициентом трения, сохраняют сцепление с опорной плоскостью, может быть разбито на три этапа: 1) изменение скоростей точек контакта колес, сохранивших сцепление с опорной плоскостью, и угловой скорости выходного вала двигателя (в случае, когда хотя бы одно из колес ведущей оси сохраняет сцепление с опорной плоскостью) или изменение только угловой скорости выходного вала двигателя (в случае скольжения обоих колес ведущей оси); 2) медленное по сравнению с этапом 1 изменение попереч-

ной и угловой скоростей корпуса аппарата; 3) медленное по сравнению с этапом 2 изменение продольной скорости корпуса аппарата.

3. К началу 2-го этапа движения на «миксте» корпус аппарата приобретает ненулевую угловую скорость. Колесо ведущей задней оси, оставшееся на участке с большим коэффициентом трения, сохраняет сцепление с опорной плоскостью или возобновляет сцепление с ней после скольжения. Занос развивается в случае, когда поперечные скорости микропроскальзывания колес отвечают быстрому убыванию стабилизирующих моментов.

Достоверность и обоснованность. Результаты работы получены при помощи строгих математических методов и соответствуют результатам других авторов по данной тематике, а также общим рекомендациям по вождению автомобиля.

Апробация. Результаты прошли апробацию на международных и всероссийских научных конференциях:

1. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов», МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия, 10-14 апреля 2017 г. (каф. прикладной механики и управления) и 8-12 апреля 2019 г. (каф. теоретической механики и мехатроники).

2. Международная научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики», МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия, 24-27 октября 2017 г. и 10-12 декабря 2019 г.

3. Международная конференция «Проблемы механики и управления», Махачкала, Россия, 16-22 сентября 2018 г.

4. Международная научная конференция «Современные проблемы математики и механики», посвященная 80-летию академика В.А. Садовничего, МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, 13-15 мая 2019 г.

5. XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Уфа, Россия, 19-24 августа 2019 г.

Результаты были представлены соискателем на следующих научных семинарах:

1. Научный семинар им. акад. А.Ю. Ишлинского по прикладной механике и управлению под руководством проф. В.В. Александрова, Ю.В. Болотина, Н.А. Парусникова, кафедра прикладной механики и управления, механико-математический факультет, МГУ им. М.В. Ломоносова (2016, 2018, 2020).

2. Научный семинар им. В.В. Белецкого по динамике относительного движения под руководством проф. Ю.Ф. Голубева, проф. В.Е. Павловского, доц. К.Е. Якимовой и доц. Е.В. Мелкумовой, кафедра теоретической механики и мехатро-

ники, механико-математический факультет, МГУ им. М.В. Ломоносова (2017, 2020).

3. Научный семинар «Математическое моделирование управляемых систем» под руководством проф. В.В. Александрова, Ю.В. Болотина и доц. П.А. Кручинина, кафедра прикладной механики и управления, механико-математический факультет, МГУ им. М.В. Ломоносова (2017, 2018, 2019).

4. Научный семинар им. В.В. Румянцева по аналитической механике и теории устойчивости под руководством проф. А.В. Карапетяна и доц. А.А. Зобовой, кафедра теоретической механики и мехатроники, механико-математический факультет, МГУ им. М.В. Ломоносова (2020).

Работа поддержана Фондом развития теоретической физики и математики «БАЗИС» (проект № 19-8-2-29-1).

Публикации по теме диссертации. Основные результаты диссертационной работы изложены в 8 печатных работах, 3 из которых опубликованы в рецензируемых журналах, индексируемых в международных базах WebOfScience, Scopus и RSCI, 4 статьи опубликованы в сборниках трудов международных конференций, 1 — в сборнике трудов Всероссийского съезда.

По результатам работы опубликованы в рецензируемых журналах, индексируемых в международных базах **WebOfScience, Scopus и RSCI**, следующие статьи:

1. *Влахова А.В., Новодерова А.П.* О влиянии моментов трения верчения на занос колесного аппарата // Фундамен. и прикл. математика. 2018. Т. 22. Вып. 2. С. 117–132. = On effects of spinning moments on wheeled vehicle skidding // Fundamental and Applied Mathematics. — 2018. — Vol. 22, no. 2. — P. 117–132. (SJR 0.120)

2. *Влахова А.В., Новодерова А.П.* Моделирование заноса аппарата с повернутыми передними колесами // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 1. С. 23–49. = The skidding modelling of an apparatus with turned front wheels // Mechanics of Solids. 2019. Vol. 54, no. 1. P. 19–38. (WoS IF 0.436)

3. *Влахова А.В., Новодерова А.П.* Занос колесного аппарата на «миксте» // Вест. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2020. № 5. С. 38–50. (SJR 0.229)

Прочие печатные работы:

1. *Влахова А.В., Новодерова А.П.* Модель переменной структуры для описания заноса на вираже // Международная научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики», посвященная 170-летию со дня рождения великого русского ученого Николая Егоровича Жуковского (Москва, 24–27 октября 2017 г.): М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва. 2017. С. 98–99.

2. *Влахова А.В., Новодерова А.П.* Моделирование заноса колесного аппарата // Проблемы механики и управления: Материалы Международной конференции, Издательство Московского университета, Москва. 2018. С. 123–126.

3. *Влахова А.В., Новодерова А.П.* Занос колесного аппарата при попадании на «микст» // Современные проблемы математики и механики. Материалы международной конференции, посвященной 80-летию академика РАН В.А. Садовничего. Т. 2. МАКС Пресс Москва. 2019. С. 673–675.

4. *Новодерова А.П.* Моделирование заноса колесного аппарата на вираже // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов в 4 томах. Т. 1: Общая и прикладная механика. Т. 1. РИЦ БашГУ Уфа. 2019. С. 586–588.

5. *Новодерова А.П.* Разделение движений колесного аппарата на «миксте» // Международная научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики», посвященная 100-летию со дня рождения академика Константина Сергеевича Колесникова (Москва, 10–12 декабря 2019 г.): Тезисы докладов / П.М. Шкапов, М.Ю. Баркин, Е.В. Мелкумова, составители. Инженерный журнал: наука и инновации. 2020. Вып. 2. С. 178–179.

Личный вклад. Постановки задач и методы их решения предложены научным руководителем. Все результаты диссертации получены лично соискателем.

В.2 Содержание работы

Работа посвящена методическим и прикладным аспектам описания динамики двухосного четырехколесного аппарата (автомобиля, робота и проч.) на начальной стадии заноса, когда поперечная и угловая скорости его корпуса принимают небольшие значения.

В первой части работы (Глава 1) рассматривается задача о блокировке или пробуксовке колес ведущей (передней или задней) оси аппарата в случаях, когда колеса другой оси сохраняют сцепление с опорной плоскостью или начинают скользить по ней. Предполагается, что опорная плоскость однородна, характеристики сцепления с ней для колес одной оси различаются мало, углы наклона корпуса аппарата малы, и нормальные реакции для колес одной оси принимают близкие значения. В рамках этих предположений динамика аппарата, как и в [12–14, 16, 18, 22, 24, 53] описывается велосипедной моделью, которая получается, если заменить передние колеса одним эквивалентным передним колесом, задние — одним задним и считать, что корпус аппарата не имеет наклонов.

Вторая часть работы (Глава 2) посвящена задаче о попадании аппарата на «микст» — участок опорной плоскости, содержащий области с разными коэффициентами трения (рассматривается случай, когда коэффициент трения для одного из колес ведущей (задней) оси оказывается меньше коэффициента трения для других колес) [20, 48]. Для автомобиля это возможно, например, при въезде на обочину, одностороннем попадании в лужу масла и т.д. В предположении низкого расположения центра масс и центра парусности (точки приложения аэродинамической силы) корпуса аппарата и малости углов его наклона изучаются ситуации, когда, в зависимости от условий движения, колеса ведущей оси аппарата сохраняют сцепление с опорной плоскостью или начинают скользить по ней. Для описания этих ситуаций, отвечающих различным условиям взаимодействия колес ведущей оси с опорной плоскостью, в работе используется четырехколесная модель аппарата, корпус которой не имеет наклонов, построенная в предположении, что нормальные реакции для колес одной оси принимают близкие значения.

Для адекватного описания динамики аппарата следует определить модели сил взаимодействия его колес с опорной плоскостью для каждой из рассматриваемых задач. В теории движения аппаратов традиционно пренебрегают моментами трения верчения, ортогональными областям контакта колес с опорными поверхностями. Однако это приводит к некорректным по Адамару постановкам задач [3, 27, 29], в связи с чем необходимо обоснование возможности такого пренебрежения.

Случаи, когда в ходе блокировки или пробуксовки колеса одной оси аппарата сохраняют сцепление с опорной плоскостью, а колеса другой оси начинают скользить по ней, рассматриваются с использованием предположения о непроскальзывании и модели трения Кулона соответственно. Эти модели являются предельными для модели взаимодействия колес с опорной плоскостью [14,46,47], сформированной на основе щеточной (brush) и схожих моделей описания контактных сил и моментов [35,39,98,123], которые учитывают наличие зон проскальзывания и сцепления в областях контакта. Пренебрежение трением верчения в этих случаях можно обосновать [3, 14, 27] малостью рассматриваемых значений поперечной и угловой скоростей корпуса аппарата и малостью областей контакта его колес с опорной плоскостью. В случае, когда при движении на «миксте», изучаемом во второй части работы, все колеса аппарата сохраняют сцепление с опорной плоскостью, модель непроскальзывания или классическая модель увода, учитывающая малую деформируемость колес только в поперечном направлении, не позволяет описать быстрый переходный процесс выравнивания контактных сил на колесах ведущей оси, возникающий из-за скачка коэффициента трения. Поэтому здесь рассматривается модифицированная модель увода, учитывающая деформируемость колес (микропроскальзывание, псевдоскольжение) в продольном и поперечном направлениях, а также моменты трения верчения (стабилизирующие моменты) [37, 49, 123] в областях контакта колес с опорной плоскостью.

В случаях, когда колеса аппарата теряют сцепление с опорной плоскостью (начинают скользить), их контакт в обеих частях работы описывается при помощи модели трения Кулона и модели поликомпонентного сухого трения В.Ф. Журавлёва. При изучении начальной стадии заноса аппарата первая модель иллюстрирует движение в пренебрежении размерами областей контакта колес с опорной плоскостью, вторая модель позволяет обсудить ограничения значений угловой скорости верчения и размеров областей контакта, при которых моменты трения верчения влияют на движение аппарата.

При составлении математической модели динамики аппарата контакт колес с опорной плоскостью предполагается точечным, а свойство их деформируемости учитывается моделями касательных составляющих контактных сил. При малых поперечной и угловой скоростях корпуса аппарата это предположение верно [39], если считать, что размеры областей контакта малы по сравнению с радиусами колес аппарата [12–14].

Исследуемые модели динамики аппарата формируются с использованием идей разделения движений, основанных на методах фракционного анализа [14, 23, 46] и теории возмущений [11]. Возможность их применения связана (в зависимости от рассматриваемой задачи) с малостью поперечной и угловой скоростей корпуса аппарата по сравнению с его продольной скоростью и угловой скоростью вращения колес соответственно, с малостью масс и моментов инерции колес по сравнению с массой и моментами инерции корпуса аппарата, с малостью размеров областей контакта колес с опорной плоскостью по сравнению с их радиусами, и малостью упругих касательных деформаций колес при микропроскальзывании, с малостью углов поворота передних колес вокруг вертикальной оси, а также с быстрым изменением угловой скорости выходного вала двигателя по сравнению с поперечной и угловой скоростями корпуса аппарата.

Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения, приложений и списка литературы.

Первая глава посвящена описанию динамики двухосного четырехколесного аппарата на начальной стадии заноса, происходящего при блокировке или пробуксовке колес ведущей оси, и состоит из разделов 1.1–1.5. В разделе 1.1 проводится обзор литературы, связанной с использованием велосипедной модели в практических задачах. В разделе 1.2 содержится постановка задачи и описание рассматриваемой модели, даны необходимые сведения теории систем с трением, а также методика составления уравнений Лагранжа с множителями для описания движения неголономных систем. В разделе 1.3 изложенная в разделе 1.2 методика применяется для построения и анализа математических моделей заноса аппарата с заблокированными или пробуксовывающими колесами передней или задней ведущей оси, когда колеса другой оси сохраняют сцепление с опорной плоскостью. Взаимодействие заблокированных или пробуксовывающих колес с опорной плоскостью описывается моделью трения Кулона. С использованием метода фазовой плоскости проводится аналитическое исследование динамики аппарата и влияния углов поворота передних колес вокруг вертикальной оси на его занос. Обсуждаются ситуации, когда следование принятой в теории вождения автомобиля рекомендации «поворачивать руль (передние колеса) в сторону заноса задней оси» (рис. 1.1) позволяет уменьшить поперечную и угловую скорости корпуса аппарата скорее, чем при неповернутых или повернутых в другую сторону передних колесах, проведены оценки их изменения в зависимости от продольной скорости корпуса. Найдена область применимости предположения о непроскальзывании колес аппарата, не потерявших сцепление с опорной плоскостью. В разделах 1.4 и 1.5 проводится анализ математических моделей заноса аппарата с заблокированными или пробуксовывающими колесами передней или задней ведущей оси, в ходе которого колеса другой оси также теряют сцепление с опорной плоскостью. Взаимодействие колес аппарата с опорной плоскостью описывается с использованием модели трения Кулона (раздел 1.4) и модели поликомпонентного сухого трения В.Ф. Журавлёва [3] (раздел 1.5). Для упрощения анализа исследуемых уравнений применяется математический аппарат асимптотических методов теории сингулярных возмущений по малым параметрам [11, 14, 46], характеризующим малость масс и моментов инерции колес, малость их областей контакта с опорной плоскостью, малость угла поворота передних колес и малость поперечной и угловой скоростей корпуса аппарата. Показано, что в ходе такого движения не заблокированные или не пробуксовывающие колеса достаточно быстро обретают сцепление с опорной плоскостью, то есть развитие заноса аппарата следует изучать с использованием модели переменной структуры, которая описывает его движение на каждом из этапов, рассмотренных в разделах 1.3 и 1.4.

Вторая глава, посвященная движению аппарата на «миксте», состоит из разделов 2.1–2.6. В разделе 2.1 проводится обзор литературы, связанной с данной тематикой. В разделе 2.2 излагается постановка задачи и дано описание рассматриваемой математической модели. До попадания на «микст» аппарат движется равномерно и прямолинейно, без потери сцепления колес с опорной плоскостью. В разделах 2.3–2.5 анализируется система с малыми параметрами, отражающими малость масс и моментов инерции колес, малость их областей контакта с опорной плоскостью, малость их деформаций при микропроскальзывании, малость поперечной и угловой скоростей корпуса и быстрое изменение угловой скорости выходного вала двигателя. Получаемая при их отбрасывании невозмущенная (вырожденная) система [11, 14, 46] описывает динамику аппарата по окончании быстрого процесса, в ходе которого контактные силы на колесах ведущей оси, исходно различные из-за скачка коэффициента трения, уравновешиваются дифференциалом [48] (в случае, когда хотя бы одно из этих колес сохраняет сцепление с опорной плоскостью) или по окончании быстрого процесса перехода к постоянному значению угловой скорости выходного вала двигателя (в случае скольжения обоих колес ведущей оси). Найдены условия реализации этих быстрых процессов. В силу того, что начальные условия для поперечной и угловой скоростей корпуса аппарата в рамках невозмущенной системы полагаются нулевыми, равными своим значениям до попадания на «микст», в первом случае она неспособна описать поперечную и угловую динамику корпуса, во втором случае — использует недостаточно точные начальные условия. Эту проблему можно решить с помощью алгоритма построения асимптотических разложений А.Б. Васильевой [11], который позволяет учесть процесс изменения быстрых переменных в так называемом пограничном слое, где происходит переход решения исходной, возмущенной системы в окрестность многообразия, на котором развивается решение вырожденной системы, и, далее, рассмотреть влияние этого процесса на медленные переменные — продольную, поперечную и угловую скорости корпуса аппарата. Уточнение начальных условий, полученное с помощью этого алгоритма, дает оценки импульса угловой скорости, которые получает корпус попавшего на «микст» аппарата после завершения быстрых переходных процессов для различных случаев взаимодействия колес с опорной плоскостью. В разделах 2.3 и 2.4 рассмотрен случай, когда ведущее заднее колесо, попавшее на участок с меньшим коэффициентом трения, сохраняет или теряет сцепление с опорной плоскостью, а остальные колеса сохраняют сцепление с ней. В разделе 2.5 обсуждается движение аппарата, при котором его передние колеса сохраняют, а задние — теряют сцепление с опорной плоскостью. В обоих случаях взаимодействие колес, сохранивших сцепление с опорной плоскостью, описывается модифицированной моделью увода. Колеса, потерявшие сцепление с опорной плоскостью, взаимодействуют с ней посредством сухого трения (модель трения Кулона или модель поликомпонентного сухого трения В.Ф. Журавлёва). Раздел 2.6 посвящен исследованию динамики корпуса аппарата на «миксте». С применением методов [14], основанных на построении разложений А.Б. Васильевой, но не требующих привлечения итерационных процедур, проводится корректировка уравнений невозмущенной системы путем построения внепогранслойной модели первого приближения, которая дает возможность описать поперечную и угловую динамику корпуса аппарата и оценить протекание заноса, в частности, исследовать влияние на него трения верчения.

Все полученные результаты математически строго обоснованы, позволяют извлечь рекомендации для анализа заноса и могут быть использованы при формировании алгоритмов управления, составляющих основу программного обеспечения автомобильных тренажеров и средств активной безопасности.

В заключении диссертации приводятся основные выводы, в приложении — формулировки теорем, используемых при решении рассматриваемых задач.

Автор выражает искреннюю и глубокую благодарность своему научному руководителю профессору А.В. Влаховой за всестороннюю помощь, ценные советы и наставления, внимательное отношение и поддержку. Большая признательность А.А. Зобовой, П.А. Кручинину и М.Х. Магомедову за обсуждения, позволившие глубже понять суть рассматриваемых задач и существенно улучшить текст работы.

Глава 1

Занос аппарата при блокировке или пробуксовке колес одной из осей

Рассматривается начальная стадия движения двухосного четырехколесного аппарата после блокировки или пробуксовки колес одной из его осей в случае, когда колеса другой оси сохраняют или теряют сцепление с опорной плоскостью. Динамика аппарата исследуется с помощью «велосипедной»модели. С использованием подходов фракционного анализа, теории возмущений, метода фазовой плоскости и качественных методов интегрирования дифференциальных уравнений проведено аналитическое исследование возможности заноса аппарата, обозначена область применимости построенной модели, построены количественные оценки влияния параметров конструкции и угла поворота передних колес аппарата на занос и сформулирован алгоритм его подавления[1].

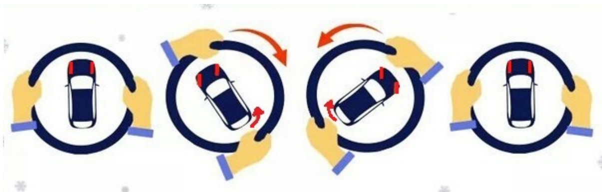


Рис. 1.1. Рекомендации по вождению автомобиля в случае заноса

1.1 Анализ велосипедной модели в литературе

Подробный обзор литературы, посвященный велосипедной модели, приводится в [14, 49, 53]. Здесь обсуждаются работы основоположников, где эта модель появилась впервые, и работы последних лет, не включенные в [14, 49, 53].

Возможность заноса колесного аппарата определяется динамикой поперечных и угловых движений его корпуса. Для ее описания важным фактором является анализ

[1]Основные результаты Главы 1 изложены на основании статей [16, 18], опубликованных в соавторстве с научным руководителем А.В. Влаховой, которой предложены постановки задач и методы их решения. Все результаты главы получены соискателем лично.

боковых сил, действующих на колеса. На эту тему было проведено много исследований. Одна из первых работ, написанная в 1908 году У. Ланчестером [103], связана с анализом управления автомобилем с помощью руля, однако, это исследование было неполным из-за отсутствия теории деформации шин. В 1925 году Д. Броулхит [71] опубликовал работу, в которой описал зависимость боковой силы, действующей на колесо, от угла увода, которая актуальна до сих пор и составляет основу почти всех моделей боковой динамики автомобиля.

Также одним из первых исследователей в области динамики колесных аппаратов с учетом деформируемости шин был М. Олли, который внедрил независимую переднюю подвеску на автомобили Cadillac и описал работу этой системы в 1934 году. В его работе [119], написанной в 1937 году, обсуждались исследования в области боковой динамики автомобиля. В ходе испытаний на лабораторных установках (седан Cadillac с высокой грузоподъемностью) Олли обнаружил возможность сделать заднюю подвеску более жесткой по сравнению с передней, что привело к независимой передней подвеске.

Еще одна значимая работа, касающаяся боковой динамики автомобиля, была написана в 1956 году Л. Сигелом [134]. Сигел, работавший в авиационной лаборатории Корнеллского университета, применял к колесным аппаратам аналитические методы, разработанные для динамики летательных аппаратов. Им были получены уравнения движения для линейной модели аппарата с тремя степенями свободы (рыскание, боковое движение и крен) при движении на повороте. Результаты математического моделирования были подкреплены экспериментальными испытаниями, которые привели к выводу, что используемая модель достаточно точно описывает боковую динамику автомобиля.

Обзор других работ о важности учета деформации шин при описании динамики автомобиля, относящихся к тем же и более поздним годам выхода, содержится, например, в [40, 100, 123] и др. Рассмотрение этого фактора приводит к увеличению числа степеней свободы моделей аппаратов, и, следовательно, к усложнению рассматриваемых уравнений. Во многих случаях динамику аппаратов можно описывать, используя более простую механическую модель. Например, статья [141], написанная Д. Уиткомом и У. Милликеном, также работавшими в авиационной лаборатории Корнеллского университета, была представлена одновременно с работой Сигела. В качестве модели транспортного средства выбиралась линейная система с двумя степенями свободы — один из вариантов велосипедной модели.

Велосипедная модель (рис. 1.3) и ее модификации широко используются для анализа движения колесных аппаратов и обсуждаются многими авторами (см., например, [1,8,14,16,18,22,24,40,42,50,57,84,88–90,114,136,142]). Она получается, если колеса передней и задней оси аппарата заменить, соответственно, одним эквивалентным передним и задним колесами и пренебречь тангажными (галопирующими), креновыми и вертикальными движениями корпуса, т.е. классическая велосипедная модель описывает колесный аппарат как плоское жесткое тело с двумя колесами.

Благодаря простой структуре велосипедная модель на протяжении многих лет применяется в аналитических и численных исследованиях работы рулевого управления, устойчивости автомобилей, а также систем активной безопасности транспортных средств [73, 80, 83, 96, 143, 145]. В системах управления часто используется линейная велосипедная модель аппарата с двумя степенями свободы, учитывающая только его боковые движения [66, 77, 86, 93, 104, 105, 110, 116–118, 131, 137, 139]. При ее построении предполагается, что аппарат движется по однородной опорной плоскости с постоянной продольной скоростью корпуса, а боковая сила, действующая на колесо, линейно зависит от угла увода (рис. 1.2).

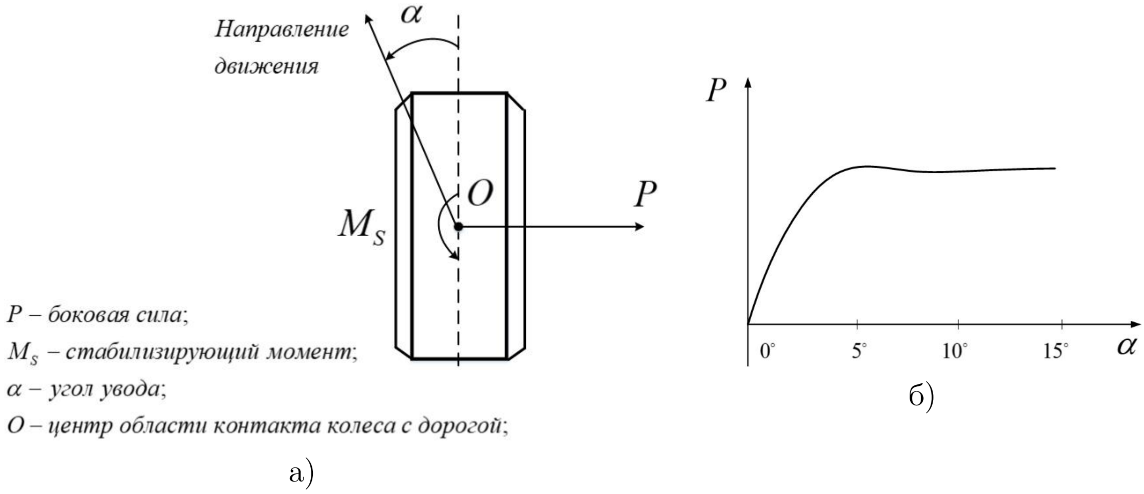


Рис. 1.2. Угол увода (а); Зависимость боковой силы от угла увода при постоянной нагрузке на колесо (б)

В литературе помимо термина велосипедная модель также часто используются и другие названия, такие как одноколейная модель, модель с двумя степенями свободы, плоская одномассовая модель. В англоязычной литературе употребляются термины bicycle model, single track model, two-wheel model и проч [13, 14].

В случае, когда при маневре транспортного средства его боковое ускорение не превышает 0,3 g (при этом угол увода не превышает $4 - 6°$), то есть характеристика боковой силы, действующей на колесо, по отношению к углу увода может быть аппроксимирована линейной зависимостью (рис. 1.2 б и 2.3 а), линейная велосипедная модель достаточно точно описывает его движение. При увеличении углов поворота рулевого управления, приводящем к возрастанию бокового ускорения транспортного средства, его прогнозируемая динамика для линейной велосипедной модели значительно отличается от результатов эксперимента. Это связано в том числе с тем, что зависимость между боковой силой, действующей на колесо, и углом его увода при возрастании последнего становится нелинейной [106]. (Угол увода — угол между продольной плоскостью колеса и вектором скорости его центра.) Здесь следует переходить к нелинейной велосипедной модели, которая учитывает изменение продольной скорости корпуса аппарата.

В [6] изложен вывод закона кинематического управления движением четырехколесного экипажа с жесткими колесами вдоль произвольной гладкой траектории. Параметром управления служит угол поворота переднего колеса велосипедной модели, определяемый углами поворота передних колес по принципу рулевого управления Аккермана. Приведены результаты численного моделирования, демонстрирующие адекватность этой модели управления.

В [58] проводится оценка боковой скорости автомобиля в современных системах активной безопасности. Метод основан на использовании фильтра Калмана и «велосипедной» модели, что обеспечивает ему высокое быстродействие. Метод реализован в виде алгоритма, который протестирован с использованием нелинейной модели автомобиля. Результаты свидетельствуют о достаточно высокой точности оценки боковой скорости при значениях бокового ускорения до $0,4g$.

В [25] с помощью моделирования в программной среде MATLAB показано, что велосипедная модель не позволяет достичь высокой точности для криволинейных маневров (например, движение по кругу или движение типа «змейка»). Для таких движений больше подходит плоская четырехколесная модель, учитывающая распределения масс и углов поворота управляемых колес.

Как показано во многих работах (см., например, [61, 69]) в условиях неэкстремального движения, например, когда поперечная и угловая скорости корпуса аппарата невелики, угол поворота передних колес мал, велосипедная модель достаточно точно описывает его реальное поведение. Когда аппарат выполняет маневры с большими боковыми ускорениями, велосипедная модель может оказаться некорректной из-за нелинейности сил, действующих на колесо, и необходимости учета динамики корпуса аппарата, связанного с возрастанием амплитуд его вертикальных, креновых и тангажных колебаний. По этой причине использование велосипедной модели ограничено. Целью многих авторов является создание модели, способной представлять поведение аппарата для широких диапазонов маневров. Ниже представлены варианты усовершенствования велосипедной модели аппарата, встречающиеся в литературе (например, [99, 101, 106, 109, 124, 129, 133, 140]).

Одной из новых концепций в разработке аппаратов является использование виртуальных моделей, то есть программных обеспечений, которые воспроизводят их поведение с высокой точностью. Это позволяет проводить испытания перед разработкой реального прототипа, сокращая затраты и время изготовления.

В [106, 129] проведено сравнение велосипедной и четырехколесной моделей автомобиля с помощью CarSim [75] — программного обеспечения для описания динамики транспортных средств, широко используемого в автомобильной промышленности. В ходе сравнения модель CarSim заменяла реальное транспортное средство. Показано, что траектории движения велосипедной модели автомобиля существенно отклоняются от реальных при больших углах поворота передних колес или высокой скорости движения. Предлагается нелинейная велосипедная модель, учитывающая продольную, поперечную и угловую (курсовую) динамику корпуса аппарата. На этапе планирования часто игнорируются или существенно упрощаются выражения для усилий, создаваемых шинами, и изменение нормальных реакций на каждом колесе (передача нагрузки). В [129] показано, что без учета зависимости передаваемой на колеса нагрузки от динамики корпуса результаты, доставляемые моделью CarSim и нелинейной велосипедной моделью, существенно различаются, в частности, из-за того, что боковая сила, действующая на колесо, зависит от нормальной реакции. Для описания эффектов динамической передачи нагрузки предложен алгоритм, который регулирует силу, действующую на колесо велосипедной модели, на основе измеряемого бокового ускорения аппарата. Результаты моделирования показывают, что траектории этой усовершенствованной велосипедной модели хорошо согласуются с моделью автомобиля CarSim, например, для маневров с синусоидальными поворотами рулевого управления. В [106] сравнение велосипедной модели с «полной» моделью автомобиля с 14 степенями свободы показывает, что движения велосипедной модели могут отличаться от реальных в зависимости от условий эксплуатации автомобиля. Проводилось сравнение поперечных ускорений корпуса и траекторий движения для маневров, например, с синусоидальными поворотами. Алгоритм настройки контактных сил, используемый в работе, позволяет уточнить велосипедную модель для описания динамики автомобиля, которая может быть использована для построения системы управления рулем.

Для описания передачи нагрузки также проводилось наложение голономных связей, обеспечивающих контакт колеса с опорной плоскостью как абсолютно твердых тел, что позволило добавить в уравнения велосипедной модели выражения для нормальных реакций вида (1.2.4). Эта идея была предложена для жесткого мотоцикла в работах [111], [132], для автомобиля — в [14, 16, 18, 22, 24], [130]. Полученную модель можно рассматривать как предельную для модели с подвеской, жесткость которой стремится к бесконечности. В [130] представлены численные расчеты, показывающие эффективность этой модели, которая демонстрирует множество интересных динамических эффектов реального автомобиля.

На базе линейной велосипедной модели, спроектированы модели различной сложности, включающие часть составляющих автомобиля: двигатель, трансмиссию, дифференциал [90, 112, 114, 142]. Например, в [112] в поиске возможности построить простую модель, описывающую большой диапазон движений автомобиля, исследованы две модели аппаратов: четырехколесная модель, учитывающая продольную, поперечную, угловую динамику автомобиля в горизонтальной плоскости и крен, и велосипедная модель, описывающая продольную, поперечную и угловую динамику. Учитывается нелинейность сил взаимодействия шин с дорогой, описываемых с помощью новой эмпирической экспоненциальной формулы, численно близкой к формуле Пацейки, но более простой для численного анализа. Целью работы является функциональная интеграция системы управления транспортного средства с передним и задним рулевым управлением, полным приводом и активной подвеской. Создание системы управления проводится на основании велосипедной модели, далее ее работа уточняется с использованием четырехколесной модели — велосипедная модель используется в качестве инструмента для начального задания весов минимизируемого функционала с дальнейшей корректировкой с четырехколесной моделью.

В [54, 55] предлагаются программные управления и управления в виде обратных связей, решающие задачу отслеживания программной траектории движения четырехколесного робота с использованием велосипедной модели, для четырехколесной программное управление и программные траектории получены только численно. Обе модели предполагают, что углы скольжения и угол поворота передних управляемых колес малы.

В [14, 16, 18, 20, 22, 24, 46, 53] рассматривается велосипедная модель для описания движений колесных аппаратов. При помощи методов фракционного анализа и теории сингулярных возмущений, проводится аналитический и численный анализ «быстрых» (изменения скоростей точек контакта колес) и «медленных» (изменения продольной, поперечной и угловой скоростей корпуса) движений системы.

В настоящее время все больший интерес в научном и промышленном автомобильном сообществе вызывают задачи беспилотного вождения. Планирование движения беспилотных аппаратов проводят для выяснения безопасных и удобных траекторий, следование которым позволяет избежать чрезмерных боковых ускорений во время движения. После внедрения систем беспилотного вождения ожидается значительный прогресс в области безопасности, комфорта движения и экономии топлива. Однако устранение человека-оператора ужесточает требования к работе систем управления рулем, которые должны обеспечить достижимость планируемых траекторий движения аппарата при наличии внешних возмущений. Велосипедная модель признана достаточно эффективной для разработки таких систем и оценки состояния аппаратов [60, 84, 95, 121, 126, 127].

При разработке систем беспилотного управления часто разделяют этапы планирования и управления, хотя обе эти задачи неразрывно связаны между собой. Из-за ограничений доступных вычислительных мощностей модель динамики аппарата часто сильно упрощается на этапе планирования, что может привести к потере точности на этапе управления. Велосипедная модель, как одна из самых простых моделей, также часто используется и при решении задач на этих двух этапах. В [107] сравниваются велосипедная модель аппарата с 3 степенями свободы, описывающими продольное, поперечное и угловое (курсовое) движения аппарата, для планирования его траекторий и его точная четырехколесная модель с 14 степенями свободы. Показано, что велосипедная модель может быть использована в системах прогнозирования траекторий Model Predictive Control (MPC). Рассматривается динамика беспилотного колесного аппарата (AGV), соизмеримого или превышающего средний размер пассажирского транспортного средства. Модель MPC сформирована на основе алгоритма обхода препятствий для высокоскоростных крупногабаритных аппаратов AGV, воспринимает окружающую среду только через информацию, предоставляемую бортовым датчиком, учитывает запаздывание и управления и динамические ограничения транспортного средства, а также обеспечивает плавные и непрерывные оптимальные решения с точки зрения минимизации времени в пути. Обеспечение безопасности движения аппарата выражается в том, чтобы избежать отрыва одного колеса. Задача обхода препятствий формулируется как многоступенчатая задача оптимального управления. Результаты моделирования показывают, что предложенный алгоритм способен формировать управляющие воздействия, которые позволяют избежать препятствий, гарантируя при этом динамическую безопасность движения аппарата.

Годом позже те же авторы в [108] представили основанный на MPC и велосипедной модели аппарата алгоритм обхода препятствий, оптимизирующий продольную скорость корпуса аппарата и угол поворота передних колес одновременно, чтобы безопасно и максимально быстро доставить AGV к месту назначения. Одним из требований безопасности, как и в [107], служит условие положительности нормальных реакций для всех колес. Для демонстрации эффективности алгоритма проведено два набора численных расчетов, показывающих улучшение эксплуатационных характеристик транспортного средства и возможность безопасно обходить препятствия, с которыми не справляется рулевое управление.

В [102] обсуждается управление ускорением, тормозом и передними колесами транспортного средства с использованием системы MPC для беспилотных аппаратов. Проводится сравнение кинематической модели, описываемой уравнениями

$$\begin{aligned} &\dot{x} = V\cos(\psi+\beta), \quad \dot{y} = V\sin(\psi+\beta) \\ &\dot{\psi} = \frac{V}{B}\sin\beta, \quad \dot{V} = a, \quad \beta = \operatorname{tg}^{-1}\frac{B}{A+B}\operatorname{tg}\Delta \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

и динамической велосипедной модели, описываемой уравнениями

$$\begin{aligned} &\ddot{x} = \dot{\psi}\dot{y} + a_x, \quad \ddot{y} = -\dot{\psi}\dot{x} + \frac{2}{M}(P_{y1}\cos\Delta + P_{y2}), \quad \ddot{\psi} = \frac{2}{I_z}(AP_{y1} - BP_{y2}) \\ &\dot{X} = \dot{x}\cos\psi - \dot{y}\sin\psi, \quad \dot{Y} = \dot{x}\sin\psi + \dot{y}\cos\psi \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

где для последней рассматривались линейные зависимости контактных сил от угла увода, исходя из возможностей прогнозирования состояний аппарата по сравнению с экспериментальными данными, доставляемыми переднеприводным автомобилем, движущимся по извилистой трассе на калифорнийском испытательном полигоне. Здесь x, y — координаты центра масс в инерциальной системе координат (X, Y); ψ — угол курса; β — угол текущей скорости центра масс относительно продольной оси автомобиля; Δ — угол поворота передних колес; V — скорость автомобиля; a — ускорение центра масс; M — масса автомобиля; I_z — его момент инерции относительно вертикальной оси; A и B — продольные расстояния от центра масс автомобиля до передней и задней осей соответственно; P_{y1}, P_{y2} — поперечные составляющие контактных сил взаимодействия колес с опорной плоскостью в системе координат, связанных с колесами. Модели дискретизируются с помощью метода Эйлера и с шагами времени 100 мс или 200 мс. Показано, что кинематическая модель, дискретизированная при 200 мс имеет меньшие ошибки прогноза по сравнению с 100 мс и способна работать аналогично динамической модели, дискретизированной при 100 мс. Результаты этого сравнения показывают хорошую работу автономного автомобильного контроллера, включающего систему прогнозирования MPC на базе кинематической велосипедной модели.

Во многих работах (см., например, [59,74]) авторы полагаются на кинематическую велосипедную модель аппарата. Например, в [70] рассматривается активное рулевое управление при маневрах с двойной сменой полосы на скользких поверхностях, таких как заснеженные дороги. Результаты моделирования показали, что сложные маневры рулевого управления нетрудно получить с помощью обратной связи MPC, что позволяет стабилизировать транспортное средство со скоростью до 17 км/ч. Результаты хорошо коррелируют с результатами внутренних исследований Ford. Для реализации таких сложных движений часто используется модель MPC, которая включает модель аппарата, позволяющую одновременно планировать траектории и вычислять соответствующее допустимое управление.

Другие авторы рассматривают динамические велосипедные модели [82,87,97,107, 125]. В [64] рассматривается выполнение ряда агрессивных маневров аппаратов, например, при движении на высокой скорости или в условиях низкого сцепления колес с опорной плоскостью. Для обеспечения их безопасности большое значение имеет планирование близких к пределу управляемости траектории движения, которое ввиду сложности динамики транспортного средства не позволяет использовать современные методы, такие как MPC. Рассматривается модель автомобиля с 9 степенями свободы, которая помимо продольных, поперечных и угловых (курсовых) движений корпуса учитывает также изменение углов крена и тангажа, динамику колес и проскальзывания шин в продольном и поперечном направлениях (но не учитывает динамику двигателя). Управлениями служат моменты, приложенные к колесам со стороны двигателя и тормозных колодок и угол поворота передних колес. Результаты моделирования показывают, что такая модель позволяет судить о ходе маневров с достаточной точностью (без увеличения времени вычислений) и может найти применение для планирования чрезвычайных ситуаций, требующих выполнения агрессивных маневров, или для планирования траектории на высокой скорости, например в гоночных приложениях.

Классификация кинематических и динамических моделей колесных мобильных роботов представлена в [72].

В [128] проводится сравнение велосипедной модели без скольжения и проскальзывания колес с более полной моделью с 9 степенями свободы, учитывающей изменение продольной, поперечной и угловых рыскающих, тангажных и креновых скоростей корпуса, а также угловых скоростей собственного вращения четырех колес; вторая учитывает продольные и поперечные проскальзывания колес и передачу нагрузки между колесами. Показано, что в случае, когда боковое ускорение транспортного средства не превышает $0,5\kappa g$ (κ — коэффициент трения при взаимодействии колес с опорной плоскостью), велосипедная модель позволяет с приемлемой точностью описать его движения. Проводилось несколько имитационных экспериментов с различными постоянными углами поворота передних колес, начальной продольной скоростью корпуса 10 м/с и последовательными командами крутящего момента, приложенного к передним колесам. Таким образом, имитационная модель транспортного средства имеет заниженную проходимость по сравнению с кинематической моделью при высокой скорости движения из-за наличия скольжения. Таким образом, велосипедная модель является достаточной для моделирования движения низкоскоростных транспортных средств, но недостаточно точна для транспортных средств, движущихся с высокой скоростью.

Для повышения точности велосипедной модели было разработано еще несколько подходов. В [120] рассмотрена боковая динамика транспортного средства с помощью велосипедной модели, которая учитывает нелинейность сил взаимодействия шин с дорогой, описываемых с помощью формулы Пацейки. Путем исследования траекторий плоскости, определяющей зависимость скорости угла бокового увода передних колес от угла бокового увода. Проводится количественная оценка области устойчивости при различных скоростях движения, углах поворота рулевого переднего колеса и коэффициента трения колес с дорогой. Результаты полученные для нулевого угла поворота рулевого колеса и максимального значения коэффициента трения колес с дорогой, равного 1, показывают, что область устойчивости симметрична относительно начала координат. При установке угла поворота рулевого колеса на 0,02 рад координаты положения равновесия становятся положительными, что приводит к уменьшению запаса устойчивости. Описаны конструкция и результаты испытаний рулевого управления и управления торможением для создания момента по углу курса, позволяющему стабилизировать транспортное средство. Имитационные испытания показали, что при наличии управления транспортное средство способно выполнять, например, круговые маневры.

В [138] проводится построение автоматизированного рулевого управления с использованием аналитических подходов, требующих упрощения рассматриваемых механических моделей. Эти (неголономные) модели построены в предположении отсутствия проскальзвания колес в продольном направлении [82, 123]. Большинство исследований в области автомобильного рулевого управления проводится с использованием линейных уравнений, описывающих движение в малых отклонениях от стационарного режима. Однако такие модели не всегда позволяют построить общую картину динамики аппарата. Влияние нелинейностей боковой силы на динамику колес было изучено в [122]. В [138] исследована нелинейная динамика автомобиля с использованием аналитического и численного бифуркационного анализа при применении PD регулятора, предназначенного для стабилизации прямолинейного движения вперед и назад автомобилей и комбайнов. Автомобиль описывается велосипедной моделью с малыми массами колес. Анализ устойчивости положения равновесия показал, что автомобиль может потерять устойчивость переходя как к колебательным, так и к не колебательным движениям, соответствующим бифуркациям Хопфа и «вилы» соответственно [23]. Обсуждается простой случай продуктовой тележки (задние колеса не поворачиваются вокруг вертикальной оси, передние колеса поворотные), чтобы охарактеризовать поведение аппарата, когда управление не применяется: доказано, что без демпфирования переднего рояльного колеса прямое прямолинейное движение глобально устойчиво, в то время как обратное прямолинейное движение неустойчиво. Добавление демпфирования может стабилизировать обратное движение при низкой скорости. Однако, эта стабилизация локальна, и большие возмущения выводят систему из равновесия. Показано, что динамика автомобилей качественно аналогична динамике демпфированных продуктовых тележек. При движении вперед устойчивость может быть обеспечена и для больших возмущений, но обратное движение устойчиво только для скоростей, не превышающих 2 м/с и малых возмущений.

Целью [61, 62] является повышение устойчивости транспортного средства. Проводится упрощенное моделирование движения автомобиля с использованием велосипедной модели и имитационное моделирование с помощью программного обеспечения Matlab/Simulink для оценки управляемости и устойчивости угловой скорости корпуса для различных методов управления. В [61] анализ производительности и динамического поведения модели проводится с использованием ПИД-регулятора и метода линейного квадратичного управления (LQR). Получено сравнение характеристик устойчивости угловой скорости корпуса транспортного средства с использованием этих методов управления: для линейной велосипедной модели угловая скорость корпуса близка к желаемым значениям при обоих вариантах управления; что касается траекторий движения автомобиля, то ПИД-регулятор более эффективен, чем LQR-контроллер. В [62] в качестве моделей управления представлены традиционный ПИД-регулятор и нечеткий ПИД-регулятор. Результаты анализа показывают, что угловая скорость корпуса более близка к желаемым значениям при модели управления с нечетким ПИД-регулятором по сравнению с традиционным.

В [94] для исследования боковой динамики аппарата используется линейная велосипедная модель с постоянной продольной скоростью корпуса. Учитывая все допущения, она может быть использована преимущественно для описания маневров, когда боковое ускорение транспортного средства не превышает 5 м/с^2. В этом диапазоне значения угла увода передних и задних колес имеют порядок 3°, то есть деформацию шины можно рассматривать как линейную. Проведены дорожные испытания, в ходе которых измерялись угол поворота передних колес, угловая скорость корпуса аппарата, его боковое ускорение и угол увода колес. Использовался малогабаритный автомобиль MPV-класса (многоцелевой автомобиль), движущийся со скоростью 80 км/ч, для углов поворота рулевого колеса, не превышающих 50°, и бокового ускорения корпуса не более 5 м/с^2. Точность математической модели определялась путем сравнения результатов дорожных испытаний с результатами численного моделирования. Показано, что относительная точность модели, как для установившегося режима угловой скорости корпуса, так и времени ее изменения составляет примерно 20%. Угловая скорость корпуса для рассматриваемых движений близка к результатам моделирования, что говорит о приемлемости используемой модели.

Проблема использования моделей аппаратов, включающих динамику колес, заключается в том, что их вращение обычно происходит гораздо скорее поперечных и угловых движений корпуса аппарата (на характерных временах порядка $10^{-2} - 10^{-3}$ с и 10^{-1} с соответственно [65])). В результате модели, учитывающие динамику колес, требуют интегрирования с малым шагом по времени, что значительно усложняет или делает невозможными вычисления в реальном времени. В [64] рассматривается подход, когда вместо непосредственного использования динамических уравнений автомобиля в реальном времени, в автономном режиме вычисляется набор продольных, поперечных и угловых скоростей корпуса для различных начальных условий. Затем проводится аппроксимация области, определяемым этим набором, которая позволяет описать динамику аппарата с использованием интегральной модели, пригодной для реализации в качестве планировщика MPC на интервалах времени большей протяженности. Другие авторы изучали аналогичные аппроксимации для множества достижимых ускорений автомобиля. Соответствующие им значения продольных и поперечных составляющих контактных сил должны оказаться внутри конуса трения при движении колес без скольжения относительно дороги и вне его в противном случае [78, 79, 91]. В настоящей работе проблема интегрирования системы дифференциальных уравнений с сильным разнесением постоянных времени изменения переменных решается с применением методов фракционного анализа и теории сингулярных возмущений (разделения движений) [14, 46], которые дают возможность построить приближенные модели невысокого порядка, позволяющие исследовать эти переменные порознь. Такой подход решает проблему интегрирования исходной, жесткой, системы в реальном времени и дает возможность развивать аналитические подходы к исследованию движения колесных аппаратов и построению законов управления, в том числе обеспечивающих безопасность их движения.

Анализ перечисленных в этом разделе работ и анализ литературы, проведенный в [14,49,53] показывает, что велосипедная модель может быть использована для описания динамики колесных аппаратов, обладающей следующей совокупностью свойств:

- малые углы наклоны корпуса;
- малые различия между характеристиками сцепления левых и правых колес одной оси с опорной плоскостью;
- малые углы поворота передних колес;
- малые углы увода колес;
- небольшие поперечная и угловая скорости корпуса по сравнению с его продольной скоростью и угловой скоростью вращения колес соответственно.

Указанные предположения используются при решении задач, рассматриваемых в главе 1 настоящей работы.

1.2 Постановка задачи и математическая модель

Рассмотрим [15–18, 44] движение двухосного четырехколесного аппарата по горизонтальной однородной плоскости. В результате блокировки или пробуксовки колеса одной из осей аппарата теряют сцепление с опорной плоскостью (начинают скользить), что может привести к его заносу. Будем изучать начальную стадию динамики аппарата после завершения процессов блокировки или пробуксовки колес [22], когда поперечная и угловая скорости его корпуса невелики. В этом случае силы взаимодействия колес одной оси аппарата с опорной плоскостью различаются мало, и для описания заноса аппарата может быть использована [14, 22, 24, 53] (см. также раздел 1.1) велосипедная модель (рис. 1.3), в рамках которой два передних колеса заменяют одним эквивалентным передним колесом, два задних – одним задним и пренебрегают наклонами его корпуса. Управляемым является переднее колесо, ось заднего колеса фиксирована. Будем считать, что колесо аппарата, не потерявшее сцепление с опорной плоскостью, не проскальзывает относительно нее (при этом на обобщенные координаты и скорости системы накладываются неголономные связи); колесо, потерявшее сцепление с опорной плоскостью взаимодействует с ней посредством сухого трения. Составим уравнения движения исследуемой модели.

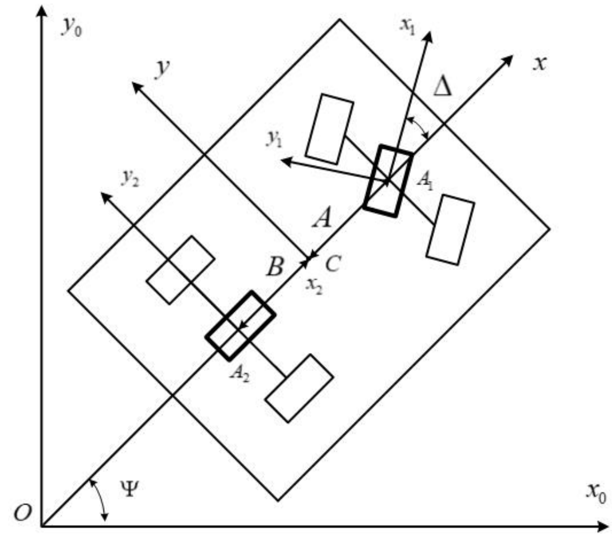


Рис. 1.3. Велосипедная модель четырехколесного аппарата

Свяжем [12–14, 53] с опорной плоскостью неподвижную систему координат $Ox_0y_0z_0$, с корпусом аппарата, его первым — передним и вторым — задним колесами — системы координат $Cxyz$, $A_1x_1y_1z_1$ и $A_2x_2y_2z_2$ соответственно. Оси Oz_0, Cz, A_1z_1 и A_2z_2 направлены по вертикали; оси Cx, A_1x_1 и A_2x_2 — вдоль продольных осей симметрии корпуса и колес соответственно. Положение аппарата определяется декартовыми координатами X, Y точки C в системе координат $Ox_0y_0z_0$, углом Ψ поворота его корпуса вокруг оси Cz (углом курса), углами Θ_1 и Θ_2 поворота переднего и заднего колес вокруг осей A_1y_1 и A_2y_2 их вращения и углом Δ поворота переднего колеса относительно корпуса вокруг оси A_1z_1. Рассматривая случай, когда отношение масс колеса, механизма рулевого управления и двигателя к массе аппарата мало, будем далее предполагать, что центр масс аппарата совпадает с точкой C.

Составим уравнения движения велосипедной модели аппарата из уравнений движения точки C в проекциях на оси трехгранника $Cxyz$, уравнений изменения его кинетического момента относительно точки C в проекциях на оси Cy и Cz, а также уравнений изменения кинетического момента переднего колеса относительно осей A_1y_1,

A_1z_1, заднего колеса относительно оси A_2y_2 и кинематических соотношений [12–14,53]

$$
\begin{aligned}
&M\dot{V}_x = P_{x1}\cos\Delta - P_{y1}\sin\Delta + P_{x2} + MV_y\Omega_z + F_x\\
&M\dot{V}_y = P_{x1}\sin\Delta + P_{y1}\cos\Delta + P_{y2} - MV_x\Omega_z + F_y\\
&N_1 + N_2 - Mg = 0\\
&-AN_1 + BN_2 - (P_{x1}\cos\Delta - P_{y1}\sin\Delta + P_{x2})H = 0\\
&I_z\dot{\Omega}_z = (P_{x1}\sin\Delta + P_{y1}\cos\Delta)A - P_{y2}B + M_z + M_{S1} + M_{S2} \qquad (1.2.1)\\
&I_1\dot{\Omega}_1 = -P_{x1}R + L_1, \quad I_2\dot{\Omega}_2 = -P_{x2}R + L_2\\
&I_{z1}(\dot{\Omega}_\Delta + \dot{\Omega}_z) = M_\Delta + M_{S1}\\
&\dot{X} = V_x\cos\Psi - V_y\sin\Psi, \quad \dot{Y} = V_x\sin\Psi + V_y\cos\Psi\\
&\dot{\Psi} = \Omega_z, \quad \dot{\Theta}_1 = \Omega_1, \quad \dot{\Theta}_2 = \Omega_2, \quad \dot{\Delta} = \Omega_\Delta
\end{aligned}
$$

Точкой обозначено дифференцирование по времени T; M — масса аппарата; I_z — его момент инерции относительно оси Cz; $I_i = m\rho_i^2$ $(i = 1, 2)$, $I_{z1} = m\rho_{z1}^2$ — осевые моменты инерции колес и момент инерции переднего колеса относительно оси A_1z_1; m, ρ_i, ρ_{z1} — масса колеса и соответствующие радиусы инерции; R — радиус колес; A и B — продольные расстояния от точки C до осей A_1y_1 и A_2y_2; H — высота точки C над опорной плоскостью Ox_0y_0; P_{xi}, P_{yi} и N_i $(i = 1, 2)$ — проекции касательной и нормальной составляющих контактных сил взаимодействия i-го колеса с опорной плоскостью на оси A_ix_i, A_iy_i и A_iz_i трехгранника $A_ix_iy_iz_i$; L_i — момент со стороны двигателя и тормозных колодок, приложенный к i-му колесу по направлению оси A_iy_i; M_Δ — момент рулевого привода, приложенный к переднему колесу по направлению оси A_1z_1; M_{Si} — проекция момента трения верчения в области контакта i-го колеса с опорной плоскостью на ось A_iz_i; F_x, F_y, M_z — проекции внешних возмущающих сил и моментов (для простоты считается, что равнодействующая F_x продольных сил приложена в точке C); g — ускорение свободного падения[2]. При выбранном направлении движения далее будем полагать $V_x(0) > 0$. Как и в работах [14, 22, 24], в силу условий

$$
m \ll M, \quad I_i,\, I_{z1} \ll I_z \qquad (1.2.2)
$$

при записи уравнений изменения кинетического момента аппарата не учитываются проекции кинетических моментов его колес. (Второе неравенство (1.2.2) вытекает из первого в силу конечности радиусов инерции составляющих рассматриваемой системы.)

[2]В настоящей работе используются те же обозначения, что и в [12–14, 53].

Используя велосипедную модель, ограничимся случаем малых поперечной и угловой скоростей корпуса аппарата, а также углов поворота его передних колес относительно корпуса (вокруг вертикальных осей) (см. раздел 1.1) и будем рассматривать следующие диапазоны изменения этих переменных

$$|V_y| \sim |\Omega_z|(A+B) \lesssim V_x|\Delta|, \quad |\Delta| \ll 1 \tag{1.2.3}$$

Вывод уравнений (1.2.1) и обсуждение погрешности сделанных предположений, включая возможность пренебрежения гироскопическим моментом вала двигателя, можно провести при помощи (1.2.2) и (1.2.3) по аналогии с [53].

Из третьего и четвертого уравнений системы (1.2.1) следуют выражения, связывающие нормальные реакции с касательными составляющими контактных сил

$$N_1 = \frac{MgB - (P_{x1}\cos\Delta - P_{y1}\sin\Delta + P_{x2})H}{A+B}, \qquad N_2 = Mg - N_1 \tag{1.2.4}$$

Будем рассматривать значения

$$N_1, N_2 > 0 \tag{1.2.5}$$

отвечающие движению аппарата без отрыва колес от опорной плоскости.

Для описания скольжения колес аппарата по опорной плоскости в работе рассматриваются две модели сухого трения: традиционная модель кулонова трения и модель поликомпонентного сухого трения В.Ф. Журавлёва [3,30,34]. При небольших угловых скоростях Ω_z, Ω_Δ вращения корпуса аппарата и его переднего колеса вокруг вертикальной оси первая модель применима в случае пренебрежимо малых областей контакта его колес с опорной плоскостью, вторая позволяет учесть ее размеры.

Для модели трения Кулона [5,10,26] выражения для касательных составляющих контактных сил, действующих на i-е колесо аппарата, имеют вид [14,22,53]

$$P_{xi} = -\kappa_{xi} N_i \frac{U_{xi}}{\sqrt{U_{xi}^2 + U_{yi}^2}}, \quad P_{yi} = -\kappa_{yi} N_i \frac{U_{yi}}{\sqrt{U_{xi}^2 + U_{yi}^2}} \tag{1.2.6}$$

$$\begin{gathered} U_{x1} = V_x\cos\Delta + (V_y + \Omega_z A)\sin\Delta - \Omega_1 R \\ U_{y1} = -V_x\sin\Delta + (V_y + \Omega_z A)\cos\Delta \\ U_{x2} = V_x - \Omega_2 R, \quad U_{y2} = V_y - \Omega_z B \end{gathered} \tag{1.2.7}$$

где κ_{xi} и κ_{yi} — коэффициенты кулонова трения скольжения в продольном и поперечном направлениях к плоскости симметрии i-го колеса; N_i определены в (1.2.4) и (1.2.5); U_{xi} и U_{yi} — проекции скорости точки контакта i-го колеса с опорной плоскостью Ox_0y_0 на оси A_ix_i и A_iy_i соответственно. Входящие в систему (1.2.1) моменты верчения M_{Si} полагаются равными нулю.

Далее будем считать коэффициенты трения одинаковыми:

$$\kappa_{xi} = \kappa_{yi} = \kappa \qquad (i = 1, 2) \tag{1.2.8}$$

Для модели поликомпонентного сухого трения В.Ф. Журавлёва касательные составляющие контактных сил и моменты верчения вычисляются по формулам, построенным в [3] для области контакта, которая представляет собой круг радиуса

$$r \ll R \tag{1.2.9}$$

$$P_{xi} = -\kappa N_i \frac{U_{xi}}{\sqrt{U_{xi}^2 + U_{yi}^2} + \beta|\Omega_z|r}, \quad P_{yi} = -\kappa N_i \frac{U_{yi}}{\sqrt{U_{xi}^2 + U_{yi}^2} + \beta|\Omega_z|r}$$

$$M_{Si} = -\gamma\kappa N_i \frac{\Omega_z r^2}{\alpha\sqrt{U_{xi}^2 + U_{yi}^2} + |\Omega_z|r} \tag{1.2.10}$$

$$\alpha = 2\int\limits_0^1 \rho^2\sigma(\rho)d\rho \Big/ \int\limits_0^1 \rho^3\sigma(\rho)d\rho, \quad \beta = 2\int\limits_0^1 \rho\sigma(\rho)d\rho \Big/ \int\limits_0^1 \sigma(\rho)d\rho, \quad \gamma = 2\pi r^3 \int\limits_0^1 \rho^2\sigma(\rho)d\rho$$

$\rho = \chi/r$; χ — расстояние от точки области контакта до центра области контакта; $\sigma(\rho)$ — распределение нормальных давлений по области контакта. Выражения для U_{xi} и U_{yi} были введены при записи формул (1.2.7). Для равномерного распределения нормальных давлений по области контакта

$$\sigma(\rho) = \frac{N_i}{\pi r^2}, \quad \alpha = \frac{8}{3}, \quad \beta = 1, \quad \gamma = \frac{2}{3} \tag{1.2.11}$$

Для распределения нормальных давлений по закону Герца [98], используемого в [3,28] при анализе динамики колеса,

$$\sigma(\rho) = \frac{3N_i}{2\pi r^2}\sqrt{1-\rho^2}, \quad \alpha = \frac{15\pi}{16}, \quad \beta = \frac{8}{3\pi}, \quad \gamma = \frac{\pi}{16} \tag{1.2.12}$$

Для параболического распределения нормальных давлений

$$\sigma(\rho) = \frac{2N_i}{\pi r^2}(1-\rho^2), \quad \alpha = \frac{16}{5}, \quad \beta = \frac{3}{4}, \quad \gamma = \frac{8}{15} \tag{1.2.13}$$

Сравнение формул (1.2.11)–(1.2.13) показывает, что для трех часто рассматриваемых случаев распределения нормальных давлений входящие в (1.2.10) постоянные α, β, γ имеют одинаковые порядки величин. Выражения (1.2.6) получаются из (1.2.10) при $\alpha, \beta, \gamma = 0$.

Блокировка i-го колеса происходит при подаче тормозного момента $L_i < 0$, по величине превосходящего максимальное значение момента продольной составляющей контактной силы, которое будем считать равным моменту силы кулонова трения скольжения: $|L_i| > \kappa N_i R$. При этом получим $\Omega_i \to 0$. Выражения для продольных и поперечных составляющих P_{xi}, P_{yi} контактных сил, действующих на заблокированное колесо, будем вычислять из выражений (1.2.6), (1.2.7) при $\Omega_i = 0$. Продольная составляющая скорости точки контакта заблокированного колеса с опорной плоскостью положительна:

$$U_{xi} > 0 \tag{1.2.14}$$

соответственно, $P_{xi} < 0$.

Пробуксовка i-го колеса происходит в результате подачи разгонного момента $L_i > 0$, превосходящего максимальное значение момента продольной составляющей контактной силы: $L_i > \kappa N_i R$. Это приводит к разгону колеса с проскальзыванием, до угловой скорости пробуксовки Ω_i^0 =const, определяемой характеристиками двигателя аппарата. Выражения для продольных и поперечных составляющих контактных сил, действующих на пробуксовывающее колесо, получаются из (1.2.6), (1.2.7) при $\Omega_i = \Omega_i^0$. Продольная составляющая скорости точки контакта пробуксовывающего колеса с опорной плоскостью отрицательна:

$$U_{xi} < 0 \tag{1.2.15}$$

при этом продольная составляющая контактной силы на этом колесе направлена вперед по ходу движения аппарата: $P_{xi} > 0$.

Уравнение $I_i\dot{\Omega}_i = -P_{xi}R + L_i$ системы (1.2.1) после завершения быстрых процессов блокировки (пробуксовки) следует исключить из рассмотрения, так как значение угловой скорости i-го колеса становится постоянным: $\Omega_i = 0$ или $\Omega_i = \Omega_i^0$ при блокировке или пробуксовке соответственно.

Процессы блокировки или пробуксовки, в ходе которых изменяются продольные составляющие U_{xi} скоростей точек контакта колес с опорной плоскостью, происходит существенно быстрее процесса изменения переменных V_y, Ω_z и U_{yi}, определяющих поперечную и угловую динамику корпуса аппарата, а также изменение поперечных составляющих точек контакта колес с опорной плоскостью. Это нетрудно показать при помощи подходов из раздела 2.3 или [14, 53].

Как указывалось во Введении, движение, для которого колеса не заблокированной или не пробуксовывающей оси сохраняют сцепление с опорной плоскостью, рассматривается в рамках модели непроскальзывания, а контакт заблокированных или пробуксовывающих колес — в рамках модели (1.2.6), (1.2.7) трения Кулона. Случай, когда все колеса аппарата теряют сцепление с опорной плоскостью, рассматривается как при помощи модели (1.2.6), (1.2.7), так и в рамках модели (1.2.9)–(1.2.13) поликомпонентного сухого трения В.Ф. Журавлёва.

Выражения для касательных составляющих контактной силы на непроскальзывающем колесе и соответствующие уравнения движения модели получаются при помощи метода составления уравнений Лагранжа с множителями [5, 7, 10, 26].

Рассмотрим механическую систему с голономными, стационарными, идеальными связями, положение которой описывается вектором обобщенных координат $\mathbf{q} = (q_1, \ldots, q_n)^T$ (T — знак транспонирования). Динамические свойства системы задаются ее кинетической энергией $\mathtt{T} = \dfrac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T\mathbf{A}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}}$ ($\mathbf{A}(\mathbf{q})$ — симметрическая, положительно определенная матрица инерционных коэффициентов) и вектором обобщенных сил $\mathbf{Q} = (Q_1, \ldots, Q_n)^T$, включающим потенциальные силы.

Наложим на систему m дополнительных неголономных связей

$$\begin{aligned} &\mathbf{f} = \mathbf{C}(\mathbf{q})\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)^T, \quad \mathbf{C} \;=\; \|\, c_{ki}(\mathbf{q}) \,\| \\ &m \leq n \quad (i = 1, \ldots, n;\; k = 1, \ldots, m) \end{aligned} \tag{1.2.16}$$

Уравнения движения системы со связями (1.2.16), получившие название уравнений Лагранжа с множителями, имеют вид [5, 10, 26]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathtt{T}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)^T - \left(\frac{\partial \mathtt{T}}{\partial \mathbf{q}}\right)^T = \mathbf{Q} + \mathbf{C}^T\boldsymbol{\lambda} \tag{1.2.17}$$

Система (1.2.17), которая решается совместно с уравнением связей (1.2.16), образована $2n + m$ уравнениями для отыскания $2n$ неизвестных обобщенных координат и скоростей $\mathbf{q}$ и $\dot{\mathbf{q}}$, а также m неопределенных множителей $\boldsymbol{\lambda} \;=\; (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)^T$.

В задаче, которая рассматривается в настоящей работе, вектор динамических переменных имеет вид $\dot{\boldsymbol{\pi}} = (V_x, V_y, \Omega_z, \Omega_1, \Omega_\Delta, \Omega_2)^T$. Связи (1.2.16), которые в соответствии с (1.2.7) имеют вид

$$f_1 = U_{xi} = 0, \qquad f_2 = U_{yi} = 0 \tag{1.2.18}$$

запрещают проскальзывание i-го колеса, не потерявшего сцепление с опорной плоскостью. Соответствующие (1.2.17) уравнения могут быть приведены [14] к виду (1.2.1), где неизвестные функции времени λ_1, λ_2 — реакции связей — представляют собой выражения для касательных составляющих контактной силы [14], действующей на непроскальзывающее колесо: $\lambda_1 = P_{xi}$, $\lambda_2 = P_{yi}$. Область применимости модели (1.2.17), (1.2.18) определяется неравенством

$$\left(\frac{P_{xi}}{\kappa_{xi}N_i}\right)^2 + \left(\frac{P_{yi}}{\kappa_{yi}N_i}\right)^2 < 1 \tag{1.2.19}$$

при выполнении которого вектор контактной силы на непроскальзывающем i-м колесе находится внутри конуса трения, построенного в его точке контакта с опорной плоскостью.

Возможность использования уравнений Лагранжа с множителями в рассматриваемой задаче может быть обоснована [14, 24, 53] путем проведения предельного перехода в свободной от связей (1.2.18) системе, где за счет предположения о малой деформируемости i-го колеса при взаимодействии с опорной плоскостью допускаются его малые смещения (см. (2.2.7), (2.2.11), (2.2.13) и рис. 2.3 а), к бесконечным значениям жесткости колеса. Такое обоснование справедливо [3] при небольших угловых скоростях верчения колес в областях контакта с опорной плоскостью в пренебрежении неравномерностью распределения касательных напряжений в области взаимодействия.

1.3 Движение аппарата при заносе одной из осей

1.3.1 Занос передней оси аппарата с заблокированными передними колесами

1.3.1.1 Математическая модель

В случае движения аппарата с заблокированным передним колесом (его контакт с опорной плоскостью описывается моделью кулонова трения) и задним колесом, не потерявшем сцепление с опорной плоскостью, связи, запрещающие проскальзывание этого колеса, имеют вид $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1, & f_2 \end{pmatrix}^T = \mathbf{0}$, где, в соответствии с (1.2.18) и двумя последними выражениями (1.2.7),

$$f_1 = U_{x2} = V_x - \Omega_2 R = 0, \qquad f_2 = U_{y2} = V_y - \Omega_z B = 0 \tag{1.3.1}$$

Вычислим матрицу

$$\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\boldsymbol{\pi}}}\right)^T = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial V_x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial V_y} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \Omega_z} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \Omega_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \Omega_\Delta} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \Omega_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial V_x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial V_y} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \Omega_z} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \Omega_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \Omega_\Delta} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \Omega_2} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -B \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -R & 0 \end{pmatrix} \tag{1.3.2}$$

При наличии двух связей (1.3.1) вектор $\boldsymbol{\lambda}$ неопределенных множителей Лагранжа (реакций связей) содержит две компоненты $\boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1, & \lambda_2 \end{pmatrix}^T$.

Из (1.3.2) следует соотношение

$$\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\boldsymbol{\pi}}}\right)^T \boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ -B\lambda_2 \\ 0 \\ 0 \\ -R\lambda_1 \end{pmatrix} \tag{1.3.3}$$

В соответствии с (1.2.1), (1.2.17), (1.3.3), уравнения Лагранжа с множителями, определяющие динамику аппарата в рассматриваемом случае, записываются в форме

$$
\begin{aligned}
&M\dot{V}_x = P_{x1}\cos\Delta - P_{y1}\sin\Delta + MV_y\Omega_z + F_x + \lambda_1 \\
&M\dot{V}_y = P_{x1}\sin\Delta + P_{y1}\cos\Delta - MV_x\Omega_z + F_y + \lambda_2 \\
&I_z\dot{\Omega}_z + I_{z1}\dot{\Omega}_\Delta = (P_{x1}\sin\Delta + P_{y1}\cos\Delta)A + M_z - \lambda_2 B \qquad (1.3.4)\\
&I_{z1}(\dot{\Omega}_\Delta + \dot{\Omega}_z) = M_\Delta \\
&I_2\dot{\Omega}_2 = L_2 - \lambda_1 R
\end{aligned}
$$

Система уравнений (1.3.4) решается совместно с уравнениями связей (1.3.1).

Будем рассматривать V_x, Ω_z, Δ в качестве независимых переменных и исключим из системы (1.3.1), (1.3.4) зависимые переменные — поперечную составляющую V_y скорости центра масс аппарата и угловую скорость Ω_2 вращения заднего колеса, а также реакции связей λ_1 и λ_2, равные, соответственно, продольной и поперечной составляющим P_{x2} и P_{y2} контактной силы на непроскальзывающем заднем колесе. Для этого продифференцируем уравнения связей (1.3.1) по времени

$$
\dot{V}_x = \dot{\Omega}_2 R, \qquad \dot{V}_y = \dot{\Omega}_z B \qquad (1.3.5)
$$

Из уравнений (1.3.4), (1.3.5) получаем выражения для реакций связей

$$
\begin{aligned}
&\lambda_1 = P_{x2} = \frac{MR^2}{MR^2 + I_2}\left[\frac{L_2}{R} - \frac{I_2}{MR^2}\left(P_{x1}\cos\Delta - P_{y1}\sin\Delta + MV_y\Omega_z + F_x\right)\right] \\
&\lambda_2 = P_{y2} = \frac{I_z - I_{z1}}{I_z - I_{z1} + MB^2}\left[(P_{x1}\sin\Delta + P_{y1}\cos\Delta)\left(\frac{MAB - I_z + I_{z1}}{I_z - I_{z1}}\right) + \right. \qquad (1.3.6)\\
&\left. + \frac{MB}{I_z - I_{z1}}(M_z - M_\Delta) + MV_x\Omega_z - F_y\right]
\end{aligned}
$$

Учитывая неравенство (1.2.2), пренебрежем малыми слагаемыми $O(\mu)$, $\mu = m/M$, в частности M_Δ [22, 24, 53], тогда выражения (1.3.6) примут вид

$$
\lambda_1 = P_{x2} = \frac{L_2}{R} \qquad (1.3.7)
$$

$$
\lambda_2 = P_{y2} = \frac{I_z}{I_z + MB^2}\left[(P_{x1}\sin\Delta + P_{y1}\cos\Delta)\left(\frac{MAB - I_z}{I_z}\right) + \frac{MB}{I_z}M_z + MV_x\Omega_z - F_y\right]
$$

Подставив (1.3.7) в (1.3.4), учитывая (1.2.2) и первое выражение (1.2.4), получим уравнения движения велосипедной модели аппарата с заблокированным передним и непроскальзывающим задним колесом

$$
\begin{aligned}
& M\dot{V}_x = P_{x1}\cos\Delta - P_{y1}\sin\Delta + M\Omega_z^2 B + F_x + \frac{L_2}{R} \\
& (I_z + MB^2)\dot{\Omega}_z = (P_{x1}\sin\Delta + P_{y1}\cos\Delta)(A+B) - B(MV_x\Omega_z - F_y) + M_z \\
& \dot{X} = V_x\cos\Psi - \Omega_z B\sin\Psi, \quad \dot{Y} = V_x\sin\Psi + \Omega_z B\cos\Psi, \quad \dot{\Psi} = \Omega_z \\
& P_{x1} = -\kappa N_1 \frac{U_{x1}}{\sqrt{U_{x1}^2 + U_{y1}^2}}, \quad P_{y1} = -\kappa N_1 \frac{U_{y1}}{\sqrt{U_{x1}^2 + U_{y1}^2}} \\
& U_{x1} = V_x\cos\Delta + \Omega_z(A+B)\sin\Delta \\
& U_{y1} = -V_x\sin\Delta + \Omega_z(A+B)\cos\Delta \\
& N_1 = \frac{MgB - (P_{x1}\cos\Delta - P_{y1}\sin\Delta + L_2/R)H}{A+B}
\end{aligned}
\tag{1.3.8}
$$

Переменные V_y, Ω_2 определяются уравнениями (1.3.1), нормальная реакция N_2 — вторым выражением (1.2.4), касательные составляющие P_{x2}, P_{y2} контактной силы на заднем колесе аппарата — выражениями (1.3.7). Угол Δ поворота передних колес далее рассматривается как управление.

В соответствии со вторым уравнением (1.3.1) уменьшение переменной $|\Omega_z|$ влечет за собой уменьшение переменной $|V_y|$. Поэтому при исследовании системы (1.3.8) уменьшение переменной $|\Omega_z|$ будет трактоваться как уменьшение заноса аппарата.

1.3.1.2 Фазовая плоскость модели при постоянном угле поворота переднего колеса и отсутствии внешних воздействий

Проведем исследование динамических уравнений системы (1.3.8). Для упрощения дальнейшего исследования, как и в [14, 22], будем рассматривать свободное движение аппарата

$$L_2 = 0 \tag{1.3.9}$$

пренебрегать внешними возмущающими силами и моментами

$$F_y = 0, \quad F_x = 0, \quad M_z = 0 \tag{1.3.10}$$

и, в рамках условий (1.2.3), пренебрегать членами второго и более высоких порядков малости по переменным Δ, Ω_z.

При изучении задачи можно выделить три случая:

1) $|U_{x1}| \gg |U_{y1}|$ (проскальзывание переднего колеса в продольном направлении

существенно больше проскальзывания в поперечном направлении — движение близкое к скольжению переднего колеса в продольном направлении). Тогда из (1.2.3) и выражений для U_{x1}, U_{y1} из (1.3.8) получим неравенство

$$V_x \gg |-V_x\Delta + \Omega_z(A+B)| \sim V_x|\Delta| \tag{1.3.11}$$

Из выражений для P_{x1}, P_{y1} системы (1.3.8), выражений для P_{x2}, P_{y2} из (1.3.7), условия (1.3.9) и неравенства (1.3.11) получим неравенство $|P_{x1}| \gg |P_{y1}| \sim |P_{y2}|$ и равенство $P_{x2} = 0$, при выполнении которых аппарат движется, в основном, в продольном направлении с малыми поперечной и угловой скоростями корпуса.

2) $|U_{x1}| \sim |U_{y1}|$ (проскальзывания переднего колеса в продольном и поперечном направлениях соизмеримы). Здесь из (1.2.3), (1.3.8) следует

$$V_x \sim |-V_x\Delta + \Omega_z(A+B)| \sim V_x|\Delta| \tag{1.3.12}$$

При выполнении условий (1.2.3) приближенное соотношение (1.3.12), из которого при помощи выражений для P_{x1}, P_{y1} системы (1.3.8) вытекает оценка $|P_{x1}| \sim |P_{y1}|$, не может быть реализовано.

3) $|U_{x1}| \ll |U_{y1}|$ (проскальзывание переднего колеса в продольном направлении существенно меньше проскальзывания в поперечном направлении — движение близкое к скольжению переднего колеса в поперечном направлении). При выполнении этого неравенства получим

$$V_x \ll |-V_x\Delta + \Omega_z(A+B)| \sim V_x|\Delta| \tag{1.3.13}$$

Неравенство (1.3.13), из которого следует неравенство $|P_{x1}| \ll |P_{y1}|$, также не может быть реализовано при выполнении условий (1.2.3).

В рамках условий (1.3.11) использование велосипедной модели, справедливой для движений с небольшими значениями поперечной и угловой скоростей корпуса аппарата, корректно.

В соответствии с выражениями U_{x1}, U_{y1} из (1.3.8) на указанном уровне точности имеем

$$\sqrt{U_{x1}^2 + U_{y1}^2} = \sqrt{V_x^2 + (-V_x\Delta + \Omega_z(A+B))^2} = \sqrt{V_x^2} = V_x \tag{1.3.14}$$

следовательно, $\dfrac{U_{x1}}{\sqrt{U_{x1}^2 + U_{y1}^2}} = 1$

Таким образом, входящее в (1.3.8) выражение для продольной составляющей контактной силы на переднем колесе имеет вид

$$P_{x1} = -\kappa N_1 \tag{1.3.15}$$

В силу (1.2.5) справедливо неравенство $P_{x1} < 0$.

Вычислим далее

$$\frac{U_{y1}}{\sqrt{U_{x1}^2 + U_{y1}^2}} = \frac{-V_x\Delta + \Omega_z(A+B)}{V_x} = -\Delta + \frac{\Omega_z(A+B)}{V_x}$$

Тем самым входящее в (1.3.8) выражение для поперечной составляющей контактной силы на переднем колесе записывается в форме

$$P_{y1} = -\kappa N_1 \left(-\Delta + \frac{\Omega_z(A+B)}{V_x}\right) \tag{1.3.16}$$

В силу (1.3.11), (1.3.15), (1.3.16) величина поперечной составляющей силы кулонова трения на переднем колесе аппарата, имеющая порядок $\kappa N_1|\Delta|$, остается существенно меньше величины κN_1 продольной составляющей этой силы.

Из выражения (1.3.16) на указанном уровне точности следует равенство $P_{y1}\Delta = 0$ подстановка которого в последнее равенство системы (1.3.8) при учете (1.3.9), (1.3.15) дает равенство

$$N_1 = \frac{MgB - (-\kappa N_1)H}{A+B}$$

из которого вытекает выражение для нормальной реакции на переднем колесе аппарата

$$N_1 = \frac{MgB}{A+B-\kappa H} \tag{1.3.17}$$

В соответствии со вторым выражением (1.2.4) и формулой (1.3.17) выполнение условий (1.2.5) обеспечивается за счет неравенства $\kappa < 1$, справедливого для любых реальных взаимодействующих поверхностей, и неравенства

$$A - \kappa H > 0 \tag{1.3.18}$$

которое далее будем считать выполненным.

Таким образом, линеаризованные по переменным Δ и Ω_z динамические уравнения системы (1.3.8), которые описывают изменение продольной скорости центра масс аппарата и его вращение вокруг точки контакта заднего колеса, не потерявшего сцепление с опорной плоскостью, имеют вид

$$\begin{gathered} M\dot{V}_x = -\kappa N_1, \quad (I_z + MB^2)\dot{\Omega}_z = F(V_x, \Omega_z) \\ N_1 = \frac{MgB}{A+B-\kappa H}, \quad F(V_x, \Omega_z) = -\kappa N_1 \frac{\Omega_z(A+B)^2}{V_x} - MBV_x\Omega_z \end{gathered} \tag{1.3.19}$$

После линеаризации условие (1.2.14) для $i = 1$ принимает форму

$$V_x > 0 \tag{1.3.20}$$

Система (1.3.19), правые части которой не зависят от Δ, совпадает с аналогичной системой из [14, 22], составленной для случая $\Delta = 0$, после линеаризации последней по переменной Ω_z. Таким образом, на уровне точности системы (1.3.19) поворот заблокированных передних колес аппарата вокруг вертикальной оси не влияет на его занос.

Система (1.3.19) допускает исследование методом фазовой плоскости. Для построения фазового портрета воспользуемся методом изоклин. Поскольку второе уравнение системы (1.3.19) не изменяется при изменении знака Ω_z, ее фазовые траектории на плоскости V_x, Ω_z симметричны относительно оси V_x. Правая часть первого уравнения системы (1.3.19) постоянна и строго отрицательна, следовательно, продольная скорость V_x аппарата убывает в ходе равнозамедленного движения.

Рассмотрим уравнение $F(V_x, \Omega_z) = 0$. На кривой, задаваемой этим уравнением, касательные к фазовым траекториям горизонтальны: $d\Omega_z/dV_x = 0$. Указанное уравнение можно записать в виде

$$\Omega_z \left[-\kappa N_1 \frac{(A+B)^2}{V_x} - MBV_x \right] = 0 \qquad (1.3.21)$$

Выражение в квадратных скобках в (1.3.21) отрицательно (нормальная реакция N_1 и продольная скорость V_x аппарата имеют положительный знак в силу неравенств (1.2.5), (1.3.20)), следовательно, при $\Omega_z = 0$ касательные к фазовым траекториям горизонтальны.

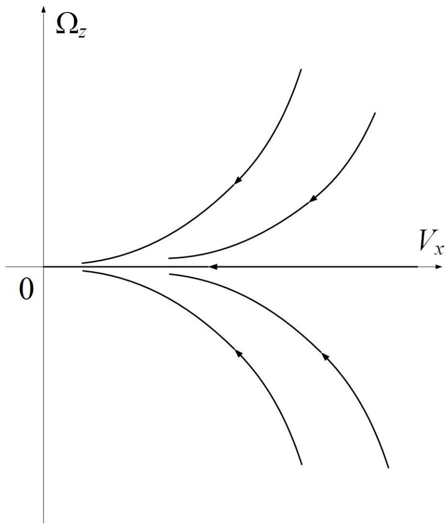


Рис. 1.4. Качественное поведение фазовых траекторий модели заноса аппарата с заблокированным передним колесом

Если угловая скорость корпуса аппарата отрицательна $\Omega_z < 0$, то справедливо неравенство $F(V_x, \Omega_z) > 0$, подстановка которого во второе уравнение системы (1.3.19) показывает, что угловая скорость Ω_z корпуса аппарата монотонно возрастает. В силу симметрии фазового портрета в области $\Omega_z > 0$ переменная Ω_z монотонно убывает. Таким образом, в ходе движения аппарата с заблокированным передним колесом переменные V_x, $|\Omega_z|$ монотонно убывают, т.е. занос аппарата уменьшается. Фазовый портрет системы уравнений (1.3.19) показан на рис. 1.4.

1.3.1.3 Область применимости фазового портрета

Обсудим область применимости построенного фазового портрета (рис. 1.4).

В соответствии с неравенством (1.2.19) для $i = 2$ и допущением (1.2.8) условие, ограничивающее область корректного использования модели (1.3.8), в рамках которой заднее колесо аппарата не проскальзывает относительно опорной плоскости, имеет вид

$$\left(\frac{P_{x2}}{\kappa N_2}\right)^2 + \left(\frac{P_{y2}}{\kappa N_2}\right)^2 < 1 \tag{1.3.22}$$

Выражение для N_2 определяется с использованием второго выражения (1.2.4) и формулы (1.3.17). Поскольку в силу первого выражения (1.3.7) и условия (1.3.9) продольная составляющая контактной силы на заднем колесе равна нулю: $P_{x2} = 0$, неравенство (1.3.22) принимает вид $(P_{y2})^2 < (\kappa N_2)^2$, из которого при выполнении (1.2.5) вытекает неравенство

$$|P_{y2}| < \kappa N_2 \tag{1.3.23}$$

Как и ранее, при решении неравенства (1.3.23) воспользуемся предположением (1.2.3) и запишем выражение P_{y2}, пренебрегая членами второго и более высоких порядков малости по переменным Ω_z, Δ.

Из второго выражения (1.3.7) и формул (1.3.15), (1.3.16) в силу допущений (1.3.10) выражение для поперечной составляющей контактной силы на заднем колесе принимает вид

$$P_{y2} = \frac{I_z}{I_z + MB^2}\left(-\kappa N_1 \frac{\Omega_z(A+B)}{V_x} \cdot \frac{(MAB - I_z)}{I_z} + MV_x\Omega_z\right) \tag{1.3.24}$$

В силу постоянства значения нормальной реакции N_2 и выражения (1.3.24) неравенство (1.3.23) не изменяется при изменении знака переменной Ω_z. Следовательно, область фазовой плоскости V_x, Ω_z, отвечающая выполнению неравенства (1.3.23), симметрична относительно оси V_x. В соответствии с (1.3.24) условие $P_{y2} = 0$ равносильно уравнению

$$\Omega_z\left(-\kappa N_1(A+B)(MAB - I_z) + MI_zV_x^2\right) = 0$$

решениями которого, отвечающими условию (1.3.20)), являются

$$\Omega_z = 0, \qquad V_x = V_x^{(0)} = \sqrt{\frac{\kappa N_1(A+B)(MAB - I_z)}{MI_z}} \tag{1.3.25}$$

Неравенство (1.3.23) выполняется во всех точках прямых (1.3.25). Второе решение (1.3.25) существует в случае

$$MAB - I_z > 0 \tag{1.3.26}$$

Далее будут рассматриваться аппараты, для которых неравенство (1.3.26) выполнено. Для типовых значений параметров автомобиля левая часть (1.3.26) принимает положительные значения [14, 49, 53]. Например, при значениях параметров, взятых из [14, 49, 53], $M = 1000$ кг, $A = B = 1,5$ м, $I_z = 1000$ кг$\cdot$м^2 левая часть неравенства (1.3.26) принимает значение 1250 кг·м^2.

В силу отмеченного выше свойства симметрии области выполнения неравенства (1.3.23) для отыскания этой области достаточно рассмотреть случай выполнения неравенства

$$0 < P_{y2} < \kappa N_2 \tag{1.3.27}$$

Область выполнения неравенств (1.3.27), ограниченная кривыми

$$V_x = V_x^{(0)}, \qquad \Omega_z = 0, \qquad \Omega_z = \Sigma(V_x) = \frac{(I_z + MB^2)\kappa N_2 V_x}{MI_z V_x^2 - \kappa N_1 (A+B)(MAB - I_z)}$$

заштрихована на рис. 1.5 (а). Область выполнения неравенств

$$-\kappa N_2 < P_{y2} < 0 \tag{1.3.28}$$

симметричная заштрихованной на рис. 1.5 (а) области, показана на рис. 1.5 (б).

Область применимости модели (1.3.19) и построенного на рис. 1.4 фазового портрета получается путем объединения заштрихованных на рис. 1.5 (а), рис. 1.5 (б) областей с отвечающей условию (1.2.3) областью

$$|\Omega_z| \lesssim \frac{V_x |\Delta|}{A+B} \tag{1.3.29}$$

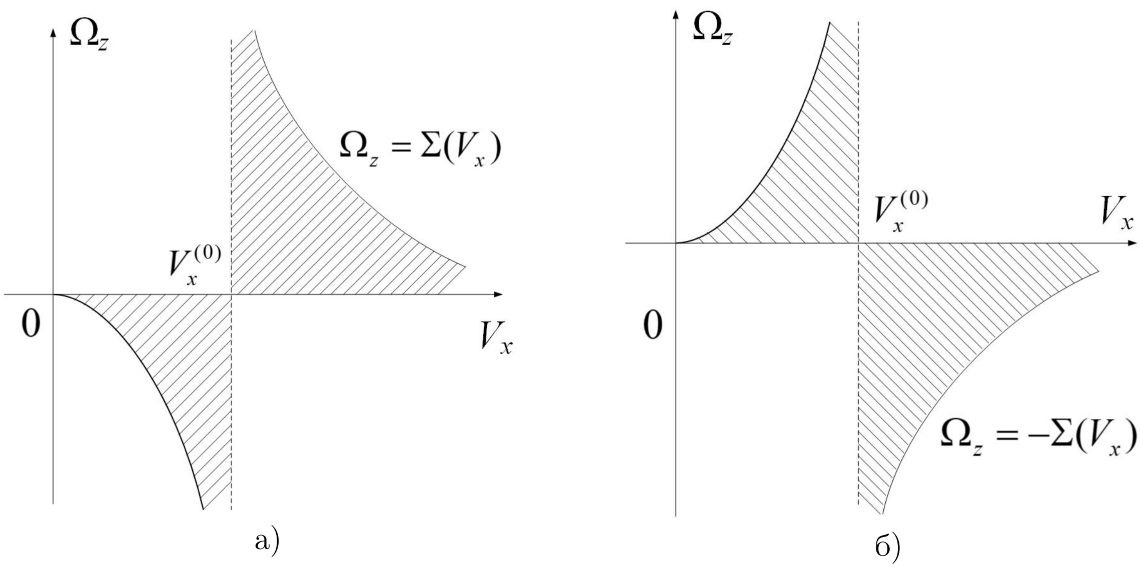


Рис. 1.5. Решение неравенства $0 < P_{y2} < \kappa N_2$ (а) и $-\kappa N_2 < P_{y2} < 0$ (б) для случая заноса аппарата с заблокированным передним колесом

Область, отвечающая выполнению условий (1.3.20)), (1.3.23) и (1.3.29), показана на рис. 1.6 для случая постоянного значения угла Δ.

Фазовый портрет системы уравнений (1.3.19) с учетом ее области применимости для случая $\Delta = \text{const}$ показан на рис. 1.7. Вне этой области систему (1.3.19) следует использовать с осторожностью.

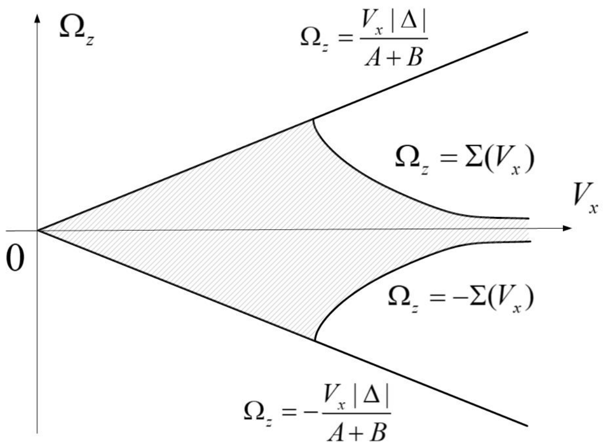


Рис. 1.6. Качественный вид области применимости модели заноса аппарата с заблокированным передним колесом для случая $\Delta = \text{const}$

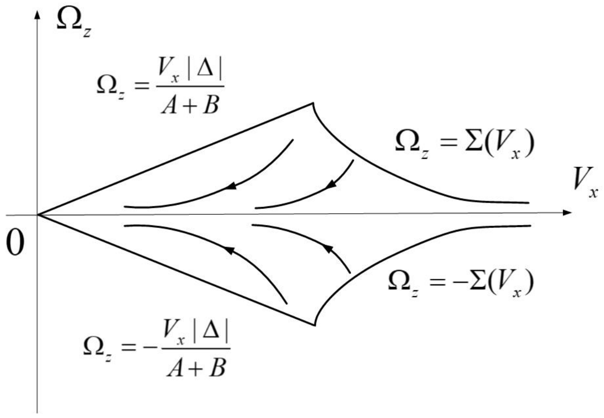


Рис. 1.7. Качественный вид фазовых траекторий модели заноса аппарата с заблокированным передним колесом в области применимости модели, построенной для случая $\Delta = \text{const}$

1.3.2 Занос передней оси аппарата с пробуксовывающими передними колесами

1.3.2.1 Математическая модель

Модель заноса аппарата с пробуксовывающим передним колесом и задним колесом, не потерявшим сцепление с опорной плоскостью, получается по аналогии с моделью, построенной в разделе 1.3.1 для случая блокировки переднего колеса. Как и ранее, при составлении уравнений Лагранжа с множителями связями служат условия (1.3.1) непроскальзывания заднего колеса аппарата. Отличие полученной системы от системы (1.3.8) состоит в выражениях для касательных составляющих P_{x1}, P_{y1} контактной силы взаимодействия переднего колеса с опорной плоскостью. Уравнения движения велосипедной модели, как и (1.3.8), полученные в пренебрежении слагаемыми $O(\mu)$, в данном случае имеют вид

$$M\dot{V}_x = P_{x1}\cos\Delta - P_{y1}\sin\Delta + M\Omega_z^2 B + F_x + \frac{L_2}{R}$$

$$(I_z + MB^2)\dot{\Omega}_z = (P_{x1}\sin\Delta + P_{y1}\cos\Delta)(A+B) - B(MV_x\Omega_z - F_y) + M_z$$

$$\dot{X} = V_x\cos\Psi - \Omega_z B\sin\Psi, \quad \dot{Y} = V_x\sin\Psi + \Omega_z B\cos\Psi, \quad \dot{\Psi} = \Omega_z$$

$$P_{x1} = -\kappa N_1\frac{U_{x1}}{\sqrt{U_{x1}^2 + U_{y1}^2}}, \quad P_{y1} = -\kappa N_1\frac{U_{y1}}{\sqrt{U_{x1}^2 + U_{y1}^2}} \tag{1.3.30}$$

$$U_{x1} = V_x\cos\Delta + \Omega_z(A+B)\sin\Delta - \Omega_1^0 R$$

$$U_{y1} = -V_x\sin\Delta + \Omega_z(A+B)\cos\Delta$$

$$N_1 = \frac{MgB - (P_{x1}\cos\Delta - P_{y1}\sin\Delta + L_2/R)H}{A+B}$$

Переменные V_y, Ω_2 определяются уравнениями (1.3.1), нормальная реакция N_2 — вторым выражением (1.2.4), касательные составляющие P_{x2}, P_{y2} контактной силы на заднем колесе аппарата — выражениями (1.3.7).

Как и ранее при анализе системы (1.3.8) уменьшение переменной $|\Omega_z|$ рассматривается как уменьшение заноса аппарата.

1.3.2.2 Фазовая плоскость модели при постоянном угле поворота переднего колеса и отсутствии внешних воздействий

Проведем исследование динамических уравнений системы (1.3.30). Как и в разделе 1.3.1 при анализе системы (1.3.8) будем считать выполненными условия (1.2.8), (1.3.9), (1.3.10) и пренебрегать членами второго и более высоких порядков малости по переменным Δ, Ω_z, удовлетворяющим условию (1.2.3).

При изучении задачи, как и в разделе 1.3.1.2, можно выделить три случая:

1) $|U_{x1}| \gg |U_{y1}|$ (проскальзывание переднего колеса в продольном направлении существенно больше проскальзывания в поперечном направлении — движение близкое к скольжению переднего колеса в продольном направлении). Тогда из (1.2.3) и выражений для U_{x1}, U_{y1} из (1.3.30) получим неравенство

$$|V_x - \Omega_1^0 R| \gg |-V_x\Delta + \Omega_z(A+B)| \sim V_x|\Delta| \tag{1.3.31}$$

Из выражений для P_{x1}, P_{y1} системы (1.3.30), выражений для P_{x2}, P_{y2} из (1.3.7), условия (1.3.9) и неравенства (1.3.31) получим неравенство $|P_{x1}| \gg |P_{y1}| \sim |P_{y2}|$ и равенство $P_{x2} = 0$, при выполнении которых аппарат движется, в основном, в продольном направлении с малыми поперечной и угловой скоростями корпуса.

2) $|U_{x1}| \sim |U_{y1}|$ (проскальзывания переднего колеса в продольном и поперечном направлениях соизмеримы). Здесь из (1.2.3), (1.3.30) следует

$$|V_x - \Omega_1^0 R| \sim |-V_x\Delta + \Omega_z(A+B)| \sim V_x|\Delta| \tag{1.3.32}$$

В этом случае, как и выше, справедливо равенство $P_{x2} = 0$, величины поперечных P_{y1}, P_{y2} и продольной P_{x1} сил соизмеримы (являются величинами порядка $\kappa N_1/\sqrt{2}$), таким образом, занос аппарата начинает развиваться, что приводит к росту поперечной и угловой скоростей его корпуса.

3) $|U_{x1}| \ll |U_{y1}|$ (проскальзывание переднего колеса в продольном направлении существенно меньше проскальзывания в поперечном направлении — движение близкое к скольжению переднего колеса в поперечном направлении). При выполнении этого неравенства получим

$$|V_x - \Omega_1^0 R| \ll |-V_x\Delta + \Omega_z(A+B)| \sim V_x|\Delta| \tag{1.3.33}$$

В рассматриваемом случае имеем $P_{x2} = 0$, $|P_{x1}| \ll |P_{y1}| \sim |P_{y2}|$, т.е. занос аппарата интенсивно развивается, что приводит к быстрому росту поперечной и угловой скоростей его корпуса.

Поскольку при решении задачи используется велосипедная модель, справедливая для движений с небольшими значениями поперечной и угловой скоростей корпуса аппарата, как и ранее, ограничимся рассмотрением первого случая.

В соответствии с выражениями U_{x1}, U_{y1} из (1.3.30) и условием (1.2.15) для $i = 1$ на указанном уровне точности имеем

$$\sqrt{U_{x1}^2 + U_{y1}^2} = \sqrt{(V_x - \Omega_1^0 R)^2 + (-V_x\Delta + \Omega_z(A+B))^2} = |V_x - \Omega_1^0 R| \tag{1.3.34}$$

$$U_{x1} = V_x - \Omega_1^0 R < 0 \tag{1.3.35}$$

Из (1.3.34), (1.3.35) следует $\dfrac{U_{x1}}{\sqrt{U_{x1}^2 + U_{y1}^2}} = \dfrac{V_x - \Omega_1^0 R}{|V_x - \Omega_1^0 R|} = -1$

Таким образом, входящее в (1.3.30) выражение для продольной составляющей контактной силы на переднем колесе имеет вид

$$P_{x1} = \kappa N_1 \tag{1.3.36}$$

В силу (1.2.5) справедливо неравенство $P_{x1} > 0$.

Используя (1.3.30), (1.3.34), (1.3.35), по аналогии получим $\dfrac{U_{y1}}{\sqrt{U_{x1}^2 + U_{y1}^2}} = \dfrac{-V_x\Delta + \Omega_z(A+B)}{|V_x - \Omega_1^0 R|} = -\dfrac{V_x\Delta - \Omega_z(A+B)}{\Omega_1^0 R - V_x}$ Тем самым входящее в (1.3.30) выражение для поперечной составляющей контактной силы на переднем колесе записывается в форме

$$P_{y1} = \kappa N_1 \frac{V_x \Delta - \Omega_z (A+B)}{\Omega_1^0 R - V_x} \tag{1.3.37}$$

В силу (1.3.31), (1.3.36), (1.3.37) величина поперечной составляющей силы кулонова трения на переднем колесе аппарата, имеющая порядок $\kappa N_1 |\Delta|$, остается существенно меньше величины κN_1 продольной составляющей этой силы.

Из выражения (1.3.37) на указанном уровне точности следует равенство $P_{y1}\Delta = 0$, при подстановке которого в последнее равенство системы (1.3.30) при учете (1.3.9), (1.3.36) имеем

$$N_1 = \frac{MgB}{A + B + \kappa H} \tag{1.3.38}$$

В соответствии со вторым выражением (1.2.4) и формулой (1.3.38) в рассматриваемом случае для выполнения условий (1.2.5) не нужно привлекать дополнительные ограничения, как это делалось в разделе 1.3.1 (см. формулу (1.3.18)).

Таким образом, линеаризованные по переменным Δ и Ω_z динамические уравнения системы (1.3.30) для переменных V_x и Ω_z (аналоги уравнений (1.3.19) в случае пробуксовки переднего колеса аппарата) имеют вид

$$\begin{gathered} M\dot{V}_x = \kappa N_1, \quad (I_z + MB^2)\dot{\Omega}_z = \tilde{F}(V_x, \Omega_z, \Delta) \\ N_1 = \frac{MgB}{A + B + \kappa H} \\ \tilde{F}(V_x, \Omega_z, \Delta) = \kappa N_1 \frac{\Omega_1^0 R \Delta - \Omega_z (A+B)}{\Omega_1^0 R - V_x}(A+B) - MBV_x\Omega_z \end{gathered} \tag{1.3.39}$$

В отличие от системы (1.3.19), правая часть второго уравнения системы (1.3.39) зависит от переменной Δ. При подстановке в (1.3.39) значения $\Delta = 0$ получаем систему

$$\begin{gathered} M\dot{V}_x = \kappa N_1 \\ (I_z + MB^2)\dot{\Omega}_z = -\frac{\kappa N_1 \Omega_z (A+B)^2}{\Omega_1^0 R - V_x} - MBV_x\Omega_z \end{gathered} \tag{1.3.40}$$

которая совпадает с аналогичной системой из [14, 22] после линеаризации последней по переменной Ω_z.

Будем далее рассматривать случай

$$\Delta = \mathrm{const} \tag{1.3.41}$$

При выполнении условия (1.3.41) система (1.3.39) допускает исследование методом фазовой плоскости. Для построения фазового портрета также воспользуемся методом изоклин. Поскольку правая часть первого уравнения системы (1.3.39) постоянна и строго положительна, продольная скорость V_x аппарата возрастает в ходе равноускоренного движения.

Рассмотрим уравнение $\tilde{F}(V_x, \Omega_z, \Delta) = 0$, которое задает кривую с горизонтальными касательными к фазовым траекториям. Разрешив его относительно переменной Ω_z, получим

$$\Omega_z = G(V_x, \Delta) = \frac{\kappa N_1 (A+B) \Omega_1^0 R \Delta}{\kappa N_1 (A+B)^2 + MBV_x(\Omega_1^0 R - V_x)} \tag{1.3.42}$$

Построим графики функции $\Omega_z = G(V_x, \Delta)$, задаваемой выражением (1.3.42) для значений $\Delta < 0$ и $\Delta > 0$.

Уравнения вертикальных асимптот графиков (1.3.42) имеют вид

$$V_x = \frac{MB\Omega_1^0 R \pm \sqrt{MB\left(MB(\Omega_1^0 R)^2 + 4\kappa N_1 (A+B)\right)}}{2MB}$$

Поскольку выражение под знаком корня положительно, полученные уравнения задают две асимптоты: $V_x = V_x^*$ и $V_x = V_x^{**}$, отвечающие знакам «$-$» и «$+$» перед квадратным корнем

$$V_x^* < 0, \qquad V_x^{**} > \Omega_1^0 R \tag{1.3.43}$$

Асимптоты (1.3.43) расположены за пределами области допустимых значений переменной V_x, которая в соответствии с (1.3.31), (1.3.35) определяется неравенствами

$$0 < V_x \ll \Omega_1^0 R \tag{1.3.44}$$

Тем самым знаменатель правой части (1.3.42) положительный, в результате чего имеем

$$\mathrm{sgn} G(V_x, \Delta) = \mathrm{sgn} \Delta \tag{1.3.45}$$

Для нахождения экстремумов, а также промежутков возрастания и убывания функции (1.3.42) по переменной V_x вычислим ее производную

$$\frac{d\Omega_z(V_x, \Delta)}{dV_x} = \frac{-\kappa N_1 \Delta (A+B) \Omega_1^0 R (MB\Omega_1^0 R - 2MBV_x)}{(\kappa N_1 (A+B)^2 + MBV_x \Omega_1^0 R - MBV_x^2)^2}$$

Решением уравнения $d\Omega_z(V_x, \Delta)/dV_x = 0$ служит $V_x = \Omega_1^0 R/2$ — точка локального экстремума функции (1.3.42)

$$\Omega_z\left(\frac{\Omega_1^0 R}{2}, \Delta\right) = \frac{4\kappa N_1 \Delta (A+B) \Omega_1^0 R}{4\kappa N_1 (A+B)^2 + MB(\Omega_1^0 R)^2} \tag{1.3.46}$$

При $\Delta < 0$ указанный экстремум является максимумом, при $\Delta > 0$ — минимумом. В обоих случаях точка экстремума принадлежит области (1.3.29).

В соответствии с формулой (1.3.45) функция (1.3.42) не имеет нулей.

При $\Delta = 0$ фазовый портрет соответствующей (1.3.39) системы (1.3.40) симметричен относительно оси V_x; переменная V_x возрастает, переменная $|\Omega_z|$ убывает [14, 22] (рис. 1.8).

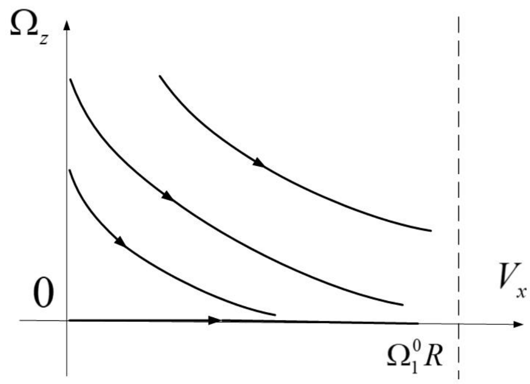


Рис. 1.8. Качественное поведение фазовых траекторий модели заноса аппарата с пробуксовывающим передним колесом при фиксированном значении $\Delta = 0$ [14, 22]

Из второго уравнения (1.3.39) следует, что при положительных значениях функции $\tilde{F}(V_x, \Omega_z, \Delta)$ угловая скорость Ω_z корпуса аппарата возрастает, при отрицательных значениях — убывает. Фазовый портрет системы уравнений (1.3.39) в случае $\Delta < 0$ представлен на рис. 1.9 (а). График функции (1.3.42) показан штрихпунктирной кривой. Знаками «+» и «−» отмечены разделяемые кривой (1.3.42) области фазовой плоскости, где функция $\tilde{F}(V_x, \Omega_z, \Delta)$ имеет положительные и отрицательные знаки соответственно. В этих областях справедливы неравенства $d\Omega_z/dV_x > 0$ и $d\Omega_z/dV_x < 0$.

Для $\Delta \neq 0$ фазовый портрет системы (1.3.39) теряет свойство симметрии.

В случае $\Delta < 0$ при начальных значениях переменной Ω_z, заданных в области $\Omega_z > 0$, переменная Ω_z, как и в случае $\Delta = 0$, убывает, т.е. занос аппарата уменьшается. Если начальные значения переменной Ω_z выбраны в области $\Omega_z < 0$, то она остается отрицательной; если эти начальные значения находятся в области $\Omega_z < G(V_x, \Delta)$, где функция $G(V_x, \Delta)$ определена формулой (1.3.42), то переменная Ω_z во все время движения не превышает значения (1.3.46). Из (1.3.39) получим формулу

$$\frac{d\Omega_z}{dV_x} = \frac{M}{I_z + MB^2} \cdot \frac{\Delta(A+B)\Omega_1^0 R\kappa g - \Omega_z(A+B)^2\kappa g - V_x\Omega_z(A+B+\kappa H)(\Omega_1^0 R - V_x)}{(\Omega_1^0 R - V_x)\kappa g} \tag{1.3.47}$$

из с которой с учетом неравенств (1.3.44) при любых фиксированных значениях $\Delta = -d < 0$, $V_x = v$ и $|\Omega_z| = w$ следует

$$\left|\frac{d\Omega_z}{dV_x}\right|\Bigg|_{\Delta=-d, \Omega_z=w} > \left|\frac{d\Omega_z}{dV_x}\right|\Bigg|_{\Delta=-d, \Omega_z=-w} \tag{1.3.48}$$

Тем самым при $\Delta < 0$ изменение переменной Ω_z в области $\Omega_z > 0$ происходит быстрее, чем в области $\Omega_z < 0$.

Аналогично рассматривается случай $\Delta > 0$. В силу того, что правая часть второго уравнения системы (1.3.39) не изменяется при одновременном изменении знаков Δ

и Ω_z, соответствующий фазовый портрет системы (1.3.39) симметричен фазовому портрету на рис. 1.9 (а) относительно оси V_x (рис. 1.9 (б)).

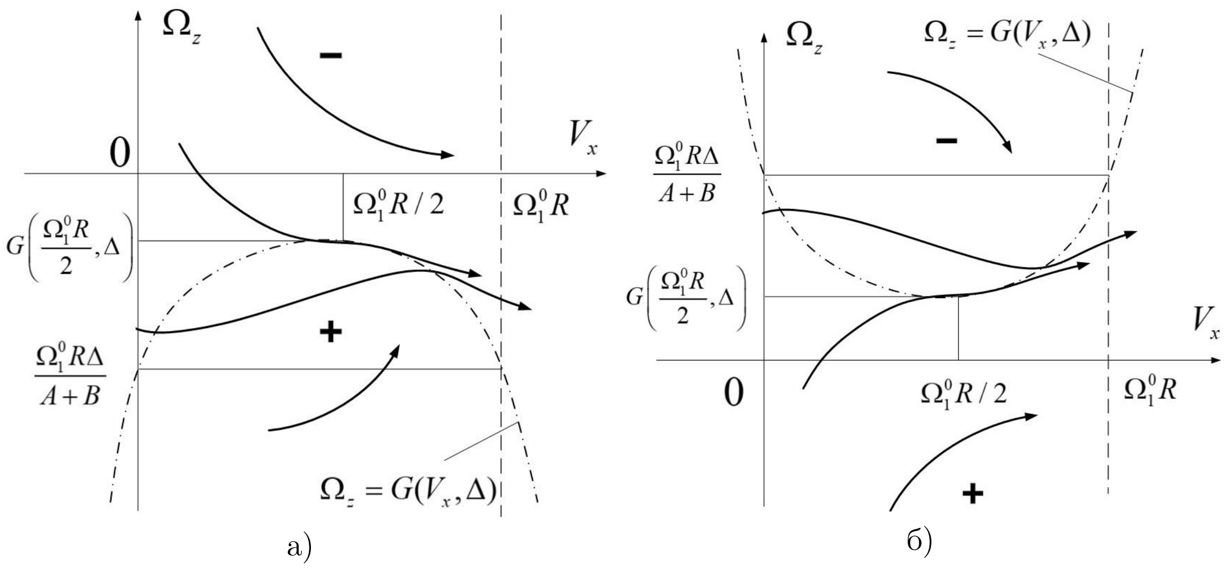


Рис. 1.9. Качественное поведение фазовых траекторий модели заноса аппарата с пробуксовывающим передним колесом при фиксированном значении $\Delta < 0$ (а) и $\Delta > 0$ (б)

Сравнить скорости уменьшения заноса в каждом из случаев можно путем сравнения значений $d\Omega_z/dV_x$ при $\Delta \neq 0$ и при $\Delta = 0$. Из формулы (1.3.47) имеем

$$\left.\frac{d\Omega_z}{dV_x}\right|_{\Delta=0} = \frac{M}{I_z + MB^2} \cdot \frac{-\Omega_z(A+B)^2\kappa g - V_x\Omega_z(A+B+\kappa H)(\Omega_1^0 R - V_x)}{(\Omega_1^0 R - V_x)\kappa g} \quad (1.3.49)$$

Сопоставляя выражения (1.3.47) и (1.3.49), получаем

$$\frac{d\Omega_z}{dV_x} = \left.\frac{d\Omega_z}{dV_x}\right|_{\Delta=0} + \frac{M\Omega_1^0 R(A+B)\Delta}{(I_z + MB^2)(\Omega_1^0 R - V_x)} \quad (1.3.50)$$

Откуда с учетом неравенств (1.3.44), формул (1.3.49), (1.3.50) и свойства симметрии фазовых портретов на рис. 1.9 (а, б) относительно оси V_x при любых фиксированных значениях $|\Delta| = d$, $V_x = v$ и $|\Omega_z| = w$ получаем

$$\left|\frac{d\Omega_z}{dV_x}\right|\Bigg|_{\Delta=0,|\Omega_z|=w} < \left|\frac{d\Omega_z}{dV_x}\right|\Bigg|_{\Delta=-d,\Omega_z=w} = \left.\frac{d\Omega_z}{dV_x}\right|_{\Delta=d,\Omega_z=-w} \quad (1.3.51)$$

Проведенное исследование показывает, что при выполнении условия

$$\mathrm{sgn}\Omega_z = -\mathrm{sgn}\Delta \quad (1.3.52)$$

отвечающего «повороту руля (передних колес) в сторону заноса задней оси», занос аппарата, как и в случае $\Delta = 0$, уменьшается, но скорее, чем при неповернутых передних колесах. Рассогласование между скоростями убывания переменной $|\Omega_z|$ определяется вторым слагаемым правой части равенства (1.3.50).

Анализ фазовых портретов на рис. 1.9 (а, б) позволяет сформировать алгоритм эффективного подавления заноса аппарата с пробуксовывающими передними колесами. Следует повернуть их в сторону смещения задней оси аппарата (обеспечить выполнение условия (1.3.52)), и при достижении переменной Ω_z близких к нулю или нулевых значений повернуть передние колеса в противоположную сторону и зафиксировать их вдоль корпуса, обеспечив выполнение условия $\Delta = 0$. Для близких к нулю значений переменной $|\Omega_z|$ это обеспечит дальнейшее уменьшение заноса аппарата, а также уменьшение величины $|V_y|$ угловой скорости корпуса аппарата; для $\Omega_z = 0$ получим $|V_y| = 0$, т.е. занос аппарата прекратится. Если при изменении знака угловой скорости аппарата оставить угол поворота передних колес прежним, то занос аппарата начнет увеличиваться.

Результаты проведенного анализа отвечают принятым в теории вождения автомобиля рекомендациям «поворачивать руль в сторону заноса задней оси» (рис. 1.1), а полученные формулы позволяют сформировать эффективный алгоритм работ систем управления аппаратом. Их достоверность подтверждается сравнением с результатами численного моделирования [14, 53].

Приведем численные результаты для параметров и динамических характеристик автомобиля, взятых из [53]. Для удобства сравнения запишем (1.3.50) в виде

$$\begin{gathered}\frac{d\Omega_z}{dV_x} = \frac{M(A+B)}{(I_z+MB^2)(\Omega_1^0 R - V_x)\kappa g}\times \\ \times\left[-\Omega_z\left((A+B)\kappa g + V_x\left(1+\kappa\frac{H}{A+B}\right)(\Omega_1^0 R - V_x)\right) + \Omega_1^0 R\Delta\kappa g\right]\end{gathered} \tag{1.3.53}$$

Например, при значениях $\Omega_1^0 R = 40$ м/с, $\kappa = 0,8$ выражение $\Omega_1^0 R\Delta\kappa g \approx 320\Delta$ м^2/с^3 имеет тот же порядок, что и первое слагаемое в квадратных скобках, следовательно, правильный выбор значения Δ в зависимости от значений динамических переменных V_x и Ω_z позволяет прекратить занос аппарата. В качестве примера возьмем $M = 1000$ кг, $I_z = 1000$ кг$\cdot$м^2, $A = B = 1,5$ м, $H = 1$ м, зафиксировав значение $V_x = 20$ м/с. Для случая $\Delta = 0$ правая часть выражения (1.3.53) приблизительно равна -3 с/м $\cdot\, \Omega_z$, для случая $\Delta \neq 0$ — -3 с/м $\cdot\, \Omega_z + 2 \cdot 1/\text{м} \cdot \Delta$.

1.3.2.3 Область применимости фазового портрета

Аналогично рассмотренному в разделе 1.3.1 случаю, условие, ограничивающее область корректного использования модели (1.3.30), в рамках которой заднее колесо аппарата не проскальзывает относительно опорной плоскости, имеет вид (1.3.23). Выражение для N_2 определяется с использованием второго выражения (1.2.4) и формулы (1.3.38).

Из второго выражения (1.3.7) и формул (1.3.36), (1.3.37), построенных с использованием предположения (1.2.3), в силу допущений (1.3.10) выражение для поперечной составляющей контактной силы на заднем колесе принимает вид

$$P_{y2} = \frac{I_z}{I_z + MB^2} \left(\kappa N_1 \frac{(\Omega_1^0 R\Delta - \Omega_z(A+B))}{\Omega_1^0 R - V_x} \cdot \frac{(MAB - I_z)}{I_z} + MV_x\Omega_z \right) \tag{1.3.54}$$

где выражение для N_1 вычисляется по формуле (1.3.38), переменная Δ отвечает условию (1.3.41).

Решением неравенства (1.3.23) служит область плоскости V_x, Ω_z, лежащая на пересечении областей $P_{y2} < \kappa N_2$ и $P_{y2} > -\kappa N_2$. Для удобства их построения и анализа введем обозначения

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}(V_x) = -\kappa N_1(A+B)(MAB - I_z) + MI_zV_x(\Omega_1^0 R - V_x) \\ &\mathcal{B}(V_x,\Delta) = \frac{\kappa N_2(I_z + MB^2)(\Omega_1^0 R - V_x) - \kappa N_1\Delta\Omega_1^0 R(MAB - I_z)}{\mathcal{A}(V_x)} \\ &\mathcal{C}(V_x,\Delta) = \frac{-\kappa N_2(I_z + MB^2)(\Omega_1^0 R - V_x) - \kappa N_1\Delta\Omega_1^0 R(MAB - I_z)}{\mathcal{A}(V_x)} \end{aligned} \tag{1.3.55}$$

Выразив из уравнения $P_{y2} = \kappa N_2$ переменную Ω_z, получим

$$\Omega_z = \mathcal{B}(V_x,\Delta) \tag{1.3.56}$$

В силу выражений (1.3.54)–(1.3.56) условие $P_{y2} < \kappa N_2$ равносильно условиям

$$\mathcal{A}(V_x) > 0, \quad \Omega_z < \mathcal{B}(V_x,\Delta) \quad \text{или} \quad \mathcal{A}(V_x) < 0, \quad \Omega_z > \mathcal{B}(V_x,\Delta) \tag{1.3.57}$$

Аналогично, выразив из уравнения $P_{y2} = -\kappa N_2$ переменную Ω_z, имеем

$$\Omega_z = \mathcal{C}(V_x,\Delta) \tag{1.3.58}$$

В силу выражений (1.3.54), (1.3.55), (1.3.58) условие $P_{y2} > -\kappa N_2$ равносильно условиям

$$\mathcal{A}(V_x) > 0, \quad \Omega_z > \mathcal{C}(V_x,\Delta) \quad \text{или} \quad \mathcal{A}(V_x) < 0, \quad \Omega_z < \mathcal{C}(V_x,\Delta) \tag{1.3.59}$$

Решим неравенства (1.3.57), (1.3.59) графически для случая $\Delta < 0$. Построим графики функций $\Omega_z = \mathcal{B}(V_x,\Delta)$ и $\Omega_z = \mathcal{C}(V_x,\Delta)$ на плоскости V_x, Ω_z. Они имеют единственную точку пересечения $(\Omega_1^0 R; \Omega_1^0 R\Delta/(A+B))$, через которую проходит прямая $\Omega_z = V_x\Delta/(A+B)$, определяющая ограничение значений переменной Ω_z в силу (1.3.29), (1.3.41).

Вертикальные асимптоты графиков функций (1.3.56), (1.3.58) находятся из уравнения $\mathcal{A}(V_x)=0$

$$\begin{aligned} V_x = V_x^* &= \frac{\Omega_1^0 R}{2} - \frac{\sqrt{(MI_z\Omega_1^0 R)^2 - 4MI_z\kappa N_1(A+B)(MAB-I_z)}}{2MI_z} \\ V_x = V_x^{**} &= \frac{\Omega_1^0 R}{2} + \frac{\sqrt{(MI_z\Omega_1^0 R)^2 - 4MI_z\kappa N_1(A+B)(MAB-I_z)}}{2MI_z} \end{aligned} \tag{1.3.60}$$

Будем рассматривать достаточно большие значения Ω_1^0 угловой скорости пробуксовки переднего колеса аппарата, при которых подкоренные выражения в (1.3.60) положительны. Тогда справедливы неравенства

$$0 < V_x^* < V_x^{**} < \Omega_1^0 R \tag{1.3.61}$$

График $\Omega_z = \mathcal{B}(V_x, \Delta)$ имеет локальный минимум в точке

$$\left(\frac{\Omega_1^0 R}{2}; \frac{2\kappa N_2(I_z+MB^2)\Omega_1^0 R - 4\kappa N_1\Delta\Omega_1^0 R(MAB-I_z)}{-4\kappa N_1(A+B)(MAB-I_z) + MI_z(\Omega_1^0 R)^2}\right)$$

график $\Omega_z = \mathcal{C}(V_x, \Delta)$ локальный максимум — в точке

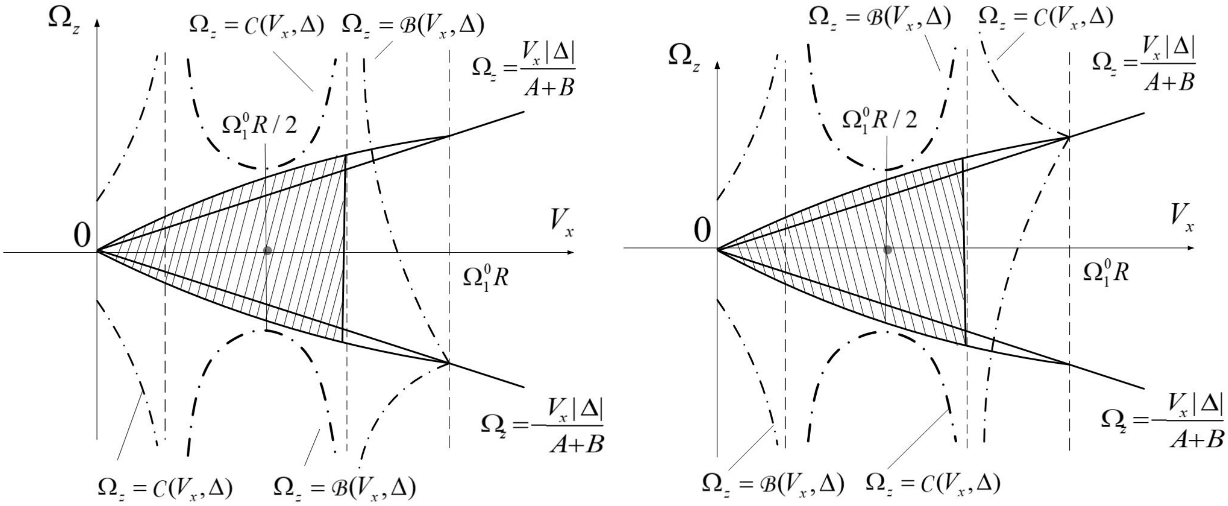
$$\left(\frac{\Omega_1^0 R}{2}; \frac{-2\kappa N_2(I_z+MB^2)\Omega_1^0 R - 4\kappa N_1\Delta\Omega_1^0 R(MAB-I_z)}{-4\kappa N_1(A+B)(MAB-I_z) + MI_z(\Omega_1^0 R)^2}\right)$$

Область применимости модели (1.3.39) и построенных на рис. 1.9 (а, б) фазовых портретов получается путем пересечения области выполнения неравенств (1.3.57), (1.3.59) с отвечающей предположению (1.2.3) областью (1.3.29). Учитывая условия (1.3.31), (1.3.61), для случая $\Delta < 0$ имеем область применимости, показанную штриховкой на рис. 1.10 (а). Графики функций $\Omega_z = \mathcal{B}(V_x, \Delta)$ и $\Omega_z = \mathcal{C}(V_x, \Delta)$, определенных выражениями (1.3.56), (1.3.58), отмечены штрихпунктиром. Пунктирными линиями отмечены асимптоты V_x^*, V_x^{**}, определенные выражениями (1.3.60), а также прямая $V_x = \Omega_1^0 R$; область применимости ограничена справа («с избытком») сплошной вертикальной линией, отвечающей условию (1.3.31).

Заметим, что выражения (1.3.55) при любом фиксированном значении $|\Delta| = d$ удовлетворяют неравенствам

$$\mathcal{B}(V_x, \Delta)\big|_{\Delta=-d} = -\,\mathcal{C}(V_x, \Delta)\big|_{\Delta=d}\,, \qquad \mathcal{B}(V_x, \Delta)\big|_{\Delta=d} = -\,\mathcal{C}(V_x, \Delta)\big|_{\Delta=-d}$$

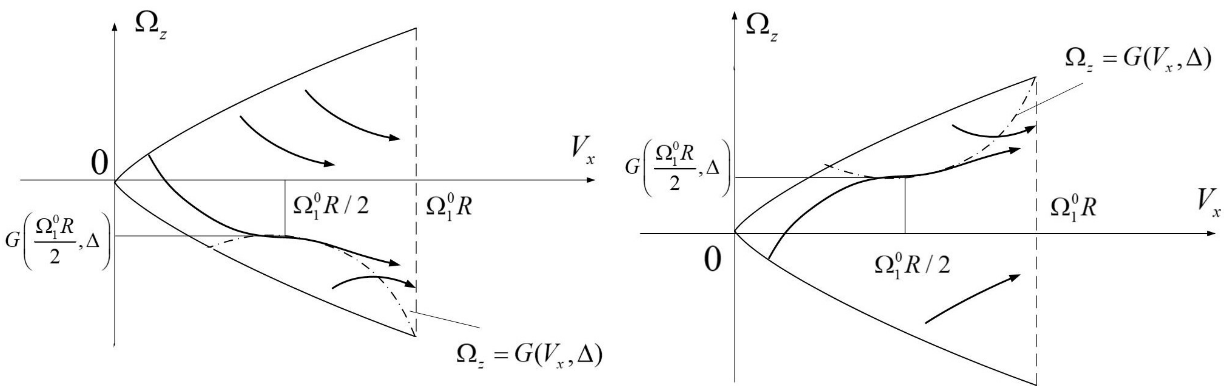
Следовательно, графики функций $\Omega_z = \mathcal{B}(V_x, \Delta)$ и $\Omega_z = \mathcal{C}(V_x, \Delta)$ в случае $\Delta > 0$ симметричны относительно оси V_x соответствующим графикам $\Omega_z = \mathcal{C}(V_x, \Delta)$ и $\Omega_z = \mathcal{B}(V_x, \Delta)$ в случае $\Delta < 0$. (Тот же вывод может быть сделан непосредственно из неравенства (1.3.23), которое в силу (1.3.54) и постоянства значения нормальной реакции N_2 не изменяется при одновременном изменении знаков Δ и Ω_z.) Область применимости фазового портрета системы (1.3.39) в случае $\Delta > 0$ показана штриховкой на рис. 1.10 (б). Из рис. 1.10 (а), (б) следует, что области применимости одинаковы для случаев $\Delta < 0$ и $\Delta > 0$.



а) б)

Рис. 1.10. Качественный вид области применимости модели заноса аппарата с пробуксовывающим передним колесом при фиксированном значении $\Delta < 0$ (а) и $\Delta > 0$ (б)

Фазовый портрет системы уравнений (1.3.39) с учетом ее области применимости для случаев $\Delta < 0$ и $\Delta > 0$ показан на рис. 1.11 За пределами этой области систему (1.3.39) следует использовать с осторожностью.



а) б)

Рис. 1.11. Качественный вид фазовых траекторий модели заноса аппарата с пробуксовывающим передним колесом в области применимости модели при фиксированном значении $\Delta < 0$ (а) и $\Delta > 0$ (б)

1.3.3 Занос задней оси аппарата с заблокированными задними колесами

1.3.3.1 Математическая модель

Перейдем к рассмотрению движения аппарата с заблокированным задним колесом и передним колесом, не потерявшем сцепление с опорной плоскостью. В этом случае связи, запрещающие проскальзывание переднего колеса, имеют вид

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1, & f_2 \end{pmatrix}^T = \mathbf{0}$$

где, в соответствии с первыми двумя выражениями (1.2.7),

$$\begin{aligned} f_1 &= U_{x1} = V_x \cos\Delta + (V_y + \Omega_z A)\sin\Delta - \Omega_1 R = 0 \\ f_2 &= U_{y1} = -V_x \sin\Delta + (V_y + \Omega_z A)\cos\Delta = 0 \end{aligned} \tag{1.3.62}$$

Вычислим матрицу

$$\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\boldsymbol{\pi}}}\right)^T = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial V_x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial V_y} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \Omega_z} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \Omega_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \Omega_\Delta} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \Omega_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial V_x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial V_y} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \Omega_z} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \Omega_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \Omega_\Delta} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \Omega_2} \end{pmatrix}^T =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\Delta & -\sin\Delta \\ \sin\Delta & \cos\Delta \\ A\sin\Delta & A\cos\Delta \\ -R & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.3.63}$$

При наличии двух связей (1.3.62) вектор $\boldsymbol{\lambda}$ неопределенных множителей Лагранжа (реакций связей) содержит две компоненты: $\boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1, & \lambda_2 \end{pmatrix}^T$.

Из (1.3.63) следует соотношение

$$\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \dot{\boldsymbol{\pi}}}\right)^T \boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cos\Delta - \lambda_2 \sin\Delta \\ \lambda_1 \sin\Delta + \lambda_2 \cos\Delta \\ A(\lambda_1 \sin\Delta + \lambda_2 \cos\Delta) \\ -R\lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.3.64}$$

В соответствии с (1.2.1), (1.2.17), (1.3.64), уравнения Лагранжа с множителями, определяющие динамику аппарата в рассматриваемом случае, записываются в форме

$$\begin{aligned} M\dot{V}_x &= \lambda_1 \cos\Delta - \lambda_2 \sin\Delta + P_{x2} + MV_y\Omega_z + F_x \\ M\dot{V}_y &= \lambda_1 \sin\Delta + \lambda_2 \cos\Delta + P_{y2} - MV_x\Omega_z + F_y \\ I_z\dot{\Omega}_z &= (\lambda_1 \sin\Delta + \lambda_2 \cos\Delta)A - P_{y2}B + M_z \end{aligned} \tag{1.3.65}$$

$$I_1\dot{\Omega}_1 = L_1 - \lambda_1 R$$

$$I_{z1}\left(\dot{\Omega}_\Delta + \dot{\Omega}_z\right) = M_\Delta$$

Система уравнений (1.3.65) решается совместно с уравнениями связей (1.3.62).

Как и в разделах 1.3.1, 1.3.2, будем рассматривать V_x, Ω_z, Δ в качестве независимых переменных и исключим из системы (1.3.62), (1.3.65) зависимые переменные — поперечную составляющую V_y скорости центра масс аппарата и угловую скорость Ω_1 вращения переднего колеса, а также реакции связей λ_1 и λ_2, равные, соответственно, продольной и поперечной составляющим P_{x1} и P_{y1} контактной силы на непроскальзывающем переднем колесе. Для этого продифференцируем уравнения связей (1.3.62) по времени

$$\begin{gathered}\dot{V}_x\cos\Delta + (\dot{V}_y + \dot{\Omega}_z A)\sin\Delta - \dot{\Omega}_1 R = 0 \\ -\dot{V}_x\sin\Delta + (\dot{V}_y + \dot{\Omega}_z A)\cos\Delta - \Omega_1 R\dot{\Delta} = 0\end{gathered} \tag{1.3.66}$$

Из уравнений (1.3.65), (1.3.66) получаем выражения для реакций связей

$$\lambda_1 = P_{x1} = \frac{L_1}{R} \tag{1.3.67}$$

$$\lambda_2 = P_{y1} = \frac{P_{x2}I_z\sin\Delta + P_{y2}(MAB - I_z)\cos\Delta - P_{x1}MA^2\sin\Delta\cos\Delta}{MA^2\cos^2\Delta + I_z} +$$

$$+\frac{(MV_x\Omega_z\cos\Delta + MV_y\Omega_z\sin\Delta + M\Omega_1\Omega_\Delta R + F_x\sin\Delta - F_y\cos\Delta)I_z}{MA^2\cos^2\Delta + I_z} +$$

$$+\frac{-MA(M_z - M_\Delta)\cos\Delta}{MA^2\cos^2\Delta + I_z}$$

Как и в разделе 1.3.1, вывод формул (1.3.67) проводился в пренебрежении малыми слагаемыми $O(\mu)$, $\mu = m/M$, в частности M_Δ, в случае выполнения неравенства (1.2.2).

Подставив (1.3.67) в (1.3.65) и учитывая второе выражение (1.2.4), получим уравнения движения велосипедной модели аппарата с заблокированным задним и непроскальзывающим передним колесом

$$\begin{gathered}M\dot{V}_x = L_1\cos\Delta/R - P_{y1}\sin\Delta + P_{x2} - M(V_x\operatorname{tg}\Delta - \Omega_z A)\Omega_z + F_x \\ I_z\dot{\Omega}_z = (P_{x1}\sin\Delta + P_{y1}\cos\Delta)A - P_{y2}B + M_z \\ \dot{X} = V_x\cos\Psi - (V_x\operatorname{tg}\Delta - \Omega_z A)\sin\Psi \\ \dot{Y} = V_x\sin\Psi + (V_x\operatorname{tg}\Delta - \Omega_z A)\cos\Psi, \quad \dot{\Psi} = \Omega_z\end{gathered} \tag{1.3.68}$$

$$P_{x2} = -\kappa N_2 \frac{U_{x2}}{\sqrt{U_{x2}^2 + U_{y2}^2}}, \quad P_{y2} = -\kappa N_2 \frac{U_{y2}}{\sqrt{U_{x1}^2 + U_{y2}^2}}$$

$$U_{x2} = V_x, \quad U_{y2} = V_x \operatorname{tg}\Delta - \Omega_z(A+B)$$

$$N_2 = \frac{MgA + (L_1 \cos\Delta/R - P_{y1}\sin\Delta + P_{x2})H}{A+B}$$

Переменные V_y, Ω_1 определяются из соотношений (1.3.62)

$$V_y = V_x \operatorname{tg}\Delta - \Omega_z A, \quad \Omega_1 = V_x/(R\cos\Delta) \tag{1.3.69}$$

нормальная реакция N_1 — первым выражением (1.2.4), касательные составляющие P_{x1}, P_{y1} контактной силы на переднем колесе аппарата — выражениями (1.3.67). Как и в разделах 1.3.1 и 1.3.2, угол Δ поворота передних колес рассматривается как управление.

Из первого равенства (1.3.69) следует, что, в отличие от рассмотренных в разделах 1.3.1, 1.3.2 случаев заноса аппарата с заблокированными или пробуксовывающими передними колесами, при $\Delta \neq 0$ убывание переменной $|\Omega_z|$ в общем случае не влечет за собой убывание переменной $|V_y|$. Поэтому занос аппарата следует изучать с учетом изменения обеих этих переменных.

1.3.3.2 Фазовая плоскость модели при постоянном угле поворота переднего колеса и отсутствии внешних воздействий

Проведем исследование динамических уравнений системы (1.3.68). Для упрощения дальнейшего исследования, как и при анализе систем (1.3.8) и (1.3.30) в разделах 1.3.1 и 1.3.2, будем считать выполненными условия (1.3.10), (1.2.8), условие свободного движения аппарата

$$L_1 = 0 \tag{1.3.70}$$

и пренебрегать членами второго и более высоких порядков малости по переменным Δ, Ω_z, удовлетворяющим условию (1.2.3).

При изучении задачи, как и ранее в разделах 1.3.1.2, 1.3.2.2, можно выделить три случая:

1) $|U_{x2}| \gg |U_{y2}|$ (проскальзывание заднего колеса в продольном направлении существенно больше проскальзывания в поперечном направлении — движение близкое к скольжению заднего колеса в продольном направлении). Тогда из (1.2.3) и выражений U_{x2}, U_{y2} из (1.3.68) получим неравенство (1.3.11). В рамках условий (1.3.11) использование велосипедной модели, справедливой для движений с небольшими значениями поперечной и угловой скоростей корпуса аппарата, корректно.

Из выражений для P_{x2}, P_{y2} системы (1.3.68), выражений для P_{x1}, P_{y1} из (1.3.67), условий (1.3.10), (1.3.70), неравенства (1.3.11) для малых значений $|M_\Delta|$ получим неравенство $|P_{x2}| \gg |P_{y2}| \sim |P_{y1}|$ и равенство $P_{x1} = 0$, при выполнении которых аппарат движется, в основном, в продольном направлении с малыми поперечной и угловой скоростями корпуса.

2) $|U_{x2}| \sim |U_{y2}|$ (проскальзывания заднего колеса в продольном и поперечном направлениях соизмеримы). Здесь из (1.2.3) и выражений U_{x2}, U_{y2} из (1.3.68) следует приближенное соотношение (1.3.12), которое не может быть реализовано при выполнении условий (1.2.3).

3) $|U_{x2}| \ll |U_{y2}|$ (проскальзывание заднего колеса в продольном направлении существенно меньше проскальзывания в поперечном направлении — движение близкое к скольжению заднего колеса в поперечном направлении). При выполнении этого неравенства получим неравенство (1.3.13), которое так же не может быть реализовано при выполнении условий (1.2.3).

В соответствии с выражениями U_{x2}, U_{y2} из (1.3.68) на указанном уровне точности имеем

$$\sqrt{U_{x2}^2 + U_{y2}^2} = \sqrt{V_x^2 + (V_x\Delta - \Omega_z(A+B))^2} = \sqrt{V_x^2} = V_x \tag{1.3.71}$$

следовательно, $\dfrac{U_{x2}}{\sqrt{U_{x2}^2 + U_{y2}^2}} = 1$

Таким образом, входящее в (1.3.68) выражение для продольной составляющей контактной силы на заднем колесе имеет вид

$$P_{x2} = -\kappa N_2 \tag{1.3.72}$$

В силу (1.2.5) справедливо неравенство $P_{x2} < 0$.

Вычислим далее

$$\frac{U_{y2}}{\sqrt{U_{x2}^2 + U_{y2}^2}} = \frac{V_x\Delta - \Omega_z(A+B)}{V_x} = \Delta - \frac{\Omega_z(A+B)}{V_x}$$

Тем самым входящее в (1.3.68) выражение для поперечной составляющей контактной силы на заднем колесе записывается в форме

$$P_{y2} = -\kappa N_2 \left(\Delta - \frac{\Omega_z(A+B)}{V_x}\right) \tag{1.3.73}$$

В силу (1.3.11), (1.3.72), (1.3.73) величина поперечной составляющей силы кулонова трения на заднем колесе аппарата, имеющая порядок $\kappa N_2|\Delta|$, остается существенно меньше величины κN_2 продольной составляющей этой силы.

Из выражений (1.3.67), (1.3.73) для малых значений $|M_\Delta|$ на указанном уровне точности следует равенство $P_{y1}\Delta = 0$, подстановка которого в последнее равенство системы (1.3.68) при учете (1.3.70), (1.3.72), дает выражение для нормальной реакции на заднем колесе аппарата

$$N_2 = \frac{MgA}{A + B + \kappa H} \tag{1.3.74}$$

В соответствии со вторым выражением (1.2.4) и формулой (1.3.74) в рассматриваемом случае для выполнения условий (1.2.5) не нужно привлекать дополнительные ограничения вида (1.3.18).

Таким образом, линеаризованные по переменным Δ и Ω_z динамические уравнения системы (1.3.68), которые описывают изменение продольной скорости центра масс корпуса аппарата и его вращение вокруг точки контакта переднего колеса, не потерявшего сцепление с опорной плоскостью, имеют вид

$$\begin{gathered} M\dot{V}_x = -\kappa N_2, \quad (I_z + MA^2)\dot{\Omega}_z = \Phi(V_x, \Omega_z, \Delta) \\ N_2 = \frac{MgA}{A + B + \kappa H}, \quad \Phi(V_x, \Omega_z, \Delta) = \kappa N_2 \left(B\Delta - \frac{\Omega_z (A+B)^2}{V_x} \right) + MAV_x\Omega_z \end{gathered} \tag{1.3.75}$$

Первое соотношение (1.3.69), описывающее изменение поперечной скорости центра масс корпуса аппарата, после линеаризации записывается в форме

$$V_y = V_x\Delta - \Omega_z A \tag{1.3.76}$$

При подстановке в (1.3.75), (1.3.76) значения $\Delta = 0$ получаем систему

$$\begin{gathered} M\dot{V}_x = -\kappa N_2 \\ (I_z + MA^2)\dot{\Omega}_z = -\kappa N_2 \frac{\Omega_z (A+B)^2}{V_x} + MAV_x\Omega_z \end{gathered} \tag{1.3.77}$$

которая совпадает с аналогичной системой из [14, 22] после линеаризации последней по переменной Ω_z.

Как и в разделе 1.3.2 будем далее рассматривать случай (1.3.41) постоянства угла поворота переднего колеса аппарата, когда система (1.3.75) допускает исследование методом фазовой плоскости. Для построения фазового портрета, как и ранее, воспользуемся методом изоклин.

Как и для случая блокировки переднего колеса, правая часть первого уравнения системы (1.3.75) постоянна и строго отрицательна, что отвечает убыванию продольной скорости V_x аппарата в ходе равнозамедленного движения.

Рассмотрим уравнение $\Phi(V_x, \Omega_z, \Delta) = 0$, определяющее кривую с горизонтальными касательными к фазовым траекториям: $d\Omega_z/dV_x = 0$. Разрешив это уравнение относительно переменной Ω_z, получим

$$\Omega_z = S(V_x, \Delta) = -\frac{\kappa N_2 B V_x \Delta}{MAV_x^2 - \kappa N_2 (A+B)^2} \tag{1.3.78}$$

Построим графики функции $\Omega_z = S(V_x, \Delta)$, определяемой выражением (1.3.78) для значений $\Delta < 0$ и $\Delta > 0$. Уравнение для отыскания вертикальных асимптот этих графиков имеет вид

$$V_x^2 = \frac{\kappa N_2 (A+B)^2}{MA} \tag{1.3.79}$$

Поскольку правая часть выражения (1.3.79) положительна с учетом (1.3.20) получаем асимптоту

$$V_x = V_x^* = (A+B)\sqrt{\frac{\kappa N_2}{MA}} \tag{1.3.80}$$

Для нахождения экстремумов, а также промежутков возрастания и убывания функции $\Omega_z = S(V_x, \Delta)$ относительно переменной V_x вычислим ее производную

$$\frac{d\Omega_z(V_x, \Delta)}{dV_x} = \frac{\kappa N_2 \Delta B(\kappa N_2 (A+B)^2 + MAV_x^2)}{(\kappa N_2 (A+B)^2 - MAV_x^2)^2} \tag{1.3.81}$$

Из выражения (1.3.81) следует равенство

$$\operatorname{sgn}\left(\frac{d\Omega_z(V_x, \Delta)}{dV_x}\right) = \operatorname{sgn}\Delta \tag{1.3.82}$$

Таким образом, функция $\Omega_z = S(V_x, \Delta)$, определяемая соотношением (1.3.78), не имеет экстремумов: при значениях $\Delta > 0$ она возрастает, при значениях $\Delta < 0$ — убывает.

Из второго уравнения (1.3.75) следует, что при положительных значениях функции $\Phi(V_x, \Omega_z, \Delta)$ угловая скорость Ω_z корпуса аппарата возрастает, при отрицательных значениях — убывает. При $\Delta = 0$ фазовый портрет соответствующей (1.3.75) системы (1.3.77) симметричен относительно оси V_x; переменная V_x монотонно убывает, переменная $|\Omega_z|$ при достаточно больших значениях переменной $V_x > V_x^*$ возрастает (здесь занос аппарата увеличивается), при $V_x < V_x^*$ — убывает (здесь в силу равенства (1.3.76) для $\Delta = 0$ занос уменьшается) (рис. 1.12).

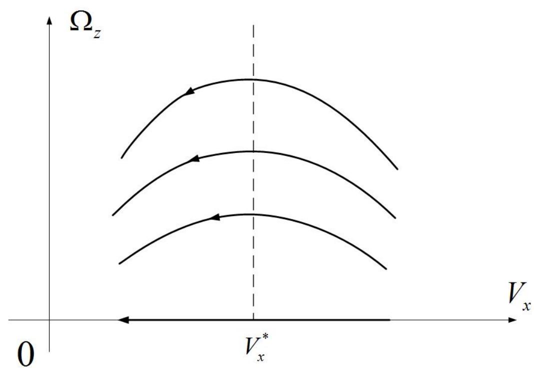


Рис. 1.12. Качественное поведение фазовых траекторий модели заноса аппарата с заблокированным задним колесом при фиксированном значении $\Delta = 0$ [14,22]

Фазовый портрет системы уравнений (1.3.75) в случае $\Delta < 0$ показан на рис. 1.13 (a). Знаками «+» и «−» отмечены области между ветвями графика функции (1.3.78), где функция $\Phi(V_x, \Omega_z, \Delta)$ имеет положительные и отрицательные знаки, что отвечает, соответственно, возрастанию и убыванию переменной Ω_z и выполнению неравенств $d\Omega_z/dV_x < 0$ и $d\Omega_z/dV_x > 0$.

В случае $\Delta < 0$ фазовый портрет системы (1.3.75) теряет свойство симметрии. В области $0 < \Omega_z < S(V_x, \Delta)$, в отличие от случая $\Delta = 0$, переменная Ω_z убывает во все время движения (в силу (1.3.52)) и равенства (1.3.76) при этом убывает и переменная $|V_y|$, т.е. занос аппарата уменьшается); в остальных областях фазовой плоскости поведение переменной $|\Omega_z|$ в зависимости от переменной V_x схоже со случаем $\Delta = 0$. Из (1.3.75) следует формула

$$\frac{d\Omega_z}{dV_x} = -\frac{M}{I_z + MA^2} \cdot \frac{\kappa N_2 B V_x \Delta + \Omega_z \left[MAV_x^2 - \kappa N_2 (A+B)^2\right]}{\kappa N_2 V_x} \tag{1.3.83}$$

Выражение в квадратных скобках положительно при $V_x > V_x^*$ и отрицательно при $V_x < V_x^*$, где выражение для V_x^{**} определено второй формулой (1.3.80). Рассмотрим оба случая. В соответствии с (1.3.83) при любых фиксированных значениях $\Delta = -d < 0$, $V_x = v$ и $|\Omega_z| = w$ следуют неравенства

$$\begin{aligned} &\left|\frac{d\Omega_z}{dV_x}\right|\Bigg|_{\Delta=-d, v>V_x^*, \Omega_z=w} < \left.\frac{d\Omega_z}{dV_x}\right|_{\Delta=-d, v>V_x^*, \Omega_z=-w} \\ &\left.\frac{d\Omega_z}{dV_x}\right|_{\Delta=-d, v<V_x^*, \Omega_z=w} > \left|\frac{d\Omega_z}{dV_x}\right|\Bigg|_{\Delta=-d, v<V_x^*, \Omega_z=-w} \end{aligned} \tag{1.3.84}$$

Тем самым в случае $\Delta < 0$ при $V_x > V_x^*$ возрастание переменной $|\Omega_z|$ в области $\Omega_z > 0$ происходит медленнее, чем в области $\Omega_z < 0$; при $V_x < V_x^*$ убывание переменной $|\Omega_z|$ в области $\Omega_z > 0$ происходит быстрее, чем в области $\Omega_z < 0$.

Аналогично рассматривается случай $\Delta > 0$. Поскольку второе уравнение системы (1.3.75) не изменяется при одновременном изменении знаков Δ и Ω_z, соответствующий фазовый портрет системы (1.3.75) симметричен фазовому портрету на рис. 1.13 (б) относительно оси V_x (рис. 1.13 (а)).

Приведем количественные оценки, позволяющие выяснить как поворот переднего колеса аппарата вокруг вертикальной оси $A_1 z_1$ влияет на развитие его заноса. Для этого, как и в разделе 1.3.2, сравним значения $d\Omega_z/dV_x$ при $\Delta \neq 0$ и при $\Delta = 0$. Из формулы (1.3.83) имеем

$$\left.\frac{d\Omega_z}{dV_x}\right|_{\Delta=0} = \frac{M}{I_z + MA^2} \cdot \frac{\Omega_z \left(MAV_x^2 - \kappa N_2 (A+B)^2\right)}{-\kappa N_2 V_x} \tag{1.3.85}$$

Сопоставляя выражения (1.3.83) и (1.3.85), получаем

$$\frac{d\Omega_z}{dV_x} = \left.\frac{d\Omega_z}{dV_x}\right|_{\Delta=0} - \frac{MB\Delta}{I_z + MA^2} \tag{1.3.86}$$

С учетом симметрии фазовых портретов системы (1.3.75) при $\Delta < 0$ и $\Delta > 0$ относительно оси V_x нетрудно заметить, что при любых фиксированных значениях $|\Delta| = d$, $V_x = v$ и $|\Omega_z| = w$

$$\left|\frac{d\Omega_z}{dV_x}\right|\Bigg|_{\Delta=0,\Omega_z=w>S(V_x,\Delta)} > \left|\frac{d\Omega_z}{dV_x}\right|\Bigg|_{\Delta=-d,\Omega_z=w>S(V_x,\Delta)} = \left.\frac{d\Omega_z}{dV_x}\right|_{\Delta=d,\Omega_z=-w<S(V_x,\Delta)}$$
$$\left|\frac{d\Omega_z}{dV_x}\right|\Bigg|_{\Delta=0,v<V_x^*,|\Omega_z|=w} < \left.\frac{d\Omega_z}{dV_x}\right|_{\Delta=-d,v<V_x^*,\Omega_z=w} = \left|\frac{d\Omega_z}{dV_x}\right|\Bigg|_{\Delta=d,v<V_x^*,\Omega_z=-w} \tag{1.3.87}$$

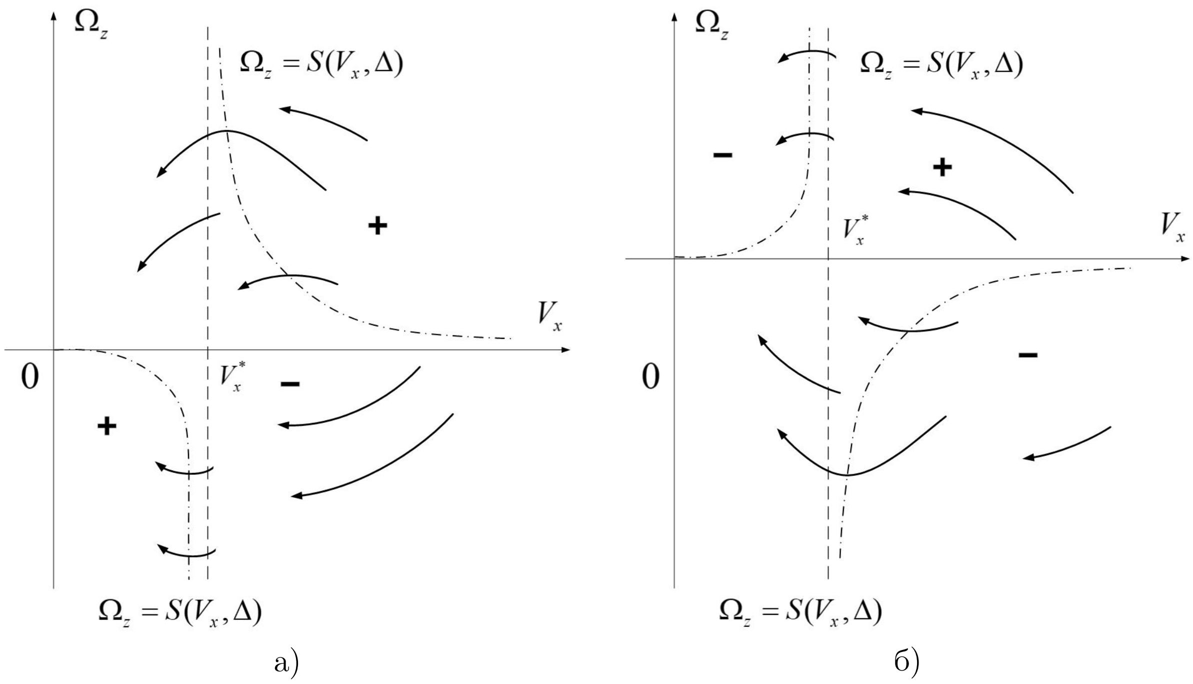


Рис. 1.13. Качественное поведение фазовых траекторий модели заноса аппарата с заблокированным задним колесом при фиксированном значении $\Delta < 0$ (а) и $\Delta > 0$ (б)

Анализ рис. 1.12–1.13 и неравенств (1.3.84) показывает, что при выполнении условия (1.3.52) («повороте переднего колеса велосипедной модели аппарата в сторону заноса задней оси») увеличение переменной $|\Omega_z|$ в целом будет происходить менее интенсивно, а уменьшение — более интенсивно, чем при неповернутых передних колесах. В отличие от случая $\Delta = 0$, когда при $V_x > V_x^*$ переменная $|\Omega_z|$ возрастает, при значениях $\Delta \neq 0$, выбранных в соответствии с (1.3.52), и $|\Omega_z| < |S(V_x, \Delta)|$ переменная $|\Omega_z|$ будет уменьшаться.

Если знаки Ω_z и Δ совпадают («повернуть передние колеса против заноса задней оси»), то практически во все время движения аппарата переменная $|\Omega_z|$ при сколь угодно малых начальных значениях будет увеличиваться, скорость ее изменения в целом будет выше, чем в случае выполнения условия (1.3.52). Рассогласование между скоростями изменения переменной $|\Omega_z|$ определяется вторым слагаемым в правой части равенства (1.3.86), изменение переменной $|V_y|$ может быть найдено из (1.3.76). Нарушение условия (1.3.52) приводит к более опасному протеканию заноса аппарата.

Алгоритм эффективного подавления заноса аппарата с заблокированными задними колесами схож с алгоритмом, сформированным в конце раздела 1.3.2. Следует повернуть передние колеса в сторону смещения задней оси в соответствии с условием (1.3.52), и при достижении переменной Ω_z близких к нулю или нулевых значений повернуть передние колеса в противоположную сторону и зафиксировать их вдоль корпуса, обеспечив выполнение условия $\Delta = 0$. Это уменьшит значение поперечной скорости $V_y \approx V_x\Delta$ корпуса аппарата до близких к нулю значений $V_y \approx -\Omega_z A \approx 0$, т.е. обеспечит существенное уменьшение заноса. Если в момент прямолинейного положения передних колес аппарата переменная $|\Omega_z|$ не достигла нулевых значений и снова начинает возрастать, следует как можно скорее повторно повернуть передние колеса аппарата в сторону заноса его задней оси. Для уменьшения угловой скорости V_y корпуса аппарата при небольших значениях $|\Omega_z|$ величину угла поворота передних колес следует уменьшить по сравнению с ее первоначальным значением, исходя из условия

$$\Delta \approx \frac{\Omega_z A}{V_x} \tag{1.3.88}$$

Указанные циклы следует повторять вплоть до прекращения заноса аппарата.

Результаты проведенного анализа отвечают принятым в теории вождения автомобиля рекомендациям «поворачивать руль в сторону заноса задней оси» (рис. 1.1), а полученные формулы позволяют сформировать эффективный алгоритм работ систем управления аппаратом. Их достоверность подтверждается сравнением с результатами численного моделирования [14, 53].

Приведем численные результаты для параметров и динамических характеристик автомобиля, взятых из [53]. Для удобства сравнения запишем (1.3.86) в виде

$$\frac{d\Omega_z}{dV_x} = -\frac{M}{I_z + MA^2}\left[\frac{\Omega_z\left(MAV_x^2 - \kappa N_2(A+B)^2\right)}{\kappa N_2 V_x} + B\Delta\right] \tag{1.3.89}$$

Слагаемые в квадратных скобках имеют одинаковые порядки, следовательно, правильный выбор значения Δ в зависимости от значений динамических переменных V_x и Ω_z позволяет прекратить занос аппарата. В качестве примера возьмем $\Omega_1^0 R = 40$ м/с, $\kappa = 0,8$, $M = 1000$ кг, $I_z = 1000$ кг·м^2, $A = B = 1,5$ м, $H = 1$ м, зафиксировав значение $V_x = 20$ м/с. Для случая $\Delta = 0$ правая часть выражения (1.3.53) приблизительно равна $-1,5$ с/м $\cdot\,\Omega_z$, для случая $\Delta \neq 0$ — $-1,5$ с/м $\cdot\,\Omega_z - 0,5 \cdot 1$/м $\cdot\,\Delta$.

1.3.3.3 Область применимости фазового портрета

Построим область применимости фазовых портретов на рис. 1.13 (а, б).

В соответствии с неравенством (1.2.19) для $i = 1$ и допущением (1.2.8) условие, ограничивающее область корректного использования модели (1.3.68), в рамках которой переднее колесо аппарата не проскальзывает относительно опорной плоскости, имеет вид

$$\left(\frac{P_{x1}}{\kappa N_1}\right)^2 + \left(\frac{P_{y1}}{\kappa N_1}\right)^2 < 1 \tag{1.3.90}$$

Выражение для N_1 определяется из второго выражения (1.2.4) и формулы (1.3.74). Поскольку в силу условия (1.3.70) и первого выражения (1.3.67) продольная составляющая контактной силы на переднем колесе равна нулю $P_{x1} = 0$, неравенство (1.3.90) принимает вид $(P_{y1})^2 < (\kappa N_1)^2$, из которого при выполнении (1.2.5) вытекает неравенство

$$|P_{y1}| < \kappa N_1 \tag{1.3.91}$$

Аналогично разделам 1.3.1, 1.3.2, при решении неравенства (1.3.91) воспользуемся предположением (1.2.3) и запишем выражение P_{y1}, пренебрегая членами второго и более высоких порядков малости по переменным Ω_z, Δ.

Из второго выражения (1.3.67) и формул (1.3.72), (1.3.73), построенных с использованием предположения (1.2.3), в силу допущений (1.3.10) выражение для поперечной составляющей контактной силы на переднем колесе принимает вид

$$P_{y1} = \frac{I_z}{I_z + MA^2}\left(\kappa N_2 \frac{\Omega_z(A+B)(MAB - I_z) - MABV_x\Delta}{I_zV_x} + MV_x\Omega_z\right) \tag{1.3.92}$$

где выражение для N_2 определяется из (1.3.74), переменная Δ отвечает условию (1.3.41).

Решением неравенства (1.3.91) служит область плоскости V_x, Ω_z, лежащая на пересечении областей $P_{y1} < \kappa N_1$ и $P_{y1} > -\kappa N_1$. Для удобства их построения и анализа введем обозначения

$$\begin{gathered}
\tilde{\mathcal{A}}(V_x) = \kappa N_2(A+B)(MAB - I_z) + MI_zV_x^2 \\
\tilde{\mathcal{B}}(V_x, \Delta) = \frac{V_x(\kappa N_1(I_z + MA^2) + \kappa N_2 MAB\Delta)}{\tilde{\mathcal{A}}(V_x)} \\
\tilde{\mathcal{C}}(V_x, \Delta) = \frac{V_x(-\kappa N_1(I_z + MA^2) + \kappa N_2 MAB\Delta)}{\tilde{\mathcal{A}}(V_x)}
\end{gathered} \tag{1.3.93}$$

Учитывая условия (1.2.5), (1.3.26), имеем

$$\tilde{\mathcal{A}}(V_x) > 0 \tag{1.3.94}$$

Выразив из уравнения $P_{y1} = \kappa N_1$ переменную Ω_z, получим

$$\Omega_z = \tilde{\mathcal{B}}(V_x, \Delta) \tag{1.3.95}$$

В силу выражений (1.3.92) – (1.3.95) условие $P_{y1} < \kappa N_1$ равносильно условию

$$\Omega_z < \tilde{\mathcal{B}}(V_x, \Delta) \tag{1.3.96}$$

Аналогично, выразив из уравнения $P_{y1} = -\kappa N_1$ переменную Ω_z, имеем

$$\Omega_z = \tilde{\mathcal{C}}(V_x, \Delta) \tag{1.3.97}$$

В силу выражений (1.3.92) – (1.3.94), (1.3.97) условие $P_{y1} > -\kappa N_1$ равносильно условию

$$\Omega_z > \tilde{\mathcal{C}}(V_x, \Delta) \tag{1.3.98}$$

Из последнего неравенства (1.2.3), (1.3.94) и условия (1.3.20) следуют неравенства

$$\tilde{\mathcal{B}}(V_x, \Delta) > 0, \qquad \tilde{\mathcal{C}}(V_x, \Delta) < 0 \tag{1.3.99}$$

Решим неравенства (1.3.96), (1.3.98) графически для случая $\Delta < 0$. Построим графики функций $\Omega_z = \tilde{\mathcal{B}}(V_x, \Delta)$ и $\Omega_z = \tilde{\mathcal{C}}(V_x, \Delta)$ на плоскости V_x, Ω_z. Они имеют единственную точку пересечения в начале координат. При $V_x \to \infty$, имеем

$$\tilde{\mathcal{B}}(V_x, \Delta) \to 0, \qquad \tilde{\mathcal{C}}(V_x, \Delta) \to 0$$

Область применимости модели (1.3.75) и построенных на рис. 1.13 (а, б) фазовых портретов получается путем пересечения области выполнения неравенств (1.3.96), (1.3.98) с отвечающей предположению (1.2.3) областью (1.3.29). Таким образом, для случая $\Delta < 0$ получим область применимости, показанную штриховкой на рис. 1.14 (а).

Для построения графиков функций (1.3.95), (1.3.97) в случае $\Delta > 0$ заметим, что выражения (1.3.93) при любом фиксированном значении $|\Delta| = d$ удовлетворяют неравенствам

$$\tilde{\mathcal{B}}(V_x, \Delta)\Big|_{\Delta=-d} = -\,\tilde{\mathcal{C}}(V_x, \Delta)\Big|_{\Delta=d}, \qquad \tilde{\mathcal{B}}(V_x, \Delta)\Big|_{\Delta=d} = -\,\tilde{\mathcal{C}}(V_x, \Delta)\Big|_{\Delta=-d}$$

Следовательно, графики функций $\Omega_z = \tilde{\mathcal{B}}(V_x, \Delta)$ и $\Omega_z = \tilde{\mathcal{C}}(V_x, \Delta)$ в случае $\Delta > 0$ симметричны относительно оси V_x графикам $\Omega_z = \tilde{\mathcal{C}}(V_x, \Delta)$ и $\Omega_z = \tilde{\mathcal{B}}(V_x, \Delta)$ в случае $\Delta < 0$. (Тот же вывод может быть сделан непосредственно из неравенства (1.3.91), которое в силу (1.3.92) и постоянства значения нормальной реакции N_1 не изменяется при одновременном изменении знаков Δ и Ω_z.) Область применимости фазового портрета системы (1.3.75) в случае $\Delta > 0$ показана штриховкой на рис. 1.14 (б).

Фазовый портрет системы уравнений (1.3.75) с учетом ее области применимости для случаев $\Delta < 0$ и $\Delta > 0$ показан на рис. 1.15(а, б) (по сравнению с рис. 1.13 (а, б) масштаб искажен). За пределами этой области модель (1.3.75) следует использовать с осторожностью.

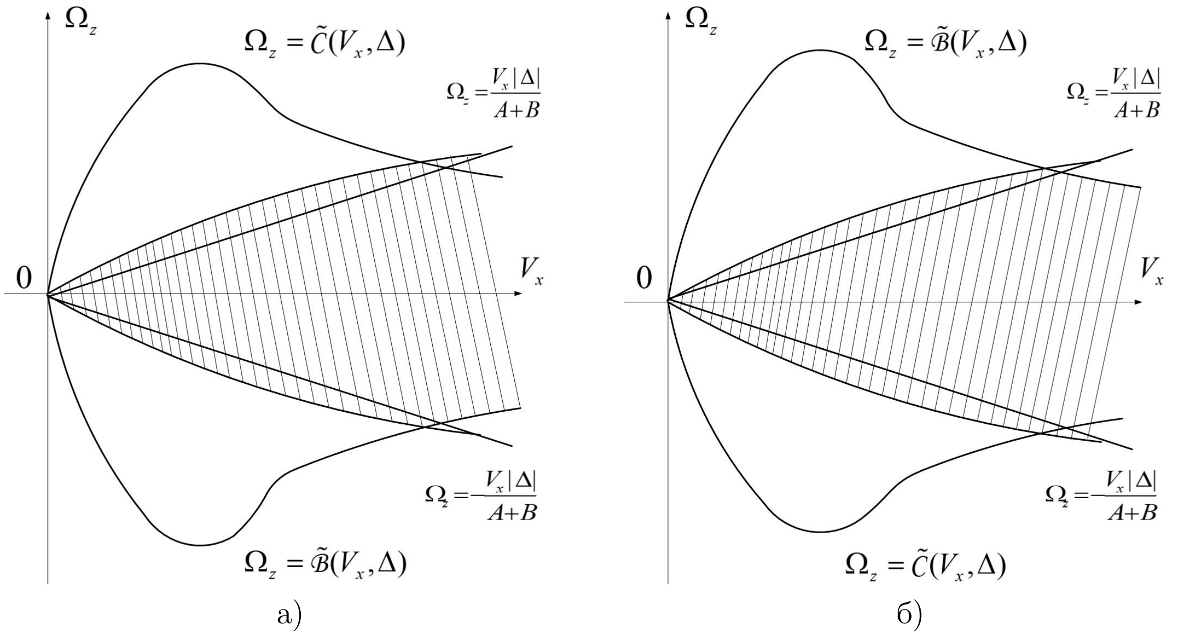


Рис. 1.14. Качественный вид области применимости модели заноса аппарата с заблокированным задним колесом при фиксированном значении $\Delta < 0$ (а) и $\Delta > 0$ (б)

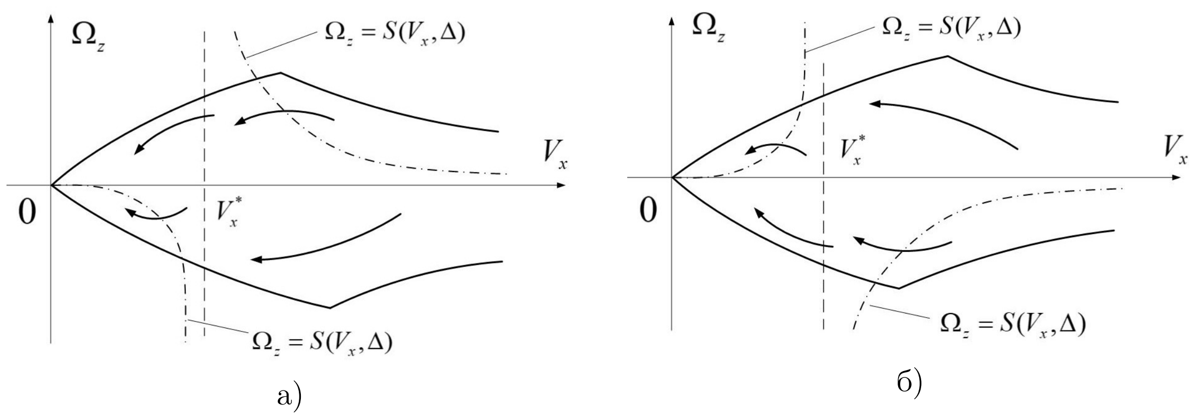


Рис. 1.15. Качественный вид фазовых траекторий модели заноса аппарата с заблокированным задним колесом в области применимости модели при фиксированном значении $\Delta < 0$ (а) и $\Delta > 0$ (б)

1.3.4 Занос задней оси аппарата с пробуксовывающими задними колесами

1.3.4.1 Математическая модель

Модель заноса велосипедной модели аппарата с пробуксовывающим задним колесом и передним колесом, не потерявшим сцепление с опорной плоскостью, получается по аналогии с моделью, построенной в разделе 1.3.3 для случая блокировки заднего колеса.

Как и ранее, при составлении уравнений Лагранжа с множителями связями служат условия (1.3.62) непроскальзывания переднего колеса аппарата. Отличие полученной системы от системы (1.3.68) состоит в выражениях для касательных составляющих P_{x2}, P_{y2} контактной силы взаимодействия заднего колеса с опорной плоскостью, в соответствии с формулами (1.2.6) они вычисляются при значении $\Omega_2 = \Omega_2^0$. Уравнения движения велосипедной модели, как и ранее, полученные в пренебрежении слагаемыми $O(\mu)$, в данном случае имеют вид

$$
\begin{aligned}
&M\dot{V}_x = L_1 \cos\Delta/R - P_{y1}\sin\Delta + P_{x2} - M(V_x \operatorname{tg}\Delta - \Omega_z A)\Omega_z + F_x \\
&I_z\dot{\Omega}_z = (P_{x1}\sin\Delta + P_{y1}\cos\Delta)A - P_{y2}B + M_z \\
&\dot{X} = V_x\cos\Psi - (V_x \operatorname{tg}\Delta - \Omega_z A)\sin\Psi \\
&\dot{Y} = V_x\sin\Psi + (V_x \operatorname{tg}\Delta - \Omega_z A)\cos\Psi, \quad \dot{\Psi} = \Omega_z \\
&P_{x2} = -\kappa N_2 \frac{U_{x2}}{\sqrt{U_{x2}^2 + U_{y2}^2}}, \quad P_{y2} = -\kappa N_2 \frac{U_{y2}}{\sqrt{U_{x1}^2 + U_{y2}^2}} \\
&U_{x2} = V_x - \Omega_2^0 R, \quad U_{y2} = V_x \operatorname{tg}\Delta - \Omega_z(A+B) \\
&N_2 = \frac{MgA + (L_1\cos\Delta/R - P_{y1}\sin\Delta + P_{x2})H}{A+B}
\end{aligned}
\tag{1.3.100}
$$

Как и при составлении системы (1.3.68) переменные V_y, Ω_1 определяются уравнениями (1.3.69), нормальная реакция N_1 — вторым выражением (1.2.4), касательные составляющие P_{x1}, P_{y1} контактной силы на переднем колесе аппарата — выражениями (1.3.67).

1.3.4.2 Фазовая плоскость модели при постоянном угле поворота переднего колеса и отсутствии внешних воздействий

Проведем исследование динамических уравнений системы (1.3.100). Как и в разделе 1.3.3 при анализе системы (1.3.68) будем считать выполненными условия (1.2.8), (1.3.10), (1.3.70) и пренебрегать членами второго и более высоких порядков малости по переменным Δ, Ω_z, удовлетворяющим условию (1.2.3).

При изучении задачи, как и ранее в разделах 1.3.1.2–1.3.3.2 можно выделить три случая:

1) $|U_{x2}| \gg |U_{y2}|$ (проскальзывание заднего колеса в продольном направлении существенно больше проскальзывания в поперечном направлении — движение близкое к скольжению заднего колеса в продольном направлении). Тогда из (1.2.3) и выра-

жений для U_{x2}, U_{y2} из (1.3.100) получим неравенство

$$|V_x - \Omega_2^0 R| \gg |V_x\Delta - \Omega_z(A+B)| \sim V_x|\Delta| \tag{1.3.101}$$

Из выражений для P_{x2}, P_{y2} системы (1.3.100), выражений для P_{x1}, P_{y1} из (1.3.67), условий, (1.3.10) (1.3.70) и неравенства (1.3.101) в случае малых значений M_Δ получим неравенство $|P_{x2}| \gg |P_{y2}| \sim |P_{y1}|$ и равенство $P_{x1} = 0$, при выполнении которых аппарат движется, в основном, в продольном направлении с малыми поперечной и угловой скоростями корпуса.

2) $|U_{x2}| \sim |U_{y2}|$ (проскальзывания заднего колеса в продольном и поперечном направлениях соизмеримы). Здесь из (1.2.3), (1.3.100) следует

$$|V_x - \Omega_2^0 R| \sim |V_x\Delta - \Omega_z(A+B)| \sim V_x|\Delta| \tag{1.3.102}$$

В этом случае, как и выше, справедливо равенство $P_{x1} = 0$, величины поперечных P_{y1}, P_{y2} и продольной P_{x2} сил соизмеримы (являются величинами порядка $\kappa N_2/\sqrt{2}$), таким образом, занос аппарата начинает развиваться, что приводит к росту поперечной и угловой скоростей его корпуса.

3) $|U_{x2}| \ll |U_{y2}|$ (проскальзывание заднего колеса в продольном направлении существенно меньше проскальзывания в поперечном направлении — движение близкое к скольжению заднего колеса в поперечном направлении). При выполнении этого неравенства получим

$$|V_x - \Omega_2^0 R| \ll |V_x\Delta - \Omega_z(A+B)| \sim V_x|\Delta| \tag{1.3.103}$$

В рассматриваемом случае имеем $P_{x1} = 0$, $|P_{x2}| \ll |P_{y2}| \sim |P_{y1}|$, т.е. занос аппарата интенсивно развивается, что приводит к быстрому росту поперечной и угловой скоростей его корпуса.

Поскольку при решении задачи используется велосипедная модель, справедливая для движений с небольшими значениями поперечной и угловой скоростей корпуса аппарата, как и ранее, ограничимся рассмотрением первого случая.

В соответствии с выражениями U_{x2}, U_{y2} из (1.3.100) и условием (1.2.15) для $i = 2$ на указанном уровне точности имеем

$$\sqrt{U_{x2}^2 + U_{y2}^2} = \sqrt{(V_x - \Omega_2^0 R)^2 + (V_x\Delta - \Omega_z(A+B))^2} = |V_x - \Omega_2^0 R| \tag{1.3.104}$$

$$U_{x2} = V_x - \Omega_2^0 R < 0 \tag{1.3.105}$$

Из (1.3.104), (1.3.105) следует $\dfrac{U_{x2}}{\sqrt{U_{x2}^2 + U_{y2}^2}} = \dfrac{V_x - \Omega_2^0 R}{|V_x - \Omega_2^0 R|} = -1$

Таким образом, входящее в (1.3.100) выражение для продольной составляющей контактной силы на заднем колесе имеет вид

$$P_{x2} = \kappa N_2 \tag{1.3.106}$$

В силу (1.2.5) справедливо неравенство $P_{x2} > 0$.

Используя (1.3.100), (1.3.104), (1.3.105), по аналогии получим

$$\frac{U_{y2}}{\sqrt{U_{x2}^2 + U_{y2}^2}} = \frac{V_x\Delta - \Omega_z(A+B)}{|V_x - \Omega_2^0 R|} = \frac{V_x\Delta - \Omega_z(A+B)}{\Omega_2^0 R - V_x}$$

Тем самым входящее в (1.3.100) выражение для поперечной составляющей контактной силы на заднем колесе записывается в форме

$$P_{y2} = -\kappa N_2 \left(\frac{V_x\Delta - \Omega_z(A+B)}{\Omega_2^0 R - V_x} \right) \tag{1.3.107}$$

В силу (1.3.101), (1.3.106), (1.3.107) величина поперечной составляющей силы кулонова трения на заднем колесе аппарата, имеющая порядок $\kappa N_2|\Delta|$, остается существенно меньше величины κN_2 продольной составляющей этой силы.

Из выражения (1.3.107) на указанном уровне точности следует равенство $P_{y2}\Delta = 0$, подстановка которого в последнее равенство системы (1.3.100) при учете (1.3.67), (1.3.70), (1.3.106) для малых значений M_Δ дает выражение для нормальной реакции на заднем колесе аппарата

$$N_2 = \frac{MgA}{A + B - \kappa H} \tag{1.3.108}$$

В соответствии со вторым выражением (1.2.4) и формулой (1.3.108) в рассматриваемом случае для выполнения условий (1.2.5) следует привлечь ограничение (1.3.18), как это делалось в разделе 1.3.1.

Таким образом, линеаризованные по переменным Δ и Ω_z динамические уравнения системы (1.3.100) для переменных V_x и Ω_z (аналоги уравнений (1.3.75) в случае пробуксовки заднего колеса аппарата) имеют вид

$$\begin{gathered} M\dot{V}_x = \kappa N_2, \quad (I_z + MA^2)\dot{\Omega}_z = \tilde{\Phi}(V_x, \Omega_z, \Delta) \\ N_2 = \frac{MgA}{A + B - \kappa H} \\ \tilde{\Phi}(V_x, \Omega_z, \Delta) = \kappa N_2 \left(A\Delta + \frac{V_x\Delta - \Omega_z(A+B)}{\Omega_2^0 R - V_x}(A+B) \right) + MAV_x\Omega_z \end{gathered} \tag{1.3.109}$$

Изменение поперечной скорости V_y центра масс корпуса аппарата описывается соотношением (1.3.76).

При подстановке в (1.3.109), (1.3.76) значения $\Delta = 0$ получаем систему

$$M\dot{V}_x = \kappa N_2 \tag{1.3.110}$$

$$(I_z + MA^2)\dot{\Omega}_z = -\kappa N_2 \frac{\Omega_z (A+B)^2}{V_x - \Omega_2^0 R} + MAV_x\Omega_z$$

которая совпадает с аналогичной системой из [14, 22] после линеаризации последней по переменной Ω_z.

Как и в разделах 1.3.2, 1.3.3 будем рассматривать случай (1.3.41) постоянства угла поворота переднего колеса аппарата, когда система (1.3.109) допускает исследование методом фазовой плоскости. Для построения фазового портрета воспользуемся методом изоклин.

Как и в рассмотренном в разделе 1.3.2 случае заноса аппарата с пробуксовывающим передним колесом, правая часть первого уравнения системы (1.3.109) постоянна и строго положительна, что отвечает возрастанию продольной скорости V_x аппарата в ходе равноускоренного движения. Тем самым здесь, в отличие от случая блокировки заднего колеса модели, при выполнении условия (1.3.52) убывание переменной $|\Omega_z|$ не гарантирует убывание переменной $|V_y|$.

Разрешив уравнение $\tilde{\Phi}(V_x, \Omega_z, \Delta) = 0$, определяющее кривую с горизонтальными касательными к фазовым траекториям системы (1.3.109) на плоскости V_x, Ω_z относительно переменной Ω_z, получим

$$\Omega_z = Q(V_x, \Delta) = \frac{\kappa N_2 \Delta (A\Omega_2^0 R + V_x B)}{\kappa N_2 (A+B)^2 - MAV_x(\Omega_2^0 R - V_x)} \tag{1.3.111}$$

Построим графики функции $\Omega_z = Q(V_x, \Delta)$, определяемой выражением (1.3.111) для значений $\Delta < 0$ и $\Delta > 0$.

Рассмотрим наиболее опасный случай заноса аппарата, отвечающий достаточно большим значениям угловой скорости Ω_2^0 пробуксовки его заднего колеса, когда график функции (1.3.111) имеет вертикальные асимптоты

$$\begin{gathered} V_x = V_x^* = \frac{MA\Omega_2^0 R - \sqrt{(MA\Omega_2^0 R)^2 - 4MA\kappa N_2 (A+B)^2}}{2MA} \\ V_x = V_x^{**} = \frac{MA\Omega_2^0 R + \sqrt{(MA\Omega_2^0 R)^2 - 4MA\kappa N_2 (A+B)^2}}{2MA} \end{gathered} \tag{1.3.112}$$

расположенные в пределах области допустимых значений переменной V_x, которая в соответствии с (1.3.101), (1.3.105) определяется неравенствами

$$0 < V_x \ll \Omega_2^0 R \tag{1.3.113}$$

Для нахождения экстремумов, а также промежутков возрастания и убывания функции (1.3.111) по переменной V_x вычислим ее производную

$$\frac{d\Omega_z(V_x, \Delta)}{dV_x} = \frac{-\kappa N_2 MAB\Delta V_x^2 - 2\kappa N_2 MA^2\Omega_2^0 R\Delta V_x + (\kappa N_2)^2 (A+B)^2 B\Delta}{\left(\kappa N_2 (A+B)^2 - MAV_x(\Omega_2^0 R - V_x)\right)^2} +$$

$$+\frac{\kappa N_2 MA^2(\Omega_2^0 R)^2\Delta}{\left(\kappa N_2(A+B)^2 - MAV_x(\Omega_2^0 R - V_x)\right)^2} \tag{1.3.114}$$

Приравняв выражение $d\Omega_z(V_x,\Delta)/dV_x$ нулю, получим единственный локальный экстремум $V_x = V_x^0$, принадлежащий области (1.3.105) графика функции (1.3.111)

$$V_x^0 = -\frac{A\Omega_2^0 R}{B} + \frac{1}{B}\sqrt{(A+B)\left(A(\Omega_2^0 R)^2 + (A+B)\frac{\kappa N_2 B^2}{MA}\right)} \tag{1.3.115}$$

Сравнивая выражения (1.3.112), (1.3.115), имеем

$$V_x^* < V_x^0 < V_x^{**} \tag{1.3.116}$$

При $V_x = 0$ функция (1.3.111) принимает значение $Q(0,\Delta) = A\Omega_2^0 R\Delta/(A+B)^2$.

Из второго уравнения (1.3.109) следует, что при положительных значениях функции $\tilde{\Phi}(V_x,\Omega_z,\Delta)$ угловая скорость Ω_z корпуса аппарата возрастает, при отрицательных значениях — убывает.

При $\Delta = 0$ фазовый портрет соответствующей (1.3.109) системы (1.3.110) симметричен относительно оси V_x; в областях $V_x < V_x^*$ и $V_x > V_x^{**}$ переменная $|\Omega_z|$ убывает (в силу равенства (1.3.76) для $\Delta = 0$ здесь занос уменьшается), в области $V_x^* < V_x < V_x^{**}$ — возрастает, что говорит о развитии заноса аппарата [14, 22] (рис. 1.16).

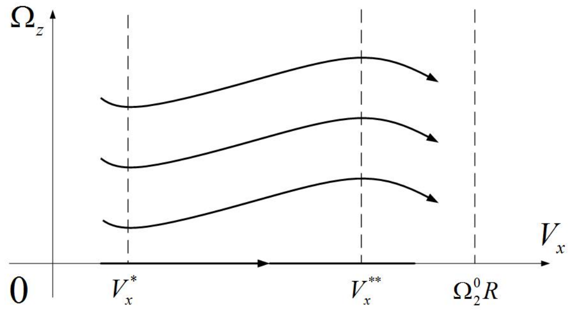


Рис. 1.16. Качественное поведение фазовых траекторий модели заноса аппарата с пробуксовывающим задним колесом при фиксированном значении $\Delta = 0$ [14, 22]

Фазовый портрет системы уравнений (1.3.109) в случае $\Delta < 0$ показан на рис. 1.17 (а). График функции (1.3.111) показан штрихпунктирной кривой, его асимптоты (1.3.112) — пунктиром. Знаками «+» и «−» отмечены области между ветвями графика функции (1.3.111), где функция $\tilde{\Phi}(V_x,\Omega_z,\Delta)$ имеет положительные и отрицательные знаки, что отвечает, соответственно, возрастанию и убыванию переменной Ω_z и выполнению неравенств $d\Omega_z/dV_x > 0$ и $d\Omega_z/dV_x < 0$.

В случае $\Delta < 0$ фазовый портрет системы (1.3.109) теряет свойство симметрии. В области $0 < \Omega_z < Q(V_x,\Delta)$ переменная Ω_z, в отличие от случая $\Delta = 0$, убывает во все время движения аппарата (т.е. его занос уменьшается); в остальных областях фазовой плоскости поведение переменной $|\Omega_z|$ в зависимости от переменной V_x схоже со случаем $\Delta = 0$. Из (1.3.109) следует формула

$$\frac{d\Omega_z}{dV_x} = \frac{M}{I_z + MA^2}\left(\Delta\cdot\frac{A\Omega_2^0 R + V_x B}{\Omega_2^0 R - V_x} + \Omega_z\left(\frac{MAV_x}{\kappa N_2} - \frac{(A+B)^2}{\Omega_2^0 R - V_x}\right)\right) \tag{1.3.117}$$

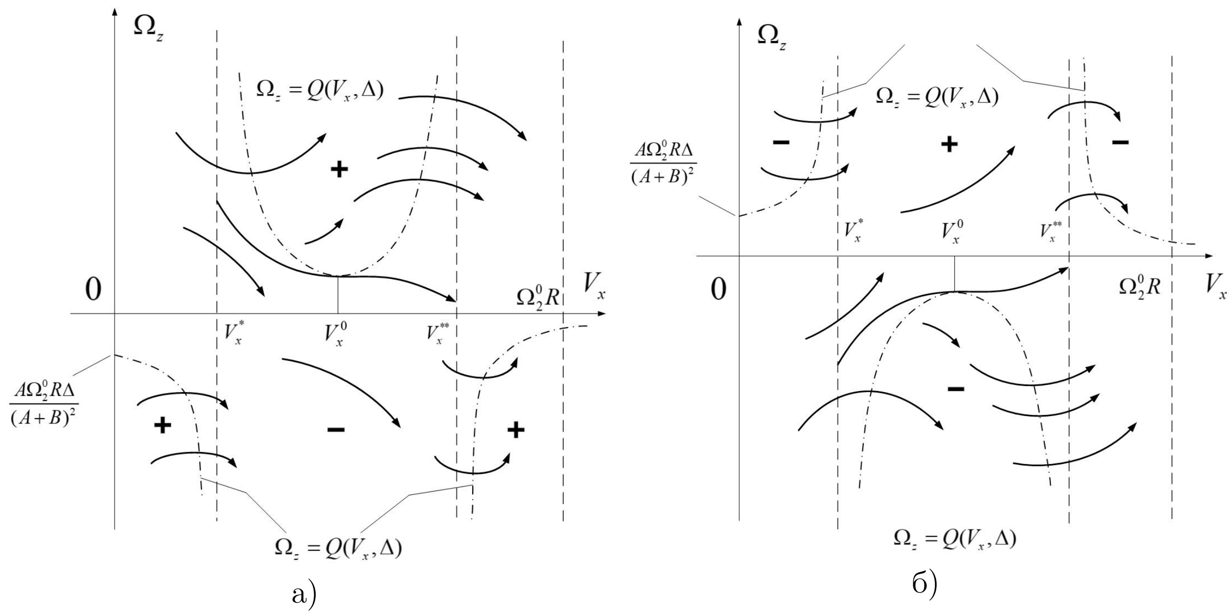


Рис. 1.17. Качественное поведение фазовых траекторий модели заноса аппарата с пробуксовывающим задним колесом при фиксированном значении $\Delta < 0$ (а) и $\Delta \ > \ 0$ (б)

Слагаемое, входящее в (1.3.117) с множителем Δ, положительно; слагаемое с множителем Ω_z отрицательно в областях $V_x < V_x^*$ и $V_x > V_x^{**}$ и положительно в области $V_x^* < V_x < V_x^{**}$, где выражения для V_x^*, V_x^{**} определены формулами (1.3.112). В соответствии с неравенством (1.3.113) и формулой (1.3.117) любых фиксированных значениях $\Delta = -d < 0$, $V_x = v$ и $|\Omega_z| = w$ следуют неравенства

$$\begin{gathered}
\left|\frac{d\Omega_z}{dV_x}\right|\Bigg|_{\Delta=-d,V_x^*<v<V_x^{**},\Omega_z=w} < \left|\frac{d\Omega_z}{dV_x}\right|\Bigg|_{\Delta=-d,V_x^*<v<V_x^{**},\Omega_z=-w} \\
\left|\frac{d\Omega_z}{dV_x}\right|\Bigg|_{\Delta=-d,v<V_x^*,\Omega_z=w} > \left|\frac{d\Omega_z}{dV_x}\right|\Bigg|_{\Delta=-d,v<V_x^*,\Omega_z=-w} \\
\left|\frac{d\Omega_z}{dV_x}\right|\Bigg|_{\Delta=-d,v>V_x^{**},\Omega_z=w} > \left|\frac{d\Omega_z}{dV_x}\right|\Bigg|_{\Delta=-d,v>{}_x^{**},\Omega_z=-w}
\end{gathered} \qquad (1.3.118)$$

Тем самым в случае $\Delta < 0$ при $V_x^* < V_x < V_x^{**}$ изменение переменной Ω_z в области $\Omega_z > 0$ (в частности, возрастание ее величины при $\Omega_z > Q(V_x, \Delta)$) происходит медленнее, чем в области $\Omega_z < 0$; при $V_x < V_x^*$ или $V_x > V_x^{**}$ изменение переменной Ω_z в области $\Omega_z > 0$ происходит быстрее, чем в области $\Omega_z < 0$ (в частности, убывание $|\Omega_z|$ при $\Omega_z < Q(V_x, \Delta)$).

Аналогично рассматривается случай $\Delta > 0$. Поскольку правая часть второго уравнения системы (1.3.109) не изменяется при одновременном изменении знаков Δ и Ω_z, соответствующий фазовый портрет системы (1.3.109) симметричен фазовому портрету на рис. 1.17 (б) относительно оси V_x (рис. 1.17 (а)).

Приведем количественные оценки, позволяющие выяснить как поворот переднего колеса аппарата вокруг вертикальной оси A_1z_1 влияет на развитие его заноса. Для этого, как и в разделах 1.3.2, 1.3.3, сравним значения $d\Omega_z/dV_x$ при $\Delta \neq 0$ и при $\Delta = 0$. Из формулы (1.3.117) имеем

$$\left.\frac{d\Omega_z}{dV_x}\right|_{\Delta=0} = \frac{M\Omega_z}{I_z + MA^2}\left(\frac{MAV_x}{\kappa N_2} - \frac{(A+B)^2}{\Omega_2^0 R - V_x}\right) \tag{1.3.119}$$

Сопоставляя выражения (1.3.117) и (1.3.119), получаем

$$\frac{d\Omega_z}{dV_x} = \left.\frac{d\Omega_z}{dV_x}\right|_{\Delta=0} + \frac{M\Delta}{I_z + MA^2}\left(\frac{A\Omega_2^0 R + V_x B}{\Omega_2^0 R - V_x}\right) \tag{1.3.120}$$

С учетом симметрии фазовых портретов системы (1.3.109) при $\Delta < 0$ и $\Delta > 0$ относительно оси V_x нетрудно показать, что при любых фиксированных значениях $|\Delta| = d$, $V_x = v$ и $|\Omega_z| = w$

$$\begin{gathered}
\left.\left|\frac{d\Omega_z}{dV_x}\right|\right|_{\Delta=0, v<V_x^*, |\Omega_z|=w} < \left.\left|\frac{d\Omega_z}{dV_x}\right|\right|_{\Delta=-d, v<V_x^*, \Omega_z=w} = \left.\frac{d\Omega_z}{dV_x}\right|_{\Delta=d, v<V_x^*, \Omega_z=-w} \\
\left.\left|\frac{d\Omega_z}{dV_x}\right|\right|_{\Delta=0, v>V_x^{**}, |\Omega_z|=w} < \left.\left|\frac{d\Omega_z}{dV_x}\right|\right|_{\Delta=-d, v>V_x^{**}, \Omega_z=w} = \left.\frac{d\Omega_z}{dV_x}\right|_{\Delta=d, v>V_x^{**}, \Omega_z=-w} \\
\left.\frac{d\Omega_z}{dV_x}\right|_{\Delta=0, \Omega_z=w>Q(V_x,\Delta)} > \left.\frac{d\Omega_z}{dV_x}\right|_{\Delta=-d, \Omega_z=w>Q(V_x,\Delta)} = \left.\left|\frac{d\Omega_z}{dV_x}\right|\right|_{\Delta=d, \Omega_z=-w<Q(V_x,\Delta)}
\end{gathered} \tag{1.3.121}$$

Анализ рис. 1.16, 1.17 (а, б) и неравенств (1.3.118) показывает, что при выполнении условия (1.3.52) («повороте переднего колеса велосипедной модели аппарата в сторону заноса задней оси») увеличение $|\Omega_z|$ будет происходить менее интенсивно, а уменьшение — более интенсивно, чем при неповернутых передних колесах. Если знаки Ω_z и Δ совпадают («повернуть переднее колесо против заноса задней оси»), то практически во все время движения аппарата переменная $|\Omega_z|$ при сколь угодно малых начальных значениях будет увеличиваться, скорость ее изменения будет выше, чем в случае выполнения условия (1.3.52). Рассогласование между скоростями изменения переменной $|\Omega_z|$ определяется вторым слагаемым в правой части (1.3.120), изменение $|V_y|$ может быть найдено из (1.3.76).

Алгоритм эффективного подавления заноса аппарата с пробуксовывающими задними колесами, состоящий в повторении поворотов передних колес в сторону заноса задней оси вплоть до полного его прекращения, повторяет алгоритм, приведенный в разделе 1.3.3.

Результаты проведенного анализа отвечают принятым в теории вождения автомобиля рекомендациям «поворачивать руль в сторону заноса задней оси» (рис. 1.1), а полученные формулы позволяют сформировать эффективный алгоритм работ систем управления аппаратом. Их достоверность подтверждается сравнением с результатами численного моделирования [14, 53]. Приведем численные результаты для параметров и динамических характеристик автомобиля, взятых из [53]. Для удобства сравнения запишем (1.3.120) в виде

$$\frac{d\Omega_z}{dV_x} = \frac{M}{I_z + MA^2}\left[\Omega_z\left(\frac{MAV_x}{\kappa N_2} - \frac{(A+B)^2}{\Omega_2^0 R - V_x}\right) + \Delta\left(\frac{A\Omega_2^0 R + V_x B}{\Omega_2^0 R - V_x}\right)\right] \qquad (1.3.122)$$

Слагаемые в квадратных скобках имеют одинаковые порядки, следовательно, правильный выбор значения Δ в зависимости от значений динамических переменных V_x и Ω_z позволяет прекратить занос аппарата. В качестве примера, как и ранее, возьмем $\Omega_1^0 R = 40$ м/с, $\kappa = 0,8$, $M = 1000$ кг, $I_z = 1000$ кг·м^2, $A = B = 1,5$ м, $H = 1$ м, зафиксировав значение $V_x = 20$ м/с. Для случая $\Delta = 0$ правая часть выражения (1.3.122) приблизительно равна $1,5$ с/м $\cdot\, \Omega_z$, для случая $\Delta \neq 0$ —
$1,5$ с/м $\cdot\, \Omega_z + 1,4 \cdot 1$/м $\cdot\, \Delta$.

1.3.4.3 Область применимости фазового портрета

Аналогично рассмотренному в разделе 1.3.3 случаю, условие, ограничивающее область корректного использования модели (1.3.100), в рамках которой переднее колесо аппарата не проскальзывает относительно опорной плоскости, имеет вид (1.3.91). Выражение для N_1 определяется с использованием второго выражения (1.2.4) и формулы (1.3.108).

Из второго выражения (1.3.67) и формул (1.3.106), (1.3.107), построенных с использованием предположения (1.2.3), в силу допущений (1.3.10) выражение для поперечной составляющей контактной силы на переднем колесе принимает вид

$$P_{y1} = \frac{I_z}{I_z + MA^2}\left(\kappa N_2 \Delta - \kappa N_2 \frac{(MAB - I_z)}{I_z}\frac{(V_x\Delta - \Omega_z(A+B))}{\Omega_1^0 R - V_x} + MV_x\Omega_z\right) \quad (1.3.123)$$

где выражение для N_2 вычисляется по формуле (1.3.108), переменная Δ отвечает условию (1.3.41).

Решением неравенства (1.3.91) служит область плоскости V_x, Ω_z, лежащая на пересечении областей $P_{y1} < \kappa N_1$ и $P_{y1} > -\kappa N_1$. Для удобства их построения и анализа введем обозначения

$$\begin{aligned}
&\bar{\mathcal{A}}(V_x) = \kappa N_2(A+B)(MAB - I_z) + MI_z V_x(\Omega_2^0 R - V_x) \\
&\bar{\mathcal{B}}(V_x, \Delta) = \frac{\kappa N_1(I_z + MA^2)(\Omega_2^0 R - V_x) + \kappa N_2 \Delta(MABV_x - I_z\Omega_2^0 R)}{\bar{\mathcal{A}}(V_x)} \\
&\bar{\mathcal{C}}(V_x, \Delta) = \frac{-\kappa N_1(I_z + MA^2)(\Omega_2^0 R - V_x) + \kappa N_2 \Delta(MABV_x - I_z\Omega_2^0 R)}{\bar{\mathcal{A}}(V_x)}
\end{aligned} \qquad (1.3.124)$$

Учитывая условия (1.2.5), (1.3.26), (1.3.113), имеем

$$\bar{\mathcal{A}}(V_x) > 0 \qquad (1.3.125)$$

Выразив из уравнения $P_{y1} = \kappa N_1$ переменную Ω_z, получим

$$\Omega_z = \bar{\mathcal{B}}(V_x, \Delta) \tag{1.3.126}$$

В силу выражений (1.3.123)–(1.3.126) условие $P_{y1} < \kappa N_1$ равносильно условию

$$\Omega_z < \bar{\mathcal{B}}(V_x, \Delta) \tag{1.3.127}$$

Аналогично, выразив из уравнения $P_{y1} = -\kappa N_1$ переменную Ω_z, имеем

$$\Omega_z = \bar{\mathcal{C}}(V_x, \Delta) \tag{1.3.128}$$

В силу выражений (1.3.123)–(1.3.125), (1.3.128) условие $P_{y1} > -\kappa N_1$ равносильно условию

$$\Omega_z > \bar{\mathcal{C}}(V_x, \Delta) \tag{1.3.129}$$

Из последнего неравенства (1.2.3) и неравенств (1.3.113), (1.3.125) следуют неравенства

$$\bar{\mathcal{B}}(V_x, \Delta) > 0, \qquad \bar{\mathcal{C}}(V_x, \Delta) < 0 \tag{1.3.130}$$

Построим графики функций $\Omega_z = \bar{\mathcal{B}}(V_x, \Delta)$ и $\Omega_z = \bar{\mathcal{C}}(V_x, \Delta)$ на плоскости V_x, Ω_z. Они имеют единственную точку пересечения $(\Omega_2^0 R; \Omega_2^0 R\Delta/(A + B))$, через которую проходит прямая $\Omega_z = V_x\Delta/(A+B)$, определяющая ограничение значений переменной Ω_z в силу (1.3.29), (1.3.41).

Решим неравенства (1.3.127), (1.3.129) графически для случая $\Delta < 0$. Область применимости модели (1.3.109) и построенных на рис. 1.17 (а, б) фазовых портретов, получается путем пересечения области выполнения неравенств (1.3.127), (1.3.129) с отвечающей предположению (1.2.3) областью (1.3.29). Учитывая условие (1.3.101), для случая $\Delta < 0$ имеем область применимости, показанную штриховкой на рис. 1.18 (а). Пунктирной линией показана прямая $V_x = \Omega_2^0 R$; область применимости ограничена справа («с избытком») сплошной вертикальной линией, отвечающей условию (1.3.101).

Для построения графиков функций (1.3.126), (1.3.128) в случае $\Delta > 0$ заметим, что выражения (1.3.124) при любом фиксированном значении $|\Delta| = d$ удовлетворяют неравенствам

$$\bar{\mathcal{B}}(V_x, \Delta)\big|_{\Delta=-d} = -\,\bar{\mathcal{C}}(V_x, \Delta)\big|_{\Delta=d}\,, \qquad \bar{\mathcal{B}}(V_x, \Delta)\big|_{\Delta=d} = -\,\bar{\mathcal{C}}(V_x, \Delta)\big|_{\Delta=-d}$$

Следовательно, графики функций $\Omega_z = \bar{\mathcal{B}}(V_x, \Delta)$ и $\Omega_z = \bar{\mathcal{C}}(V_x, \Delta)$ в случае $\Delta > 0$ симметричны относительно оси V_x соответствующим графикам $\Omega_z = \bar{\mathcal{C}}(V_x, \Delta)$ и $\Omega_z = \bar{\mathcal{B}}(V_x, \Delta)$ в случае $\Delta < 0$. (Тот же вывод может быть сделан непосредственно из неравенства (1.3.91), которое в силу (1.3.123) и постоянства значения нормальной реакции N_1 не изменяется при одновременном изменении знаков Δ и Ω_z.) Область применимости фазового портрета системы (1.3.109) в случае $\Delta > 0$ показана штриховкой на рис. 1.18 (б). Из рис. 1.18 (а, б) следует, что области одинаковы для случаев $\Delta < 0$ и $\Delta > 0$.

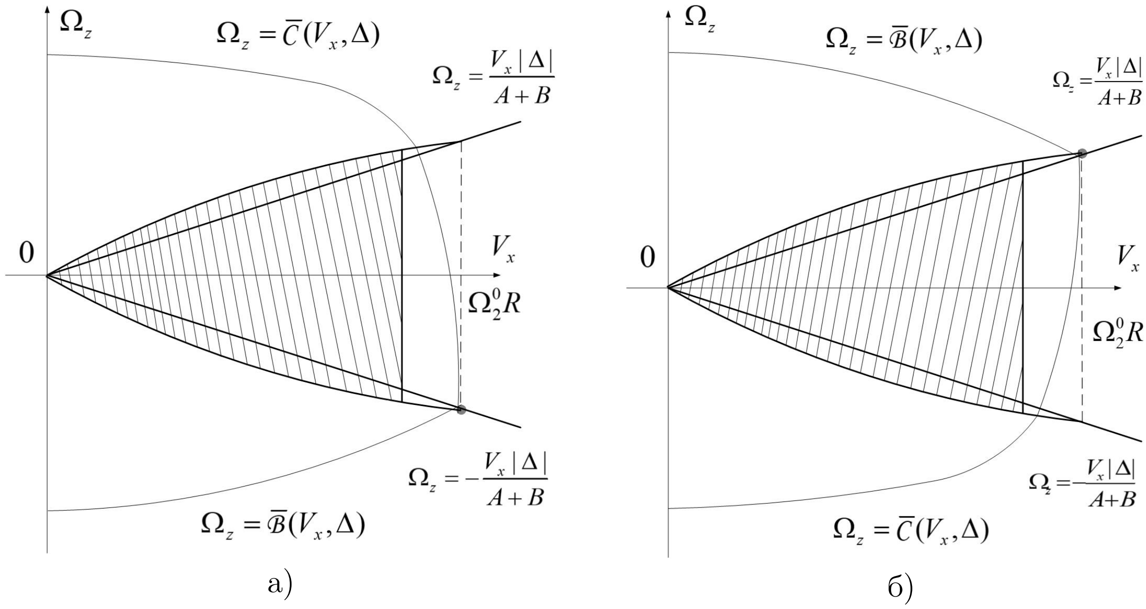


Рис. 1.18. Качественный вид области применимости модели заноса аппарата с пробуксовывающим задним колесом при фиксированном значении $\Delta < 0$ (а) и $\Delta > 0$ (б)

Фазовый портрет системы уравнений (1.3.109) с учетом ее области применимости для случаев $\Delta < 0$ и $\Delta > 0$ показан на рис. 1.19. За пределами этой области модель (1.3.109) следует использовать с осторожностью.

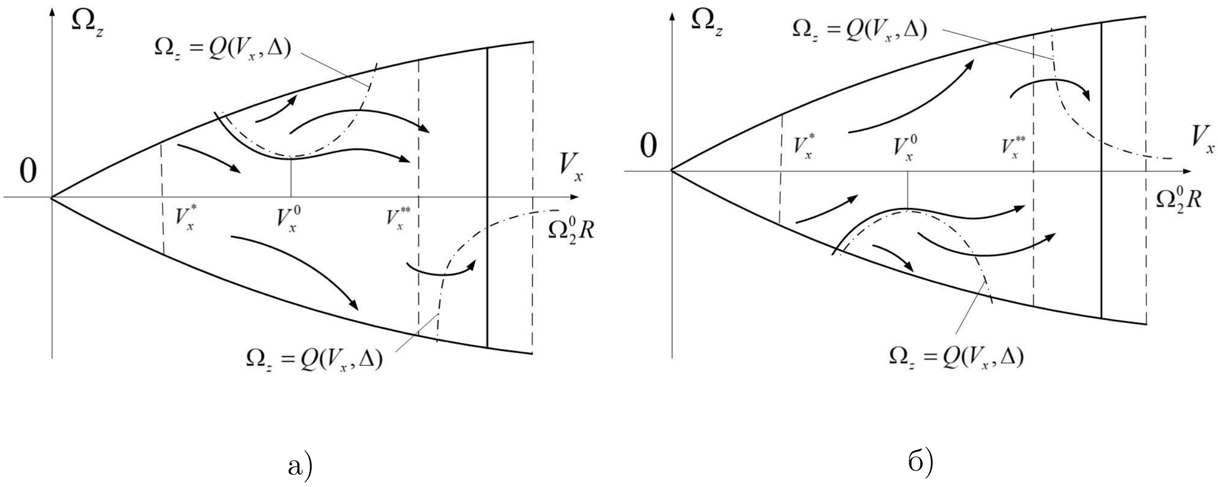


Рис. 1.19. Качественный вид фазовых траекторий модели заноса аппарата с пробуксовывающим задним колесом в области применимости модели при фиксированном значении $\Delta < 0$ (а) и случай $\Delta > 0$ (б)

1.4 Движение аппарата при заносе обеих осей. Модель сухого трения Кулона

1.4.1 Нормализация уравнений движения

В этом разделе рассматривается занос четырехколесного аппарата, в ходе которого колеса обеих его осей теряют сцепление с опорной плоскостью. Колеса, потерявшие сцепление с опорной плоскостью, взаимодействует с ней посредством сухого трения. Для описания такого взаимодействия в этом разделе будет рассмотрена модель сухого трения Кулона. Для описания заноса, как и ранее, используется велосипедная модель, определенная в разделе 1.2. После учета упрощающих предположений (1.2.3), (1.2.8), (1.3.10), (1.3.41) линеаризованные по переменной Δ динамические уравнения системы (1.2.1) принимают вид

$$
\begin{aligned}
&M\dot{V}_x = P_{x1} - P_{y1}\Delta + P_{x2}\\
&M\dot{V}_y = P_{x1}\Delta + P_{y1} + P_{y2} - MV_x\Omega_z\\
&I_z\dot{\Omega}_z = (P_{x1}\Delta + P_{y1})A - P_{y2}B\\
&I_s\dot{\Omega}_s = -P_{xs}R
\end{aligned}
\tag{1.4.1}
$$

Индекс $i = s$ отвечает номеру не заблокированного и не пробуксовывающего колеса. Выражения для продольных и поперечных составляющих контактных сил, действующих на это колесо, имеют вид (1.2.6), где выражения (1.2.7) заменяются их линейными аналогами

$$
\begin{aligned}
&U_{x1} = V_x - \Omega_1 R, \quad U_{x2} = V_x - \Omega_2 R\\
&U_{y1} = -V_x\Delta + V_y + \Omega_z A, \quad U_{y2} = V_y - \Omega_z B
\end{aligned}
\tag{1.4.2}
$$

Выражения для касательных составляющих контактных сил, действующих на заблокированное или пробуксовывающее l-е колесо, получаются из выражений (1.2.6), (1.4.2) при значениях $i = l$, $\Omega_l = 0$ и $\Omega_l = \Omega_l^0$ соответственно.

Выражения (1.2.4) для нормальных реакций в точках контакта колес аппарата с опорной плоскостью после линеаризации по переменной Δ записываются в форме

$$
N_1 = \frac{MgB - (P_{x1} - P_{y1}\Delta + P_{x2})H}{A + B}, \qquad N_2 = Mg - N_1 \tag{1.4.3}
$$

При выполнении условий (1.2.2), (1.2.3) система (1.2.6), (1.4.1)–(1.4.3) может быть упрощена с применением асимптотических методов разделения движений [14, 22, 24, 46, 53]. Проведем нормализацию [14, 46] системы (1.2.6), (1.4.1)–(1.4.3), заменив переменные и время их безразмерными аналогами

$$T = T_* t, \quad \Delta = \Delta_* \delta, \quad V_x = V_{x*} v_x, \quad V_y = V_{y*} v_y, \quad \Omega_z = \Omega_{z*} \omega_z$$

$$\Omega_i = \Omega_{i*} \omega_i, \quad P_{xi} = P_{xi*} p_{xi}, \quad P_{yi} = P_{yi*} p_{yi}, \quad N_i = N_{i*} n_i \tag{1.4.4}$$

$$U_{xi} = U_{xi*} u_{xi}, \quad U_{yi} = U_{yi*} u_{yi} \quad (i = 1, 2)$$

Нижним индексом $*$ обозначены характерные значения соответствующих постоянных и переменных величин для движения, определяемого условиями (1.2.2), (1.2.3), в соответствии с которыми параметры и характерные значения переменных системы (1.2.6), (1.4.1)–(1.4.3) удовлетворяют неравенствам

$$\frac{m}{M} = \mu \ll 1, \quad \Delta_* = \varepsilon, \quad \frac{V_{y*}}{V_{x*}} = \varepsilon \ll 1 \tag{1.4.5}$$

Будем рассматривать μ и ε в качестве малых параметров, которые далее будут устремлены к нулю. Ограничимся случаем выполнения неравенства

$$0 < \mu \ll \varepsilon \tag{1.4.6}$$

Выберем характерные значения (1.4.4) следующим образом

$$V_{x*} = \Omega_{i*} R = U_{xi*} = \sqrt{g(A+B)}, \quad V_{y*} = \Omega_{z*}(A+B) = U_{yi*} = V_{x*} \Delta_*$$

$$P_{xi*} = P_{yi*} = N_{i*} = Mg \quad (i = 1, 2) \tag{1.4.7}$$

При выполнении условий (1.4.5) составляющие движения аппарата развиваются в сильно разнесенных временных масштабах. Их оценками служат величины

$$T_1 = \frac{V_{x_*}}{g}; \quad T_2 = \varepsilon \frac{V_{x_*}}{g}; \quad T_3 = \mu \frac{V_{x_*}}{g} \tag{1.4.8}$$

где T_1 — постоянная времени изменения продольной (путевой) скорости корпуса аппарата V_x под действием сил порядка его веса; T_2 — постоянная времени изменения поперечной и угловой скоростей корпуса аппарата V_y и Ω_z; T_3 — постоянная времени изменения угловых скоростей Ω_s вращения не заблокированных и не пробуксовывающих колес вокруг оси $A_s y_s$ (рис. 1.3). В соответствии с условиями (1.4.5), (1.4.6) для выражений (1.4.8) справедливы неравенства

$$T_1 \gg T_2 \gg T_3 \tag{1.4.9}$$

Для типичных значений параметров легкового автомобиля $\mu \sim 10^{-2} - 10^{-3}$, тогда при движении со скоростями $V_x \sim 10$ м/с имеем $T_1 \sim 1$ с, $T_2 \sim 10^{-1}$ с, $T_3 \sim 10^{-2} - 10^{-3}$ с. В отличие от изучаемого в разделе 1.3 случая заноса аппарата при потере сцепления колес одной оси с опорной плоскостью, где переменные V_x, V_y, Ω_z изменялись в одинаковых временных масштабах, в рассматриваемом случае потери сцепления колес обеих осей аппарата с опорной плоскостью постоянные времени изменения этих переменных существенно разнятся.

Рассматривая движение аппарата на характерных временах $T \sim T_2$ изменения переменных V_y, Ω_z, примем $T_* = T_2$. Нормализованным аналогом системы (1.2.6), (1.4.1)–(1.4.3) служит сингулярно возмущенная система тихоновского вида (см. Приложение А) с малыми параметрами [11, 14, 46] $\quad 0 < \mu_1 = \mu/\varepsilon, \quad \varepsilon \ll 1$

$$v_x' = \varepsilon(p_{x1} - \varepsilon p_{y1}\delta + p_{x2})$$

$$v_y' = \varepsilon p_{x1}\delta + p_{y1} + p_{y2} - \varepsilon v_x\omega_z$$

$$\omega_z' = \frac{a}{i_z^2}(\varepsilon p_{x1}\delta + p_{y1}) - \frac{b}{i_z^2}p_{y2}$$

$$\mu_1\omega_s' = -\frac{1}{i_s^2}p_{xs}$$

$$a = \frac{A}{A+B}, \quad b = \frac{B}{A+B}, \qquad h = \frac{H}{A+B}, \quad i_z = \frac{\rho_z}{A+B}, \quad i_s = \frac{\rho_s}{R} \tag{1.4.10}$$

$$p_{xi} = -\kappa n_i \frac{u_{xi}}{\sqrt{u_{xi}^2 + (\varepsilon u_{yi})^2}}, \quad p_{yi} = -\kappa n_i \frac{\varepsilon u_{yi}}{\sqrt{u_{xi}^2 + (\varepsilon u_{yi})^2}} \qquad (i = 1, 2)$$

$$u_{x1} = v_x - \omega_1, \quad u_{x2} = v_x - \omega_2$$

$$u_{y1} = -v_x\delta + v_y + \omega_z a, \quad u_{y2} = v_y - \omega_z b$$

$$n_1 = b - (p_{x1} - \varepsilon p_{y1}\delta + p_{x2})h, \quad n_2 = 1 - n_1$$

Штрихом обозначены производные по безразмерному времени t.

Выражения для касательных составляющих контактных сил на заблокированном или пробуксовывающем l-м колесе получаются из соответствующих выражений системы (1.4.10) при значениях $i = l$ и $\omega_l = 0$ или $\omega_l = \omega_l^0 = \Omega_l^0 R/V_{x*}$ соответственно.

В безразмерных переменных ограничение (1.2.3) значений $|V_y|$, $|\Omega_z|$, $|\Delta|$ принимает форму

$$|v_y| \sim |\omega_z| \lesssim v_x|\delta|, \quad |\delta| \lesssim 1 \tag{1.4.11}$$

1.4.2 Занос обеих осей аппарата с заблокированными или пробуксовывающими передними колесами

Рассмотрим случай $l = 1$, $s = 2$ заноса аппарата при блокировке или пробуксовке передних колес, в ходе которого задние колеса теряют сцепление с опорной плоскостью. В случае блокировки передних колес нормализованная система (1.4.10) принимает вид

$$
\begin{aligned}
& v_x' = \varepsilon(p_{x1} - \varepsilon p_{y1}\delta + p_{x2}) \\
& v_y' = \varepsilon p_{x1}\delta + p_{y1} + p_{y2} - \varepsilon v_x \omega_z \\
& \omega_z' = \frac{a}{i_z^2}(\varepsilon p_{x1}\delta + p_{y1}) - \frac{b}{i_z^2} p_{y2} \\
& \mu_1 \omega_2' = -\frac{1}{i_2^2} p_{x2} \\
& p_{xi} = -\kappa n_i \frac{u_{xi}}{\sqrt{u_{xi}^2 + (\varepsilon u_{yi})^2}}, \quad p_{yi} = -\kappa n_i \frac{\varepsilon u_{yi}}{\sqrt{u_{xi}^2 + (\varepsilon u_{yi})^2}} \qquad (i = 1, 2) \\
& u_{x1} = v_x, \quad u_{x2} = v_x - \omega_2, \quad u_{y1} = -v_x\delta + v_y + \omega_z a, \quad u_{y2} = v_y - \omega_z b \\
& n_1 = b - (p_{x1} - \varepsilon p_{y1}\delta + p_{x2})h, \quad n_2 = 1 - n_1
\end{aligned}
\tag{1.4.12}
$$

В случае пробуксовки передних колес аппарата нормализованная система (1.4.10) записывается в форме

$$
\begin{aligned}
& v_x' = \varepsilon(p_{x1} - \varepsilon p_{y1}\delta + p_{x2}) \\
& v_y' = \varepsilon p_{x1}\delta + p_{y1} + p_{y2} - \varepsilon v_x \omega_z \\
& \omega_z' = \frac{a}{i_z^2}(\varepsilon p_{x1}\delta + p_{y1}) - \frac{b}{i_z^2} p_{y2} \\
& \mu_1 \omega_2' = -\frac{1}{i_2^2} p_{x2} \\
& p_{xi} = -\kappa n_i \frac{u_{xi}}{\sqrt{u_{xi}^2 + (\varepsilon u_{yi})^2}}, \quad p_{yi} = -\kappa n_i \frac{\varepsilon u_{yi}}{\sqrt{u_{xi}^2 + (\varepsilon u_{yi})^2}} \qquad (i = 1, 2) \\
& u_{x1} = v_x - \omega_1^0; \quad u_{x2} = v_x - \omega_2, \quad u_{y1} = -v_x\delta + v_y + \omega_z a; \quad u_{y2} = v_y - \omega_z b \\
& n_1 = b - (p_{x1} - \varepsilon p_{y1}\delta + p_{x2})h, \quad n_2 = 1 - n_1
\end{aligned}
\tag{1.4.13}
$$

Проведя вырождение систем (1.4.12), (1.4.13) по малому параметру μ_1, и, считая параметр ε конечным, получим систему уравнений

$$
\begin{aligned}
&v_x' = \varepsilon(p_{x1} - \varepsilon p_{y1}\delta) \\
&v_y' = \varepsilon p_{x1}\delta + p_{y1} + p_{y2} - \varepsilon v_x \omega_z \\
&\omega_z' = \frac{a}{i_z^2}(\varepsilon\delta p_{x1} + p_{y1}) - \frac{b}{i_z^2}p_{y2} \\
&p_{x2} = 0
\end{aligned}
\tag{1.4.14}
$$

Составляющие контактных сил вычисляются из (1.4.12), (1.4.13). Последнее, конечное уравнение системы (1.4.14) имеет изолированный корень

$$\omega_2 = v_x \tag{1.4.15}$$

отвечающий условию непроскальзывания заднего колеса велосипедной модели аппарата в направлении продольной оси A_2x_2 (рис. 1.3).

Для доказательства близости решений исходной (1.4.12), (1.4.13) и вырожденной систем (1.4.14) воспользуемся теорией Тихонова-Васильевой [11–14, 23, 46]. (См. Приложение А.) Одним из основных условий, обеспечивающих притяжение траекторий исходной системы к многообразию, на котором развиваются медленные движения в силу вырожденной системы, служит затухание быстрых движений. Для его проверки требуется исследовать изолированность, асимптотическую устойчивость по первому приближению и область влияния точек покоя присоединенной системы, которая получается из систем (1.4.12), (1.4.13) после замены времени $\tau = t/\mu_1$ и последующего приравнивания слагаемых порядка μ_1 к нулю. Присоединенная система, которая в данном случае сводится к одному скалярному уравнению, имеет вид

$$\frac{d\omega_2}{d\tau} = \frac{1}{i_2^2}\kappa n_2 \frac{v_x - \omega_2}{\sqrt{(v_x - \omega_2)^2 + \varepsilon^2(v_y - \omega_z b)^2}} \tag{1.4.16}$$

Здесь медленные по сравнению с переменной ω_2 переменные v_x, v_y, ω_z считаются постоянными. Проведя линеаризацию уравнения (1.4.16) около точки покоя (1.4.15), получим уравнение

$$\frac{d\Delta\omega_2}{d\tau} = -\frac{1}{i_2^2}\kappa n_2 \frac{\Delta\omega_2}{\varepsilon|v_y - \omega_z b|}, \quad \Delta\omega_2 = \omega_2 - v_x \tag{1.4.17}$$

Через $\Delta\omega_2$ обозначено малое отклонение переменной ω_2 от положения равновесия (1.4.15). В соответствии с условием $n_2 > 0$, следующим из второго условия (1.2.5), множитель при переменной $\Delta\omega_2$ при значениях $v_y \neq \omega_z b$ отрицателен, т.е. точка покоя (1.4.15) является асимптотически устойчивым по первому приближению.

Выясним область влияния этой точки покоя, образованную совокупностью начальных значений $\omega_2(0)$ переменной ω_2, для которых решения $\omega_2(\tau)$ уравнения (1.4.16) стремятся к точке покоя (1.4.15). Поскольку уравнение (1.4.16) является скалярным, оно допускает качественное исследование методами [2, с. 26-27]. Точке (1.4.15) на плоскости ω_2, τ отвечает горизонтальная прямая $\omega_2 = v_x$ (рис. 1.20). Знаками + и − отмечены области, в которых правая часть уравнения (1.4.16) положительна и отрицательна соответственно. Тем самым при значениях начальных условий $\omega_2(0) < v_x$ переменная ω_2 возрастает, при значениях $\omega_2(0) > v_x$ переменная ω_2 убывает, асимптотически приближаясь к положению равновесия (рис. 1.20). В силу теоремы существования и единственности кривая $\omega_2(\tau)$ не может пересечь прямую (1.4.15), следовательно, она асимптотически приближается к ней. Тем самым область влияния положения равновесия (1.4.15) не ограничена.

В соответствии с теоремой Тихонова-Васильевой [11, 12, 14, 23, 46] (см. Приложение А) рассогласование между решениями исходной системы (1.4.12), (1.4.13) и соответствующей вырожденной системы (1.4.14) оценивается величиной $O(\mu_1)$ на конечном интервале времени $t \sim 1$, отвечающем интервалу $T \sim T_2$ размерного времени T. Для переменной ω_2 эта оценка верна вне пограничного слоя ширины $O(-\mu_1 \ln \mu_1)$.

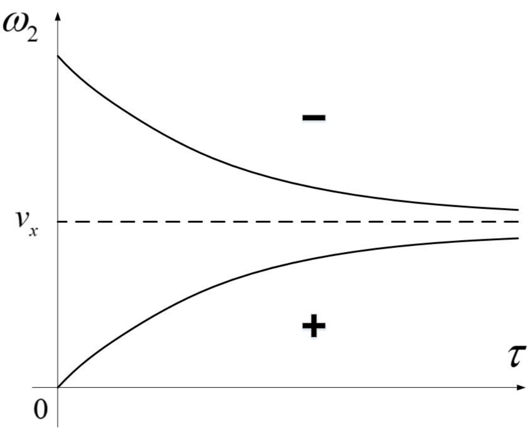


Рис. 1.20. Область влияния положения равновесия (1.4.15) уравнения (1.4.16)

Рассмотрим систему (1.4.14). При выполнении равенства (1.4.15) нормализованное значение p_{y2} поперечной составляющей контактной силы на заднем колесе велосипедной модели аппарата, имеющее порядок ε при $u_{x2} \neq 0$, делается величиной $O(1)$, т.е. начинает существенно превосходить остальные слагаемые во втором и третьем уравнениях. Тем самым по завершении быстрого процесса, в ходе которого задние колеса аппарата обретают сцепление с опорной плоскостью в продольном направлении, переменные v_y, ω_z становятся быстрыми (изменяются на интервале времени $t \sim 1$) по сравнению с переменной v_x (изменяется на интервале времени $t \sim 1/\varepsilon$ ($T \sim T_1$)), и могут быть рассмотрены независимо от нее. Проведем приближенное исследование этих переменных при помощи метода фазовой плоскости.

Разделив второе уравнение системы (1.4.14) на третье и положив $\varepsilon = 0$ для случая $v_y \neq \omega_z b$ получим уравнение

$$\frac{dv_y}{d\omega_z} = \frac{-\kappa n_2 \mathrm{sgn}(v_y - \omega_z b)}{b/i_z^2 \kappa n_2 \mathrm{sgn}(v_y - \omega_z b)} = -\frac{i_z^2}{b} \tag{1.4.18}$$

В соответствии с теоремой Пуанкаре о малом параметре [14, 23, 46] уравнение (1.4.18) имеет погрешность $O(\varepsilon)$ на интервале времени $t \sim 1$. Из уравнения (1.4.18) после интегрирования вытекает уравнение фазовых траекторий

$$v_y = -\frac{i_z^2}{b}\omega_z + C_1 \tag{1.4.19}$$

где константа C_1 определяется начальными значениями переменных v_y, ω_z. Траектории (1.4.19) показаны на рис. 1.21. Прямая, определяемая уравнением

$$v_y = \omega_z b \tag{1.4.20}$$

отвечает разрыву правой части уравнения (1.4.18). Переход на эту прямую по прямым (1.4.19) происходит быстро, на временах $t \sim 1$ изменения переменных v_y, ω_z, ω_2. В соответствии с выражением для переменной u_{y2} систем (1.4.12), (1.4.13) уравнение (1.4.20) отвечает условию непроскальзывания заднего колеса велосипедной модели аппарата в поперечном направлении A_2y_2 к его плоскости (рис. 1.3). Доопределение решения уравнения (1.4.18) на этой прямой может быть проведено с использованием методики исследования дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями [21, 46].

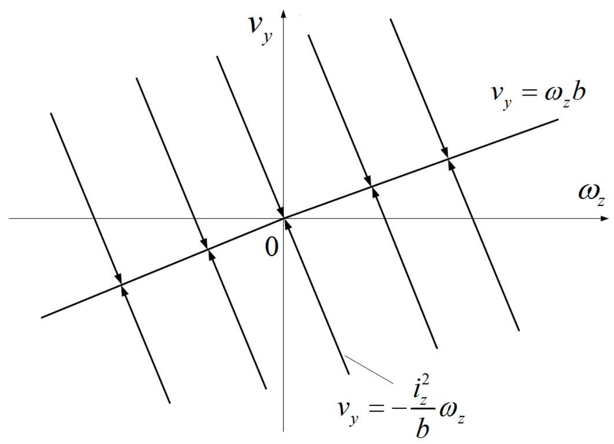


Рис. 1.21. Приближенный вид зависимости между нормализованными значениями поперечной и угловой скоростей корпуса аппарата с заблокированными или пробуксовывающими передними колесами в случае заноса обеих его осей

Проведенный анализ показал, что в рамках рассматриваемой постановки задачи поворот передних колес не влияет на занос аппарата с заблокированными или пробуксовывающими передними колесами, в ходе которого колеса задней оси теряют сцепление с опорной плоскостью. При любых начальных условиях по переменным v_y, ω_z на временах $t \sim 1$ ($T \sim T_2$) аппарат входит в режим непроскальзывания задних колес (в продольном и поперечном направлениях). Дальнейшее движение аппарата развивается по уже рассмотренным в разделах 1.3.1 и 1.3.2 сценариям заноса при блокировке или пробуксовке передних колес при непроскальзывающих задних колесах.

1.4.3 Занос обеих осей аппарата с заблокированными или пробуксовывающими задними колесами

Рассмотрим случай $l = 2$, $s = 1$ заноса аппарата при блокировке или пробуксовке задних колес, в ходе которого передние колеса потеряли сцепление с опорной плоскостью. В случае блокировки задних колес нормализованная система (1.4.10) принимает вид

$$
\begin{aligned}
& v_x' = \varepsilon(p_{x1} - \varepsilon p_{y1}\delta + p_{x2}) \\
& v_y' = \varepsilon p_{x1}\delta + p_{y1} + p_{y2} - \varepsilon v_x\omega_z \\
& \omega_z' = \frac{a}{i_z^2}(\varepsilon p_{x1}\delta + p_{y1}) - \frac{b}{i_z^2}p_{y2} \\
& \mu_1\omega_1' = -\frac{1}{i_1^2}p_{x1} \\
& p_{xi} = -\kappa n_i\frac{u_{xi}}{\sqrt{u_{xi}^2 + (\varepsilon u_{yi})^2}}, \quad p_{yi} = -\kappa n_i\frac{\varepsilon u_{yi}}{\sqrt{u_{xi}^2 + (\varepsilon u_{yi})^2}} \qquad (i = 1, 2) \\
& u_{x1} = v_x - \omega_1, \quad u_{x2} = v_x \\
& u_{y1} = -v_x\delta + v_y + \omega_z a, \quad u_{y2} = v_y - \omega_z b \\
& n_1 = b - (p_{x1} - \varepsilon p_{y1}\delta + p_{x2})h, \quad n_2 = 1 - n_1
\end{aligned}
\tag{1.4.21}
$$

В случае пробуксовки задних колес аппарата нормализованная система (1.4.10) записывается в форме

$$
\begin{aligned}
& v_x' = \varepsilon(p_{x1} - \varepsilon p_{y1}\delta + p_{x2}) \\
& v_y' = \varepsilon p_{x1}\delta + p_{y1} + p_{y2} - \varepsilon v_x\omega_z \\
& \omega_z' = \frac{a}{i_z^2}(\varepsilon \delta p_{x1} + p_{y1}) - \frac{b}{i_z^2}p_{y2} \\
& \mu_1\omega_1' = -\frac{1}{i_1^2}p_{x1} \\
& p_{xi} = -\kappa n_i\frac{u_{xi}}{\sqrt{u_{xi}^2 + (\varepsilon u_{yi})^2}}, \quad p_{yi} = -\kappa n_i\frac{\varepsilon u_{yi}}{\sqrt{u_{xi}^2 + (\varepsilon u_{yi})^2}} \qquad (i = 1, 2) \\
& u_{x1} = v_x - \omega_1; \quad u_{x2} = v_x - \omega_2^0 \\
& u_{y1} = -v_x\delta + v_y + \omega_z a; \quad u_{y2} = v_y - \omega_z b \\
& n_1 = b - (p_{x1} - \varepsilon p_{y1}\delta + p_{x2})h, \quad n_2 = 1 - n_1
\end{aligned}
\tag{1.4.22}
$$

Проведя вырождение систем (1.4.21), (1.4.22) по малому параметру μ_1, и, считая параметр ε конечным, получим систему уравнений

$$
\begin{aligned}
&v_x' = \varepsilon(p_{x1} - \varepsilon p_{y1}\delta) \\
&v_y' = \varepsilon p_{x1}\delta + p_{y1} + p_{y2} - \varepsilon v_x \omega_z \\
&\omega_z' = \frac{a}{i_z^2}(\varepsilon p_{x1}\delta + p_{y1}) - \frac{b}{i_z^2}p_{y2} \\
&p_{x1} = 0
\end{aligned}
\tag{1.4.23}
$$

Выражения для касательных и нормальных составляющих контактных сил вычисляются из (1.4.21) и (1.4.22). Последнее, конечное уравнение системы (1.4.23) имеет изолированный корень

$$
\omega_1 = v_x \tag{1.4.24}
$$

отвечающий условию непроскальзывания переднего колеса аппарата в направлении продольной оси A_1x_1 (рис. 1.3). В соответствии с теоремой Тихонова-Васильевой [11, 14, 23, 46] (см. Приложение А) рассогласование между решениями системы (1.4.21), (1.4.22) и соответствующей вырожденной системы (1.4.23) оценивается величиной $O(\mu_1)$ на конечном интервале времени $t \sim 1$, отвечающем интервалу $T \sim T_2$ размерного времени T. Для переменной ω_1 эта оценка верна вне пограничного слоя ширины $O(-\mu_1 \ln \mu_1)$. Проверка условий этой теоремы проводится по аналогии с тем, как это делалось в разделе 1.4.2.

Рассмотрим систему (1.4.23), которая, как и система (1.4.14), позволяет приближенно исследовать быстрые переменные v_y, ω_z, изменяющиеся на интервале времени $t \sim 1$, независимо от медленной переменной v_x, изменяющейся на интервале $t \sim 1/\varepsilon$, с использованием метода фазовой плоскости. Разделив второе уравнение системы (1.4.23) на третье и положив $\varepsilon = 0$, для случая $v_y \neq v_x\delta - \omega_z a$ получим уравнение

$$
\frac{dv_y}{d\omega_z} = \frac{-\kappa n_1 sgn(-v_x\delta + v_y + \omega_z a)}{-a/i_z^2 \kappa n_1 sgn(-v_x\delta + v_y + \omega_z a)} = \frac{i_z^2}{a} \tag{1.4.25}
$$

В соответствии с теоремой Пуанкаре о малом параметре [14, 46] уравнение (1.4.25) имеет погрешность $O(\varepsilon)$ на интервале времени $t \sim 1$.

Из уравнения (1.4.25) следует уравнение фазовых траекторий

$$
v_y = \frac{i_z^2}{a}\omega_z + C_2 \tag{1.4.26}
$$

где константа C_2 определяется начальными значениями переменных v_y, ω_z. Траектории (1.4.26) для различных знаков δ и для значения $\delta = 0$ показаны на рис. 1.22–1.23.

Прямая, определяемая уравнением

$$v_y = v_x\delta - \omega_z a \tag{1.4.27}$$

отвечает разрыву правой части уравнения (1.4.25). Переход на эту прямую по прямым (1.4.26) происходит быстро, на временах $t \sim 1$ изменения переменных v_y, ω_z. Медленная переменная v_x полагается постоянной, равной своему начальному значению. Доопределение решения уравнения (1.4.25) может быть проведено с использованием методики [21, 46].

Согласно выражению для переменной u_{y1} систем (1.4.21), (1.4.22) уравнение (1.4.27) отвечает условию непроскальзывания переднего колеса велосипедной модели аппарата в поперечном направлении A_1y_1 к его плоскости (рис. 1.3).

Как и в предыдущем разделе, в силу рассматриваемой модели заноса обеих осей аппарата при любых начальных условиях по переменным v_y, ω_z, ω_1 на временах $t \sim 1$ ($T \sim T_2$) аппарат входит в режим непроскальзывания не заблокированных (не пробуксовывающих) колес (в продольном и поперечном направлениях), в данном случае - передних. После того, как передние колеса обрели сцепление с опорной плоскостью, движение аппарата развивается по уже рассмотренным в разделах 1.3.3 и 1.3.4 сценариям заноса с заблокированными или пробуксовывающими задними колесами при непроскальзывающих передних колесах. В отличие от случая заноса обеих осей аппарата с заблокированными или пробуксовывающими передними колесами из раздела 1.4.2, в рассматриваемом случае, как видно из рис. 1.22 –1.23, нормализованное значение δ угла Δ поворота переднего колеса велосипедной модели аппарата определяет начальное значение нормализованной переменной ω_z (размерной переменной Ω_z) для указанных сценариев. Исходя из этого, судить о заносе аппарата и возможностях его минимизации в данном случае следует с использованием модели переменной структуры, составляющие которой рассмотрены в разделах 1.3.3, 1.3.4 и 1.4.3.

В разделах 1.3.3, 1.3.4 при анализе фазовых портретов на рис. 1.15 и 1.19 было показано: чем меньше начальное значение переменной $|\Omega_z|(|\omega_z|)$, тем менее интенсивно развивается занос; при повороте передних колес аппарата в сторону заноса его задней оси, т.е. при выполнении условия (1.3.52), безразмерным аналогом которого служит условие

$$\mathrm{sgn}\omega_z = -\mathrm{sgn}\delta \tag{1.4.28}$$

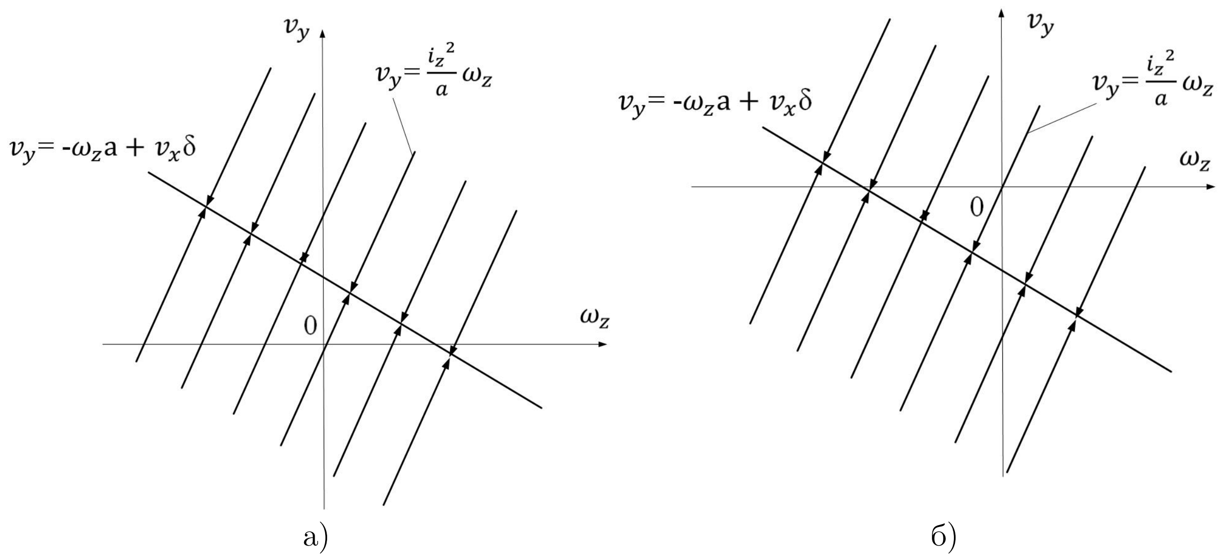
занос аппарата в целом будет происходить менее интенсивно, либо будет уменьшаться, в отличии от случаев

$$\delta = 0 \tag{1.4.29}$$

или

$$\mathrm{sgn}\omega_z = \mathrm{sgn}\delta \tag{1.4.30}$$

когда передние колеса аппарата не повернуты или повернуты против заноса его задней оси.



а) б)

Рис. 1.22. Приближенный вид зависимости между нормализованными значениями поперечной и угловой скоростей корпуса аппарата с заблокированными или пробуксовывающими задними колесами при фиксированном значении $\delta > 0$ ($\Delta > 0$) (а) и $\delta < 0$ ($\Delta < 0$) (б)

Зафиксируем значение $|\delta|$ и выясним, при каком значении $\mathrm{sgn}\delta$ после завершения обсуждаемого выше в этом разделе быстрого этапа заноса не заблокированной (не пробуксовывающей) передней оси аппарата, которое происходит после окончания быстрого переходного процесса изменения переменной ω_1 до значения (1.4.24), и прихода изображающей точки фазовой плоскости v_y, ω_z на прямую (1.4.27), полученное значение $|\omega_z|$ будет принимать минимальное из возможных значений и удовлетворять условию (1.4.28). Обратимся к рис. 1.22, 1.23.

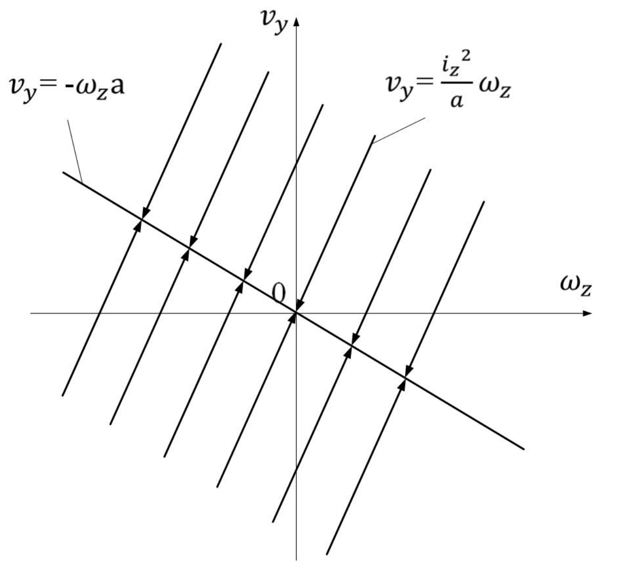


Рис. 1.23. Приближенный вид зависимости между нормализованными значениями поперечной и угловой скоростей корпуса аппарата с заблокированными или пробуксовывающими задними колесами при фиксированном значении $\delta = 0$ ($\Delta = 0$)

На рис. 1.24 показана прямая (1.4.27) для значения $\delta = 0$ и симметрично расположенные относительно нее прямые (1.4.27), отвечающие одинаковым величинам и разным знакам угла δ. В соответствии с рис. 1.22 - 1.23, при выборе любой из перечисленных прямых движение по фазовым траекториям (1.4.26) происходит по направлению к ней. Анализ рис. 1.24 показывает, что при $\delta \neq 0$ и начальных значениях переменных v_y, ω_z, находящихся в областях

$$\begin{aligned} &v_y < \frac{i_z^2}{a}\omega_z - v_x|\delta|, \quad \omega_z > 0 \\ &v_y > \frac{i_z^2}{a}\omega_z + v_x|\delta|, \quad \omega_z < 0 \end{aligned} \tag{1.4.31}$$

в ходе движения по фазовым траекториям (1.4.26) минимальное значение переменной $|\omega_z|$ достигается при попадании на прямую (1.4.27), отвечающую условию (1.4.28). В областях

$$\begin{aligned} &v_y < \frac{i_z^2}{a}\omega_z - v_x|\delta|, \quad \omega_z < 0 \\ &v_y > \frac{i_z^2}{a}\omega_z + v_x|\delta|, \quad \omega_z > 0 \end{aligned} \tag{1.4.32}$$

минимальное значение переменной $|\omega_z|$ достигается при попадании на прямую (1.4.27), отвечающую условию (1.4.28).

В областях (1.4.31), (1.4.32) увеличение значения $|\delta|$ приводит к уменьшению значения переменной $|\omega_z|$, при котором соответствующая траектория (1.4.26) попадает на прямую (1.4.27). Заметим, что при $|\omega_z| \approx 0$ величина $|v_y| \approx v_x|\delta|$ нормализованного значения поперечной скорости корпуса аппарата может оказаться достаточно большой. Для ее уменьшения в момент обретения передними колесами аппарата сцепления с опорной плоскостью следует, в соответствии с рекомендациями в конце разделов 1.3.3, 1.3.4, поставить передние колеса аппарата прямолинейно.

Изображающая точка, движущаяся по прямым

$$v_y = \frac{i_z^2}{a}\omega_z \pm v_x|\delta| \tag{1.4.33}$$

попадает на прямую (1.4.27) при значениях $\omega_z = 0$, $v_y = \pm v_x|\delta| \neq 0$. При уменьшении значений $|\delta|$ значение $|v_y|$, и, следовательно, занос аппарата, уменьшаются. При начальных значениях переменных v_y, ω_z, заключенных в полосе

$$\frac{i_z^2}{a}\omega_z - v_x|\delta| < v_y < \frac{i_z^2}{a}\omega_z + v_x|\delta| \tag{1.4.34}$$

при попадании на прямую (1.4.27) условие (1.4.28) не может быть выполнено, здесь занос аппарата в целом будет минимальным при выполнении условия (1.4.29). Если начальные значения переменных v_y, ω_z удовлетворяют условию

$$v_y = \frac{i_z^2}{a}\omega_z \tag{1.4.35}$$

в случае (1.4.29) занос аппарата будет полностью погашен на временах $t \sim 1$.

Все сделанные выводы верны с учетом ограничения (1.4.11), в соответствии с кото-

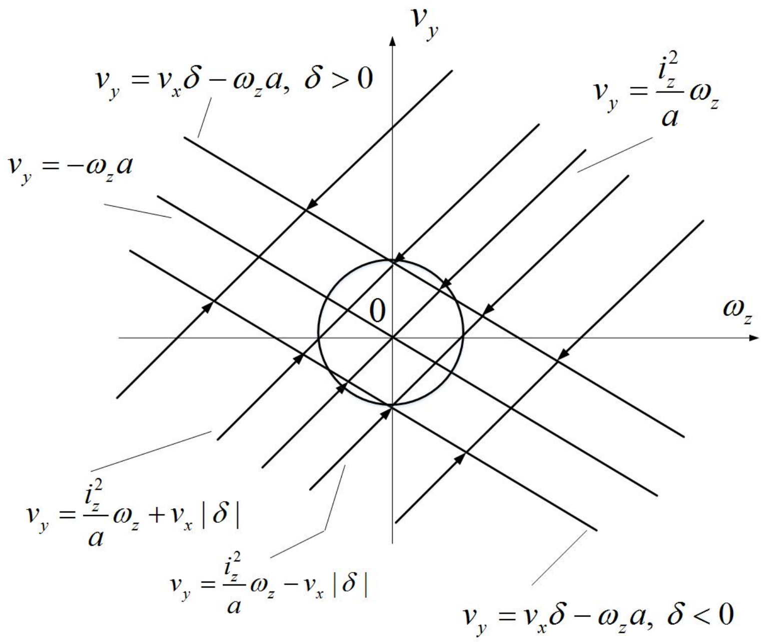


Рис. 1.24. Приближенный вид зависимости между нормализованными значениями поперечной и угловой скоростей корпуса аппарата с заблокированными или пробуксовывающими задними колесами при фиксированном значении δ с учетом области применимости

рым область применимости рассматриваемой модели движения аппарата находится внутри круга v_y, $\omega_z \leq v_x|\delta|$, отмеченного на рис. 1.24, и небольшой внешней окрестности. При начальных значениях переменных $|v_y|$, $|\omega_z|$, принадлежащих этой области применимости, занос аппарата в целом будет минимальным при значении $\delta = 0$, т.е. при неповернутых передних колесах. Поскольку прямая (1.4.35) пересекает область применимости (1.4.11), занос аппарата может быть полностью прекращен на временах $t \sim 1$ изменения поперечной и угловой скоростей при попадании на эту прямую.

1.5 Движение аппарата при заносе обеих осей. Модель поликомпонентного сухого трения Журавлёва

1.5.1 Нормализация уравнений движения

В этом разделе рассматривается занос четырехколесного аппарата, в ходе которого колеса обеих его осей теряют сцепление с опорной плоскостью. Колеса, потерявшие сцепление с опорной плоскостью, взаимодействует с ней посредством сухого трения. Для описания такого взаимодействия в этом разделе будет рассмотрена модель поликомпонентного сухого трения В.Ф. Журавлёва [3], учитывающая моменты верчения в областях контакта колес с опорной плоскостью. После учета сделанных в разделе 1.2

упрощающих предположений (1.2.3), (1.3.10), (1.2.8) линеаризованные по переменной Δ динамические уравнения системы (1.2.1) принимают вид

$$
\begin{aligned}
&M\dot{V}_x = P_{x1} - P_{y1}\Delta + P_{x2}\\
&M\dot{V}_y = P_{x1}\Delta + P_{y1} + P_{y2} - MV_x\Omega_z\\
&I_z\dot{\Omega}_z = (P_{x1}\Delta + P_{y1})A - P_{y2}B + M_{S1} + M_{S2}\\
&I_s\dot{\Omega}_s = -P_{xs}R
\end{aligned}
\tag{1.5.1}
$$

Индекс $i = s$ отвечает номеру не заблокированного и не пробуксовывающего колеса. Выражения для продольных и поперечных составляющих контактных сил, действующих на это колесо, имеют вид (1.2.10), где выражения (1.2.7) заменяются их линейными аналогами (1.4.2). Выражения для касательных составляющих контактных сил, действующих на заблокированное или пробуксовывающее l-е колесо, получаются из выражений (1.2.10), (1.4.2) при значениях $i = l$, $\Omega_l = 0$ или $\Omega_l = \Omega_l^0$ соответственно.

Выражения (1.2.4) для нормальных реакций в точках контакта колес аппарата с опорной плоскостью после линеаризации по переменной Δ записываются в форме (1.4.3).

Введем малый параметр ε_1, характеризующий малость области контакта колеса с опорной плоскостью

$$
\varepsilon_1 = \frac{r}{R} \ll 1 \tag{1.5.2}
$$

Далее ограничимся рассмотрением случая

$$
\varepsilon \ll \varepsilon_1^2 \tag{1.5.3}
$$

При выполнении условий (1.2.2), (1.2.3) система (1.2.6), (1.4.2), (1.4.3), (1.5.1) может быть упрощена с применением асимптотических методов разделения движений [14, 22, 24, 46, 53]. Проведем нормализацию [14, 46] системы (1.2.6), (1.4.2), (1.4.3), (1.5.1), заменив переменные и время их безразмерными аналогами в соответствии с условиями (1.4.4)–(1.4.9) и выражениями

$$
M_{Si} = M_{Si*}m_{Si}, \qquad M_{Si*} = Mgr^2/(A+B) \tag{1.5.4}
$$

Рассматривая движение аппарата на характерных временах $T \sim T_2$ изменения переменных V_y, Ω_z, примем $T_* = T_2$. Нормализованным аналогом системы (1.2.6), (1.4.2), (1.4.3), (1.5.1) служит сингулярно возмущенная система тихоновского вида (см. Приложение А) с малыми параметрами [11, 14, 46] $0 < \mu_1 = \mu/\varepsilon, \quad \varepsilon \ll 1, \quad \varepsilon_1 \ll 1$

$$
\begin{aligned}
&v'_x = \varepsilon(p_{x1} - \varepsilon p_{y1}\delta + p_{x2})\\
&v'_y = \varepsilon p_{x1}\delta + p_{y1} + p_{y2} - \varepsilon v_x \omega_z\\
&\omega'_z = \frac{a}{i_z^2}(\varepsilon p_{x1}\delta + p_{y1}) - \frac{b}{i_z^2}p_{y2} + \frac{1}{i_z^2}\varepsilon_1^2 c^2 (m_{S1} + m_{S2})\\
&\mu_1 \omega'_s = -\frac{1}{i_s^2}p_{xs}\\
&a = \frac{A}{A+B}, \quad b = \frac{B}{A+B}, \quad h = \frac{H}{A+B}, \quad c = \frac{R}{A+B}\\
&i_s = \frac{\rho_s}{R}, \quad i_z = \frac{\rho_z}{A+B} \qquad\qquad (1.5.5)\\
&p_{xi} = -\kappa n_i \frac{u_{xi}}{\sqrt{u_{xi}^2 + (\varepsilon u_{yi})^2} + \varepsilon\varepsilon_1 c\beta|\omega_z|}\\
&p_{yi} = -\kappa n_i \frac{\varepsilon u_{yi}}{\sqrt{u_{xi}^2 + (\varepsilon u_{yi})^2} + \varepsilon\varepsilon_1 c\beta|\omega_z|}\\
&m_{Si} = -\gamma\kappa n_i \frac{\varepsilon\varepsilon_1 c\omega_z}{\alpha\sqrt{u_{xi}^2 + (\varepsilon u_{yi})^2} + \varepsilon\varepsilon_1 c|\omega_z|} \qquad (i = 1, 2)\\
&u_{x1} = v_x - \omega_1, \quad u_{x2} = v_x - \omega_2, \quad u_{y1} = -v_x\delta + v_y + \omega_z a, \quad u_{y2} = v_y - \omega_z b\\
&n_1 = b - (p_{x1} - \varepsilon p_{y1}\delta + p_{x2})h, \quad n_2 = 1 - n_1
\end{aligned}
$$

Штрихом обозначены производные по безразмерному времени t.

Выражения для касательных составляющих контактных сил на заблокированном или пробуксовывающем l-м колесе получаются из соответствующих выражений системы (1.2.6), (1.4.2) при значениях $i = l$ и $\omega_l = 0$ или $\omega_l = \omega_l^0 = \Omega_l^0/\Omega_{l*}^0$ соответственно.

В безразмерных переменных ограничение (1.2.3) значений $|V_y|$, $|\Omega_z|$, $|\Delta|$ принимает форму (1.4.11).

1.5.2 Занос обеих осей аппарата с заблокированными или пробуксовывающими передними колесами

Рассмотрим случай $l = 1$, $s = 2$ заноса аппарата при блокировке или пробуксовке передних колес, в ходе которого задние колеса теряют сцепление с опорной плоскостью. В случае блокировки передних колес нормализованная система (1.5.5) принимает вид

$$
\begin{aligned}
&v_x' = \varepsilon(p_{x1} - \varepsilon p_{y1}\delta + p_{x2}) \\
&v_y' = \varepsilon p_{x1}\delta + p_{y1} + p_{y2} - \varepsilon v_x\omega_z \\
&\omega_z' = \frac{a}{i_z^2}(\varepsilon p_{x1}\delta + p_{y1}) - \frac{b}{i_z^2}p_{y2} + \frac{1}{i_z^2}\varepsilon_1^2 c^2(m_{S1} + m_{S2}) \\
&\mu_1\omega_2' = -\frac{1}{i_2^2}p_{x2} \\
&p_{xi} = -\kappa n_i \frac{u_{xi}}{\sqrt{u_{xi}^2 + (\varepsilon u_{yi})^2} + \varepsilon\varepsilon_1 c\beta|\omega_z|} \\
&p_{yi} = -\kappa n_i \frac{\varepsilon u_{yi}}{\sqrt{u_{xi}^2 + (\varepsilon u_{yi})^2} + \varepsilon\varepsilon_1 c\beta|\omega_z|} \\
&m_{Si} = -\gamma\kappa n_i \frac{\varepsilon\varepsilon_1 c\omega_z}{\alpha\sqrt{u_{xi}^2 + (\varepsilon u_{yi})^2} + \varepsilon\varepsilon_1 c|\omega_z|} \qquad (i = 1, 2) \\
&u_{x1} = v_x, \quad u_{x2} = v_x - \omega_2, \quad u_{y1} = -v_x\delta + v_y + \omega_z a, \quad u_{y2} = v_y - \omega_z b \\
&n_1 = b - (p_{x1} - \varepsilon p_{y1}\delta + p_{x2})h, \quad n_2 = 1 - n_1
\end{aligned}
\tag{1.5.6}
$$

В случае пробуксовки передних колес аппарата нормализованная система (1.5.5) записывается в форме

$$
\begin{aligned}
&v_x' = \varepsilon(p_{x1} - \varepsilon p_{y1}\delta + p_{x2}) \\
&v_y' = \varepsilon p_{x1}\delta + p_{y1} + p_{y2} - \varepsilon v_x\omega_z \\
&\omega_z' = \frac{a}{i_z^2}(\varepsilon p_{x1}\delta + p_{y1}) - \frac{b}{i_z^2}p_{y2} + \frac{1}{i_z^2}\varepsilon_1^2 c^2(m_{S1} + m_{S2}) \\
&\mu_1\omega_2' = -\frac{1}{i_2^2}p_{x2} \\
&p_{xi} = -\kappa n_i \frac{u_{xi}}{\sqrt{u_{xi}^2 + (\varepsilon u_{yi})^2} + \varepsilon\varepsilon_1 c\beta|\omega_z|} \\
&p_{yi} = -\kappa n_i \frac{\varepsilon u_{yi}}{\sqrt{u_{xi}^2 + (\varepsilon u_{yi})^2} + \varepsilon\varepsilon_1 c\beta|\omega_z|} \\
&m_{Si} = -\gamma\kappa n_i \frac{\varepsilon\varepsilon_1 c\omega_z}{\alpha\sqrt{u_{xi}^2 + (\varepsilon u_{yi})^2} + \varepsilon\varepsilon_1 c|\omega_z|} \qquad (i = 1, 2) \\
&u_{x1} = v_x - \omega_1^0; \quad u_{x2} = v_x - \omega_2, \quad u_{y1} = -v_x\delta + v_y + \omega_z a; \quad u_{y2} = v_y - \omega_z b \\
&n_1 = b - (p_{x1} - \varepsilon p_{y1}\delta + p_{x2})h, \quad n_2 = 1 - n_1
\end{aligned}
\tag{1.5.7}
$$

Проведя вырождение систем (1.5.6), (1.5.7) по малому параметру μ_1, и, считая параметры ε и ε_1 конечными, получим систему уравнений

$$
\begin{aligned}
& v_x' = \varepsilon(p_{x1} - \varepsilon p_{y1}\delta) \\
& v_y' = \varepsilon p_{x1}\delta + p_{y1} + p_{y2} - \varepsilon v_x \omega_z \\
& \omega_z' = \frac{a}{i_z^2}(\varepsilon\delta p_{x1} + p_{y1}) - \frac{b}{i_z^2}p_{y2} + \frac{1}{i_z^2}\varepsilon_1^2 c^2 (m_{S1} + m_{S2}) \\
& p_{x2} = 0
\end{aligned}
\tag{1.5.8}
$$

Система (1.5.8) отличается от системы (1.4.14) для случая кулонова трения наличием нормализованных моментов верчения m_{S1}, m_{S2} и малого параметра ε_1, характеризующего малость области контакта, которые входят в третье уравнение изменения угловой скорости корпуса аппарата. Выражения для касательных составляющих контактных сил для модели Журавлёва отличаются от касательных составляющих контактных сил для случая кулонова трения и определены в (1.5.6) и (1.5.7). Последнее, конечное уравнение системы (1.5.8) имеет изолированный корень

$$
\omega_2 = v_x \tag{1.5.9}
$$

отвечающий условию непроскальзывания заднего колеса аппарата в направлении продольной оси A_2x_2 (рис. 1.3). В соответствии с теоремой Тихонова-Васильевой [11, 14, 23, 46] (см. Приложение А) рассогласование между решениями системы (1.5.6), (1.5.7) и соответствующей вырожденной системы (1.5.8) оценивается величиной $O(\mu_1)$ на конечном интервале времени $t \sim 1$, отвечающем интервалу $T \sim T_2$ размерного времени T. Для переменной ω_2 эта оценка верна вне пограничного слоя ширины $O(-\mu_1 \ln \mu_1)$. Проверка условий этой теоремы проводится по аналогии с тем, как это делалось в разделах 1.4.2–1.4.3.

Рассмотрим систему (1.5.8), которая, как и системы (1.4.14), (1.4.23), позволяет приближенно исследовать быстрые переменные v_y, ω_z, изменяющиеся на интервале времени $t \sim 1$, независимо от медленной переменной v_x, изменяющейся на интервале $t \sim 1/\varepsilon$, с использованием метода фазовой плоскости. Проведя вырождение системы (1.5.8) по малому параметру ε, и, считая параметр ε_1 конечным, получим систему уравнений

$$
\begin{aligned}
& v_x = \mathrm{const}, \quad v_y' = -\kappa n_2 \frac{v_y - \omega_z b}{|v_y - \omega_z b| + \varepsilon_1 \beta |\omega_z|} \\
& \omega_z' = \frac{b}{i_z^2}\kappa n_2 \frac{v_y - \omega_z b}{|v_y - \omega_z b| + \varepsilon_1 \beta |\omega_z|} - \frac{1}{i_z^2}\gamma \kappa n_2 \frac{\varepsilon_1^2 c^2 \omega_z}{\alpha |v_y - \omega_z b| + \varepsilon_1 c |\omega_z|}
\end{aligned}
\tag{1.5.10}
$$

В соответствии с теоремой Пуанкаре о малом параметре [14,46] система (1.5.10) имеет погрешность $O(\varepsilon)$ на интервале времени $t \sim 1$. Если малый параметр $\varepsilon_1 = 0$, то есть считать радиус областей контакта колес с опорной плоскостью пренебрежимо малым $(r = 0)$, то получится тот же самый результат, как и для случая традиционной модели кулонова трения.

Рассмотрим случай $\varepsilon_1 \neq 0$, который соответствует конечному значению радиусу области контакта колеса с опорной плоскостью $(r \neq 0)$, и построим фазовый портрет системы (1.5.10) с помощью метода изоклин. На прямой

$$v_y = \omega_z b \tag{1.5.11}$$

обращается в нуль правая часть первого уравнения системы (1.5.10), фазовые траектории на ней имеют горизонтальные касательные. В соответствии с выражением для переменной u_{y2} систем (1.5.6), (1.5.7) уравнение (1.5.11) отвечает условию непроскальзывания заднего колеса велосипедной модели аппарата в поперечном направлении A_2y_2 к его плоскости (рис. 1.3). Уравнения кривых, на которых касательные к фазовым траекториям вертикальны, являются решениями уравнения

$$\frac{(v_y - \omega_z b)b}{|v_y - \omega_z b| + \varepsilon_1 c\beta|\omega_z|} - \frac{\varepsilon_1^2 c^2 \gamma \omega_z}{\alpha|v_y - \omega_z b| + \varepsilon_1 c|\omega_z|} = 0 \tag{1.5.12}$$

при которых обращается в нуль правая часть второго уравнения системы (1.5.10). Уравнение (1.5.12) можно переписать в виде

$$(v_y - \omega_z b)b\left(\alpha|v_y - \omega_z b| + \varepsilon_1 c|\omega_z|\right) = \varepsilon_1^2 c^2 \gamma \omega_z \left(|v_y - \omega_z b| + \varepsilon_1 c\beta|\omega_z|\right) \tag{1.5.13}$$

После преобразований уравнение (1.5.13) принимает вид

$$\frac{(v_y - \omega_z b)}{\omega_z} b\left(\alpha\frac{|v_y - \omega_z b|}{|\omega_z|} + \varepsilon_1 c\right) = \varepsilon_1 c^2 \gamma \left(\frac{|v_y - \omega_z b|}{|\omega_z|} + \varepsilon_1 c\beta\right) \tag{1.5.14}$$

Для простоты решения уравнения (1.5.14) введем обозначение

$$\frac{v_y - \omega_z b}{\omega_z} = x \tag{1.5.15}$$

тогда уравнение (1.5.14) относительно новой переменной записывается в форме

$$xb(\alpha|x| + \varepsilon_1 c) = \varepsilon_1^2 c^2 \gamma(|x| + \varepsilon_1 c\beta) \tag{1.5.16}$$

После раскрытия модуля ($|x| = \mathrm{sgn}x \cdot x$), получим квадратное уравнение относительно новой переменной x

$$b\alpha \cdot \mathrm{sgn}x \cdot x^2 + (\varepsilon_1 bc - \varepsilon_1^2 c^2 \gamma \cdot sgnx)x - \varepsilon_1^3 c^3 \beta\gamma = 0 \tag{1.5.17}$$

Решения уравнения (1.5.17) имеют вид

$$x_1 = \frac{\varepsilon_1^2 c^2 \beta\gamma}{b} + O(\varepsilon_1^3), \qquad x_2 = \frac{-\varepsilon_1 c \mathrm{sgn}x}{\alpha} + O(\varepsilon_1^2) \tag{1.5.18}$$

Из второго выражения (1.5.18) следует равенство

$$|x_2| = \frac{-\varepsilon_1 c}{\alpha} + O(\varepsilon_1^2) \tag{1.5.19}$$

которое в силу условия (1.5.2) малости параметра ε_1 нереализуемо. Возвращаясь к переменным v_y и ω_z и пренебрегая членами порядка $O(\varepsilon_1^3)$, получаем уравнение кривой, на которой касательные к фазовым траекториям вертикальны

$$v_y = \omega_z b \left(1 + \frac{\varepsilon_1^2 c^2 \beta\gamma}{b^2}\right) \tag{1.5.20}$$

Уравнение (1.5.20) линейно, угол наклона прямой зависит от малого параметра ε_1^2.

Приближенный вид зависимости между нормализованными значениями поперечной и угловой скоростей корпуса аппарата с заблокированными или пробуксовывающими передними колесами в случае заноса обеих его осей для модели трения Журавлёва показан на рис. 1.25. Медленная переменная v_x полагается постоянной, равной своему начальному значению.

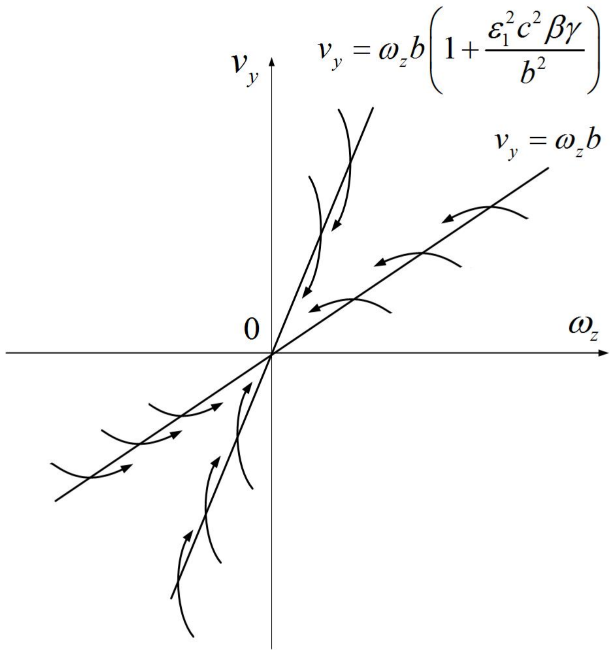


Рис. 1.25. Приближенный вид зависимости между нормализованными значениями поперечной и угловой скоростей корпуса аппарата с заблокированными или пробуксовывающими передними колесами в случае заноса обеих его осей для модели трения Журавлёва

Поскольку правые части системы (1.5.10) меняют знак при одновременном изменении знаков переменных v_y и ω_z, траектории фазового портрета симметричны относительно начала координат. При начальных условиях переменных v_y, ω_z, удовлетворяющих неравенству

$$v_y > \omega_z b \tag{1.5.21}$$

(т.е. изображающая точка лежит выше прямой (1.5.11)) правая часть первого уравнения системы (1.5.10) строго отрицательна, следовательно, поперечная скорость v_y убывает. Если начальные условия переменных v_y, ω_z, удовлетворяют неравенству

$$v_y < \omega_z b \tag{1.5.22}$$

(т.е. изображающая точка лежит ниже прямой (1.5.11)) правая часть первого уравнения системы (1.5.10) строго положительна, значит, поперечная скорость v_y возрастает. При начальных условиях переменных

v_y, ω_z, удовлетворяющих неравенству

$$v_y > \omega_z b \left(1 + \frac{\varepsilon_1^2 c^2 \beta\gamma}{b^2}\right) \tag{1.5.23}$$

(т.е. изображающая точка лежит выше прямой (1.5.20)) правая часть второго уравнения системы (1.5.10) строго положительна, угловая скорость ω_z возрастает. Если начальные условия переменных v_y, ω_z, удовлетворяют неравенству

$$v_y < \omega_z b \left(1 + \frac{\varepsilon_1^2 c^2 \beta\gamma}{b^2}\right) \tag{1.5.24}$$

(т.е. изображающая точка лежит ниже прямой (1.5.20)) правая часть второго уравнения системы (1.5.10) строго отрицательна, угловая скорость ω_z убывает.

Анализ фазового портрета (рис. 1.25) показывает, что для модели поликомпонентного сухого трения результат остается тем же, что и для модели кулонова трения: угол поворота передних колес не влияет на занос обеих осей аппарата с заблокированными или пробуксовывающими передними колесами. Однако здесь для любых начальных условий по переменным v_y, ω_z имеем $v_y \to 0$, $\omega_z \to 0$ при $t \sim 1$ ($T \sim T_2$), таким образом, $v_y - \omega_z b \to 0$ и $u_{y2} \to 0$, т.е. аппарат входит в режим непроскальзывания задних колес (в продольном и поперечном направлениях) на временах $t \sim 1$, и его занос полностью прекращается.

Таким образом, в рамках модели поликомпонентного сухого трения Журавлёва, учитывающей верчение в областях контакта колес с опорной плоскостью, занос аппарата уменьшается скорее, чем для модели кулонова трения, которая учитывает только возможность скольжения колес.

1.5.3 Занос обеих осей аппарата с заблокированными или пробуксовывающими задними колесами

Рассмотрим случай $l = 2$, $s = 1$ заноса аппарата при блокировке или пробуксовке задних колес, в ходе которого передние колеса теряют сцепление с опорной плоскостью. В случае блокировки задних колес нормализованная система (1.5.5) принимает вид

$$\begin{aligned}
&v_x' = \varepsilon(p_{x1} - \varepsilon p_{y1}\delta + p_{x2})\\
&v_y' = \varepsilon p_{x1}\delta + p_{y1} + p_{y2} - \varepsilon v_x \omega_z\\
&\omega_z' = \frac{a}{i_z^2}(\varepsilon p_{x1}\delta + p_{y1}) - \frac{b}{i_z^2}p_{y2} + \frac{1}{i_z^2}\varepsilon_1^2 c^2 (m_{S1} + m_{S2})\\
&\mu_1 \omega_1' = -\frac{1}{i_1^2}p_{x1}
\end{aligned} \tag{1.5.25}$$

$$p_{xi} = -\kappa n_i \frac{u_{xi}}{\sqrt{u_{xi}^2 + (\varepsilon u_{yi})^2 + \varepsilon\varepsilon_1 c\beta|\omega_z|}}$$

$$p_{yi} = -\kappa n_i \frac{\varepsilon u_{yi}}{\sqrt{u_{xi}^2 + (\varepsilon u_{yi})^2 + \varepsilon\varepsilon_1 c\beta|\omega_z|}}$$

$$m_{Si} = -\gamma\kappa n_i \frac{\varepsilon\varepsilon_1 c\omega_z}{\alpha\sqrt{u_{xi}^2 + (\varepsilon u_{yi})^2 + \varepsilon\varepsilon_1 c|\omega_z|}} \qquad (i = 1, 2)$$

$$u_{x1} = v_x - \omega_1, \quad u_{x2} = v_x, \quad u_{y1} = -v_x\delta + v_y + \omega_z a, \quad u_{y2} = v_y - \omega_z b$$

$$n_1 = b - (p_{x1} - \varepsilon p_{y1}\delta + p_{x2})h, \quad n_2 = 1 - n_1$$

В случае пробуксовки задних колес аппарата нормализованная система (1.5.5) записывается в форме

$$\begin{aligned}
&v_x' = \varepsilon(p_{x1} - \varepsilon p_{y1}\delta + p_{x2}) \\
&v_y' = \varepsilon p_{x1}\delta + p_{y1} + p_{y2} - \varepsilon v_x\omega_z \\
&\omega_z' = \frac{a}{i_z^2}(\varepsilon p_{x1}\delta + p_{y1}) - \frac{b}{i_z^2}p_{y2} + \frac{1}{i_z^2}\varepsilon_1^2 c^2(m_{S1} + m_{S2}) \\
&\mu_1\omega_1' = -\frac{1}{i_1^2}p_{x1} \\
&p_{xi} = -\kappa n_i \frac{u_{xi}}{\sqrt{u_{xi}^2 + (\varepsilon u_{yi})^2 + \varepsilon\varepsilon_1 c\beta|\omega_z|}} \\
&p_{yi} = -\kappa n_i \frac{\varepsilon u_{yi}}{\sqrt{u_{xi}^2 + (\varepsilon u_{yi})^2 + \varepsilon\varepsilon_1 c\beta|\omega_z|}} \\
&m_{Si} = -\gamma\kappa n_i \frac{\varepsilon\varepsilon_1 c\omega_z}{\alpha\sqrt{u_{xi}^2 + (\varepsilon u_{yi})^2 + \varepsilon\varepsilon_1 c|\omega_z|}} \qquad (i = 1, 2) \\
&u_{x1} = v_x - \omega_1; \quad u_{x2} = v_x - \omega_2^0, \quad u_{y1} = -v_x\delta + v_y + \omega_z a; \quad u_{y2} = v_y - \omega_z b \\
&n_1 = b - (p_{x1} - \varepsilon p_{y1}\delta + p_{x2})h, \quad n_2 = 1 - n_1
\end{aligned} \tag{1.5.26}$$

Проведя вырождение систем (1.5.25), (1.5.26) по малому параметру μ_1, и, считая параметры ε и ε_1 конечными, получим систему уравнений

$$\begin{aligned}
&v_x' = \varepsilon(p_{x1} - \varepsilon p_{y1}\delta) \\
&v_y' = \varepsilon p_{x1}\delta + p_{y1} + p_{y2} - \varepsilon v_x\omega_z \\
&\omega_z' = \frac{a}{i_z^2}(\varepsilon\delta p_{x1} + p_{y1}) - \frac{b}{i_z^2}p_{y2} + \frac{1}{i_z^2}\varepsilon_1^2 c^2(m_{S1} + m_{S2}) \\
&p_{x1} = 0
\end{aligned} \tag{1.5.27}$$

Система (1.5.27) отличается от системы (1.4.23) для случая кулонова трения наличием нормализованных моментов верчения m_{S1}, m_{S2} и малого параметра ε_1, характеризующего малость области контакта, которые входят в третье уравнение изменения угловой скорости корпуса аппарата. Выражения для касательных составляющих контактных сил для модели Журавлёва отличаются от касательных составляющих контактных сил для случая кулонова трения и определены последними восемью выражениями систем (1.5.25) и (1.5.26). Последнее, конечное уравнение системы (1.5.27) имеет изолированный корень

$$\omega_1 = v_x \tag{1.5.28}$$

отвечающий условию непроскальзывания переднего колеса аппарата в направлении продольной оси A_1x_1 (рис. 1.3). В соответствии с теоремой Тихонова-Васильевой [11, 14, 23, 46] (см. Приложение А) рассогласование между решениями системы (1.5.25), (1.5.26) и соответствующей вырожденной системы (1.5.27) оценивается величиной $O(\mu_1)$ на конечном интервале времени $t \sim 1$, отвечающем интервалу $T \sim T_2$ размерного времени T. Для переменной ω_1 эта оценка верна вне пограничного слоя ширины $O(-\mu_1 \ln \mu_1)$. Проверка условий этой теоремы проводится по аналогии с тем, как это делалось в разделах 1.4.2–1.4.3.

Рассмотрим систему (1.5.27), которая, как и системы (1.4.14), (1.4.23) (1.5.8), позволяет приближенно исследовать быстрые переменные v_y, ω_z, изменяющиеся на интервале времени $t \sim 1$, независимо от медленной переменной v_x, изменяющейся на интервале $t \sim 1/\varepsilon$, с использованием метода фазовой плоскости. Проведя вырождение системы (1.5.27) по малому параметру ε, и, считая параметр ε_1 конечным, получим систему уравнений

$$v_x = \text{const}, \quad v_y' = -\kappa n_1 \frac{-v_x\delta + v_y + \omega_z a}{|-v_x\delta + v_y + \omega_z a| + \varepsilon_1 \beta |\omega_z|} \tag{1.5.29}$$

$$\omega_z' = -\frac{a}{i_z^2}\kappa n_1 \frac{-v_x\delta + v_y + \omega_z a}{|-v_x\delta + v_y + \omega_z a| + \varepsilon_1 \beta |\omega_z|} - \frac{1}{i_z^2}\gamma\kappa n_1 \frac{\varepsilon_1^2 c^2 \omega_z}{\alpha|-v_x\delta + v_y + \omega_z a| + \varepsilon_1 c|\omega_z|}$$

В соответствии с теоремой Пуанкаре о малом параметре [14,46] система (1.5.29) имеет погрешность $O(\varepsilon)$ на интервале времени $t \sim 1$. Если малый параметр $\varepsilon_1 = 0$, то есть радиус области контакта колес с опорной плоскостью можно считать пренебрежимо малым ($r = 0$), результат совпадает с результатом исследования вырожденной системы в случае традиционной модели кулонова трения.

Рассмотрим случай $\varepsilon_1 \neq 0$, который соответствует ненулевому радиусу области контакта колеса с опорной плоскостью ($r \neq 0$), и построим фазовый портрет системы (1.5.29) на плоскости ω_z, v_y. На прямой

$$v_y = -\omega_z a + v_x\delta \tag{1.5.30}$$

обращается в нуль правая часть первого уравнения системы (1.5.29), а, значит, фазовые траектории на ней имеют горизонтальные касательные. В соответствии с выражением для переменной u_{y1} систем (1.5.25), (1.5.26) уравнение (1.5.30) отвечает условию непроскальзывания переднего колеса велосипедной модели аппарата в поперечном направлении A_1y_1 к его плоскости (рис. 1.3). Уравнения кривых, на которых касательные к фазовым траекториям вертикальны, являются решениями уравнения

$$\frac{(-v_x\delta + v_y + \omega_z a)a}{|-v_x\delta + v_y + \omega_z a| + \varepsilon_1 c\beta|\omega_z|} + \frac{\varepsilon_1^2 c^2\gamma\omega_z}{\alpha|-v_x\delta + v_y + \omega_z a| + \varepsilon_1 c|\omega_z|} = 0 \tag{1.5.31}$$

при которых обращается в нуль правая часть второго уравнения системы (1.5.29). Уравнение (1.5.31) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}(-v_x\delta + v_y + \omega_z a)a\left(\alpha|-v_x\delta + v_y + \omega_z a| + \varepsilon_1 c|\omega_z|\right) = \\ = -\varepsilon_1^2 c^2\gamma\omega_z\left(|-v_x\delta + v_y + \omega_z a| + \varepsilon_1 c\beta|\omega_z|\right)\end{aligned} \tag{1.5.32}$$

После преобразований уравнение (1.5.32) принимает вид

$$\begin{aligned}\frac{(-v_x\delta + v_y + \omega_z a)}{\omega_z}a\left(\alpha\frac{|-v_x\delta + v_y + \omega_z a|}{|\omega_z|} + \varepsilon_1 c\right) = \\ = -\varepsilon_1 c^2\gamma\left(\frac{|-v_x\delta + v_y + \omega_z a|}{|\omega_z|} + \varepsilon_1 c\beta\right)\end{aligned} \tag{1.5.33}$$

Для простоты решения уравнения (1.5.33) введем обозначение

$$\frac{-v_x\delta + v_y + \omega_z a}{\omega_z} = x \tag{1.5.34}$$

тогда уравнение (1.5.33) относительно новой переменной записывается в форме

$$xa(\alpha|x| + \varepsilon_1 c) = -\varepsilon_1^2 c^2\gamma(|x| + \varepsilon_1 c\beta) \tag{1.5.35}$$

После раскрытия модуля ($|x| = \mathrm{sgn}x\cdot x$), получим квадратное уравнение относительно новой переменной x

$$a\alpha\cdot\mathrm{sgn}x\cdot x^2 + (\varepsilon_1 ac + \varepsilon_1^2 c^2\gamma\cdot sgnx)x + \varepsilon_1^3 c^3\beta\gamma = 0 \tag{1.5.36}$$

Решения уравнения (1.5.36) имеют вид

$$x_1 = -\frac{\varepsilon_1^2 c^2\beta\gamma}{a} + O(\varepsilon_1^3), \qquad x_2 = \frac{-\varepsilon_1 c\mathrm{sgn}x}{\alpha} + O(\varepsilon_1^2) \tag{1.5.37}$$

Из второго выражения (1.5.37) следует равенство

$$|x_2| = \frac{-\varepsilon_1 c}{\alpha} + O(\varepsilon_1^2) \tag{1.5.38}$$

которое в силу условия (1.5.2) малости параметра ε_1 нереализуемо. Возвращаясь к переменным v_y и ω_z и пренебрегая членами порядка $O(\varepsilon_1^3)$, получаем уравнение кривой, на которой касательные к фазовым траекториям вертикальны

$$v_y = -\omega_z a\left(1 + \frac{\varepsilon_1^2 c^2 \beta\gamma}{a^2}\right) + v_x\delta \tag{1.5.39}$$

Уравнение (1.5.39) линейно, угол наклона соответствующей прямой зависит от малого параметра ε_1^2.

Приближенный вид зависимости между нормализованными значениями поперечной и угловой скоростей корпуса аппарата с заблокированными или пробуксовывающими задними колесами в случае заноса обеих его осей для модели трения Журавлёва при фиксированном значении $\delta > 0$ $(\Delta > 0)$ и $\delta < 0$ $(\Delta < 0)$ показан на рис. 1.26 (а) и (б) соответственно. Медленная переменная v_x полагается постоянной, равной своему начальному значению.

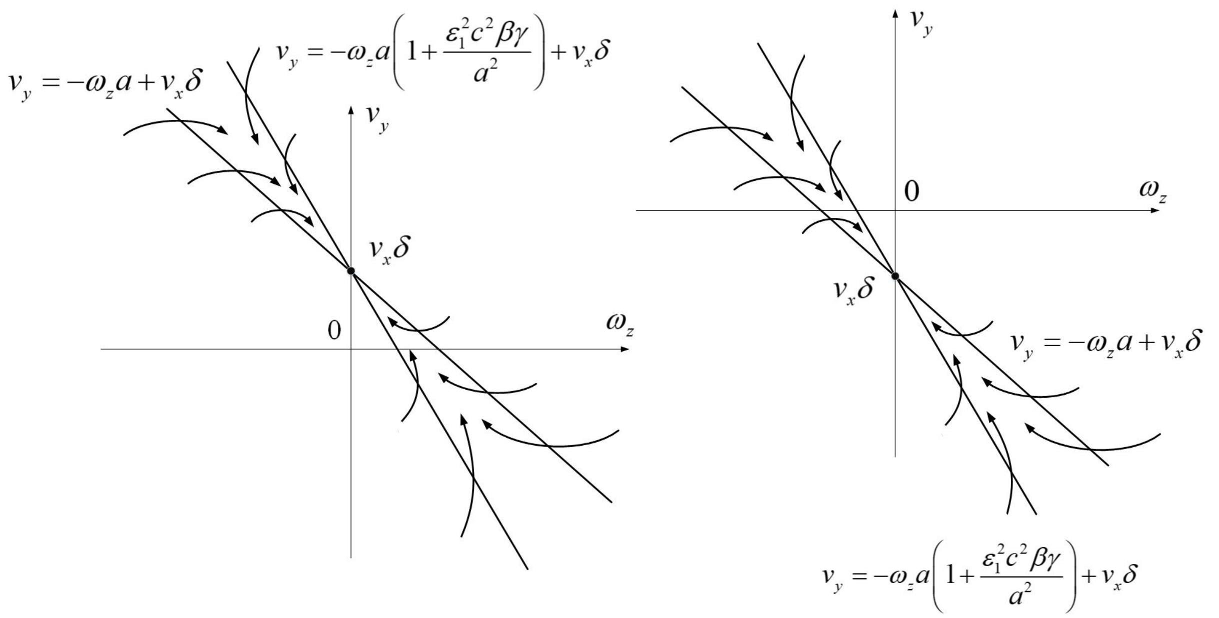


Рис. 1.26. Приближенный вид зависимости между нормализованными значениями поперечной и угловой скоростей корпуса аппарата с заблокированными или пробуксовывающими задними колесами для модели трения Журавлёва при фиксированном значении $\delta > 0$ $(\Delta > 0)$ (а) и $\delta < 0$ $(\Delta < 0)$ (б)

При начальных условиях переменных v_y, ω_z, удовлетворяющих неравенству

$$v_y > -\omega_z a + v_x\delta \tag{1.5.40}$$

(т.е. изображающая точка лежит выше прямой (1.5.30)) правая часть первого уравнения системы (1.5.29) строго отрицательна, следовательно, поперечная скорость v_y убывает. Если начальные условия переменных v_y, ω_z, удовлетворяют неравенству

$$v_y < -\omega_z a + v_x\delta \tag{1.5.41}$$

(т.е. изображающая точка лежит ниже прямой (1.5.30)) правая часть первого уравнения системы (1.5.29) строго положительна, значит, поперечная скорость v_y возрастает. При начальных условиях переменных v_y, ω_z, удовлетворяющих неравенству

$$v_y > -\omega_z a\left(1+\frac{\varepsilon_1^2 c^2\beta\gamma}{a^2}\right)+v_x\delta \tag{1.5.42}$$

(т.е. изображающая точка лежит выше прямой (1.5.39)) правая часть второго уравнения системы (1.5.29) строго отрицательна, угловая скорость ω_z убывает. Если начальные условия переменных v_y, ω_z, удовлетворяют неравенству

$$v_y < -\omega_z a\left(1+\frac{\varepsilon_1^2 c^2\beta\gamma}{a^2}\right)+v_x\delta \tag{1.5.43}$$

(т.е. изображающая точка лежит ниже прямой (1.5.39)) правая часть второго уравнения системы (1.5.29) строго положительна, угловая скорость ω_z возрастает.

Проведенный анализ фазовых плоскостей (рис. 1.26, 1.27) показал, что как в рамках модели поликомпонентного сухого трения, так и в рамках модели кулонова трения поворот передних колес влияет на занос обеих осей аппарата с заблокированными или пробуксовывающими задними колесами. Для любых начальных условий по переменным v_y, ω_z имеем

$$v_y \to v_x\delta, \qquad \omega_z \to 0 \tag{1.5.44}$$

на временах $t \sim 1$ ($T \sim T_2$), т.е. $v_y + \omega_z a - v_x\delta \to 0$. Таким образом, как и в разделах 1.4.2, 1.4.3 (для модели трения Кулона) и 1.5.2 (для модели трения Журавлёва), в силу рассматриваемой модели заноса обеих осей аппарата, он входит в режим непроскальзывания не заблокированных (не пробуксовывающих) колес (в продольном и поперечном направлениях), в данном случае — передних, и угловая скорость корпуса будет полностью погашена. При $\delta = 0$ занос аппарата на временах $t \sim 1$ полностью прекратится; в случае $\delta \neq 0$ его движение будет развиваться по уже рассмотренным в разделах 1.3.3 и 1.3.4 сценариям заноса с заблокированными или пробуксовывающими задними колесами при непроскальзывающих передних колесах, начальная стадия которого сопровождается преимущественно смещением центра масс аппарата в поперечном направлении. Исходя из этого, судить о заносе аппарата и возможностях его минимизации в данном случае следует с использованием модели

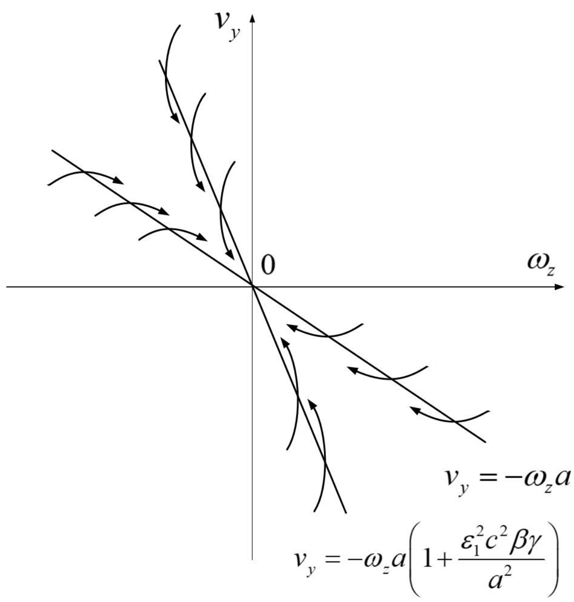


Рис. 1.27. Приближенный вид зависимости между нормализованными значениями поперечной и угловой скоростей корпуса аппарата с заблокированными или пробуксовывающими задними колесами для модели трения Журавлёва при фиксированном значении $\delta = 0$ ($\Delta = 0$)

переменной структуры, составляющие которой рассмотрены в разделах 1.3.3, 1.3.4 и 1.5.3.

В разделах 1.3.3, 1.3.4 при анализе фазовых портретов на рис. 1.15 и 1.19 было показано: чем меньше начальное значение переменной $|\Omega_z|(|\omega_z|)$, тем менее интенсивно развивается занос; при повороте передних колес аппарата в сторону заноса его задней оси, т.е. при выполнении условия (1.3.52), безразмерным аналогом которого служит условие

$$\mathrm{sgn}\omega_z = -\mathrm{sgn}\delta \tag{1.5.45}$$

занос аппарата в целом будет происходить менее интенсивно, чем в случаях

$$\delta = 0 \tag{1.5.46}$$

или

$$\mathrm{sgn}\omega_z = \mathrm{sgn}\delta \tag{1.5.47}$$

когда передние колеса аппарата не повернуты или повернуты против заноса его задней оси. Зафиксируем значение $|\delta|$ и выясним, при каком значении $\mathrm{sgn}\delta$ после завершения обсуждаемого выше в этом разделе быстрого этапа заноса не заблокированной (не пробуксовывающей) передней оси аппарата, которое происходит после окончания быстрого переходного процесса изменения переменной ω_1 до значения (1.5.28), и прихода изображающей точки фазовой плоскости v_y, ω_z на прямую (1.5.30), полученное значение $|\omega_z|$ будет принимать минимальное из возможных значений и удовлетворять условию (1.5.45). Обратимся к рис. 1.26, 1.27.

На рис. 1.28 показаны прямые (1.5.30) и (1.5.39) для значения $\delta = 0$ и симметрично расположенные относительно нее прямые (1.5.30) и (1.5.39), отвечающие одинаковым величинам и разным знакам угла δ. Анализ фазовой плоскости рис. 1.28 проводится по аналогии с тем, как это делалось в разделе 1.4.3. Выводы верны с учетом ограничения (1.4.11), в соответствии с которым область применимости рассматриваемой модели движения аппарата находится внутри круга $v_y,\ \omega_z \leq v_x|\delta|$, отмеченного на рис. 1.28, и небольшой внешней окрестности. При начальных значениях переменных $|v_y|$, $|\omega_z|$, принадлежащих этой области применимости, занос аппарата в целом будет минимальным при значении $\delta = 0$, т.е. при неповернутых передних колесах.

Для модели трения Журавлёва в случае блокировки или пробуксовки задних колес, когда передние колеса обретают сцепление с опорной плоскостью, значения $|v_y|$, $|\omega_z|$ меньше, чем для модели кулонова трения, где угловая скорость корпуса в общем случае принимает ненулевые значения. Следовательно, в рамках модели поликомпоненнного сухого трения, учитывающей верчение в области контакта колеса, занос уменьшается скорее, чем при модели кулонова трения.

Фазовые портреты, изображенные на рис. 1.21, 1.25 и рис. 1.22 (б), 1.26 (б), для сравнения моделей сухого трения Кулона и В.Ф. Журавлёва для постоянного значения Δ в размерных переменных показаны на рис. 1.29 и рис. 1.30 соответственно.

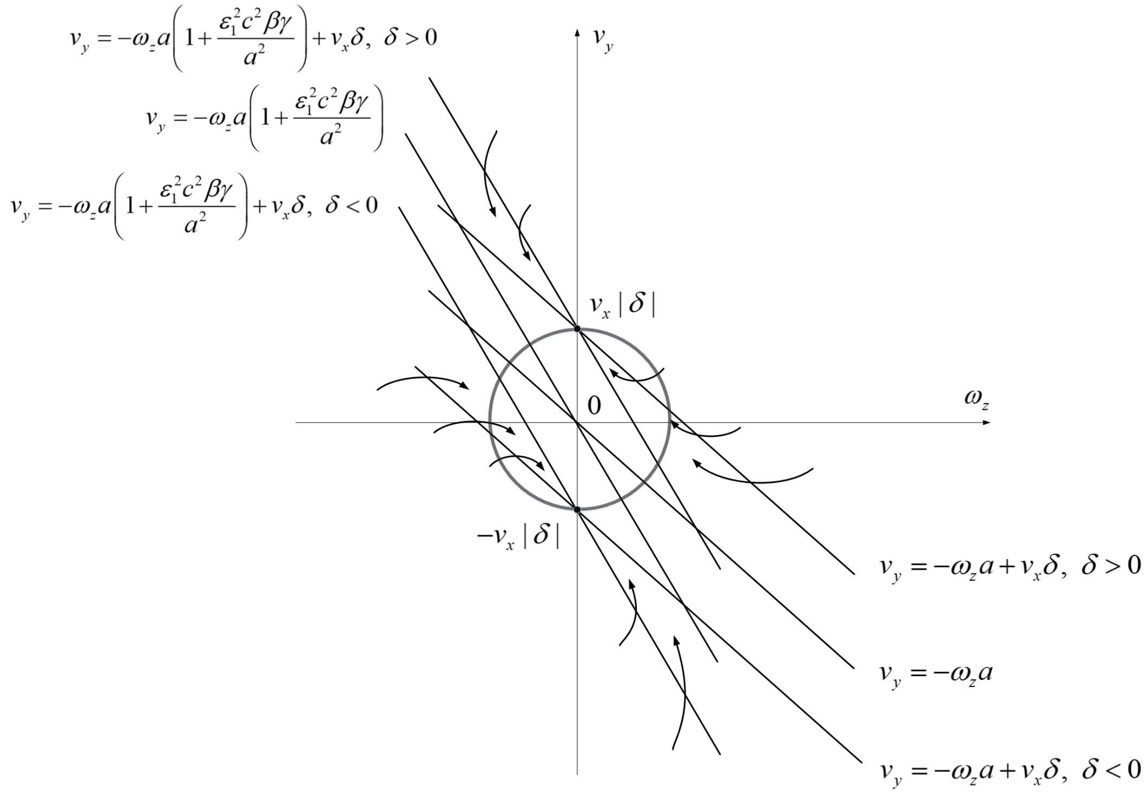
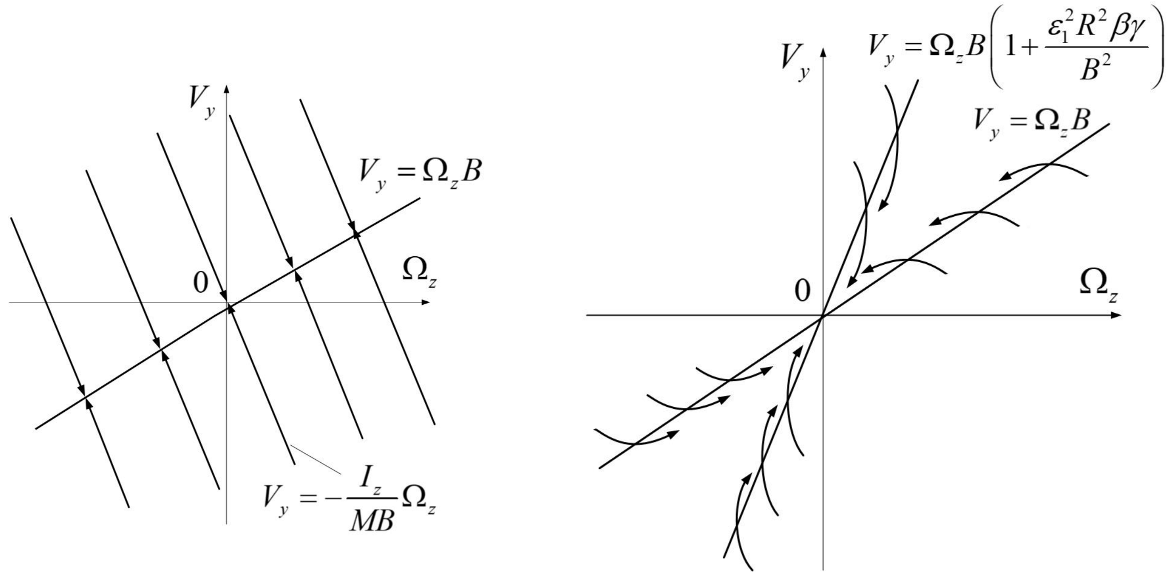


Рис. 1.28. Приближенный вид зависимости между нормализованными значениями поперечной и угловой скоростей корпуса аппарата с заблокированными или пробуксовывающими задними колесами при фиксированном значении δ для модели трения Журавлёва с учетом области применимости



а) б)

Рис. 1.29. Приближенный вид зависимости между поперечной и угловой скоростями корпуса аппарата с заблокированными или пробуксовывающими передними колесами в случае заноса обеих его осей для моделей сухого трения Кулона (а) и В.Ф Журавлёва (б)

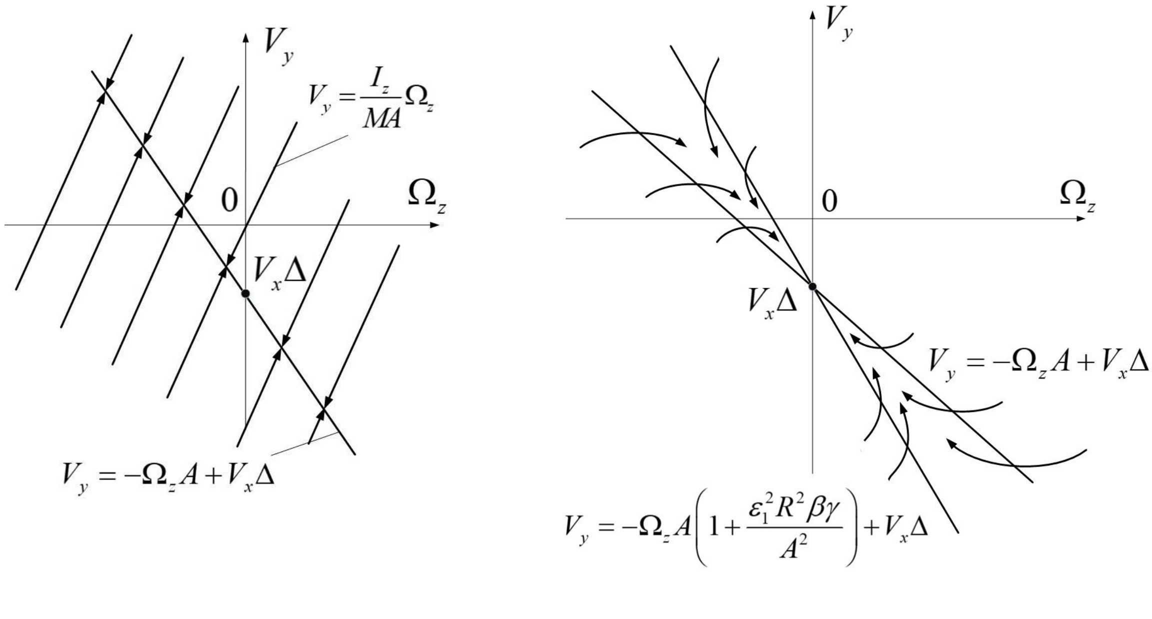


Рис. 1.30. Приближенный вид зависимости между поперечной и угловой скоростями корпуса аппарата с заблокированными или пробуксовывающими задними колесами в случае заноса обеих его осей при фиксированном значении $\Delta < 0$ для моделей сухого трения Кулона (а) и В.Ф Журавлёва (б)

Глава 2

Занос аппарата на «миксте»

Рассматривается начальная стадия движения двухосного четырехколесного аппарата после попадания на «микст» — участок опорной плоскости, содержащий области с разными коэффициентами трения (рассматривается случай, когда коэффициент трения для одного из колес ведущей (задней) оси оказывается меньше коэффициента трения для других колес). Для автомобиля это возможно, например, при въезде на обледенелую или грязную обочину, одностороннем попадании в лужу масла и т.п. В [48], где исследовался случай, когда до и после попадания на «микст» колеса автомобиля сохраняют сцепление с дорогой и взаимодействуют с ней посредством продольного и поперечного микропроскальзывания, показано, что после завершения быстрого переходного процесса выравнивания контактных сил на колесах ведущей оси автомобиль получает импульс угловой скорости, способный привести к заносу. Здесь при помощи тех же подходов, основанных на методах фракционного анализа и теории возмущений, проводятся оценка импульса угловой скорости, получаемого корпусом аппарата, и анализ его динамики как в указанном выше случае [48], так и в ситуациях, когда одно — попавшее на участок с меньшим коэффициентом трения — или оба колеса задней оси начинают скользить, а остальные колеса сохраняют сцепление с опорной плоскостью. В ходе исследования применяются также метод фазовой плоскости и качественные методы интегрирования дифференциальных уравнений[1].

2.1 Анализ движения на «миксте» в литературе

Одной из частых причин нарушения безопасности движения служат дефекты дорожного покрытия. К ним относится «микст» — участок, содержащий инородные вещества с другим коэффициентом трения: грязь, песок, гололед, лужа, разлитое масло и т. д. Часто при попадании на «микст» водитель начинает аварийное торможение или пытается объехать его, что чревато потерей управления и аварией [63, 67, 85, 92, 144].

К настоящему времени разработано большое число систем активной безопасно-

[1]Основные результаты Главы 2 изложены на основании статьи [20], опубликованной в соавторстве с научным руководителем А.В. Влаховой, которой предложены постановки задач и методы их решения. Все результаты главы получены соискателем лично.

сти: антиблокировочная система торможения (ABS), система электронного контроля устойчивости (ESC), система активного рулевого управления (AFS), активная подвеска (AS) и т.д. Система торможения не редко влияет на продольную динамику корпуса аппарата, а система рулевого управления — на его боковую динамику, однако в случае, когда аппарат, оказывается на неоднородной поверхности, в частности, на «миксте», это разделение становится условным [63], поскольку асимметричные продольные усилия, создаваемые левой и правой шинами, вызывают появление нежелательного момента вокруг вертикальной оси, проходящей через центр масс корпуса аппарата, который изменяет его угловую скорость. Чтобы нивелировать этот момент, системы управления вращением колес, такие как ABS или ESC, уменьшают различие между усилиями на левом и правом колесах. Этот прием в ряде случаев помогает аппарату поддерживать устойчивость движения, однако нередко чреват увеличением его тормозного пути. Исследования таких движений обычно сосредоточены на торможении и/или поворотах – типичных маневрах при испытании устойчивости углового движения транспортного средства [67].

Как правило, ситуации попадания колесных аппаратов на «микст» обсуждаются в литературе в связи с описанием экспериментов, связанных с проверкой работы систем активной безопасности [68, 73, 113], анализ причин большей или меньшей эффективности этих систем не приводится. В качестве примера можно привести [81, 92] результаты экспериментальных испытаний, в ходе которых левые колеса автомобиля, движущегося со скоростью 80-120 км/ч, перемещались по мокрому асфальтовому покрытию, а правые — по тому же покрытию, усыпанному слоем зерна толщины 0,02 м. Показано, что в случае, когда автомобиль не оснащен системой активной безопасности, такое движение, сопровождаемое попыткой резкого торможения, приводит к заносу его корпуса, способному вызвать аварийную ситуацию. В случае, когда система активной безопасности присутствует (рассматривались системы ABS и ESP), даже резкое торможение не приводило к потере устойчивости траектории его движения. Помимо этого проводились заезды на скорости до 120 км/ч с отключенной системой активной безопасности без торможения и других маневров со стороны водителя, показавшие, что в этом случае аварийная ситуация более вероятна для заднеприводных автомобилей.

Настоящая работа посвящена исследованию динамики заднеприводного колесного аппарата при попадании на «микст» в ходе равномерного прямолинейного движения и формированию возможных алгоритмов работы системы активной безопасности, которая могла бы включаться в обеспечение устойчивости аппарата на ранних стадиях заноса, опережая нежелательное вмешательство водителя.

2.2 Постановка задачи и математическая модель

Рассмотрим [19, 20, 43] движение двухосного четырехколесного аппарата по горизонтальной плоскости. Как и в [48], пренебрежем влиянием деформаций подвески на его геометрию масс и динамику, будем считать оси вращения колес фиксированными в продольной плоскости симметрии аппарата, углы развала и схождения колес — равными нулю.

Пользуясь подходами [13, 14, 53], свяжем с опорной плоскостью неподвижную систему координат $Ox_0y_0z_0$, с центрами масс корпуса и колес аппарата (они считаются одинаковыми) — системы координат $Cxyz$ и $A_{ij}x_{ij}y_{ij}z_{ij}$ соответственно. Индексы i задают переднюю ($i = 1$) и заднюю ($i = 2$) оси, индексы j — левую ($j = 1$) и правую ($j = 2$) стороны по ходу движения аппарата; оси Oz_0, Oz и $A_{ij}z_{ij}$ направлены по вертикали, ось Cx — вдоль продольной оси симметрии корпуса, оси $A_{ij}y_{ij}$ — по осям вращения колес (рис. 2.1). Положение аппарата определяется декартовыми координатами X, Y точки C в системе координат $Ox_0y_0z_0$, углом Ψ поворота его корпуса вокруг оси Cz (углом курса) и углами Θ_{ij} поворота колес вокруг осей $A_{ij}y_{ij}$. Углы поворота передних колес относительно корпуса вокруг осей $A_{1j}z_{1j}$ полагаются равными нулю. Как и в главе 1 при изучении заноса аппарата при блокировке или пробуксовке колес одной из осей, ограничимся случаем, когда отношение массы колеса к массе аппарата мало, и будем считать, что центр масс аппарата совпадает с точкой C.

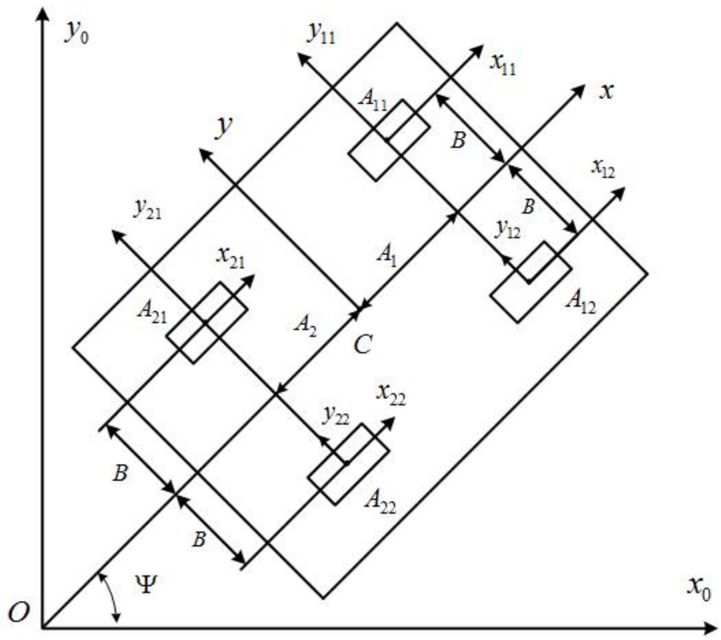


Рис. 2.1. Четырехколесная модель аппарата

Составим модель динамики аппарата из уравнений движения точки C в проекциях на оси Cx и Cy, уравнения изменения его кинетического момента относительно точки C в проекции на ось Cz, уравнений изменения кинетических моментов колес относительно осей $A_{ij}y_{ij}$ и кинематических соотношений [48]

$$M\dot{V}_x = P_{x11} + P_{x12} + P_{x21} + P_{x22} + MV_y\Omega_z - F_x$$
$$M\dot{V}_y = P_{y11} + P_{y12} + P_{y21} + P_{y22} - MV_x\Omega_z + F_y \tag{2.2.1}$$

$$I_z\dot{\Omega}_z = (-P_{x11} + P_{x12} - P_{x21} + P_{x22})B + (P_{y11} + P_{y12})A_1 - (P_{y21} + P_{y22})A_2 + M_z +$$

$$+ \textstyle\sum_{i,j=1}^{2} M_{Sij}$$

$$I_i\dot{\Omega}_{ij} = -P_{xij}R + L_{ij}, \quad (i, j = 1, 2)$$

$$\dot{X} = V_x\cos\Psi - V_y\sin\Psi, \quad \dot{Y} = V_x\sin\Psi + V_y\cos\Psi, \quad \dot{\Psi} = \Omega_z, \quad \dot{\Theta}_{ij} = \Omega_{ij}$$

Точкой обозначено дифференцирование по времени T; M — масса аппарата; $I_z = M\rho_z^2$ и ρ_z — его момент инерции относительно оси Cz и радиус инерции; $I_i = m\rho_i^2$ – осевые моменты инерции передних и задних колес; m, ρ_i и R — масса колес, их радиусы инерции и радиус; A_i — расстояния от оси Cz до прямых $A_{i1}A_{i2}$; $2B$ — длины отрезков $A_{i1}A_{i2}$ (рис. 2.1); P_{xij} и P_{yij} — проекции касательной составляющей контактной силы взаимодействия ij-го колеса с опорной плоскостью на оси $A_{ij}x_{ij}$ и $A_{ij}y_{ij}$; M_{Sij} — соответствующая проекция момента трения верчения в области контакта ij-го колеса с опорной плоскостью на ось $A_{ij}z_{ij}$; L_{ij} — моменты со стороны двигателя и тормозных колодок, приложенные к ij-му колесу по направлению оси $A_{ij}y_{ij}$; F_x, F_y и M_z — проекции внешних возмущающих сил и моментов[2]. При выбранном направлении движения далее будем полагать $V_x(0) > 0$. Как и в работах [12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 48], а также в главе 1 настоящей работы, в силу условий

$$m \ll M, \quad I_i \ll I_z \tag{2.2.2}$$

второе из которых следует из первого в силу конечности радиусов инерции составляющих рассматриваемой системы, при записи уравнения изменения кинетического момента аппарата не учитываются проекции кинетических моментов его колес.

Далее, как и в [48], будем рассматривать заднеприводный аппарат, для которого

$$L_{1j} = 0, \quad L_{2j} = L \tag{2.2.3}$$

где L — момент на выходных осях дифференциала, и пренебрежем внешними возмущениями F_y, M_z

$$F_y = 0, \quad M_z = 0 \tag{2.2.4}$$

Уравнения системы двигатель–трансмиссия имеют вид [48]

$$J\dot{\Omega} = M(\Omega, \eta) - \frac{2}{n}L, \quad \Omega = \frac{n}{2}(\Omega_{21} + \Omega_{22}) \tag{2.2.5}$$

где Ω — угловая скорость выходного вала двигателя; J — момент инерции этой системы, приведенный к выходному валу; n — передаточное число трансмиссии от выходного вала двигателя к выходным осям дифференциала; $M(\Omega, \eta)$ — эффективный момент двигателя; η — параметр, характеризующий подачу топлива (приведенное положение педали газа). Графики зависимости $M(\Omega, \eta)$ от Ω при различных значениях параметра η ($\eta^* < \eta_0 < \eta_1 < \eta_2 < \ldots$) представлены на рис. 2.2 [48, 52].

Сила сопротивления воздуха F_x вычисляется по формуле

$$F_x(V_x) = \frac{1}{2}\rho V_x^2 S c_x \tag{2.2.6}$$

где ρ — плотность воздуха ($\rho = 1,202 - 1,225$ кг/м^3); c_x и S — безразмерный коэффициент лобового сопротивления и характерная площадь, зависящие от формы

[2]В настоящей работе используются те же обозначения, что и в [13, 14, 48, 53].

аппарата.

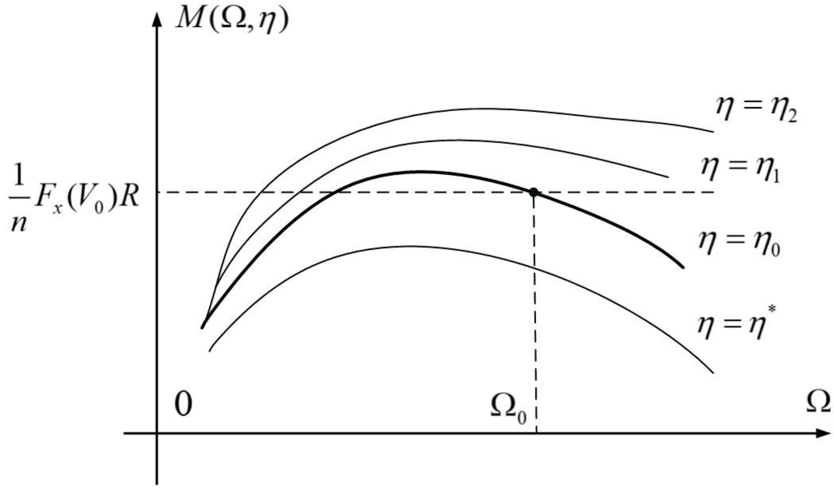


Рис. 2.2. Зависимость эффективного момента двигателя от угловой скорости его выходного вала при различных значениях параметра η

Для описания касательных составляющих контактных сил и момента трения верчения, действующих на ij – е колесо аппарата, будем, в зависимости от условий его движения, использовать модифицированную модель увода, которая, в отличие от традиционной модели [51], учитывает как поперечную, так и продольную малые деформации колеса, приводящие к его микросмещению (микропроскальзыванию, псевдоскольжению), и, для случая скольжения колеса, традиционную модель сухого трения Кулона и модель поликомпонентного сухого трения В.Ф. Журавлёва.

Модифицированная модель увода имеет вид [14, 20, 36, 37, 47–49, 123]

$$P_{xij} = -\kappa_{xij}N_{ij}p(\varepsilon_{ij})\frac{\varepsilon_{xij}}{\varepsilon_{ij}}, \quad P_{yij} = -\kappa_{yij}N_{ij}p(\varepsilon_{ij})\frac{\varepsilon_{yij}}{\varepsilon_{ij}}$$

$$M_{Sij} = -\kappa_{ijz}rN_{ij}\chi(|\varepsilon_{yij}|)\frac{\varepsilon_{yij}}{(|\varepsilon_{yij}|)} \tag{2.2.7}$$

$$\varepsilon_{xij} = \frac{U_{xij}}{\Omega_{ij}R}, \quad \varepsilon_{yij} = \frac{U_{yij}}{\Omega_{ij}R}, \quad \varepsilon_{ij} = \sqrt{\varepsilon_{xij}^2+\varepsilon_{yij}^2} \quad (i,j=1,2)$$

Здесь κ_{xij} и κ_{yij} — коэффициенты кулонова трения скольжения в продольном и поперечном направлениях к плоскости симметрии ij-го колеса (по направлениям осей $A_{ij}x_{ij}$ и $A_{ij}y_{ij}$); κ_{zij} — коэффициент трения верчения колеса вокруг вертикальной оси $A_{ij}z_{ij}$; r — радиус области контакта колес с опорной плоскостью (как и в главе 1, считаем ее кругом, для которого справедливо условие (1.2.9))

$$r \ll R \tag{2.2.8}$$

N_{ij} — нормальные реакции; ε_{xij} и ε_{yij} — относительные проскальзывания колес в продольном и поперечном направлениях; U_{xij} и U_{yij} — проекции скорости центра области контакта (далее для краткости — точки контакта) ij-го колеса с опорной плоскостью Ox_0y_0 на оси $A_{ij}x_{ij}$ и $A_{ij}y_{ij}$ соответственно, вычисляемые по формулам

$$U_{xij} = V_x + (-1)^j B\Omega_z - \Omega_{ij} R, \quad U_{yij} = V_y - (-1)^i A_i \Omega_z \tag{2.2.9}$$

Возникновение момента трения верчения в данном случае вызвано неравномерностью распределения касательных напряжений в области контакта из-за малой поперечной деформации ij-го колеса. В теории движения автомобиля его называют стабилизирующим моментом.

Далее по аналогии с (1.2.8), примем

$$\kappa_{xij} = \kappa_{yij} = \kappa_{ij} \qquad (i, j = 1, 2) \tag{2.2.10}$$

Как и в [14,20,47–49,123], будем аппроксимировать характеристику $p(\varepsilon_{ij})$ касательных составляющих контактных сил кусочно-линейной функцией (рис. 2.3 а)

$$p = \varepsilon_{ij}/\varepsilon \ \text{ при } \ \varepsilon_{ij} < \varepsilon; \quad p = 1 \ \text{ при } \ \varepsilon_{ij} \geq \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \tag{2.2.11}$$

а характеристику $\chi(|\varepsilon_{yij}|)$ стабилизирующего момента — функцией [37, 49] (рис. 2.3 б)

$$\begin{aligned}
&\chi = \frac{|\varepsilon_{yij}|}{\varepsilon_m} \quad \text{при } \ |\varepsilon_{yij}| < \varepsilon_m \\
&\chi = \frac{\varepsilon - |\varepsilon_{yij}|}{\varepsilon - \varepsilon_m} \quad \text{при } \ \varepsilon_m \leq |\varepsilon_{yij}| < \varepsilon \\
&\chi = 0 \quad \text{при } \ |\varepsilon_{yij}| \geq \varepsilon
\end{aligned} \tag{2.2.12}$$

Для автомобильных колес $\varepsilon \sim 10^{-1}$; значения κ_{ijz} и ε_m, в зависимости от типа шин, могут почти не зависеть от нагрузки или изменяться существенно [40, 135].

Интервал

$$\varepsilon_{ij} < \varepsilon \tag{2.2.13}$$

соответствующий линейной зоне характеристики контактной силы, отвечает движению колес аппарата с малыми смещениями, но без скольжения всей области контакта относительно опорной плоскости. В этом случае говорят [12, 14, 22, 47–49], что колеса не теряют сцепление с опорной плоскостью. (В главе 1 для описания такого движения использовалась более простая модель непроскальзывания колес аппарата.) Необходимым и достаточным условием выполнения (2.2.13) служит неравенство

$$\left(\frac{P_{xij}}{\kappa_{ij} N_{ij}}\right)^2 + \left(\frac{P_{yij}}{\kappa_{ij} N_{ij}}\right)^2 < 1 \tag{2.2.14}$$

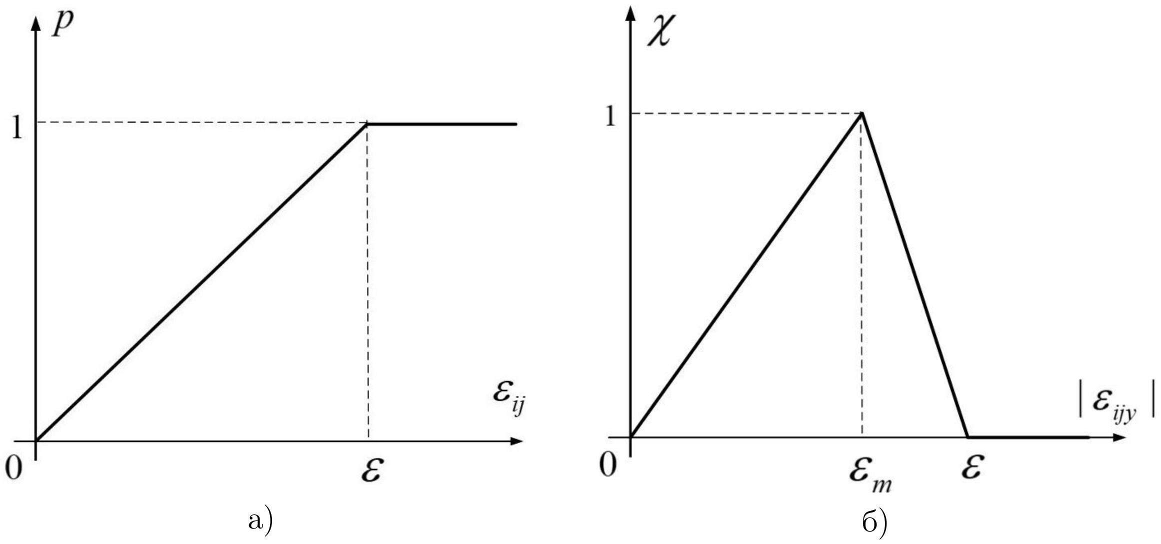


Рис. 2.3. Кусочно-линейная аппроксимация характеристик контактной силы (а) и стабилизирующего момента (б) для модели взаимодействия колес с опорной плоскостью, учитывающей их малую деформируемость в касательном направлении

Условие

$$\varepsilon_{ij} \geq \varepsilon \tag{2.2.15}$$

отвечает скольжению колес аппарата — их потере сцепления с опорной плоскостью. Здесь касательные составляющие контактных сил переходят в кулоновы силы трения скольжения, которые вычисляются по формулам вида (1.2.6)

$$P_{xij} = -\kappa_{ij} N_{ij} \frac{U_{xij}}{\sqrt{U_{xij}^2 + U_{yij}^2}}, \quad P_{yij} = -\kappa_{ij} N_{ij} \frac{U_{yij}}{\sqrt{U_{xij}^2 + U_{yij}^2}} \tag{2.2.16}$$

а стабилизирующий момент M_{Sij} равен нулю.

Обоснование выражений (2.2.7) для касательных составляющих P_{xij} и P_{yij} контактных сил и предположения, позволяющие получить при их выводе соответствующие выражения для моделей Картера, Рокара, Фромма и Келдыша [39] обсуждаются в [45, 46]. В рамках модели движения деформируемого колеса [45, 46] была получена только аппроксимация восходящего участка характеристики$\chi(|\varepsilon_{yij}|)$, определяемая первым выражением (2.2.12). Используемая в настоящей работе полная характеристика стабилизирующего момента для восходящего и падающего участка взята из [37, 49]. В работе [48] выражения для M_{Sij} из (2.2.7) не рассматривались.

Для модели поликомпонентного сухого трения В.Ф. Журавлёва касательные составляющие контактных сил и моменты трения верчения вычисляются по аналогии с первыми тремя формулами (1.2.10), где, в зависимости от предположения о свойствах распределения нормальных давлений в области контакта, постоянные α, β и γ

принимают значения (1.2.11)–(1.2.13).

$$P_{xij} = -\kappa_{ij} N_{ij} \frac{U_{xij}}{\sqrt{U_{xij}^2 + U_{yij}^2} + \beta|\Omega_z| r}, \quad P_{yij} = -\kappa_{ij} N_{ij} \frac{U_{yij}}{\sqrt{U_{xij}^2 + U_{yij}^2} + \beta|\Omega_z| r}$$

$$M_{Sij} = -\gamma\kappa_{ij} N_{ij} \frac{\Omega_z r^2}{\alpha\sqrt{U_{xij}^2 + U_{yij}^2} + |\Omega_z| r} \tag{2.2.17}$$

Выражения (2.2.16) получаются из (2.2.17) при $\alpha, \beta, \gamma = 0$.

В рамках рассматриваемой постановки задачи могут начать скользить одно (попавшее на участок с меньшим коэффициентом трения) или оба колеса задней оси, что отвечает значениям $i = 1$ и $j = 2$ или $j = 1, 2$.

Последнее уравнение (2.2.5) позволяет исключить из системы (2.2.1) – (2.2.12), (2.2.16), (2.2.17) одну из переменных Ω_{21}, Ω_{22}, Ω. Явное выражение для L можно найти, если продифференцировать обе части этого уравнения по времени, подставить полученное выражение в первое уравнение (2.2.5) и учесть уравнения изменения Ω_{2j} из (2.2.1):

$$L = \frac{1}{\dfrac{2}{n} + n\dfrac{J}{I_2}} \left[M(\Omega, \eta) + \frac{n}{2}\frac{J}{I_2} R(P_{x21} + P_{x22}) \right], \quad \Omega = \frac{n}{2}(\Omega_{21} + \Omega_{22}) \tag{2.2.18}$$

Исключаемая переменная в каждом случае выполнения первого или второго неравенства (2.2.11) будет определяться удобством исследования.

Также, как и в [48], разобьем движение аппарата на два этапа. На первом этапе, до попадания на «микст», аппарат движется равномерно, прямолинейно, без потери сцепления колес с опорной плоскостью. На втором этапе рассматривается начальная стадия движения на «миксте». В момент времени, который будет приниматься за начальный для этого этапа, коэффициенты κ_{22} и κ_{z22} кулонова трения скольжения и соответствующего стабилизирующего момента правого заднего (ведущего) колеса мгновенно изменяют свои значения с κ_0 и κ_{z0} на κ_M и κ_{zM} соответственно, где

$$\kappa_M < \kappa_0, \quad \kappa_{zM} < \kappa_{z0} \tag{2.2.19}$$

При этом стационарное, установившееся движение аппарата нарушается, и в системе возникает динамический процесс, обусловленный различиями величин касательных составляющих контактных сил на его задних колесах. Его протекание определяется свойствами взаимодействия колес аппарата с опорной плоскостью. В настоящей работе рассматриваются случаи, когда все колеса аппарата сохраняют сцепление с опорной плоскостью и когда одно — попавшее на участок с меньшим коэффициентом трения или оба колеса задней оси скользят, а остальные сохраняют сцепление с опорной плоскостью.

Рассматривая начальную стадию движения на «миксте», ограничимся случаем, когда поперечная и угловая скорости корпуса аппарата малы и изменяются в диапазонах

$$|V_y| \sim |\Omega_z|(A_1 + A_2) \lesssim \varepsilon V_x \qquad (2.2.20)$$

Для того чтобы выяснить возможности приближенного анализа динамики аппарата с применением асимптотических методов разделения движений, проведем оценку постоянных времени изменения переменных рассматриваемой системы. В силу малости параметров ε и $\mu = m/M$ (см. (2.2.2) и рис. (2.2.11)) составляющие ее движения развиваются в сильно разнесенных временных масштабах. Их оценками служат: $T_1 = V_{x*}/g$ — определяемое из первого уравнения системы (2.2.1) характерное время, за которое продольная скорость V_x корпуса аппарата изменяется до величин порядка своего характерного значения V_{x*} под действием контактных сил порядка его веса; $T_2 = \varepsilon V_{x*}/g$ — определяемое из второго и третьего уравнений системы (2.2.1) с учетом (2.2.9), первого равенства (2.2.11), неравенства (2.2.13) и ограничений (2.2.20) характерное время изменения поперечной и угловой скоростей корпуса аппарата V_y и Ω_z, а также поперечных скоростей U_{yij} точек контакта колес, не потерявших сцепление с опорной плоскостью; $T_3 = \mu V_{x*}/g$ — определяемое из четырех последних динамических уравнений системы (2.2.1) характерное время изменения угловой скорости осевого вращения колес; $T_4 = \mu\varepsilon V_{x*}/g$ — определяемая с учетом первого равенства (2.2.11) и неравенства (2.2.13) постоянная времени изменения продольных скоростей U_{xij} точек контакта колес, не потерявших сцепление с опорной плоскостью; $T_5 = J/K_D$, $K_D = (\partial M/\partial\Omega)_*$ — определяемое из (2.2.5) характерное время изменения угловой скорости выходного вала двигателя (правая часть выражения для K_D задает характерный коэффициент наклона касательной к характеристикам двигателя на рис. 2.2).

Далее ограничимся случаем

$$0 < \mu \ll \varepsilon \sim \varepsilon_m \sim \varepsilon_1 \ll 1, \quad \varepsilon_1 = \frac{r}{R} \qquad (2.2.21)$$

когда

$$T_4 \ll T_3 \ll T_2 \ll T_1 \qquad (2.2.22)$$

и будем рассматривать аппараты и условия движения, для которых $T_4 \sim T_5$ [48]. Характерное время реакции водителя (системы управления) считается существенно превосходящим T_4. Для типичных значений параметров легкового автомобиля $\mu \sim 10^{-2}$–10^{-3}, тогда при движении со скоростями $V_x \sim 10$ м/с имеем $T_1 \sim 1$ с, $T_2 \sim 10^{-1}$ с, $T_3 \sim 10^{-2} - 10^{-3}$ с, $T_4 \sim 10^{-3} - 10^{-4}$ с.

Таким образом, динамический процесс выравнивания контактных сил на колесах ведущей оси аппарата, возникающий при попадании на «микст», в первую очередь затрагивает переменные, изменяющиеся на характерных временах $T \sim T_4 \sim T_5$ —

продольные скорости точек контакта колес, не потерявших сцепление с опорной плоскостью, а также угловую скорость выходного вала двигателя. Переменные, изменяющиеся на существенно больших временах, в момент скачка (2.2.19) коэффициентов трения можно считать [14, 46, 48] постоянными, равными своим значениям на этапе стационарного движения.

Обсудим свойства движения аппарата до попадания на «микст».

На основании (2.2.1) – (2.2.12), (2.2.16), (2.2.19) равномерному прямолинейному (стационарному) движению аппарата без потери сцепления колес с однородной частью опорной плоскости отвечают соотношения

$$\begin{gathered}
\kappa_{ij} = \kappa_0, \quad \kappa_{ijz} = \kappa_{z0}, \quad V_y = 0, \quad \Omega_z = 0, \quad U_{yij} = 0 \\
\varepsilon_{yij} = 0, \quad P_{yij} = 0, \quad P_{x1j} = 0, \quad U_{x1j} = 0, \quad V_x = \Omega_1 R \\
\Omega_1 = \Omega_{1j}, \quad P_{x2j} = L/R, \quad M_{Sij} = 0 \quad (i, j = 1, 2)
\end{gathered} \tag{2.2.23}$$

В частности, из пятого и девятого соотношений следует, что при таком движении передние колеса не проскальзывают относительно опорной плоскости, задние (ведущие) колеса не проскальзывают в поперечном направлении.

Будем считать, что в ходе стационарного движения нормальные реакции принимают постоянные значения

$$N_{1j} = N_1 = \frac{MgA_2}{2(A_1 + A_2)}, \quad N_{2j} = N_2 = \frac{MgA_1}{2(A_1 + A_2)} \quad (j = 1, 2) \tag{2.2.24}$$

отвечающие своим аналогам (1.2.4) для велосипедной модели аппарата (рис 1.3), в которую переходит рассматриваемая в этой главе четырехколесная модель в пределе при $B \to 0$, для случая статического равновесия. Это предположение оправдано [32, 41] для аппаратов с достаточно низким расположением центра масс и центра парусности (точки приложения силы сопротивления воздуха): их высоты H и H_a над опорной плоскостью должны удовлетворять неравенству

$$H, H_a \ll \min\{A_1, A_2\} \tag{2.2.25}$$

Для большинства автомобилей центр парусности близок к центру масс, то есть $H_a \approx H$.

Например, считая деформации колес аппарата в направлении оси Cz малыми и рассматривая линейный закон распределения нормальных давлений в области их контакта с опорной плоскостью [30–33, 38], имеем

$$\begin{aligned}
N_{1j} &= N_{1j}(X_{1j}, Y_{1j}) = \frac{MgA_2}{2(A_1 + A_2)} + N^1 X_{O1j} + N^2 Y_{O1j} \\
N_{2j} &= N_{2j}(X_{2j}, Y_{2j}) = \frac{MgA_1}{2(A_1 + A_2)} + N^1 X_{O2j} + N^2 Y_{O2j}
\end{aligned} \tag{2.2.26}$$

где (X_{Oij}, Y_{Oij}) — координата точки O_{ij} контакта ij-го колеса с опорной плоскостью Ox_0y_0 в системе координат $C_0x_0y_0$; C_0 — проекция точки C на эту плоскость. Условия равенства нулю приложенных к аппарату моментов сил относительно осей Cx и Cy, которые обеспечивают отсутствие наклонов его корпуса, на принятом уровне точности, с учетом (2.2.4), (2.2.23) и рис. 2.1, записываются в форме

$$\begin{aligned} &(N_{11} - N_{12})B + (N_{21} - N_{22})B = 0 \\ &-2LH/R + (N_{21} + N_{22})A_2 - (N_{11} + N_{12})A_1 - F_x(H_a - H)\operatorname{sgn}(H_a - H) = 0 \end{aligned} \tag{2.2.27}$$

Подстановка в (2.2.27) выражений (2.2.26) и соотношений

$$X_{Oij} = X_{ij}\cos\Psi - Y_{ij}\sin\Psi, \quad Y_{Oij} = X_{ij}\sin\Psi + Y_{ij}\cos\Psi$$

связывающих X_{Oij}, Y_{Oij} с координатами X_{ij}, Y_{ij} точек O_{ij} в системе C_0xy:

$$O_{11} = (A_1, B), \quad O_{12} = (A_1, -B), \quad O_{21} = (-A_2, B), \quad O_{22} = (-A_2, -B)$$

дает

$$\begin{aligned} N^1 &= -\frac{\cos\Psi}{A_1^2 + A_2^2}\left(\frac{LH}{R} + \frac{1}{2}F_x(H_a - H)\operatorname{sgn}(H_a - H)\right) \\ N^2 &= -\frac{\sin\Psi}{A_1^2 + A_2^2}\left(\frac{LH}{R} + \frac{1}{2}F_x(H_a - H)\operatorname{sgn}(H_a - H)\right) \end{aligned} \tag{2.2.28}$$

В случае (2.2.25) вместо (2.2.26) можно рассматривать (2.2.24).

При выполнении (2.2.24) из (2.2.7), (2.2.9), одиннадцатого и двенадцатого равенств (2.2.23) следуют соотношения для относительных проскальзываний задних колес в продольном направлении и их угловых скоростей

$$\varepsilon_{x21} = \varepsilon_{x22}, \quad \Omega_{21} = \Omega_{22} \tag{2.2.29}$$

Первые уравнения (2.2.1) и (2.2.5) с учетом (2.2.7), первого равенства (2.2.11), двух последних соотношений (2.2.23) и (2.2.24) дают шесть значащих соотношений

$$0 = 2P_{x2j} - F_x(V_x), \quad -P_{x2j}R + nM(\Omega, \eta)/2 = 0 \tag{2.2.30}$$

$$P_{x2j} = -\kappa_0 N_2 \frac{\varepsilon_{x2j}}{\varepsilon}, \quad \varepsilon_{x2j} = \frac{U_{x2j}}{\Omega_{2j}R}, \quad U_{x2j} = V_x - \Omega_{2j}R, \quad \Omega = n\Omega_{2j} \quad (j = 1, 2)$$

связывающие пять неизвестных переменных величин V_x, P_{x2j}, ε_{x2j}, Ω, Ω_{2j} и параметр η, где $F_x(V_x)$ вычисляется из (2.2.6). Тем самым эти переменные и параметр зависимы. Зафиксировав

$$V_x = V_0 = \text{const} \tag{2.2.31}$$

получим

$$P_{x2j} = \frac{F_x(V_0)}{2}, \quad \varepsilon_{x2j} = -\frac{\varepsilon F_x(V_0)}{2\kappa_0 N_2} = \varepsilon_0, \quad \Omega_{2j} = \frac{V_0}{R(1-\varepsilon_0)} = \Omega_2$$
$$\Omega = n\Omega_2 = \Omega_0, \quad M(\Omega_0, \eta) = \frac{1}{n} F_x(V_0) R \quad (j = 1, 2) \tag{2.2.32}$$

Последнее равенство (2.2.32) позволяет найти значение параметра

$$\eta = \eta_0 \tag{2.2.33}$$

отвечающего стационарному движению (2.2.23)–(2.2.29), (2.2.32), (2.2.33). Это движение асимптотически устойчиво [48] в силу системы (2.2.1) – (2.2.12), (2.2.16), (2.2.17). Значение η_0 из (2.2.33) отвечает ветви семейства графиков $M(\Omega, \eta)$, проходящей через точку $(\Omega_0, F_x(V_0)R/n)$ (рис. 2.2). В соответствии с третьим соотношением (2.2.30) и вторым равенством (2.2.32) значение ε_0 может быть найдено графически как абсцисса точки пересечения графика $P_{x2j} = -\kappa_0 N_2 \varepsilon_{x2j}/\varepsilon$ $(j = 2)$ с горизонтальной прямой $P_{x2j} = F_x(V_0)/2$ (рис. 2.4, кривая *1*).

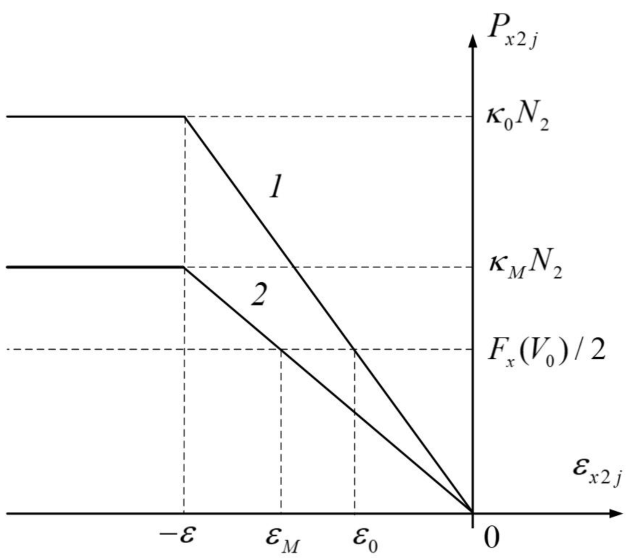


Рис. 2.4. Отыскание относительных проскальзываний $\varepsilon_{x2j} = \varepsilon_0$ задних колес в продольном направлении на этапе стационарного движения и соответствующего относительного проскальзывания $\varepsilon_{x22} = \varepsilon_M$ правого заднего колеса в момент попадания на участок с меньшим коэффициентом трения

Перейдем к анализу динамики аппарата в каждом из рассматриваемых случаев движения на «миксте», выбирая (если это специально не оговорено) в качестве начальных условий соответствующие значения переменных для предыдущего этапа стационарного движения. В рамках ограничений (2.2.20), (2.2.25) будем считать условие (2.2.24) выполненным и при изучении поперечной и угловой динамики корпуса аппарата, то есть на временах $T \sim T_2$. (Возможность использования условия (2.2.24) можно обосновать и при помощи методов разделения движений [48], если рассматривать аппараты, для которых характерное время $\tilde{T}$ упругих колебаний корпуса на подвеске, как и для многих автомобилей, удовлетворяет неравенству $T_2 \ll \tilde{T} \lesssim T_1$.)

2.3 Модель выравнивания контактных сил на «миксте» и оценка угловой скорости корпуса. Все колеса сохраняют сцепление с опорной плоскостью

Рассмотрим случай, когда динамический процесс выравнивания касательных составляющих контактных сил на задних колесах аппарата не вызывает потерю сцепления его колес с опорной плоскостью. Будем проводить исследование этого процесса, выбирая в качестве начальных условий соответствующие значения переменных для предыдущего этапа стационарного движения (2.2.23)–(2.2.29), (2.2.32), (2.2.33). В частности, поперечная скорость точки контакта колеса с опорной плоскостью принимается равной нулю. Тем самым в момент попадания правого заднего колеса на участок с меньшим коэффициентом трения выражениями для составляющих контактной силы и микропроскальзывания на этом колесе служат

$$P_{x22} = -\kappa_M N_2 \frac{\varepsilon_{x22}}{\varepsilon}, \quad P_{y22} = 0, \quad \varepsilon_{x22} = \frac{U_{x22}}{\Omega_2 R} = -\frac{\varepsilon F_x(V_0)}{2\kappa_M N_2} = \varepsilon_M, \quad \varepsilon_{y22} = 0 \qquad (2.3.1)$$

откуда в силу четвертого равенства (2.2.7) и второго и третьего равенств (2.2.32) получаем, что продольная составляющая U_{x22} скорости точки контакта правого заднего колеса мгновенно изменяет значение с U_{x22_0} на U_{x22_M}, где

$$U_{x22_0} = \varepsilon_0 \Omega_2 R, \quad U_{x22_M} = \varepsilon_M \Omega_2 R \qquad (2.3.2)$$

На основании (2.2.14) для $i, j = 2$ и (2.3.1) условие (2.2.13) сохранения сцепления правого заднего колеса с опорной плоскостью при попадании на участок с меньшим коэффициентом трения имеет вид

$$\frac{F_x(V_0)}{2} < \kappa_M N_2 \qquad (2.3.3)$$

При этом, согласно (2.2.19), (2.2.14) для $i = 2$, $j = 1$ и первому выражению (2.2.32) для $j = 1$, будет верно и условие

$$\frac{F_x(V_0)}{2} < \kappa_0 N_2 \qquad (2.3.4)$$

отсутствия скольжения левого заднего колеса.

Значение ε_M может быть найдено как абсцисса точки пересечения графика

$P_{x2j} = -\kappa_M N_2 \varepsilon_{x2j}/\varepsilon$ $(j = 2)$ с горизонтальной прямой $P_{x2j} = F_x(V_0)/2$ (рис. 2.4, кривая *2*).

Изучим движение аппарата после попадания на «микст» с применением асимптотических методов разделения движений. Для этого приведем систему (2.2.1) – (2.2.12), (2.2.16) – (2.2.17) относительно исходного, избыточного, набора динамических переменных $V_x, V_y, \Omega_z, \Omega_{11}, \Omega_{12}, \Omega_{21}, \Omega_{22}, \Omega$ к сингулярно возмущенной форме [11] (см. Приложение А) с малыми параметрами при производных. В соответствии с методикой фракционного анализа [14, 46] перейдем от этого набора переменных к набору V_x, V_y, Ω_z, U_{x11}, U_{x12}, U_{x21}, U_{x22}, включающему быстрые переменные. (В рассматриваемом случае из исходного набора переменных была предварительно исключена зависимая переменная Ω.) В силу (2.2.9) исключаемые переменные Ω_{ij} и Ω связаны с переменными U_{xij} формулами

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{R}\left(V_x + (-1)^j B\Omega_z - U_{xij}\right) \quad (i, j = 1, 2), \quad \Omega = \frac{n}{2R}(2V_x - U_{x21} - U_{x22}) \tag{2.3.5}$$

После указанных преобразований с учетом упрощающих предположений рассматриваемая система принимает вид

$$\begin{aligned}
&M\dot{V}_x = F_1, \quad M\dot{V}_y = F_2, \quad I_z\dot{\Omega}_z = F_3 \\
&\dot{U}_{x11} = \frac{1}{M}F_1 - \frac{B}{I_z}F_3 - \frac{R}{I_1}F_4, \quad \dot{U}_{x12} = \frac{1}{M}F_1 + \frac{B}{I_z}F_3 - \frac{R}{I_1}F_5 \\
&\dot{U}_{x21} = \frac{1}{M}F_1 - \frac{B}{I_z}F_3 - \frac{R}{I_2}F_6, \quad \dot{U}_{x22} = \frac{1}{M}F_1 + \frac{B}{I_z}F_3 - \frac{R}{I_2}F_7 \\
&F_1 = P_{x11} + P_{x12} + P_{x21} + P_{x22} - F_x(V_x) \\
&F_2 = P_{y11} + P_{y12} + P_{y21} + P_{y22} - MV_x\Omega_z \\
&F_3 = (-P_{x11} + P_{x12} - P_{x21} + P_{x22})B + (P_{y11} + P_{y12})A_1 - (P_{y21} + P_{y22})A_2 + \\
&+ \textstyle\sum_{i,j=1}^{2} M_{Sij} \\
&F_4 = -P_{x11}, \quad F_5 = -P_{x12}, \quad F_6 = -P_{x21} + L, \quad F_7 = -P_{x22} + L
\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

Согласно первой формуле (2.3.5) в новом наборе переменных выражения (2.2.7) для касательных составляющих контактных сил и стабилизирующих моментов записываются в форме

$$P_{x1j} = -\kappa_0 N_1 \frac{U_{x1j}}{\varepsilon(V_x + (-1)^j B\Omega_z - U_{x1j})}$$

$$P_{y1j} = -\kappa_0 N_1 \frac{U_{y1j}}{\varepsilon(V_x + (-1)^j B\Omega_z - U_{x1j})}$$

$$P_{x21} = -\kappa_0 N_2 \frac{U_{x21}}{\varepsilon(V_x - B\Omega_z - U_{x21})}, \quad P_{y21} = -\kappa_0 N_2 \frac{U_{y21}}{\varepsilon(V_x - B\Omega_z - U_{x21})}$$

$$P_{x22} = -\kappa_M N_2 \frac{U_{x22}}{\varepsilon(V_x + B\Omega_z - U_{x22})}, \quad P_{y22} = -\kappa_M N_2 \frac{U_{y22}}{\varepsilon(V_x + B\Omega_z - U_{x22})} \tag{2.3.7}$$

$$M_{S1j} = -\kappa_{z0} N_1 r \chi \left(\left| \frac{U_{y1j}}{V_x + (-1)^j B\Omega_z - U_{x1j}} \right| \right) \operatorname{sgn} \left(\frac{U_{y1j}}{V_x + (-1)^j B\Omega_z - U_{x1j}} \right)$$

$$M_{S21} = -\kappa_{z0} N_2 r \chi \left(\left| \frac{U_{y21}}{V_x - B\Omega_z - U_{x21}} \right| \right) \operatorname{sgn} \left(\frac{U_{y21}}{V_x - B\Omega_z - U_{x21}} \right)$$

$$M_{S22} = -\kappa_{zM} N_2 r \chi \left(\left| \frac{U_{y22}}{V_x + B\Omega_z - U_{x22}} \right| \right) \operatorname{sgn} \left(\frac{U_{y22}}{V_x + B\Omega_z - U_{x22}} \right)$$

Выражения для U_{yij} $(i, j = 1, 2)$ вычисляются из (2.2.9), выражения для N_j — из (2.2.24), для $F_x(V_x)$ — из (2.2.6), для L — из (2.2.18), где Ω задается последней формулой (2.3.5).

Проведем нормализацию [14, 46] системы (2.3.6)–(2.3.7), заменив переменные и время их безразмерными аналогами

$$T = T_* t, \quad V_x = V_{x*} v_x, \quad V_y = V_{y*} v_y, \quad \Omega_z = \Omega_{z*} \omega_z, \quad U_{xij} = U_{xij*} u_{xij}$$

$$U_{yij} = U_{yij*} u_{yij}, \quad P_{xij} = P_{xij*} p_{xij}, \quad P_{yij} = P_{yij*} p_{yij}, \quad N_j = N_{j*} n_j \quad (i, j = 1, 2)$$

$$M_{Sij} = M_{Sij*} m_{Sij}, \quad L = L_* l, \quad M(\Omega, \eta) = M_* m(\omega, \eta)$$

$$\Omega = \Omega_* \omega, \quad F_x = F_{x*} f_x, \quad F_k = F_{k*} f_k \quad (k = 1, \ldots, 7) \tag{2.3.8}$$

Нижним индексом $*$ обозначены характерные значения соответствующих переменных.

Класс движения аппарата [14, 46] определяется условиями (2.2.2), первым неравенством (2.2.11) и ограничениями (2.2.20), (2.2.21). Будем рассматривать μ, ε, ε_1 и ε_m в качестве малых параметров, которые далее будут устремлены к нулю, и выберем характерные значения (2.3.8) следующим образом

$$
\begin{aligned}
&V_{y*} = (A_1 + A_2)\Omega_{z*} = U_{xij*} = U_{yij*} = \varepsilon V_{x*}, \quad \Omega_* = MgR/K_D = V_{x*}/R \\
&P_{xij*} = P_{yij*} = N_{j*} = F_{x*} = Mg, \quad M_{Sij*} = Mgr, \quad L_* = M_* = MgR \\
&F_{1*} = F_{2*} = Mg, \quad F_{3*} = Mg(A_1 + A_2), \quad F_{4*} = F_{5*} = F_{6*} = F_{7*} = MgR
\end{aligned}
\tag{2.3.9}
$$

и ограничимся характеристиками двигателя, для которых

$$K_D \ \sim \ MgR^2/\sqrt{g(A_1 + A_2)}$$

то есть $V_{x*} \sim \sqrt{g(A_1 + A_2)}$.

Рассматривая начальный этап заноса аппарата после попадания на «микст», ограниченный характерными временами $T \sim T_2$ изменения переменных V_y и Ω_z, примем $T_* = T_2$. Нормализованным аналогом системы (2.3.6)–(2.3.7) служит сингулярно возмущенная система тихоновского вида [11, 14, 46] (см. Приложение А) с малыми параметрами (2.2.21)

$$
\begin{aligned}
&v_x' = \varepsilon f_1, \quad v_y' = f_2, \quad \omega_z' = \frac{1}{i_z^2} f_3 \\
&\mu u_{x11}' = \mu f_1 - \mu\frac{b}{i_z^2} f_3 - \frac{1}{i_1^2} f_4, \quad \mu u_{x12}' = \mu f_1 + \mu\frac{b}{i_z^2} f_3 - \frac{1}{i_1^2} f_5 \\
&\mu u_{x21}' = \mu f_1 - \mu\frac{b}{i_z^2} f_3 - \frac{1}{i_2^2} f_6, \quad \mu u_{x22}' = \mu f_1 + \mu\frac{b}{i_z^2} f_3 - \frac{1}{i_2^2} f_7
\end{aligned}
\tag{2.3.10}
$$

$$
\begin{aligned}
&f_1 = p_{x11} + p_{x12} + p_{x21} + p_{x22} - f_x(v_x) \\
&f_2 = p_{y11} + p_{y12} + p_{y21} + p_{y22} - \varepsilon v_x \omega_z \\
&f_3 = (-p_{x11} + p_{x12} - p_{x21} + p_{x22})b + (p_{y11} + p_{y12})a_1 - (p_{y21} + p_{y22})a_2 + \varepsilon_1 c \textstyle\sum_{i,j=1}^2 m_{Sij} \\
&f_4 = -p_{x11}, \quad f_5 = -p_{x12}, \quad f_6 = -p_{x21} + l, \quad f_7 = -p_{x22} + l, \quad f_x(v_x) = \frac{1}{2}\rho S c_x \frac{A_1 + A_2}{M} v_x^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&a_1 = \frac{A_1}{A_1 + A_2}, \quad a_2 = \frac{A_2}{A_1 + A_2}, \quad b = \frac{B}{A_1 + A_2}, \quad c = \frac{R}{A_1 + A_2} \\
&i_z = \frac{\rho_z}{A_1 + A_2}, \quad i_1 = \frac{\rho_1}{R}, \quad i_2 = \frac{\rho_2}{R}, \quad i_3^2 = \frac{J}{I_2}
\end{aligned}
\tag{2.3.11}
$$

$$p_{x1j} = -\kappa_0 n_1 \frac{u_{x1j}}{v_x + (-1)^j \varepsilon b\omega_z - \varepsilon u_{x1j}}, \quad p_{y1j} = -\kappa_0 n_1 \frac{u_{y1j}}{v_x + (-1)^j \varepsilon b\omega_z - \varepsilon u_{x11}}$$

$$p_{x21} = -\kappa_0 n_2 \frac{u_{x21}}{v_x - \varepsilon b\omega_z - \varepsilon u_{x21}}, \quad p_{y21} = -\kappa_0 n_2 \frac{u_{y21}}{v_x - \varepsilon b\omega_z - \varepsilon u_{x21}}$$

$$p_{x22} = -\kappa_M n_2 \frac{u_{x22}}{v_x + \varepsilon b\omega_z - \varepsilon u_{x22}}, \quad p_{y22} = -\kappa_M n_2 \frac{u_{y22}}{v_x + \varepsilon b\omega_z - \varepsilon u_{x22}}$$

$$\begin{aligned}
&m_{S1j} = -\kappa_{z0} n_1 \zeta \frac{u_{y1j}}{\omega_{1j}} \operatorname{sgn}(\varepsilon_{y1j}) \quad \text{при } |\varepsilon_{y1j}| < \varepsilon_m \\
&m_{S21} = -\kappa_{z0} n_2 \zeta \frac{u_{y21}}{\omega_{21}} \operatorname{sgn}(\varepsilon_{y21}) \quad \text{при } |\varepsilon_{y21}| < \varepsilon_m \\
&m_{S22} = -\kappa_{zM} n_2 \zeta \frac{u_{y22}}{\omega_{22}} \operatorname{sgn}(\varepsilon_{y22}) \quad \text{при } |\varepsilon_{y22}| < \varepsilon_m \\
&m_{S1j} = \kappa_{z0} n_1 \frac{1}{\nu} \left(\frac{u_{y1j}}{\omega_{1j}} - 1 \right) \operatorname{sgn}(\varepsilon_{y1j}) \quad \text{при } \varepsilon_m \le |\varepsilon_{y1j}| < \varepsilon \\
&m_{S21} = \kappa_{z0} n_2 \frac{1}{\nu} \left(\frac{u_{y21}}{\omega_{21}} - 1 \right) \operatorname{sgn}(\varepsilon_{y21}) \quad \text{при } \varepsilon_m \le |\varepsilon_{y21}| < \varepsilon \\
&m_{S22} = \kappa_{zM} n_2 \frac{1}{\nu} \left(\frac{u_{y22}}{\omega_{22}} - 1 \right) \operatorname{sgn}(\varepsilon_{y22}) \quad \text{при } \varepsilon_m \le |\varepsilon_{y22}| < \varepsilon \\
&n_1 = \frac{a_2}{2}, \quad n_2 = \frac{a_1}{2}
\end{aligned} \tag{2.3.12}$$

$$\begin{aligned}
&l = \frac{1}{\dfrac{2}{n} + n i_3^2} \left[m(\omega, \eta) + \frac{n}{2} i_3^2 (p_{x21} + p_{x22}) \right], \quad \omega = \frac{n}{2}(\omega_{21} + \omega_{22}) \\
&\omega_{ij} = v_x + (-1)^j \varepsilon b\omega_z - \varepsilon u_{xij}, \quad \varepsilon_{yij} = \frac{\varepsilon u_{yij}}{\omega_{ij}}
\end{aligned} \tag{2.3.13}$$

$$u_{yij} = v_y - (-1)^i a_i \omega_z \quad (i, j = 1, 2), \quad \zeta = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_m}, \quad \nu = \frac{\varepsilon - \varepsilon_m}{\varepsilon} = 1 - \frac{1}{\zeta}$$

Штрихом обозначены производные по безразмерному времени t.

Согласно (2.2.21) имеем $\zeta \sim 1$. Далее рассматриваются значения $\nu \sim \varepsilon \ll 1$ или $\nu \lesssim 1$, т.е. $\varepsilon_1/\nu \sim 1$ или $\varepsilon_1/\nu \sim \varepsilon$.

С учетом (2.3.9) нормализованные аналоги начальных условий для переменных V_x, V_y, Ω_z, U_{x11}, U_{x12}, U_{x21} в момент попадания на «микст», которые равны своим значениям на этапе стационарного движения (2.2.23)–(2.2.29), (2.2.32), (2.2.33), и нормализованные аналоги начальных значений переменных U_{x21} и U_{x22}, совпадающих со значениями U_{x21_0} и U_{x22_M} из (2.3.2), принимают вид

$$\begin{aligned}
&v_x(0) = v_0, \quad v_0 = V_0/V_{x*}, \quad v_y(0) = 0, \quad \omega_z(0) = 0, \quad u_{x11}(0) = u_{x12}(0) = 0 \\
&u_{x21}(0) = \varepsilon_0 \omega_2/\varepsilon, \quad u_{x22}(0) = \varepsilon_M \omega_2/\varepsilon, \quad \omega_2 = \Omega_2 R/V_{x*}
\end{aligned} \tag{2.3.14}$$

где V_0, Ω_2 и V_{x*} были определены при записи (2.2.32) и (2.3.9).

Проведя вырождение системы (2.3.10)–(2.3.14) по малому параметру μ (это отвечает пренебрежению процессами изменения переменных U_{xij} и Ω) и, считая параметры ε и ε_1 конечными, получим систему уравнений

$$\begin{gathered} v_x' = \varepsilon f_1, \quad v_y' = f_2, \quad \omega_z' = \frac{1}{i_z^2} f_3 \\ p_{x1j} = 0, \quad p_{x2j} = l = \frac{n}{2} m(\omega, \eta) \quad (j = 1, 2) \end{gathered} \tag{2.3.15}$$

где выражения для правых частей дифференциальных уравнений, контактных сил, стабилизирующих моментов и момента, приложенного к задним колесам аппарата, вычисляются при помощи формул (2.3.12), (2.3.13), с учетом которых корнем первых двух конечных уравнений (2.3.15) служит

$$u_{x11} = u_{x12} = 0 \tag{2.3.16}$$

Равенства (2.3.16) отвечают режиму движения передних колес аппарата без проскальзывания относительно опорной плоскости в продольном направлении.

Получаемое из двух последних конечных уравнений системы (2.3.15) условие равенства контактных сил на колесах ведущей оси обусловлено тем, что на характерных временах $T \sim T_2$ процесс изменения переменных U_{x21} и U_{x22}, происходящий на временах $T \sim T_4 \ll T_2$, уже завершен, то есть контактные силы уравновешиваются дифференциалом, несмотря на разные коэффициенты κ_0 и κ_M кулонова трения скольжения (подробнее протекание этого процесса обсуждается ниже). Перейдем к отысканию корня указанных уравнений. Из условия $p_{x21} = p_{x22}$ с учетом (2.3.12) получаем равенство

$$u_{x21} = \frac{\kappa_M}{\kappa_0} u_{x22} + O(\varepsilon) \tag{2.3.17}$$

согласно которому выражение для ω может быть записано в виде

$$\omega = n v_x - \varepsilon \frac{n}{2} \left(\frac{\kappa_M}{\kappa_0} + 1 \right) u_{x22} + O(\varepsilon^2) \tag{2.3.18}$$

Подставив его в выражение для $m(\omega, \eta)$ и проведя разложение в ряд Тейлора по ε, получим

$$m(\omega, \eta) = m(n v_x, \eta) - \varepsilon \frac{n}{2} \left(\frac{\kappa_M}{\kappa_0} + 1 \right) u_{x22} \left. \frac{\partial m}{\partial \omega} \right|_{\omega = n v_x} + O(\varepsilon^2) \tag{2.3.19}$$

откуда с учетом выражений для l и p_{x2j} из (2.3.12), двух последних конечных уравнений (2.3.15) и равенства (2.3.17) следуют искомые выражения

$$u_{x21} = \frac{-v_x n m(n v_x, \eta)}{2 \kappa_0 n_2} + O(\varepsilon), \quad u_{x22} = \frac{-v_x n m(n v_x, \eta)}{2 \kappa_M n_2} + O(\varepsilon) \tag{2.3.20}$$

Для доказательства близости решений исходной и вырожденной систем (2.3.10)–(2.3.14) и (2.3.15), как и в разделах 1.4, 1.5, воспользуемся теорией Тихонова-Васильевой [11–14, 23, 46] (см. Приложение А). Исследуем изолированность, асимптотическую устойчивость по первому приближению и область влияния точек покоя присоединенной системы, получаемой из (2.3.10) путем замены времени $\tau = t/\mu$ и последующего приравнивания слагаемых порядка μ к нулю

$$\frac{du_{x1j}}{d\tau} = \frac{1}{i_1^2} p_{x1j}, \quad \frac{du_{x2j}}{d\tau} = \frac{1}{i_2^2} (p_{x2j} - l) \quad (j = 1, 2) \tag{2.3.21}$$

Значения правых частей вычисляются из (2.3.12), ω определяется из последнего уравнения (2.3.15). Система (2.3.21) описывает движение аппарата на «малых» временах $T \sim T_4$. Медленные переменные v_x, v_y и ω_z, размерные аналоги которых изменяются на временах T_1 и T_2, полагаются постоянными. Считая характерное время реакции водителя существенно превосходящим T_4, значение η в (2.3.21) полагаем равной ее значению (2.2.33) в момент попадания на «микст» координаты (2.3.16), (2.3.20) точки покоя присоединенной системы находятся из конечных уравнений (2.3.15).

Исследуем ее асимптотическую устойчивость по первому приближению. Проведя линеаризацию системы (2.3.21) около точки покоя и отбрасывая члены $O(\varepsilon)$, получим

$$\begin{gathered}
\frac{d\Delta u_{x11}}{d\tau} = -\kappa_0 n_1 \frac{\Delta u_{x11}}{v_x}, \quad \frac{d\Delta u_{x12}}{d\tau} = -\kappa_0 n_1 \frac{\Delta u_{x12}}{v_x} \\
\frac{d\Delta u_{x21}}{d\tau} = \frac{n_2}{2 i_2^2 v_x (2 + n^2 i_3^2)} \Big(-\Delta u_{x21} (4 + n^2 i_3^2) \kappa_0 + \Delta u_{x22} n^2 i_3^2 \kappa_M \Big) \\
\frac{d\Delta u_{x22}}{d\tau} = \frac{n_2}{2 i_2^2 v_x (2 + n^2 i_3^2)} \Big(\Delta u_{x21} n^2 i_3^2 \kappa_0 - \Delta u_{x22} (4 + n^2 i_3^2) \kappa_M \Big)
\end{gathered} \tag{2.3.22}$$

Через Δu_{xij} $(i, j = 1, 2)$ обозначены малые отклонения переменных u_{xij} от точки покоя. Первые два уравнения системы (2.3.22) не связаны с последними и могут быть исследованы отдельно. Поскольку множитель при переменных Δu_{x1j} отрицателен, точка покоя (2.3.16) асимптотически устойчива в силу системы (2.3.22). Чтобы исследовать устойчивость системы двух последних уравнений (2.3.22) по переменным u_{x2j}, составим ее характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} \dfrac{-\kappa_0 n_2 (4 + n^2 i_3^2)}{2 i_2^2 v_x (2 + n^2 i_3^2)} - \lambda & \dfrac{n_2 n^2 i_3^2 \kappa_M}{2 i_2^2 v_x (2 + n^2 i_3^2)} \\[3ex] \dfrac{n_2 n^2 i_3^2 \kappa_0}{2 i_2^2 v_x (2 + n^2 i_3^2)} & \dfrac{-\kappa_M n_2 (4 + n^2 i_3^2)}{2 i_2^2 v_x (2 + n^2 i_3^2)} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{2.3.23}$$

которое после несложных преобразований принимает вид

$$\lambda^2 + \frac{(4 + n^2 i_3^2)(\kappa_0 + \kappa_M) n_2}{2 i_2^2 v_x (2 + n^2 i_3^2)} \lambda + \frac{\kappa_0 \kappa_M n_2^2}{2 i_2^4 v_x^2 (2 + n^2 i_3^2)} = 0 \tag{2.3.24}$$

В силу (2.2.19) дискриминант уравнения (2.3.24) с положительными коэффициентами удовлетворяет неравенству

$$D = \frac{[8(2+n^2 i_3^2)(\kappa_0 - \kappa_M)^2 + n^4 i^4 (\kappa_0 + \kappa_M)^2] n_2^2}{4 i_2^4 v_x^2 (2+n^2 i_3^2)^2} > 0$$

следовательно, оно имеет два различных вещественных отрицательных корня λ_1, λ_2. Таким образом, точка, координаты которой определяются первыми слагаемыми правых частей (2.3.20), также асимптотически устойчива по первому приближению и является устойчивым узлом на фазовой плоскости u_{x21}, u_{x22}.

Исследование системы (2.3.22) показало, что, в соответствии с теоремой Андронова-Понтрягина [2, 4], система (2.3.21) грубая: топологическая структура ее фазового портрета устойчива и не изменяется при малых изменениях правых частей. Таким образом, точка покоя (2.3.16), (2.3.20) асимптотически устойчива по первому приближению в силу аналога системы (2.3.22), учитывающего члены $O(\varepsilon)$.

Выясним ее область влияния, образованную совокупностью начальных значений переменных u_{xij}, для которых решение системы (2.3.21) стремится к точке покоя (2.3.16), (2.3.20).

Первые два независимые скалярные уравнения (2.3.21) допускают качественное исследование методами [11]. Положению равновесия (2.3.16) по переменным u_{x1j} на плоскости τ, u_{x1j} отвечает горизонтальная прямая $u_{x1j} = 0$. При значениях $u_{x1j}(0) > 0$ решение $u_{x1j}(\tau)$ соответствующего уравнения (2.3.21) убывает, при $u_{x1j}(0) < 0$ — возрастает, асимптотически приближаясь к положению равновесия (2.3.16) (рис. 2.5). (В силу теоремы существования и единственности решения $u_{x1j}(\tau)$ для начальных условий $u_{x1j}(0) \neq 0$ не могут пересечь отвечающую (2.3.16) прямую $u_{x1j} = 0$.) Следовательно, область влияния точки покоя по переменным u_{x1j} не ограничена.

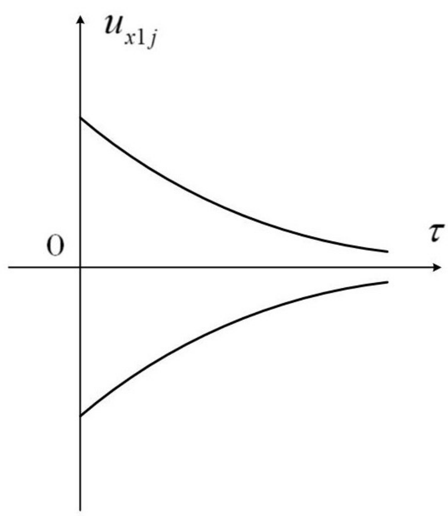


Рис. 2.5. Область влияния положения равновесия (2.3.16) первых двух независимых скалярных уравнений (2.3.21)

В соответствии с (2.3.12) и (2.3.13) при $\varepsilon \to 0$ система двух последних уравнений (2.3.21) близка к линейной системе с постоянными коэффициентами. Тогда, если ее положение равновесия асимптотически устойчиво по первому приближению (это верно в случае положительности коэффициентов ее характеристического уравнения), то оно имеет неограниченную область влияния. Поскольку характеристическое уравнение (2.3.24), отвечающее $\varepsilon = 0$, удовлетворяет этому требованию, при $\varepsilon \to 0$ оно верно и для точки покоя (2.3.20) системы (2.3.21), то есть она также имеет неограниченную область влияния.

В соответствии с теоремой Тихонова-Васильевой [11,12,14,23,46] (см. Приложение А) рассогласование между решениями исходной системы (2.3.10) – (2.3.14) и соответствующей вырожденной системы (2.3.15) оценивается величиной $O(\mu)$ на конечном интервале времени $t \sim 1$, отвечающем интервалу $T \sim T_2$ размерного времени T. Для переменных u_{xij} эта оценка верна вне пограничного слоя ширины $O(-\mu \ln \mu)$.

Проведенное исследование показало, что (2.3.21) можно рассматривать как модель переходного процесса изменения продольных составляющих скоростей точек контакта от значений (2.3.14) до значений, близких к (2.3.16) и (2.3.20), и продольных составляющих контактных сил от соответствующих нормализованных значений (2.2.23), (2.2.32) до близких друг другу значений, определяемых конечными уравнениями вырожденной системы. Тем самым на уровне точности системы (2.3.15) поперечное движение аппарата, определяемое переменными v_y и ω_z, не возмущается. Модель влияния переходного процесса на динамику аппарата можно построить при учете факторов следующего, первого по μ, порядка [11, 14, 46, 48].

Согласно алгоритму А.Б. Васильевой [11], при составлении приближенной модели, описывающей решение сингулярно возмущенной системы тихоновского вида на уровне точности $O(\mu)$, начальные условия по медленным переменным следует скорректировать членами порядка малого параметра. При вычислении начальных условий для приближенной модели системы (2.3.10)–(2.3.14) по медленным переменным v_x, v_y и ω_z вместо (2.3.14) следует использовать формулы

$$v_x(0) = v_0 + \mu v_x^{(1)}(0), \quad v_y(0) = \mu v_y^{(1)}(0), \quad \omega_z(0) = \mu \omega_z^{(1)}(0) \tag{2.3.25}$$

$$v_x^{(1)}(0) = 0, \quad v_y^{(1)}(0) = 0, \quad \omega_z^{(1)}(0) = \frac{1}{i_z^2} \int\limits_0^\infty (-p_{x11} + p_{x12} - p_{x21} + p_{x22}) b \, d\tau \tag{2.3.26}$$

где интеграл берется по траекториям присоединенной системы (2.3.21); значение $\tau = 0$ отвечает моменту попадания на «микст» (началу переходного процесса), $\tau = \infty$ — моменту завершения переходного процесса. Механический смысл интеграла в (2.3.26) — суммарный импульс момента, приложенного к корпусу аппарата по оси z за время $T \sim T_4$. Поскольку передние колеса аппарата на протяжении переходного процесса находятся в одинаковых условиях, справедливо равенство $p_{x11} = p_{x12}$, то есть на этот импульс момента должны влиять только продольные составляющие контактных сил на задних колесах. Это нетрудно заметить и при помощи формул (2.3.12), (2.3.15) и (2.3.21), с учетом которых последнее выражение (2.3.26) и подынтегральное выражение принимают вид

$$\omega_z^{(1)}(0) = \frac{1}{i_z^2} \int\limits_0^\infty (p_{x22} - p_{x21}) b \, d\tau, \quad p_{x22} - p_{x21} = i_2^2 \frac{d}{d\tau}(u_{x22} - u_{x21}) \tag{2.3.27}$$

откуда

$$\mu \omega_z^{(1)}(0) = \mu \frac{i_2^2 b}{i_z^2} [u_{x22}(\infty) - u_{x21}(\infty) - (u_{x22}(0) - u_{x21}(0))] \tag{2.3.28}$$

Согласно выражениям (2.2.33), (2.3.14), (2.3.20) значения продольных составляющих скоростей точек контакта задних колес в начале и в конце переходного процесса записываются в виде

$$
\begin{aligned}
&u_{x21}(\infty) = \frac{-v_x nm(nv_x, \eta)}{2\kappa_0 n_2} + O(\varepsilon), \quad u_{x22}(\infty) = \frac{-v_x nm(nv_x, \eta)}{2\kappa_M n_2} + O(\varepsilon) \\
&v_x = v_0, \quad \eta = \eta_0, \quad u_{x21}(0) = \frac{\varepsilon_0 \omega_2}{\varepsilon}, \quad u_{2x2}(0) = \frac{\varepsilon_M \omega_2}{\varepsilon}
\end{aligned}
\tag{2.3.29}
$$

После пренебрежения слагаемыми $O(\varepsilon)$ окончательной формой последнего выражения (2.3.25), (2.3.28) служит

$$
\mu\omega_z^{(1)}(0) = \mu \frac{i_2^2 b}{i_z^2} \left[\frac{v_0 nm(nv_0, \eta_0)(\kappa_M - \kappa_0)}{2\kappa_0 \kappa_M n_2} + \frac{(\varepsilon_0 - \varepsilon_M)\omega_2}{\varepsilon} \right] \tag{2.3.30}
$$

которая в размерных переменных имеет вид

$$
\mu\Omega_z^{(1)}(0) = \mu \left(\frac{\rho_2}{\rho_z} \right)^2 \frac{B}{R} = \frac{I_2 B}{I_z R^2} \left[\frac{\varepsilon n V_0 M(nV_0, \eta_0)(\kappa_M - \kappa_0)}{2RN_2 \kappa_0 \kappa_M} + (\varepsilon_0 - \varepsilon_M)\Omega_2 R \right] \tag{2.3.31}
$$

где κ_0, κ_M, N_2, V_0, ε_0, Ω_2, η_0, ε_M находятся из (2.2.19), (2.2.24), (2.2.32), (2.2.33), (2.3.1). Поправка, полученная в работе [48] при учете динамики двигателя, трансмиссии и колес аппарата, имеет вид (в [48] она обозначена $\Omega_z^{(1)}(0)$)

$$
\mu\Omega_z^{(1)}(0) = \frac{I_2 B}{I_z R} \left[\Omega_{21}(\infty) - \Omega_{22}(\infty) \right] \tag{2.3.32}
$$

Сравним выражения (2.3.31) и (2.3.32). Из (2.3.5) имеем

$$
\begin{aligned}
&\Omega_{21} = \frac{1}{R} \left(V_x - B\Omega_z - U_{x21} \right), \quad \Omega_{22} = \frac{1}{R} \left(V_x + B\Omega_z - U_{x22} \right) \\
&\Omega_{21} - \Omega_{22} = \frac{1}{R} \left(-2B\Omega_z + U_{x22} - U_{x21} \right)
\end{aligned}
\tag{2.3.33}
$$

Следовательно,

$$
\Omega_{21}(\infty) - \Omega_{22}(\infty) = \frac{1}{R} \left(-2B\Omega_z(\infty) + U_{x22}(\infty) - U_{x21}(\infty) \right) = \frac{1}{R} \left(U_{x22}(\infty) - U_{x21}(\infty) \right)
$$

Подстановка последнего равенства в (2.3.32) дает выражение

$$
\mu\Omega_z^{(1)}(0) = \frac{I_2 B}{I_z R} \left[\Omega_{21}(\infty) - \Omega_{22}(\infty) \right] = \tag{2.3.34}
$$

$$
= \frac{I_2 B}{I_z R^2} \left[U_{x21}(\infty) - U_{x22}(\infty) \right] = \frac{I_2 B}{I_z R} \left[\frac{\varepsilon n V_0 M(nV_0, \eta_0)(\kappa_M - \kappa_0)}{2RN_2 \kappa_M \kappa_0} \right]
$$

совпадающее с первым слагаемым правой части выражения (2.3.31). Таким образом, рассогласование между выражениями (2.3.31) и (2.3.32) имеет вид

$$\frac{I_2 B}{I_z R}(\varepsilon_0 - \varepsilon_M)\Omega_2$$

Приведем численные результаты для параметров и динамических характеристик автомобиля, которые, за исключением продольной скорости корпуса, взяты из [48]. Поправка (2.3.32) имеет порядок 10^{-2} рад/с. Оба слагаемых в правой части формулы (2.3.31) имеют одинаковые порядки (10^{-2} рад/с) и разные знаки. Таким образом, поправка к угловой скорости корпуса аппарата, вычисленная по этой формуле, имеет порядок 10^{-3} рад/с. Для других, более легких и быстроходных колесных аппаратов выражение (2.3.31) может быть на порядок больше.

2.4 Модель выравнивания контактных сил на «миксте» и оценка угловой скорости корпуса. Колеса, за исключением правого заднего, сохраняют сцепление с опорной плоскостью

Перейдем к исследованию случая, когда правое заднее колесо аппарата теряет сцепление с опорной плоскостью (начинает скользить) — либо сразу в момент попадания на участок с меньшим коэффициентом трения, либо в ходе динамического процесса выравнивания контактных сил на задних (ведущих) колесах. Остальные колеса аппарата продолжают сохранять сцепление с опорной плоскостью. Согласно (2.3.3), (2.3.4) (2.2.14) для $i = 1$, $j = 1, 2$, а также седьмому и восьмому соотношениям (2.2.23) первая ситуация реализуется при выполнении неравенств (рис. 2.6)

$$\kappa_M N \leq \frac{F_x(V_0)}{2} < \kappa_0 N_2 \tag{2.4.1}$$

Вторая ситуация возникает, если для решения системы (2.3.21) нарушается неравенство (2.2.14) для $i, j = 2$. Будем считать, что это происходит в начале динамического процесса — на временах

$$T \ll T_4 \tag{2.4.2}$$

(постоянные времени изменения составляющих движения аппарата определены в разделе 2.2). Согласно (2.2.13) и (2.2.15) такая ситуация возможна, если в ходе стационарного движения (2.2.23)–(2.2.29), (2.2.32), (2.2.33) значение $\varepsilon_{2j} = \varepsilon_{x2j} = \varepsilon_0$ относительных проскальзываний задних колес удовлетворяет условию $\varepsilon_0 \lesssim \varepsilon$, отвечающему левой окрестности максимума характеристики контактной силы на рис. 2.3 а — колеса находятся на пороге потери сцепления с опорной плоскостью.

Продольная составляющая U_{x22} скорости точки контакта правого заднего колеса теперь изменяется на временах $T \sim T_3$, то есть, в отличие от раздела 2.3, здесь процесс выравнивания контактных сил на колесах задней оси аппарата в первую очередь затрагивает переменные U_{x11}, U_{x12}, U_{x21} и Ω, изменяющиеся на характерных временах $T \sim T_4 \sim T_5$, а остальные переменные, как и ранее, можно считать постоянными, равными своим значениям на этапе стационарного движения (2.2.23)–(2.2.29), (2.2.32), (2.2.33). В отличие от (2.3.1), в момент попадания правого заднего колеса на участок с меньшим коэффициентом трения переменная U_{x22} мгновенно изменяет свое значение с U_{x22_0}, определенного первым равенством (2.3.2), на U_{x22_M} того же знака, $|U_{x22_M}| > |U_{x22_0}|$, для которого справедливо второе неравенство (2.2.11) для $i, j = 2$ (рис. 2.6):

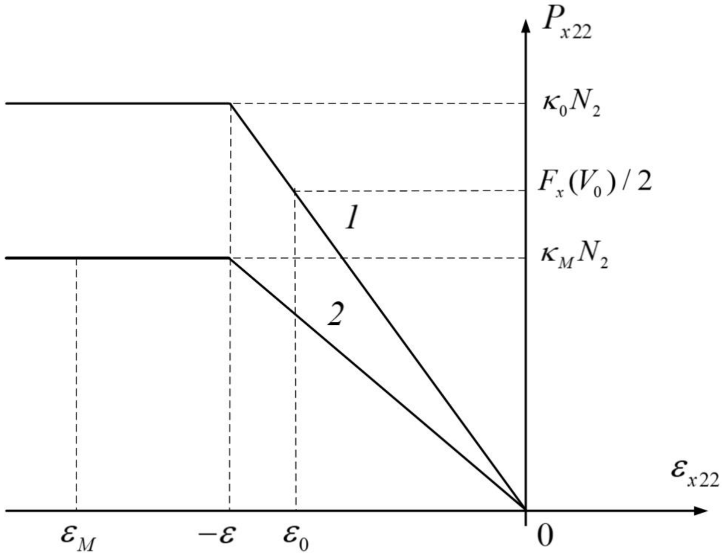


Рис. 2.6. Отыскание относительного проскальзывания правого заднего колеса на этапе стационарного движения и реализация условия (2.4.1), обеспечивающего скольжение этого колеса в момент попадания аппарата на «микст». Соответствующее значение $\varepsilon_{x22} = \varepsilon_M$ относительного проскальзывания находится из (2.4.3)

$$|\varepsilon_{x22}| = |\varepsilon_M| = \left|\frac{U_{x22M}}{\Omega_2 R}\right| > \varepsilon \tag{2.4.3}$$

Выражения для касательных составляющих контактной силы на этом колесе в соответствии с (2.2.9), (2.2.16), (2.2.17), (2.2.23) имеют вид

$$\begin{gathered} P_{x22} = -\kappa_M N_2 \mathrm{sgn} U_{x22} \\ U_{x22} = V_0 - \Omega_2 R, \quad P_{y22} = 0 \end{gathered} \tag{2.4.4}$$

Поскольку, согласно третьему и четвертому равенствам (2.2.30) и первому равенству (2.2.32) в ходе стационарного движения аппарата имеем $U_{x22} < 0$, наиболее вероятно, что последнее неравенство останется справедливым и в момент попадания на «микст». В первой ситуации (2.4.1) начала скольжения правого заднего колеса это верно (см. рис. 2.6), во второй ситуации — обосновано условием (2.4.3).

После перехода к набору переменных V_x, V_y, Ω_z, U_{x11}, U_{x12}, U_{x21}, Ω, включающему быстрые переменные, уравнения динамики аппарата (2.2.1) – (2.2.5) принимают вид

$$
\begin{gathered}
M\dot{V}_x = F_1, \quad M\dot{V}_y = F_2, \quad I_z\dot{\Omega}_z = F_3 \\
\dot{U}_{x11} = \frac{1}{M}F_1 - \frac{B}{I_z}F_3 - \frac{R}{I_1}F_4, \quad \dot{U}_{x12} = \frac{1}{M}F_1 + \frac{B}{I_z}F_3 - \frac{R}{I_1}F_5 \\
\dot{U}_{x21} = \frac{1}{M}F_1 - \frac{B}{I_z}F_3 - \frac{R}{I_2}F_6, \quad J\dot{\Omega} = M(\Omega,\eta) - \frac{2}{n}L
\end{gathered}
\tag{2.4.5}
$$

где F_i $(i = 1\dots7)$ определены в (2.3.6).

Выражения (2.2.7) для $i = 1, j = 1,2$ для случая (2.2.13), а также выражения (2.2.17) для $i,j = 2$, определяющие касательные составляющие контактных сил, стабилизирующих моментов и момента сухого трения верчения записываются в форме

$$
\begin{gathered}
P_{x1j} = -\kappa_0 N_1 \frac{U_{x1j}}{\varepsilon(V_x + (-1)^j B\Omega_z - U_{x1j})}, \quad P_{y1j} = -\kappa_0 N_1 \frac{U_{y1j}}{\varepsilon(V_x + (-1)^j B\Omega_z - U_{x1j})} \\
P_{x21} = -\kappa_0 N_2 \frac{U_{x21}}{\varepsilon(V_x - B\Omega_z - U_{x21})}, \quad P_{y21} = -\kappa_0 N_2 \frac{U_{y21}}{\varepsilon(V_x - B\Omega_z - U_{x21})} \\
P_{x22} = -\kappa_M N_2 \frac{U_{x22}}{\sqrt{U_{x22}^2 + U_{y22}^2} + \beta|\Omega_z|r}, \quad P_{y22} = -\kappa_M N_2 \frac{U_{y22}}{\sqrt{U_{x22}^2 + U_{y22}^2} + \beta|\Omega_z|r} \\
M_{S1j} = -\kappa_{z0} N_1 r \chi\left(\left|\frac{U_{y1j}}{V_x + (-1)^j B\Omega_z - U_{x1j}}\right|\right) \operatorname{sgn}\left(\frac{U_{y1j}}{V_x + (-1)^j B\Omega_z - U_{x1j}}\right) \\
M_{S21} = -\kappa_{z0} N_2 r \chi\left(\left|\frac{U_{y21}}{V_x - B\Omega_z - U_{x21}}\right|\right) \operatorname{sgn}\left(\frac{U_{y21}}{V_x - B\Omega_z - U_{x21}}\right) \\
M_{S22} = -\gamma\kappa_{22} N_2 \frac{\Omega_z r^2}{\alpha\sqrt{U_{x22}^2 + U_{y22}^2} + |\Omega_z|r}
\end{gathered}
\tag{2.4.6}
$$

где U_{yij} $(i,j = 1,2)$ вычисляются из (2.2.9), N_j — из (2.2.24), χ — из (2.2.7), (2.2.12). Выражения для P_{x22}, P_{y22}, M_{S22}, отвечающие модели (2.2.16) сухого трения Кулона для $i,j = 2$, получаются из соответствующих выражений (2.4.6) при α, β, $\gamma = 0$. Из первого равенства (2.2.9) и второго равенства (2.2.18) следуют выражения

$$
\begin{gathered}
\Omega_{ij} = \frac{1}{R}\left(V_x + (-1)^j B\Omega_z - U_{xij}\right) \quad (i = 1, j = 1,2; i = 2, j = 1) \\
U_{x22} = 2V_x - U_{x21} - \frac{n}{2}\Omega R
\end{gathered}
\tag{2.4.7}
$$

Проведем нормализацию [14, 46] этой системы уравнений при помощи замены (2.3.8). Класс движения аппарата, как и для (2.3.6), (2.3.7), определяется условием (2.2.2), первым и вторым неравенствами (2.2.11) для $i = 1,2$, $j = 1$ и для $i,j = 2$

соответственно и ограничениями (2.2.20), (2.2.21). Примем $U_{x22*} = V_{x*}$, остальные характерные значения оставим теми же, что и в (2.3.9). Рассматривая начальный этап заноса аппарата после попадания на «микст», как и в разделе 2.3, примем $T_* = T_2$. Нормализованным аналогом системы (2.4.5), (2.4.6), (2.4.7) служит сингулярно возмущенная система тихоновского вида [11, 14, 23, 46] (см. Приложение A) с малыми параметрами (2.2.21)

$$v'_x = \varepsilon f_1, \quad v'_y = f_2, \quad \omega'_z = \frac{1}{i_z^2} f_3$$

$$\mu u'_{x11} = \mu f_1 - \mu \frac{b}{i_z^2} f_3 - \frac{1}{i_1^2} f_4, \quad \mu u'_{x12} = \mu f_1 + \mu \frac{b}{i_z^2} f_3 - \frac{1}{i_1^2} f_5 \tag{2.4.8}$$

$$\mu u'_{x21} = \mu f_1 - \mu \frac{b}{i_z^2} f_3 - \frac{1}{i_2^2} f_6, \quad \mu i_4^2 \omega' = m(\omega, \eta) - \frac{2}{n} l, \quad i_4^2 = \frac{T_5}{T_4} \cdot \frac{K_D V_{x*}}{MgR^2} \sim 1$$

$$p_{x1j} = -\kappa_0 n_1 \frac{u_{x1j}}{v_x + (-1)^j \varepsilon b \omega_z - \varepsilon u_{x1j}}, \quad p_{y1j} = -\kappa_0 n_1 \frac{u_{y1j}}{v_x + (-1)^j \varepsilon b \omega_z - \varepsilon u_{x11}}$$

$$p_{x21} = -\kappa_0 n_2 \frac{u_{x21}}{v_x - \varepsilon b \omega_z - \varepsilon u_{x21}}, \quad p_{y21} = -\kappa_0 n_2 \frac{u_{y21}}{v_x - \varepsilon b \omega_z - \varepsilon u_{x21}}$$

$$p_{x22} = -\kappa_M n_2 \frac{u_{x22}}{\sqrt{u_{x22}^2 + \varepsilon^2 u_{y22}^2} + \varepsilon \varepsilon_1 c \beta |\omega_z|}, \quad p_{y22} = -\kappa_M n_2 \frac{\varepsilon u_{y22}}{\sqrt{u_{x22}^2 + \varepsilon^2 u_{y22}^2} + \varepsilon \varepsilon_1 c \beta |\omega_z|}$$

$$m_{S1j} = -\kappa_{z0} n_1 \chi \left(\left| \frac{\varepsilon u_{y1j}}{v_x + (-1)^j \varepsilon b \omega_z - \varepsilon u_{x1j}} \right| \right) \operatorname{sgn} \left(\frac{\varepsilon u_{y1j}}{v_x + (-1)^j \varepsilon b \omega_z - \varepsilon u_{x1j}} \right) \tag{2.4.9}$$

$$m_{S21} = -\kappa_{z0} n_2 \chi \left(\left| \frac{\varepsilon u_{y21}}{v_x - \varepsilon b \omega_z - \varepsilon u_{x21}} \right| \right) \operatorname{sgn} \left(\frac{\varepsilon u_{y21}}{v_x - \varepsilon b \omega_z - \varepsilon u_{x21}} \right)$$

$$m_{S22} = -\gamma \kappa_M n_2 \frac{\varepsilon \varepsilon_1 c \omega_z}{\alpha \sqrt{u_{x22}^2 + \varepsilon^2 u_{y22}^2} + \varepsilon \varepsilon_1 c |\omega_z|}$$

$$\varepsilon u_{xij} = v_x + (-1)^j \varepsilon b \omega_z - \omega_{ij}$$

$$\omega_{ij} = v_x + (-1)^j \varepsilon b \omega_z - \varepsilon u_{xij} \quad (i = 1, j = 1, 2; i = 2, j = 1)$$

$$u_{x22} = 2 v_x - \varepsilon u_{x21} - \frac{n}{2} \omega, \quad u_{yij} = v_y - (-1)^i a_i \omega_z \quad (i, j = 1, 2)$$

где f_k $(k = 1 \dots 7)$ и l определены выражениями (2.3.11) и (2.3.13), штрихом обозначены производные по безразмерному времени t. Начальные условия для переменных v_x, v_y, ω_z, u_{x11}, u_{x12}, u_{x21} в момент попадания на «микст» берутся равными своим значениям (2.3.14) на этапе стационарного движения (2.2.23)–(2.2.29), (2.2.32), (2.2.33), начальное условие для ω определяется равенством $\omega(0) = \omega_0$, $\omega_0 = \Omega_0 / \Omega_*$.

Проведя вырождение системы (2.4.8), (2.4.9) по малому параметру μ (это отвечает пренебрежению процессами изменения переменных U_{xij} $(i = 1, 2, j = 1)$ и Ω) и, считая параметры ε и ε_1 конечными, получим систему уравнений

$$\begin{gathered} v_x' = \varepsilon f_1, \quad v_y' = f_2, \quad \omega_z' = \frac{1}{i_z^2} f_3 \\ p_{x11} = p_{x12} = 0, \quad p_{x21} = p_{x22} = l \end{gathered} \tag{2.4.10}$$

где выражения для правых частей дифференциальных уравнений, контактных сил, момента трения верчения для правого заднего колеса, стабилизирующих моментов для остальных колес и момента, приложенного к задним колесам аппарата, вычисляются при помощи (2.3.12), (2.3.13) и (2.4.9). С учетом (2.4.9) корнем первых двух конечных уравнений (2.4.10) служат равенства (2.3.16)

$$u_{x11} = u_{x12} = 0 \tag{2.4.11}$$

отвечающие режиму непроскальзывания передних колес аппарата в продольном направлении. Из третьего конечного уравнения (2.4.10) с учетом (2.4.9) получаем равенство

$$\begin{gathered} -\kappa_M n_2 \mathrm{sgn} u_{x22} = -\kappa_0 n_2 \frac{u_{x21}}{v_x - \varepsilon b \omega_z - \varepsilon u_{x12}} + O(\varepsilon^2) \\ u_{x22} = 2v_x - \varepsilon u_{x21} - \frac{2}{n}\omega + O(\varepsilon) \end{gathered} \tag{2.4.12}$$

В силу выражения для u_{x22} из (2.4.9) имеем

$$\mathrm{sgn} u_{x22} = \mathrm{sgn}\left(v_x - \frac{\omega}{n}\right) \tag{2.4.13}$$

С помощью (2.4.12) находим корень третьего конечного уравнения (2.4.10) — аналог первого выражения (2.3.20) в рассматриваемом случае

$$u_{x21} = \frac{\kappa_M}{\kappa_0} v_x \mathrm{sgn} u_{x22} + O(\varepsilon) \tag{2.4.14}$$

Решения $\omega_{M1} = \Omega_{M1}/\Omega_*$ и $\omega_{M2} = \Omega_{M2}/\Omega_*$ вырожденной системы по переменной ω находятся из ее последнего конечного уравнения, которое с учетом (2.3.13), (2.4.9) и (2.4.13) может быть приведено к виду

$$m(\omega, \eta) = -\frac{2}{n}\kappa_M n_2 \mathrm{sgn}\left(v_x - \frac{\omega}{n}\right) + O(\varepsilon^2) \tag{2.4.15}$$

Например, при фиксированном $\eta = \eta_0$ и

$$V_x - \Omega/n < 0 \tag{2.4.16}$$

значения Ω_{M1} и Ω_{M2}, отвечающие восходящему и нисходящему участкам графика $M(\Omega, \eta)$ соответственно, с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ можно найти как абсциссы точек его пересечения с горизонтальной прямой $M(\Omega,\eta) = 2\kappa_M N_2 R/n$ (рис. 2.7). (Разумеется, следует удостовериться, что Ω_{M1} и (или) Ω_{M2} удовлетворяет неравенству (2.4.16).)

Для доказательства близости решений исходной и вырожденной систем (2.4.8)–(2.4.9) и (2.4.10), как и в разделах 1.4, 1.5, 2.3, воспользуемся теорией Тихонова-Васильевой [11–14, 23, 46] (см. Приложение А). Исследуем изолированность, асимптотическую устойчивость по первому приближению и область влияния точки покоя присоединенной системы, которая, по аналогии с (2.3.21), получается из (2.4.8) после замены времени $\tau = t/\mu$ и последующего приравнивания слагаемых порядка μ нулю

$$\frac{du_{x1j}}{d\tau} = \frac{1}{i_1^2} p_{x1j}, \quad (j = 1, 2)$$

$$\frac{du_{x21}}{d\tau} = \frac{1}{i_2^2} \left(p_{x21} - l\right), \quad \frac{d\omega}{d\tau} = \frac{1}{i_4^2} \left(m(\omega,\eta) - \frac{2}{n} l\right) \tag{2.4.17}$$

Значения правых частей вычисляются из (2.3.13) и (2.4.9). Система (2.4.17) описывает движение аппарата на «малых» временах $T \sim T_4$. Медленные переменные v_x и v_y, ω_z, u_{x22}, размерные аналоги которых изменяются на временах T_1 и T_2, считаются постоянными, значение η вычисляется из (2.2.33). Координаты ее точек покоя определяются равенствами (2.4.11), (2.4.14) и значениями ω_{M1} и ω_{M2}.

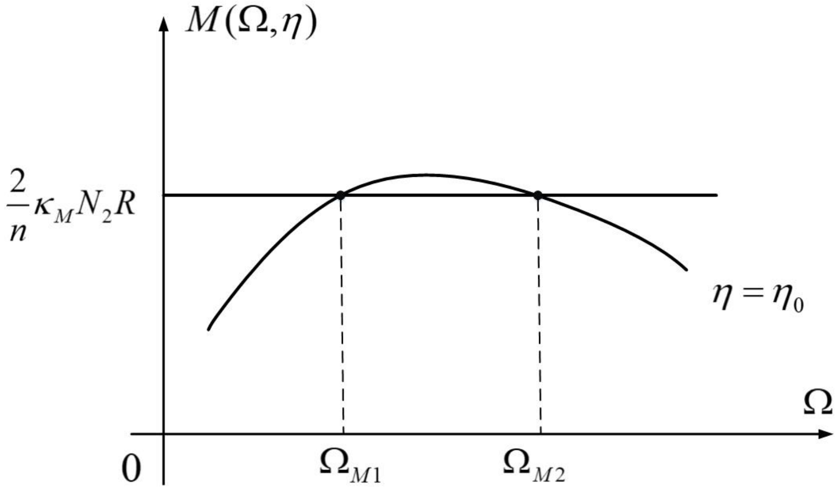


Рис. 2.7. Приближенное решение уравнения (2.4.15)

Обозначив Δu_{x1j}, Δu_{x21}, $\Delta\omega$ малые отклонения переменных u_{x1j}, u_{x12}, ω от точки покоя, разложив выражение для $m(\omega,\eta)$ в ряд Тейлора по $\Delta\omega$ с центром в точке $\omega = \widehat{\omega}$, где $\widehat{\omega} = \omega_{M1}$ или $\widehat{\omega} = \omega_{M2}$

$$m(\omega,\eta_0) = m(\widehat{\omega},\eta_0) + K_D \cdot \Delta\omega + O(\Delta\omega^2), \quad K_D = \partial m(\omega,\eta_0)/\partial\omega\big|_{\omega=\widehat{\omega}} \tag{2.4.18}$$

проведя линеаризацию (2.4.17) около точки покоя и отбрасывая члены $O(\varepsilon)$, получим систему

$$\frac{d\Delta u_{x11}}{d\tau} = -\kappa_0 n_1 \frac{\Delta u_{x11}}{v_x}, \quad \frac{d\Delta u_{x12}}{d\tau} = -\kappa_0 n_1 \frac{\Delta u_{x12}}{v_x}$$

$$\frac{d\Delta u_{x21}}{d\tau} = \frac{1}{2i_2^2 v_x(2+n^2 i_3^2)} \Big(-\Delta u_{x21}(4+n^2 i_3^2)\kappa_0 n_2 + \Delta\omega \cdot 2v_x n K_D \Big) \tag{2.4.19}$$

$$\frac{d\Delta\omega}{d\tau} = \frac{n i_3^2}{i_4^2 v_x(2+n^2 i_3^2)} \Big(\Delta u_{x21} \cdot \kappa_0 n_2 + \Delta\omega \cdot v_x n K_D \Big)$$

В силу отрицательности множителя при переменных Δu_{x1j} точка покоя системы (2.4.17) по переменным u_{x1j} $(j = 1, 2)$ асимптотически устойчива в силу системы первых двух независимых уравнений (2.4.19). Чтобы исследовать устойчивость по переменным u_{x21}, ω, составим характеристическое уравнение системы двух последних уравнений

$$\begin{vmatrix} \dfrac{-\kappa_0 n_2(4+n^2 i_3^2)}{2i_2^2 v_x(2+n^2 i_3^2)} - \lambda & \dfrac{nK_D}{i_2^2(2+n^2 i_3^2)} \\ \\ \dfrac{n i_3^2 \kappa_0 n_2}{i_4^2 v_x(2+n^2 i_3^2)} & \dfrac{i_3^2 n^2 K_D}{i_4^2(2+n^2 i_3^2)} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{2.4.20}$$

которое после преобразований принимает вид

$$\lambda^2 + \frac{1}{2+n^2 i_3^2}\left[\frac{\kappa_0 n_2(4+n^2 i_3^2)}{2i_2^2 v_x} - \frac{i_3^2 n^2 K_D}{i_4^2}\right]\lambda - \frac{\kappa_0 n_2 i_3^2 n^2 K_D(6+n^2 i_3^2)}{2i_2^2 i_4^2 v_x(2+n^2 i_3^2)^2} = 0 \tag{2.4.21}$$

Необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости точки покоя системы двух последних уравнений (2.4.17) по первому приближению — положительность всех коэффициентов уравнения (2.4.21) — обеспечивается при выполнении условия

$$K_D < 0 \tag{2.4.22}$$

Согласно этому неравенству и рис. 2.7 точка покоя, соответствующая

$$\omega = \omega_{M1} \tag{2.4.23}$$

для которой

$$K_D > 0 \tag{2.4.24}$$

неустойчива, точка покоя для

$$\omega = \omega_M = \omega_{M2} \tag{2.4.25}$$

асимптотически устойчива по первому приближению. (По той же причине для стационарного движения аппарата до попадания на «микст» асимптотически устойчивым является значение $\Omega = \Omega_0$ угловой скорости выходного вала двигателя на нисходящем участке характеристики $M(\Omega, \eta)$ (рис. 2.2).)

При выполнении (2.4.22) дискриминант D квадратного уравнения (2.4.21)

$$D = \frac{\kappa_0^2 n_2^2 (4 + n^2 i_3^2)^2 i_4^2 + 4 i_2^4 i_3^4 n^4 v_x^2 K_D^2 + \kappa_0 n_2 i_2^2 i_3^2 i_4^2 v_x n^2 K_D (8 + n^2 i_3^2)}{4 i_2^4 i_4^4 v_x^2 (2 + n^2 i_3^2)^2} \qquad (2.4.26)$$

может быть как положительным, так и отрицательным, следовательно, характеристическое уравнение имеет при $D > 0$ два различных отрицательных вещественных корня λ_1, λ_2, при $D < 0$ — два комплексно сопряженных корня λ_1, λ_2 с отрицательной вещественной частью. Таким образом, точка покоя присоединенной системы, отвечающая значению (2.4.25) при $D > 0$ является устойчивым узлом, при $D < 0$ — устойчивым фокусом на фазовой плоскости u_{x21}, ω. В случае (2.4.24) из (2.4.26) следует $D > 0$. Соответствующие корни λ_1, λ_2 уравнения (2.4.21) вещественные и имеют разные знаки, то есть точка покоя присоединенной системы для значения (2.4.23) неустойчива и имеет тип седло. В соответствии с теоремой Андронова-Понтрягина [4] система (2.4.17), как и система (2.4.17) является грубой, то есть топологическая структура ее фазового портрета не изменяется при малых изменениях правых частей. Следовательно, точка покоя (2.4.11), (2.4.14), (2.4.25) системы (2.4.17) асимптотически устойчива по первому приближению, точка покоя (2.4.11), (2.4.14), (2.4.23) неустойчива и в силу аналога системы (2.4.19), учитывающего члены $O(\varepsilon)$.

При $K_D = 0$ имеем $\omega_{M1} = \omega_{M2}$ — решение последнего конечного уравнения вырожденной системы (2.4.10) не изолировано. Этот случай, исключаемый условиями теоремы Тихонова-Васильевой (см. Приложение А), в работе не рассматривается. Подходы к решению подобных задач изложены в [9]

Выясним область влияния точки покоя (2.4.11), (2.4.14), (2.4.25), образованную совокупностью начальных значений переменных u_{x1j}, u_{x21}, ω, для которых решение системы (2.4.17) стремится к ней при $\tau \to \infty$. Первые два независимые скалярные уравнения (2.4.17) допускают качественное исследование методами [11]. По аналогии с тем, как это делалось в разделе 2.3 при исследовании положения равновесия (2.3.16) системы первых двух независимых уравнений (2.4.17) нетрудно доказать, что область влияния положения равновесия (2.4.11) по переменным u_{x1j} не ограничена. Асимптотическая устойчивость точки покоя (2.4.14), (2.4.25) двух последних уравнений системы (2.4.17) обеспечивает существование как минимум малой области ее влияния на фазовой плоскости u_{x21}, ω при $\varepsilon \to 0$.

В соответствии с теоремой Тихонова-Васильевой [11,14,23,46] (см. Приложение А) рассогласование между решениями системы (2.4.8), (2.4.8) и соответствующей вырожденной системы (2.4.10) оценивается величиной $O(\mu)$ на конечном интервале времени $t \sim 1$, отвечающем интервалу $T \sim T_2$ размерного времени T. Для переменных u_{x11}, u_{x12}, u_{x21}, ω эта оценка верна вне пограничного слоя ширины $O(-\mu \ln \mu)$.

Как и в разделе 2.3, где рассматривалось движение аппарата в случае, когда все его колеса после попадания на «микст» сохраняют сцепление с опорной плоскостью, на уровне точности вырожденной системы поперечное движение аппарата не возмущается. Входящие в (2.3.25) поправки к начальным условиям по медленным переменным v_x, v_y и ω_z, отвечающие изучаемому в этом разделе движению аппарата, вычисляются по формулам (2.3.26)

$$v_x^{(1)}(0) = 0, \quad v_y^{(1)}(0) = 0, \quad \mu\omega_z^{(1)}(0) = \mu\frac{1}{i_z^2}\int\limits_0^\infty(-p_{x11} + p_{x12} - p_{x21} + p_{x22})b\,d\tau \quad (2.4.27)$$

где интеграл берется по траекториям присоединенной системы (2.4.17); значение $\tau = 0$ — отвечает моменту попадания на «микст» (началу переходного процесса), $\tau = \infty$ — моменту завершения переходного процесса. Интеграл в (2.4.27) имеет тот же механический смысл, что и в разделе 2.3 — это суммарный импульс момента, приложенного к корпусу аппарата по оси z за время $T \sim T_4$. Из (2.4.11) и (2.4.27) вытекает первая формула (2.3.27)

$$\omega_z^{(1)}(0) = \frac{1}{i_z^2}\int\limits_0^\infty(p_{x22} - p_{x21})b\,d\tau \quad (2.4.28)$$

Из (2.3.13), (2.4.17) получаем

$$p_{x22} - p_{x21} = \frac{2}{ni_3^2}\left[\frac{2}{n}l - m(\omega,\eta)\right] - 2(p_{x21} - l) = -2\frac{d}{d\tau}\left[\frac{i_4^2}{ni_3^2}\omega + i_2^2u_{x21}\right] \quad (2.4.29)$$

Из (2.4.28) и (2.4.29) следует

$$\mu\omega_z^{(1)}(0) = -\mu\frac{2i_2^2b}{i_z^2}\left[u_{x21}(\infty) + \frac{i_4^2}{ni_2^2i_3^2}\omega(\infty) - \left(u_{x21}(0) + \frac{i_4^2}{ni_2^2i_3^2}\omega(0)\right)\right] \quad (2.4.30)$$

Согласно выражению для $u_{x21}(0)$ из (2.3.14) и выражениям (2.4.12), (2.4.14) и (2.4.25) значения продольной составляющей скорости точки контакта левого заднего колеса и угловой скорости выходного вала двигателя в начале и в конце переходного процесса записываются в виде

$$u_{x21}(0) = \frac{\varepsilon_0\omega_2}{\varepsilon}, \quad u_{x21}(\infty) = \frac{\kappa_M}{\kappa_0}v_x\mathrm{sgn}u_{x22} + O(\varepsilon)$$

$$u_{x22} = 2v_x - \frac{2}{n}\omega + O(\varepsilon) \quad (2.4.31)$$

$$\omega(0) = \frac{\Omega_0}{\Omega_*} = \omega_0, \quad \omega(\infty) = \omega_M, \quad v_x = \frac{V_0}{V_*} = v_0$$

где V_0 и Ω_0 определены в (2.2.32), V_* и Ω_* — в (2.3.9). Таким образом, окончательной формой последнего выражения (2.4.27), (2.4.30) после пренебрежения слагаемыми $O(\varepsilon)$ служит

$$\mu\omega_z^{(1)}(0) = \mu\frac{2i_2^2 b}{i_z^2}\left[\frac{\varepsilon_0\omega_2}{\varepsilon} - \frac{\kappa_M}{\kappa_0}v_0\mathrm{sgn}u_{x22} + \frac{i_4^2}{ni_2^2i_3^2}\left(\omega_0 - \omega_M\right)\right]$$
$$\omega_M = \omega_{M2}, \quad u_{x22} = 2v_0 - \frac{2}{n}\omega \tag{2.4.32}$$

которое в размерных переменных имеет вид

$$\mu\Omega_z^{(1)}(0) = \frac{2I_2B}{RI_z}\left[\varepsilon_0\Omega_2 - \varepsilon\frac{\kappa_M}{\kappa_0}\frac{V_0}{R}\mathrm{sgn}U_{x22} + \frac{1}{n}\left(\Omega_0 - \Omega_M\right)\right]$$
$$\Omega_M = \Omega_{M2}, \quad U_{x22} = 2V_0 - \frac{2}{n}\Omega R \tag{2.4.33}$$

Поправка угловой скорости корпуса, вычисленная по формуле (2.4.33) для параметров автомобиля из [48] имеет порядок 10^{-2} рад/с, что на порядок больше поправки (2.3.31) для случая, когда все колеса аппарата сохраняют сцепление с опорной плоскостью. Для более легких и быстроходных колесных аппаратов полученная поправка может быть на порядок больше.

2.5 Модель динамики выходного вала двигителя на «миксте» и оценка угловой скорости корпуса. Колеса задней оси скользят, колеса передней оси сохраняют сцепление с опорной плоскостью

Рассмотрим случай, когда при попадании аппарата на «микст» начинают скользить оба колеса его задней оси. Это происходит в случае, когда для решения системы (2.3.21) нарушается неравенство (2.2.14) для $i = 2$, $j = 1, 2$ или (для правого заднего колеса) — при выполнении условия (2.4.1). Как и в разделе 2.4 будем считать, что скольжение возникает при выполнении условия (2.4.2) — на временах $T \ll T_4$. Колеса передней оси аппарата продолжают сохранять сцепление с опорной плоскостью.

В рассматриваемом случае движения аппарата переменные U_{x21} и U_{x22} начинают изменяться на временах $T \sim T_3$, то есть динамический процесс выравнивания контактных сил на задних колесах аппарата в первую очередь затрагивает переменные U_{x11}, U_{x12} и Ω, изменяющиеся на временах $T \sim T_4 \sim T_5$, а остальные переменные, как и ранее в разделах 2.3 и 2.4, можно принять равными своим значениям на этапе стационарного движения (2.2.23)–(2.2.29), (2.2.32), (2.2.33). Тем самым выражения для контактных сил на задних колесах аппарата в соответствии с (2.2.9), (2.2.16), (2.2.17), (2.2.23) и (2.2.31) имеют вид

$$P_{x21} = -\kappa_0 N_2 \mathrm{sgn} U_{x21}, \quad P_{x22} = -\kappa_M N_2 \mathrm{sgn} U_{x22}, \quad P_{y2j} = 0 \quad (j = 1, 2)$$
$$U_{x21} = V_0 - \Omega_2 R, \quad U_{x22} = V_0 - \Omega_2 R \tag{2.5.1}$$

Наиболее вероятен здесь случай выполнения неравенств

$$U_{x2j} < 0 \quad (j = 1, 2) \tag{2.5.2}$$

которые можно обосновать по аналогии с тем, как это делалось при обсуждении выражений (2.4.4).

Для упрощения исследования перейдем к модели непроскальзывания передних колес аппарата в продольном направлении (ее справедливость доказывается по аналогии с тем, как это делалось при доказательстве равенств (2.3.15), (2.3.16) и (2.4.10), (2.4.11) в разделах 2.3 и 2.4). Соответствующие уравнения связей имеют вид

$$U_{x11} = V_x - B\Omega_z - \Omega_{11} R = 0, \qquad U_{x12} = V_x + B\Omega_z - \Omega_{12} R = 0 \tag{2.5.3}$$

При наличии двух связей (2.5.3) вектор $\boldsymbol{\lambda}$ неопределенных множителей Лагранжа (реакций связей) содержит две компоненты $\boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix}\lambda_1, & \lambda_2\end{pmatrix}^T$. В соответствии с (1.2.17), (2.2.1)–(2.2.5), (2.2.18), (2.5.3), уравнения Лагранжа с множителями, определяющие динамику аппарата в рассматриваемом случае, записываются в форме

$$M\dot{V}_x = \lambda_1 + \lambda_2 + P_{x21} + P_{x22} + MV_y\Omega_z - F_x$$

$$M\dot{V}_y = P_{y11} + P_{y12} + P_{y21} + P_{y22} - MV_x\Omega_z$$

$$I_z\dot{\Omega}_z = (-\lambda_1 + \lambda_2 - P_{x21} + P_{x22})B + (P_{y11} + P_{y12})A_1 - (P_{y21} + P_{y22})A_2 +$$

$$+ \textstyle\sum_{i,j=1}^{2} M_{Sij}$$

$$I_1\dot{\Omega}_{11} = -\lambda_1 R, \quad I_1\dot{\Omega}_{12} = -\lambda_2 R \tag{2.5.4}$$

$$I_2\dot{\Omega}_{21} = -P_{x21}R + L, \quad I_2\dot{\Omega}_{22} = -P_{x22}R + L$$

$$I\dot{\Omega} = M(\Omega, \eta) - \frac{2}{n}L, \quad \Omega = \frac{n}{2}(\Omega_{21} + \Omega_{22})$$

$$L = \frac{1}{\dfrac{2}{n} + n\dfrac{I}{I_2}}\left[M(\Omega, \eta) + \frac{n}{2}\frac{J}{I_2}R(P_{x21} + P_{x22})\right]$$

Система (2.5.4) решается совместно с уравнениями связей (2.5.3).

Складывая и вычитая уравнения связей (2.5.3), приведем их к виду

$$2V_x = (\Omega_{11} + \Omega_{12})R, \qquad 2B\Omega_z = (\Omega_{12} - \Omega_{11})R \tag{2.5.5}$$

Будем рассматривать V_x, V_y, Ω_z, Ω_{21}, Ω_{22} в качестве независимых переменных и исключим из системы (2.5.3), (2.5.4) зависимые переменные — угловые скорости Ω_{11}, Ω_{12} вращения передних колес, а также реакции связей λ_1 и λ_2, равные, соответственно, продольным составляющим P_{x11} и P_{x12} контактных сил на передних колесах. Продифференцировав уравнения (2.5.5) по времени

$$2\dot{V}_x = (\dot{\Omega}_{11} + \dot{\Omega}_{12})R, \qquad 2B\dot{\Omega}_z = (\dot{\Omega}_{12} - \dot{\Omega}_{11})R \tag{2.5.6}$$

подставив в полученные уравнения правые части соответствующих уравнений (2.5.4) и пренебрегая моментом инерции I_1 передних колес по сравнению с моментом инерции I_z аппарата (это можно сделать при выполнении условия (2.2.2)), получаем выражения для реакций связей (2.5.3)

$$\lambda_1 = \lambda_2 = P_{x11} = P_{x12} = 0 \tag{2.5.7}$$

Подставив (2.5.7) в (2.5.4), получим уравнения движения аппарата с непроскальзывающими в продольном направлении передними колесами

$$\begin{gathered}
M\dot{V}_x = P_{x21} + P_{x22} - MV_y\Omega_z - F_x \\
M\dot{V}_y = P_{y11} + P_{y12} + P_{y21} + P_{y22} - MV_x\Omega_z \\
I_z\dot{\Omega}_z = (-P_{x21} + P_{x22})B + (P_{y11} + P_{y12})A_1 - (P_{y21} + P_{y22})A_2 + \textstyle\sum_{i,j=1}^{2} M_{Sij} \\
I_2\dot{\Omega}_{21} = -P_{x21}R + L, \quad I_2\dot{\Omega}_{22} = -P_{x22}R + L \\
I\dot{\Omega} = M(\Omega, \eta) - \frac{2}{n}L, \quad \Omega = \frac{n}{2}(\Omega_{21} + \Omega_{22}) \\
L = \frac{1}{\dfrac{2}{n} + n\dfrac{I}{I_2}}\left[M(\Omega, \eta) + \frac{n}{2}\frac{J}{I_2}R(P_{x21} + P_{x22})\right]
\end{gathered} \tag{2.5.8}$$

Переменные Ω_{11} и Ω_{12} определяются уравнениями (2.5.3):

$$\Omega_{11} = \frac{1}{R}(V_x - B\Omega_z), \quad \Omega_{12} = \frac{1}{R}(V_x + B\Omega_z) \tag{2.5.9}$$

касательные составляющие контактных сил и моменты трения верчения в областях контакта колес с опорной плоскостью — для P_{y1j} и M_{S1j} — выражениями (2.2.7), (2.2.11) для случая выполнения первого неравенства и выражениями (2.2.12); для P_{x2j}, P_{y2j} и M_{S2j} $(j = 1, 2)$, в зависимости от рассматриваемой модели сухого трения, — выражениями (2.2.16) или (2.2.17).

Проведем нормализацию системы (2.5.8), (2.5.9) при помощи замены (2.3.8). Класс движения аппарата, как и ранее в разделах 2.3 и 2.4, определяется условием (2.2.2), первым и вторым неравенствами (2.2.11) для $i = 1$, $j = 1, 2$ и для $i = 2$, $j = 1, 2$ соответственно, и ограничениями (2.2.20), (2.2.21). Примем $U_{x21*} = U_{x22*} = V_{x*}$, остальные характерные значения оставим теми же, что и в (2.3.9). Рассматривая начальный этап заноса аппарата после попадания на «микст», ограниченный характерными временами $T \sim T_2$ изменения переменных V_y, Ω_z, U_{y1j}, как и в разделах 2.3 и 2.4, примем $T_* = T_2$. Нормализованным аналогом системы (2.5.8), (2.5.9) служит сингулярно возмущенная система тихоновского вида [11, 14, 46] (см. Приложение А) с малыми параметрами (2.2.21)

$$
\begin{gathered}
v_x' = \varepsilon f_1, \quad v_y' = f_2, \quad \omega_z' = \frac{1}{i_z^2} f_3 \\
\mu_1 \omega_{21}' = \frac{1}{i_2^2}(-p_{x21} + l), \quad \mu_1 \omega_{22}' = \frac{1}{i_2^2}(-p_{x22} + l), \quad \omega_{21} = \frac{2}{n}\omega - \omega_{22} \\
\mu i_4^2 \omega' = m(\omega, \eta) - \frac{2}{n} l
\end{gathered}
\tag{2.5.10}
$$

$$
\begin{gathered}
p_{x11} = p_{x12} = 0, \quad p_{y1j} = -\kappa_0 n_1 \frac{u_{y1j}}{v_x + (-1)^j \varepsilon b \omega_z} \\
p_{x21} = -\kappa_0 n_2 \frac{u_{x21}}{\sqrt{u_{x21}^2 + \varepsilon^2 u_{y21}^2} + \varepsilon \varepsilon_1 c \beta |\omega_z|}, \quad p_{y21} = -\kappa_0 n_2 \frac{\varepsilon u_{y21}}{\sqrt{u_{x21}^2 + \varepsilon^2 u_{y21}^2} + \varepsilon \varepsilon_1 c \beta |\omega_z|} \\
p_{x22} = -\kappa_M n_2 \frac{u_{x22}}{\sqrt{u_{x22}^2 + \varepsilon^2 u_{y22}^2} + \varepsilon \varepsilon_1 c \beta |\omega_z|}, \quad p_{y22} = -\kappa_M n_2 \frac{\varepsilon u_{y22}}{\sqrt{u_{x22}^2 + \varepsilon^2 u_{y22}^2} + \varepsilon \varepsilon_1 c \beta |\omega_z|} \\
m_{S1j} = -\kappa_{z0} n_1 \chi \left(\left| \frac{\varepsilon u_{y1j}}{v_x + (-1)^j \varepsilon b \omega_z} \right| \right) \operatorname{sgn} \left(\frac{\varepsilon u_{y1j}}{v_x + (-1)^j \varepsilon b \omega_z} \right) \\
m_{S21} = -\gamma \kappa_0 n_2 \frac{\varepsilon \varepsilon_1 c \omega_z}{\alpha \sqrt{u_{x21}^2 + \varepsilon^2 u_{y21}^2} + \varepsilon \varepsilon_1 c |\omega_z|}, \quad m_{S22} = -\gamma \kappa_M n_2 \frac{\varepsilon \varepsilon_1 c \omega_z}{\alpha \sqrt{u_{x22}^2 + \varepsilon^2 u_{y22}^2} + \varepsilon \varepsilon_1 c |\omega_z|} \\
\mu_1 = \frac{\mu}{\varepsilon}, \quad \omega_{ij} = v_x + (-1)^j \varepsilon b \omega_z \\
u_{x2j} = v_x + (-1)^j \varepsilon b \omega_z - \omega_{2j}, \quad u_{yij} = v_y - (-1)^i a_i \omega_z \quad (i, j = 1, 2)
\end{gathered}
\tag{2.5.11}
$$

Штрихом обозначены производные по безразмерному времени t; f_k $(k = 1 \ldots 3)$ и l определены выражениями (2.3.11) и (2.3.13); i_4^2 определено в (2.4.8). Выражения для p_{x2j}, p_{y2j} и m_{S2j}, отвечающие модели (2.5.8) сухого трения Кулона для $i = 2$, $j = 1, 2$, получаются из соответствующих выражений (2.5.11) при α, β, $\gamma = 0$. Уравнение изменения зависимой переменной ω_{22} оставлено для удобства дальнейшего исследования.

Начальные условия для переменных v_x, v_y, ω_z, ω_{21}, ω_{22}, ω в момент попадания на «микст» берутся равными своим значениям (2.3.14) на этапе стационарного движения (2.2.23)–(2.2.29), (2.2.32), (2.2.33), начальное условие для ω определяется равенством $\omega(0) = \omega_0$, $\omega_0 = \Omega_0/\Omega_*$.

Проведя вырождение системы (2.5.10) по малому параметру μ (это отвечает пренебрежению процессом изменения переменной Ω) и считая параметры ε, ε_1 и μ_1 конечными, получим систему уравнений

$$
\begin{aligned}
&v_x' = \varepsilon f_1, \quad v_y' = f_2, \quad \omega_z' = \frac{1}{i_z^2} f_3 \\
&\mu_1 \omega_{21}' = \frac{1}{i_2^2}(-p_{x21} + l), \quad \mu_1 \omega_{22}' = \frac{1}{i_2^2}(-p_{x22} + l), \quad \omega_{21} = \frac{2}{n}\omega - \omega_{22} \\
&m(\omega, \eta) - \frac{2}{n} l = 0
\end{aligned}
\tag{2.5.12}
$$

В соответствии с выражением для l из (2.5.10) последнее конечное уравнение вырожденной системы (2.5.12) можно записать в виде

$$
m(\omega, \eta) = \frac{2}{2 + n^2 i^2} \left(m(\omega, \eta) + \frac{n i^2}{2}(p_{x21} + p_{x22}) \right)
$$

откуда после учета выражений для p_{x21} и p_{x22} из (2.5.11) будем иметь

$$
\begin{aligned}
&m(\omega, \eta) = \frac{1}{n}(p_{x21} + p_{x22}) \\
&p_{x21} = -\kappa_0 n_2 \operatorname{sgn} u_{x21} + O(\varepsilon^2), \quad p_{x22} = -\kappa_M n_2 \operatorname{sgn} u_{x22} + O(\varepsilon^2)
\end{aligned}
\tag{2.5.13}
$$

Например, при

$$
u_{x21} < 0, \quad u_{x22} < 0 \tag{2.5.14}
$$

из (2.5.13) получаем следующее уравнение для отыскания решения вырожденной системы по переменной ω

$$
m(\omega, \eta) = \frac{n_2}{n}\left(\kappa_0 + \kappa_M\right) + O(\varepsilon^2) \tag{2.5.15}
$$

(В разделе 2.6.3 будет показано, что выполнение неравенств (2.5.14) наиболее вероятно не только в момент попадания на «микст», но и в ходе всего рассматриваемого в этом разделе движения.)

Для фиксированного $\eta = \eta_0$ этими решениями служат $\omega_{M1} = \Omega_{M1}/\Omega_*$ и $\omega_{M2} = \Omega_{M2}/\Omega_*$, где значения Ω_{M1} и Ω_{M2}, отвечающие восходящему и нисходящему участкам графика $M(\Omega, \eta)$ соответственно, с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ находятся по аналогии с рис. 2.7 — как абсциссы точек пересечения графика $M(\Omega, \eta)$ с горизонтальной прямой $M(\Omega, \eta) = (\kappa_0 + \kappa_M) N_2 R/n$ (рис. 2.8).

Для доказательства близости решений исходной системы (2.5.10) и соответствующей вырожденной системы (2.5.12) воспользуемся теорией Тихонова-Васильевой [11–14, 23, 46] (см. Приложение А). Исследуем изолированность, асимптотическую устойчивость по первому приближению и область влияния точек покоя присоединенной системы, которая получается из (2.5.10) после замены времени $\tau = t/\mu$ и последующего приравнивания слагаемых порядка μ нулю. Присоединенная система, описывающая движение аппарата на временах $T \sim T_5 \sim T_4$, в данном случае сводится к одному скалярному уравнению, которое с учетом выражения для l из (2.5.10) может быть приведено к виду

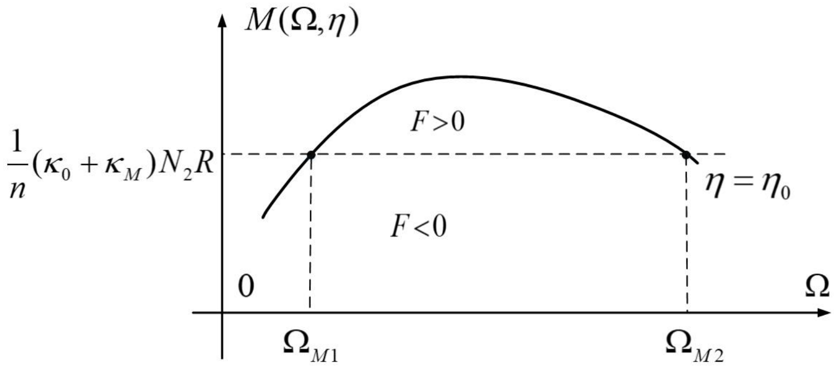


Рис. 2.8. Приближенное решение уравнения (2.5.15)

$$\frac{d\omega}{d\tau} = m(\omega,\eta) - \frac{2}{n}l = \frac{n^2 i^2}{2+n^2 i^2}\left(m(\omega,\eta) - \frac{1}{n}(p_{x21}+p_{x22})\right) \tag{2.5.16}$$

Значения p_{x21} и p_{x22} определяются двумя последними равенствами (2.5.13).

Координаты изолированных точек покоя уравнения (2.5.16) определяются корнями ω_{M1} и $\omega_{M2} \neq \omega_{M1}$ конечного уравнения (2.5.15) вырожденной системы, второй из которых —

$$\omega = \omega_{M2} \tag{2.5.17}$$

асимптотически устойчив по первому приближению в силу отрицательности коэффициента наклона касательной на нисходящем участке графика $M(\Omega,\eta)$ (рис. 2.8).

Выясним область влияния точки покоя (2.5.17), образованную совокупностью начальных значений $\omega(0) = \omega_0 = \Omega_0/\Omega_*$ переменной ω (Ω_0 определено в (2.2.32)), для которых решение уравнения (2.5.16) стремится к этой точке покоя при $\tau \to \infty$. Поскольку уравнение (2.5.16) является скалярным, оно допускает качественное исследование методами [2, с. 26-27]. Положениям равновесия ω_{M1}, ω_{M2} на плоскости τ, ω отвечают горизонтальные прямые $\omega = \omega_{M1}$, $\omega = \omega_{M2}$ (рис. 2.9). Знаками + и − отмечены области, в которых правая часть уравнения (2.5.16) положительна и отрицатель-

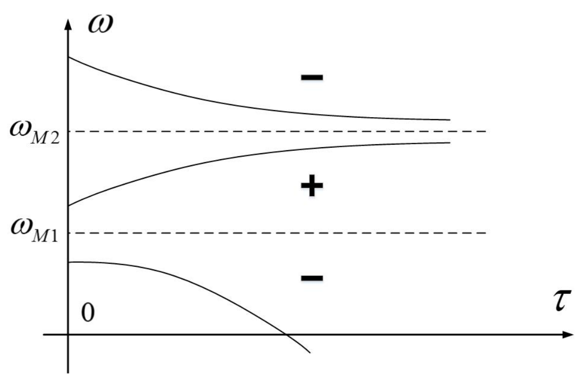


Рис. 2.9. Область влияния точек покоя уравнения (2.5.16), описывающего изменение угловой скорости выходного вала двигателя

на соответственно. Тем самым при значениях начальных условий $\omega(0) < \omega_{M1}$ переменная ω убывает, при значениях $\omega_{M1} < \omega(0) < \omega_{M2}$ переменная ω возрастает, при значениях $\omega(0) > \omega_{M2}$ — убывает. На основании теоремы существования и единственности решения $\omega = \omega(\tau)$ уравнения (2.5.16) не может пересечь прямую $\omega = \omega_{M2}$, то есть в двух последних случаях оно асимптотически приближается к ней при $\tau \to \infty$. Таким образом, областью влияния точки покоя (2.5.17) служит интервал $\omega(0) \in (\omega_{M1}; +\infty)$.

Дальнейшее вырождение системы (2.5.10) по малому параметру μ_1, отвечающее пренебрежению процессами изменения переменных Ω_{21} и Ω_{22}, некорректно, так как, согласно последнему равенству (2.5.12) и первому равенству (2.5.13), влечет за собой равенство $p_{x21} = p_{x22}$, откуда в соответствии с двумя последними равенствами (2.5.15) имеем $\kappa_0 \mathrm{sgn} u_{x21} = \kappa_M \mathrm{sgn} u_{x22} + O(\varepsilon^2)$. В силу (2.2.19) и (2.2.21) это равенство не может быть выполнено.

В силу вырожденной системы (2.5.12), вращение колес задней оси аппарата близко к движению с постоянным ускорением. Это нетрудно заметить, записав уравнение изменения переменной ω_{22} с учетом конечного уравнения системы (2.5.12) и равенств (2.5.13) в виде

$$\begin{aligned}\mu_1\omega_{22}' &= \frac{1}{i_2^2}(-p_{x22} + l) = \frac{1}{i_2^2}\left(-p_{x22} + \frac{1}{2}(p_{x21} + p_{x22})\right) = \frac{1}{2i_2^2}(p_{x21} - p_{x22}) = \\ &= \frac{n_2}{2i_2^2}\left(\kappa_M \mathrm{sgn} u_{x22} - \kappa_0 \mathrm{sgn} u_{x21}\right) + O(\varepsilon^2)\end{aligned} \tag{2.5.18}$$

Правая часть (2.5.18) с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ является постоянной величиной. В соответствии с шестым уравнением системы (2.5.12), связывающим переменные ω_{21}, ω_{22} и ω, и равенством (2.5.17), получаем, что изменение переменной ω_{21} также близко к равномерному, причем скорости изменения переменных ω_{21} и ω_{22} различны по знаку.

Рассмотрим уравнение изменения угловой скорости корпуса аппарата из (2.5.12)

$$i_z^2\omega_z' = -\left(p_{x21} - p_{x22}\right)b + \left(p_{y11} + p_{y12}\right)a_1 - (p_{y21} + p_{y22})a_2 + \varepsilon_1 c \textstyle\sum_{i,j=1}^{2} m_{Sij} \tag{2.5.19}$$

На основании выражений для p_{yij}, m_{Sij} $(i, j = 1, 2)$ из (2.5.11), а также второго и третьего равенств (2.5.13) значения $v_y = 0$, $\omega_z = 0$ не удовлетворяют (2.5.19), и, следовательно, вырожденной системе (2.5.12). Тем самым в рассматриваемом случае поперечное и угловое движение корпуса аппарата, определяющее его занос, возникает даже при начальных условиях, отвечающих стационарному движению до попадания на «микст».

Поправки к начальным условиям для медленных по отношению к ω переменных v_x, v_y и ω_z согласно алгоритму А.Б. Васильевой и (2.5.10), (2.5.12), (2.5.16) вычисляются по формулам (2.3.25):

$$v_x^{(1)}(0) = 0, \quad v_y^{(1)}(0) = 0, \quad \mu\omega_z^{(1)}(0) = \mu\frac{1}{i_z^2}\int\limits_0^\infty (p_{x22} - p_{x21})b\,dt \tag{2.5.20}$$

где подынтегральное выражение во втором равенстве имеет вид

$$p_{x22} - p_{x21} = i_2^2 \frac{d}{dt} (\omega_{21} - \omega_{22}) \tag{2.5.21}$$

Подстановка (2.5.21) в (2.5.20) дает

$$\omega_z^{(1)}(0) = \frac{1}{i_z^2} \int\limits_0^\infty i_2^2 \frac{d}{dt} (\omega_{21} - \omega_{22})\, b\, dt \tag{2.5.22}$$

Исключая в (2.5.22) зависимую переменную ω_{21} с помощью шестого равенства (2.5.10), получаем

$$\omega_z^{(1)}(0) = \frac{2i_2^2 b}{i_z^2} \int\limits_0^\infty \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{n}\omega - \omega_{22} \right) dt \tag{2.5.23}$$

Таким образом,

$$\mu\omega_z^{(1)}(0) = \mu \frac{2i_2^2 b}{i_z^2} \left[\frac{1}{n} (\omega(\infty) - \omega(0)) - (\omega_{22}(\infty) - \omega_{22}(0)) \right] \tag{2.5.24}$$

В ходе изменения быстрой переменной ω медленная по отношению к ней переменная ω_{22} остается постоянной, следовательно

$$\omega_{22}(\infty) = \omega_{22}(0) = \omega_2, \quad \omega(0) = \omega_0, \quad \omega(\infty) = \omega_{M2} = \omega_M \tag{2.5.25}$$

Здесь ω_2 определено в (2.3.14), ω_0 — при записи системы (2.4.8), (2.4.9), ω_{M2} — в (2.5.17).

С учетом (2.5.25) окончательной формой последнего выражения (2.5.24) служит

$$\mu\omega_z^{(1)}(0) = \frac{2i_2^2 b}{n i_z^2} (\omega_M - \omega_0), \quad \omega_M = \omega_{M2} \tag{2.5.26}$$

В размерных переменных поправки к начальным условиям по переменным V_x, V_y и Ω_z имеют вид

$$V_x^{(1)}(0) = 0, \quad V_y^{(1)}(0) = 0, \quad \mu\Omega_z^{(1)}(0) = \frac{2I_2 B}{I_z R n} (\Omega_M - \Omega_0), \quad \Omega_M = \Omega_{M2} \tag{2.5.27}$$

Приведем численные результаты для параметров автомобиля, которые, за исключением продольной скорости корпуса, взяты из [48]. Поправка угловой скорости корпуса, вычисленная по формуле (2.5.27) равна 10^{-2} рад/с ($-4 \cdot 10^{-2}$ рад/с), что превышает поправку (2.3.31) для случая, когда все колеса аппарата сохраняют сцепление с опорной плоскостью. Для более легких и быстроходных колесных аппаратов полученная поправка может быть на порядок больше.

Результаты анализа стационарного режима (2.2.23) и предельных равенств (2.3.15), (2.3.16), (2.4.10), (2.4.11) показывают, что изучение рассматриваемой в этой главе задачи можно проводить в рамках модели со связями

$$U_{x1j} = 0 \quad (j = 1, 2) \tag{2.5.28}$$

запрещающими проскальзывание передних колес аппарата в продольном направлении. Такая модель применялась при анализе задачи раздела 2.5 (см. (2.5.3)).

В отличие от (2.5.28), использование неголономной модели с одной из связей

$$U_{y1} = U_{y1j} = V_y + A_1\Omega_z = 0, \quad U_{y2} = U_{y2j} = V_y - A_2\Omega_z = 0 \quad (j = 1, 2) \tag{2.5.29}$$

запрещающей проскальзывание передних или задних колес аппарата в поперечном направлении, при рассмотрении задачи о попадании аппарата на «микст» неправомерно, несмотря на условие (2.2.8) малости областей контакта колес с опорной плоскостью и условие (2.2.20) малости поперечной и угловой скоростей его корпуса. Действительно, на основании (2.2.9), (2.3.8), (2.3.25), (2.3.26), (2.3.31), (2.4.33) и (2.5.27), после завершения быстрого переходного процесса выравнивания контактных сил на задних колесах (в случаях, когда оба или одно из колес задней оси сохраняют сцепление с опорной плоскостью) или быстрого процесса изменения угловой скорости выходного вала двигателя до постоянного значения (в случае, когда оба колеса задней оси начинают скользить) поправку к начальному условию получает только переменная Ω_z, а начальное условие по переменной V_y остается тем же (нулевым), что и до попадания на «микст». Это противоречит связи (2.5.29), в силу которой поправку к начальным условиям должны получить обе переменные V_y, Ω_z.

Проведенное исследование показало, что в случае сильного разнесения (2.2.22) постоянных времени T_2, T_4 и малости областей контакта колес аппарата с опорной плоскостью при построении выражений (2.3.31), (2.4.33) и (2.5.27) можно не учитывать возвращающие моменты в областях контакта колес, не теряющих сцепление с опорной плоскостью [35–37], и моменты трения верчения в областях контакта скользящих колес [3], поскольку они зависят от медленных переменных U_{yij} и Ω_z соответственно. Исследование влияния этих моментов на динамику аппарата по окончании быстрых процессов проводится в разделах 2.6.1, 2.6.2 и 2.6.3.

2.6 Динамика корпуса аппарата на «миксте»

Выше в этой главе в пренебрежении быстрыми процессами изменения продольных скоростей точек контакта колес, не потерявших сцепление с опорной плоскостью, и угловой скоростью выходного вала двигателя были построены математические (асимптотические) модели (2.3.15), (2.4.10), (2.5.12) для каждого из рассматриваемых случаев взаимодействия колес аппарата с опорной плоскостью. Модели (2.3.15) и (2.4.10) не позволяют судить о динамике корпуса аппарата, поскольку из их уравнений следует, что после завершения быстрых переходных процессов контактные усилия на колесах ведущей оси становятся равными, а начальные условия выбираются теми же, что и до попадания аппарата на «микст», то есть отвечают равномерному прямолинейному движению аппарата, для которого поперечная и угловая скорости его корпуса равны нулю. Корректировка начальных условий с использованием алгоритма А.Б. Васильевой, которая для сохранения одинакового уровня точности всех моделей проводилась и для (2.5.12), привела к формулам (2.3.31), (2.4.33), (2.5.27) для получаемого аппаратом импульса угловой скорости, способного вызвать его занос. Для исследования дальнейшей динамики корпуса аппарата следует также скорректировать и модели (2.3.15), (2.4.10), (2.5.12).

В этом разделе с применением методов [14], основанных на построении разложений А.Б. Васильевой, но не требующих привлечения итерационных процедур, строится модель изменения поперечной и угловой скоростей корпуса аппарата, позволяющая обсудить его динамику после попадания на «микст» и оценить протекание заноса для рассматриваемых случаев взаимодействия колес с опорной плоскостью, в частности, влияние на нее моментов трения верчения, изменяющихся на тех же характерных временах, что и эти переменные (см. Приложение Б).

2.6.1 Модель динамики корпуса. Все колеса сохраняют сцепление с опорной плоскостью

Рассмотрим случай из раздела 2.3, когда после попадания аппарата на «микст» все его колеса сохраняют сцепление с опорной плоскостью, и это взаимодействие описывается модифицированной моделью увода, учитывающей малую деформацию колес (псевдоскольжение) в продольном и поперечном направлениях, а также стабилизирующие моменты. В отличие от раздела 2.3, где основное внимание уделялось исследованию быстрого изменения продольных скоростей точек контакта колес с опорной плоскостью, определяющего переходный процесс выравнивания контактных сил на колесах ведущей оси, здесь исследуются более медленные поперечные и угловые движения корпуса аппарата после завершения переходного процесса.

Нормализованные уравнения движения аппарата имеют вид (2.3.10)–(2.3.13), вырожденные по малому параметру μ уравнения, описывающие движение аппарата после завершения быстрого переходного процесса — вид (2.3.15). Проведем уточнение последних членами первого порядка по μ, используя системы (2.3.10)–(2.3.13) и (Б.3). Производные выражений (2.3.16) и (2.3.20) равны нулю и имеют порядок $O(\varepsilon)$ соответственно. Следовательно, второе слагаемое в конечном уравнении (Б.3) или равно нулю (для переменных u_{x11} и u_{x12}) или имеет порядок $\mu\varepsilon$ (для переменных u_{x21} и u_{x22}), то есть на уровне точности $O(\mu)$ системы (Б.3) его конечные уравнения совпадают с конечными уравнениями вырожденной системы (2.2.32). Дифференциальные уравнения системы (Б.3), построенные для (2.3.10)–(2.3.13) и имеющие ту же структуру, что и дифференциальные уравнения (2.2.32), помимо слагаемых порядка μ содержат и члены порядка $\varepsilon \gg \mu$.

В силу слабой связанности эти уравнения с погрешностью $O(\varepsilon)$ позволяют исследовать изменение быстрых переменных v_y и ω_z, изменяющихся на интервале времени $t \sim 1$ ($T \sim T_2$), независимо от медленной переменной v_x, изменяющейся на интервале $t \sim 1/\varepsilon$ ($T \sim T_1$).

Перейдя к (2.3.15) и приняв $\varepsilon = 0$, составим порождающую по Пуанкаре систему [14, 46]

$$
\begin{aligned}
&v'_x = 0, \quad v'_y = f_2, \quad i_z^2\omega'_z = f_3 \\
&p_{x1j} = 0, \quad p_{x2j} = l = \frac{n}{2}m(\omega,\eta) \quad (j = 1,2)
\end{aligned}
\tag{2.6.1}
$$

правые части которой следует вычислять из (2.3.10) – (2.3.13) без учета членов $O(\varepsilon)$. Согласно первому уравнению (2.6.1) медленная переменная v_x постоянна и равна своему начальному значению (2.3.14): $v_x = v_0 = \mathrm{const} > 0$; решение (2.3.16) и (2.3.20) конечных уравнений системы (2.6.1) на принятом уровне точности имеет вид

$$
u_{x11} = u_{x12} = 0, \quad u_{x21} = \frac{-v_0 nm(nv_0,\eta_0)}{2\kappa_0 n_2}, \quad u_{x22} = \frac{-v_0 nm(nv_0,\eta_0)}{2\kappa_M n_2}
\tag{2.6.2}
$$

В соответствии с (2.3.11)–(2.3.13), (2.6.2) динамические уравнения (2.6.1) принимают вид

$$
v_x = v_0, \quad v'_y = p_{y11} + p_{y12} + p_{y21} + p_{y22}
\tag{2.6.3}
$$

$$
i_z^2\omega'_z = (p_{y11} + p_{y12})a_1 - (p_{y21} + p_{y22})a_2 + \varepsilon_1 c(m_{S11} + m_{S12} + m_{S21} + m_{S22})
$$

где выражения для контактных сил и стабилизирующих моментов на принятом уровне точности вычисляются по формулам

$$
\begin{aligned}
&p_{y11} = -\kappa_0 n_1 \frac{u_{y1}}{v_0}, \quad p_{y12} = -\kappa_0 n_1 \frac{u_{y1}}{v_0} \\
&p_{y21} = -\kappa_0 n_2 \frac{u_{y2}}{v_0}, \quad p_{y22} = -\kappa_M n_2 \frac{u_{y2}}{v_0}
\end{aligned}
\tag{2.6.4}
$$

$$
u_{y1} = u_{y1j} = v_y + a_1\omega_z, \quad u_{y2} = u_{y2j} = v_y - a_2\omega_z
$$

$$
\begin{aligned}
&m_{S1j} = -\kappa_{z0} n_1 \zeta \frac{u_{y1}}{v_0}\mathrm{sgn} u_{y1} \quad \text{при } |\varepsilon_{y1j}| < \varepsilon_m \quad (j = 1,2) \\
&m_{S21} = -\kappa_{z0} n_2 \zeta \frac{u_{y2}}{v_0}\mathrm{sgn} u_{y2} \quad \text{при } |\varepsilon_{y21}| < \varepsilon_m \\
&m_{S22} = -\kappa_{zM} n_2 \zeta \frac{u_{y2}}{v_0}\mathrm{sgn} u_{y2} \quad \text{при } |\varepsilon_{y22}| < \varepsilon_m \\
&m_{S1j} = \kappa_{z0} \frac{n_1}{\nu}\left(\frac{u_{y1}}{v_0} - 1\right)\mathrm{sgn} u_{y1} \quad \text{при } \varepsilon_m \le |\varepsilon_{y1j}| < \varepsilon
\end{aligned}
\tag{2.6.5}
$$

$$m_{S21} = \kappa_{z0}\frac{n_2}{\nu}\left(\frac{u_{y2}}{v_0} - 1\right)\mathrm{sgn}u_{y2} \quad \text{при } \varepsilon_m \le |\varepsilon_{y21}| < \varepsilon$$

$$m_{S22} = \kappa_{zM}\frac{n_2}{\nu}\left(\frac{u_{y2}}{v_0} - 1\right)\mathrm{sgn}u_{y2} \quad \text{при } \varepsilon_m \le |\varepsilon_{y22}| < \varepsilon \tag{2.6.6}$$

$$\varepsilon_{yij} = \frac{\varepsilon u_{yij}}{\omega_{ij}}, \quad \omega_{ij} = v_0 \quad (i, j = 1, 2), \quad \zeta = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_m}, \quad \nu = \frac{\varepsilon - \varepsilon_m}{\varepsilon} = 1 - \frac{1}{\zeta}$$

Здесь κ_0, κ_M, κ_{z0} и κ_{zM} удовлетворяют (2.2.19); ε_m введено при записи (2.2.12).

Перейдем к изучению системы (2.6.3)–(2.6.6) для случаев пренебрежимо малых и конечных по отношению к ε значений параметров $\kappa_{zM}\zeta$ и κ_{zM}/ν.

Будем рассматривать такие аппараты и условия движения, при которых выполнены неравенства

$$\frac{\kappa_0}{\kappa_M} > \frac{\kappa_{z0}}{\kappa_{zM}} \tag{2.6.7}$$

$$a_1 a_2 - i_z^2 > \left(\frac{\kappa_{z0} + \kappa_{zM}}{\kappa_0 + \kappa_M} + \frac{\kappa_{z0}}{\kappa_0}\right)\xi c \cdot \max(a_1, a_2), \quad \xi = \frac{\varepsilon_1}{\nu} \tag{2.6.8}$$

$$\frac{2\kappa_{z0}}{\kappa_{z0} + \kappa_{zM}} < \frac{n_2}{n_1} = \frac{a_1}{a_2} < 2 \tag{2.6.9}$$

2.6.1.1 Стабилизирующие моменты для всех колес не учитываются

При моделировании движения колесных аппаратов значениями стабилизирующих моментов часто пренебрегают, поскольку они существенно меньше моментов поперечных составляющих контактных сил относительно центра масс корпуса аппарата. В рамках рассматриваемой постановки задачи это означает, что $\kappa_{z0}, \kappa_{zM} \to 0$, тогда слагаемое с множителем $\varepsilon_1 c$ в третьем уравнении (2.6.3) может считаться пренебрежимо малым. На выбранном уровне точности изменение переменных v_y и ω_z из (2.6.3), (2.6.4) описывается линейной системой с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} v_y' &= -\frac{2\kappa_0 n_1}{v_0}(v_y + a_1\omega_z) - \frac{(\kappa_0 + \kappa_M)n_2}{v_0}(v_y - a_2\omega_z) \\ i_z^2\omega_z' &= -\frac{2\kappa_0 n_1 a_1}{2v_0}(v_y + a_1\omega_z) + \frac{(\kappa_0 + \kappa_M)n_2 a_2}{v_0}(v_y - a_2\omega_z) \end{aligned} \tag{2.6.10}$$

Ее положение равновесия

$$v_y = v_y^0 = 0, \quad \omega_z = \omega_z^0 = 0 \tag{2.6.11}$$

отвечает отсутствию заноса корпуса аппарата. Устойчивость этого положения удобнее исследовать, перейдя от переменных v_y, ω_z к переменным u_{y1}, u_{y2} при помощи линейной замены из (2.6.4)

$$u_{y1} = u_{y1j} = v_y + a_1\omega_z, \quad u_{y2} = u_{y2j} = v_y - a_2\omega_z \quad (j = 1, 2) \tag{2.6.12}$$

Замена (2.6.12) невырожденная, поскольку

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & -a_2 \end{vmatrix} = -a_2 - a_1 = -1 \neq 0$$

Подставив (2.6.12) в (2.6.10), получим систему в новых переменных

$$\begin{aligned} u'_{y1} &= -\frac{2\kappa_0 n_1}{v_0 i_z^2}(a_1^2 + i_z^2)u_{y1} + \frac{(\kappa_0 + \kappa_M)n_2}{v_0 i_z^2}(a_1 a_2 - i_z^2)u_{y2} \\ u'_{y2} &= \frac{2\kappa_0 n_1}{v_0 i_z^2}(a_1 a_2 - i_z^2)u_{y1} - \frac{(\kappa_0 + \kappa_M)n_2}{v_0 i_z^2}(a_2^2 + i_z^2)u_{y2} \end{aligned} \tag{2.6.13}$$

Построим фазовый портрет системы (2.6.13) на плоскости u_{y1}, u_{y2}. На прямой

$$u_{y2} = k_1 u_{y1}, \quad k_1 = \frac{2\kappa_0(a_1^2 + i_z^2)n_1}{(\kappa_0 + \kappa_M)(a_1 a_2 - i_z^2)n_2} \tag{2.6.14}$$

правая часть первого уравнения (2.6.13) обращается в нуль, а, значит, фазовые траектории на ней имеют вертикальные касательные. Прямая, на которой обращается в нуль правая часть второго уравнения системы (2.6.13), и фазовые траектории имеют горизонтальные касательные, имеет вид

$$u_{y2} = k_2 u_{y1}, \quad k_2 = \frac{2\kappa_0(a_1 a_2 - i_z^2)n_1}{(\kappa_0 + \kappa_M)(a_2^2 + i_z^2)n_2} \tag{2.6.15}$$

Из (2.6.8) следует неравенство

$$a_1 a_2 - i_z^2 > 0 \tag{2.6.16}$$

согласно которому имеем $k_1, k_2 > 0$. Сравнение угловых коэффициентов k_1 и k_2 прямых (2.6.14) и (2.6.15) дает

$$k_1 > k_2 > 0 \tag{2.6.17}$$

Положение равновесия системы (2.6.13)

$$u_{y1} = u_{y1}^0 = 0, \quad u_{y2} = u_{y2}^0 = 0 \tag{2.6.18}$$

отвечает условиям непроскальзывания колес аппарата в поперечном направлении. В соответствии с (2.6.12) в переменных v_y, ω_z ему соответствует точка (2.6.11).

Выясним его тип, составив характеристическое уравнение системы (2.6.13)

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{2\kappa_0 n_1}{v_0 i_z^2}(a_1^2+i_z^2)-\lambda & \dfrac{(\kappa_0+\kappa_M)n_2}{v_0 i_z^2}(a_1a_2-i_z^2) \\ \dfrac{2\kappa_0 n_1}{v_0 i_z^2}(a_1a_2-i_z^2) & -\dfrac{(\kappa_0+\kappa_M)n_2}{v_0 i_z^2}(a_2^2+i_z^2)-\lambda \end{vmatrix}=0 \tag{2.6.19}$$

которое принимает вид

$$\lambda^2+p\lambda+q=0 \tag{2.6.20}$$

После упрощающих преобразований с учетом формул

$$a_1+a_2=\frac{A_1}{A_1+A_2}+\frac{A_2}{A_1+A_2}=1$$

$$(a_1^2+i_z^2)(a_2^2+i_z^2)-(a_1a_2-i_z^2)^2=i_z^2 \tag{2.6.21}$$

получим

$$p=\frac{2\kappa_0(a_1^2+i_z^2)n_1+(\kappa_0+\kappa_M)(a_2^2+i_z^2)n_2}{v_0 i_z^2}>0$$

$$q=\frac{2\kappa_0(\kappa_0+\kappa_M)(a_1^2+i_z^2)(a_2^2+i_z^2)n_1n_2-2\kappa_0(\kappa_0+\kappa_M)(a_1a_2-i_z^2)^2n_1n_2}{v_0^2 i_z^4}= \tag{2.6.22}$$

$$=\frac{2\kappa_0(\kappa_0+\kappa_M)n_1n_2}{v_0^2 i_z^2}>0$$

Таким образом, точка покоя (2.6.18) асимптотически устойчива: $u_{y1}, u_{y2}\to 0$, следовательно, угловая и поперечная скорости корпуса аппарата при возрастании времени также стремятся к нулевым значениям.

Выражением для дискриминанта характеристического уравнения (2.6.19) служит

$$D=\frac{[2\kappa_0(a_1^2+i_z^2)n_1+(\kappa_0+\kappa_M)(a_2^2+i_z^2)n_2]^2-8i_z^2\kappa_0(\kappa_0+\kappa_M)n_1n_2}{v_0^2 i_z^4} \tag{2.6.23}$$

После упрощающих преобразований с учетом (2.6.21) имеем

$$D=\frac{4\kappa_0^2(a_1^2+i_z^2)^2n_1^2+(\kappa_0+\kappa_M)^2(a_2^2+i_z^2)^2n_2^2}{v_0^2 i_z^4}+$$
$$+\frac{4\kappa_0(\kappa_0+\kappa_M)[(a_1^2+i_z^2)(a_2^2+i_z^2)-2i_z^2]n_1n_2}{v_0^2 i_z^4}= \tag{2.6.24}$$

$$=\frac{4\kappa_0^2(a_1^2+i_z^2)^2n_1^2+(\kappa_0+\kappa_M)^2(a_2^2+i_z^2)^2n_2^2+4\kappa_0(\kappa_0+\kappa_M)[(a_1a_2-i_z^2)^2-i_z^2]n_1n_2}{v_0^2 i_z^4}=$$

$$= \frac{4\kappa_0^2(a_1^2+i_z^2)^2 n_1^2 - 4\kappa_0(\kappa_0+\kappa_M)(a_1^2+i_z^2)(a_2^2+i_z^2)n_1 n_2 + (\kappa_0+\kappa_M)^2(a_2^2+i_z^2)^2 n_2^2}{v_0^2 i_z^4} +$$

$$+ \frac{4\kappa_0(\kappa_0+\kappa_M)[(a_1a_2-i_z^2)^2 - i_z^2 + (a_1^2+i_z^2)(a_2^2+i_z^2)]n_1n_2}{v_0^2 i_z^4} =$$

$$= \frac{[2\kappa_0(a_1^2+i_z^2)n_1 - (\kappa_0+\kappa_M)(a_2^2+i_z^2)n_2]^2 + 8\kappa_0(\kappa_0+\kappa_M)(a_1a_2-i_z^2)^2 n_1 n_2}{v_0^2 i_z^4} > 0$$

Следовательно, корни уравнения (2.6.19) вещественные и отрицательные, то есть точка покоя (2.6.18), (2.6.11) — устойчивый узел на фазовой плоскости u_{y1}, u_{y2} (v_y, ω_z). Качественный график поведения траекторий вблизи изоклин показан на рис. 2.10.

Тем самым в рассматриваемом случае поперечная и угловая скорости аппарата при $t \to \infty$ стремятся к нулевым значениям, и его занос, спровоцированный импульсом $\omega_z(0,\mu)$ угловой скорости корпуса, уменьшается со временем.

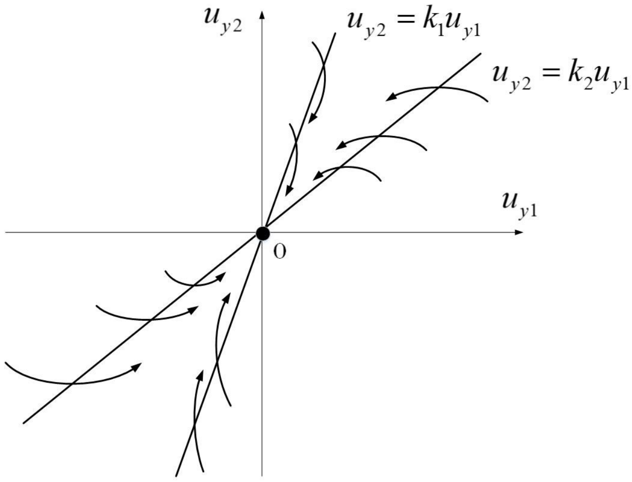


Рис. 2.10. Положение равновесия системы (2.6.13)

2.6.1.2 Движение аппарата, отвечающее возрастающему участку характеристики стабилизирующего момента

Перейдем к рассмотрению случая $|\varepsilon_{yij}| < \varepsilon_m$ $(i, j = 1, 2)$, когда стабилизирующий момент для всех колес имеет вид (2.6.5), что отвечает возрастающей линейной зоне характеристики $\chi(|\varepsilon_{yij}|)$ на рис. 2.3 (б). Уравнения изменения переменных v_y и ω_z системы (2.6.3) – (2.6.6) после пренебрежения членами $O(\varepsilon_1)$ (см. (2.2.21)) примут вид

$$v_y' = -\frac{2\kappa_0 n_1}{v_0}(v_y + a_1\omega_z) - \frac{(\kappa_0+\kappa_M)n_2}{v_0}(v_y - a_2\omega_z)$$

$$i_z^2\omega_z' = -\frac{2\kappa_0 n_1 a_1}{v_0}(v_y + a_1\omega_z) + \frac{(\kappa_0+\kappa_M)n_2 a_2}{v_0}(v_y - a_2\omega_z) - \tag{2.6.25}$$

$$-\frac{1}{v_0}\varepsilon_1\zeta c(2\kappa_{z0}n_1|v_y + a_1\omega_z| + (\kappa_{z0}+\kappa_{zM})n_2|v_y - a_2\omega_z|)$$

На принятом уровне точности уравнения (2.6.25) совпадают с (2.6.10). Таким образом, в этом случае занос аппарата уменьшается со временем, а стабилизирующий момент слабо влияет на этот процесс.

2.6.1.3 Движение аппарата, отвечающее убывающему участку характеристики стабилизирующего момента

Рассмотрим случай $\varepsilon_m \le |\varepsilon_{yij}| < \varepsilon$ $(i, j = 1, 2)$, когда стабилизирующие моменты для всех колес имеют вид (2.6.6), что отвечает убывающим линейным участкам характеристик $\chi(|\varepsilon_{yij}|)$ на рис. 2.3 (б). Уравнениями изменения переменных v_y и ω_z системы (2.6.3)–(2.6.6) служат

$$v'_y = -\frac{2\kappa_0 n_1}{v_0}(v_y + a_1\omega_z) - \frac{(\kappa_0 + \kappa_M)n_2}{v_0}(v_y - a_2\omega_z), \quad \xi = \frac{\varepsilon_1}{\nu} \tag{2.6.26}$$

$$i_z^2\omega'_z = -\frac{2\kappa_0 n_1 a_1}{v_0}(v_y + a_1\omega_z) + \frac{(\kappa_0 + \kappa_M)n_2 a_2}{v_0}(v_y - a_2\omega_z) + \frac{1}{v_0}\xi c\kappa_{z0} n_1 [2|v_y + a_1\omega_z| -$$

$$-2v_0 \operatorname{sgn}(v_y + a_1\omega_z) + \left(1 + \frac{\kappa_{zM}}{\kappa_{z0}}\right)\frac{n_2}{n_1}(|v_y - a_2\omega_z| - v_0 \operatorname{sgn}(v_y - a_2\omega_z))]$$

В случае $\nu \sim \varepsilon$ согласно (2.2.21) и (2.6.6) имеем

$$\xi \sim 1 \tag{2.6.27}$$

то есть стабилизирующий момент внесет более существенный вклад в динамику аппарата по сравнению со случаем из раздела 2.6.1.2; для $\nu \sim 1$ получаем $\xi \sim \varepsilon_1$, то есть стабилизирующий момент, как и в разделе 2.6.1.2, слабо влияет на динамику аппарата — в пренебрежении членами $O(\varepsilon_1)$ система (2.6.26) совпадает с (2.6.10). Проведем исследование движения аппарата в первом случае (2.6.27).

Прямые $AB : v_y = -a_1\omega_z$ и $CD : v_y = a_2\omega_z$ разбивают плоскость v_y, ω_z на четыре области (рис. 2.11) знакопостоянства входящих в (2.6.26) выражений

$$u_{y1} = v_y + a_1\omega_z, \quad u_{y2} = v_y - a_2\omega_z \tag{2.6.28}$$

отвечающие выполнению неравенств

$$BOC : u_{y1} > 0, u_{y2} > 0 \tag{2.6.29}$$

$$BOD : u_{y1} < 0, u_{y2} > 0 \tag{2.6.30}$$

$$AOD : u_{y1} < 0, u_{y2} < 0 \tag{2.6.31}$$

$$AOC : u_{y1} > 0, u_{y2} < 0 \tag{2.6.32}$$

В каждой из указанных областей (2.6.26) переходит в линейную неоднородную систему с постоянными коэффициентами. Исследуем систему (2.6.26) и обсудим ее фазовый портрет.

После перехода к переменным u_{y1}, u_{y2} по формулам (2.6.27) система (2.6.26) принимает вид

$$
\begin{aligned}
&u'_{y1} = -\frac{2\kappa_0 n_1}{v_0 i_z^2}(a_1^2 + i_z^2)u_{y1} + \frac{(\kappa_0 + \kappa_M)n_2}{v_0 i_z^2}(a_1 a_2 - i_z^2)u_{y2} + \\
&+\frac{\xi a_1 c}{v_0 i_z^2}\left[2\kappa_{z0} n_1(|u_{y1}| - v_0 \mathrm{sgn} u_{y1}) + (\kappa_{z0} + \kappa_{zM})\, n_2(|u_{y2}| - v_0 \mathrm{sgn} u_{y2})\right] \\
&u'_{y2} = \frac{2\kappa_0 n_1}{v_0 i_z^2}(a_1 a_2 - i_z^2)u_{y1} - \frac{(\kappa_0 + \kappa_M)n_2}{v_0 i_z^2}(a_2^2 + i_z^2)u_{y2} - \\
&-\frac{\xi a_2 c}{v_0 i_z^2}\left[2\kappa_{z0} n_1(|u_{y1}| - v_0 \mathrm{sgn} u_{y1}) + (\kappa_{z0} + \kappa_{zM})\, n_2(|u_{y2}| - v_0 \mathrm{sgn} u_{y2})\right]
\end{aligned}
\qquad (2.6.33)
$$

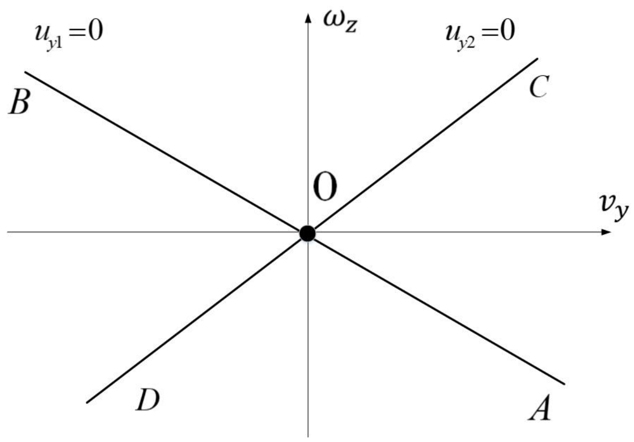


Рис. 2.11. Разбиение плоскости v_y, ω_z прямыми AB и CD на области знакопостоянства поперечных составляющих u_{y1} и u_{y2} скоростей точек контакта передних и задних колес аппарата с опорной плоскостью

Область BOC **(неравенство (2.6.29)).** Здесь система (2.6.33) принимает вид

$$
\begin{aligned}
&u'_{y1} = -\frac{2\kappa_0 n_1}{v_0 i_z^2}(a_1^2 + i_z^2)u_{y1} + \frac{(\kappa_0 + \kappa_M)n_2}{v_0 i_z^2}(a_1 a_2 - i_z^2)u_{y2} + \\
&+\frac{\xi a_1 c}{v_0 i_z^2}\left[2\kappa_{z0} n_1(u_{y1} - v_0) + (\kappa_{z0} + \kappa_{zM}) n_2(u_{y2} - v_0)\right] \\
&u'_{y2} = \frac{2\kappa_0 n_1}{v_0 i_z^2}(a_1 a_2 - i_z^2)u_{y1} - \frac{(\kappa_0 + \kappa_M)n_2}{v_0 i_z^2}(a_2^2 + i_z^2)u_{y2} - \\
&-\frac{\xi a_2 c}{v_0 i_z^2}\left[2\kappa_{z0} n_1(u_{y1} - v_0) + (\kappa_{z0} + \kappa_{zM}) n_2(u_{y2} - v_0)\right]
\end{aligned}
\qquad (2.6.34)
$$

Исследуем свойства фазового портрета системы (2.6.34) на плоскости u_{y1}, u_{y2} (v_y, ω_z) в области (2.6.29). На прямой

$$u_{y2} = k_3 u_{y1} + b_3, \quad k_3 = \frac{\kappa_0(a_1^2 + i_z^2) - \kappa_{z0} a_1 c\xi}{(\kappa_0 + \kappa_M)(a_1 a_2 - i_z^2) + (\kappa_{z0} + \kappa_{zM}) a_1 c\xi} \cdot \frac{2n_1}{n_2}$$
$$b_3 = \frac{(2\kappa_{z0} n_1 + (\kappa_{z0} + \kappa_{zM}) n_2)\, a_1 v_0 c\xi}{(\kappa_0 + \kappa_M)(a_1 a_2 - i_z^2) + (\kappa_{z0} + \kappa_{zM}) a_1 c\xi} \cdot \frac{1}{n_2} \tag{2.6.35}$$

правая часть первого уравнения (2.6.34) обращается в нуль, а, значит, фазовые траектории имеют вертикальные касательные. Прямая, на которой обращается в нуль правая часть второго уравнения системы (2.6.34), и фазовые траектории имеют горизонтальные касательные, имеет вид

$$u_{y2} = k_4 u_{y1} + b_4, \quad k_4 = \frac{\kappa_0(a_1 a_2 - i_z^2) - \kappa_{z0} a_2 c\xi}{(\kappa_0 + \kappa_M)(a_2^2 + i_z^2) + (\kappa_{z0} + \kappa_{zM}) a_2 c\xi} \cdot \frac{2n_1}{n_2}$$
$$b_4 = \frac{(2\kappa_{z0} n_1 + (\kappa_{z0} + \kappa_{zM}) n_2)\, a_2 v_0 c\xi}{(\kappa_0 + \kappa_M)(a_2^2 + i_z^2) + (\kappa_{z0} + \kappa_{zM}) a_2 c\xi} \cdot \frac{1}{n_2} \tag{2.6.36}$$

Из (2.6.16) следуют неравенства b_3, $b_4 > 0$. Из (2.6.7), (2.6.8) имеем

$$\frac{\kappa_0}{\kappa_{z0}} > \frac{\kappa_0 + \kappa_M}{\kappa_{z0} + \kappa_{zM}} > \frac{a_2}{a_1 a_2 - i_z^2} c\xi > \frac{a_1}{a_1^2 + i_z^2} c\xi \tag{2.6.37}$$

откуда k_3, $k_4 > 0$. Сравнение коэффициентов k_3 и k_4, b_3 и b_4 прямых (2.6.14) и (2.6.15) с учетом (2.6.7), (2.6.21) приводит к неравенствам

$$k_3 > k_4 > 0, \qquad b_3 > b_4 > 0 \tag{2.6.38}$$

Положение равновесия системы (2.6.34)

$$u_{y1} = u_{y1}^0 = -\frac{b_3 - b_4}{k_3 - k_4}, \qquad u_{y2} = u_{y2}^0 = \frac{k_3 b_4 - k_4 b_3}{k_3 - k_4} \tag{2.6.39}$$

– точка пересечения прямых (2.6.35) и (2.6.36). Соответствующие ему значения $v_y = v_y^0$ и $\omega_z = \omega_z^0$ находятся подстановкой (2.6.39) в (2.6.28). В силу неоднородности (2.6.34) его координаты отличны от нуля. Учитывая неравенства (2.6.38), получаем, что положение равновесия находится во второй (область (2.6.30)) или третьей (область (2.6.31)) координатной четверти и не принадлежит исследуемой области BOC (2.6.29). Для исследования устойчивости этого положения равновесия, составим характеристическое уравнение системы (2.6.34) в малых отклонениях от положения равновесия, которое в силу линейности этой системы совпадает с характеристическим уравнением его однородной части

$$\left|\begin{matrix} \dfrac{-2\kappa_0 n_1(a_1^2+i_z^2)+2\kappa_{z0}n_1a_1c\xi}{i_z^2v_0}-\lambda & \dfrac{(\kappa_0+\kappa_M)n_2(a_1a_2-i_z^2)+(\kappa_{z0}+\kappa_{zM})\,n_2a_1c\xi}{i_z^2v_0} \\ \\ \dfrac{2\kappa_0 n_1(a_1a_2-i_z^2)-2\kappa_{z0}n_1a_2c\xi}{i_z^2v_0} & \dfrac{-(\kappa_0+\kappa_M)n_2(a_2^2+i_z^2)-(\kappa_{z0}+\kappa_{zM})\,n_2a_2c\xi}{i_z^2v_0}-\lambda \\ \end{matrix}\right|=0 \tag{2.6.40}$$

которое принимает вид

$$\lambda^2+p\lambda+q=0 \tag{2.6.41}$$

где

$$p=\frac{2\kappa_0n_1(a_1^2+i_z^2)+(\kappa_0+\kappa_M)n_2(a_2^2+i_z^2)+(\kappa_{z0}+\kappa_{zM})\,n_2a_2c\xi-2\kappa_{z0}n_1a_1c\xi}{v_0i_z^2}$$

$$q=\frac{[2\kappa_0(a_1^2+i_z^2)-2\kappa_{z0}a_1c\xi]\,[(\kappa_0+\kappa_M)(a_2^2+i_z^2)+(\kappa_{z0}+\kappa_{zM})\,a_2c\xi]\,n_1n_2}{i_z^4v_0^2}-$$

$$-\frac{[2\kappa_0(a_1a_2-i_z^2)-2\kappa_{z0}a_2c\xi]\,[(\kappa_0+\kappa_M)(a_1a_2-i_z^2)+(\kappa_{z0}+\kappa_{zM})\,a_1c\xi]\,n_1n_2}{i_z^4v_0^2}=$$

$$=[\kappa_0(\kappa_0+\kappa_M)+(\kappa_{z0}+\kappa_{zM})\,\kappa_0c\xi-\kappa_{z0}c(\kappa_0+\kappa_M)\xi]\cdot\frac{2n_1n_2}{i_z^2v_0^2}$$

Из (2.6.8) вытекают неравенства

$$\frac{a_1^2+i_z^2}{a_1}>\frac{a_1a_2-i_z^2}{a_2}>\frac{\kappa_{z0}}{\kappa_0}c\xi$$

следовательно

$$2\kappa_0(a_1^2+i_z^2)-2\kappa_{z0}a_1c\xi>0$$

и $p>0$. Аналогично из (2.6.7) имеем

$$\frac{\kappa_0}{\kappa_{z0}}>\frac{\kappa_0+\kappa_M}{\kappa_{z0}+\kappa_{zM}}$$

откуда

$$(\kappa_{z0}+\kappa_{zM})\,\kappa_0c\xi-\kappa_{z0}(\kappa_0+\kappa_M)c\xi>0$$

и $q>0$.

Таким образом, все коэффициенты полинома (2.6.41) положительны, следовательно, определяемое из (2.6.39) положение равновесия $S(u^0_{y1}, u^0_{y2})$ линейной неоднородной системы (2.6.34), лежащее за пределами исследуемой области определения BOC, асимптотически устойчиво. Фазовые траектории при $t \to \infty$ стремятся к нему из любой точки этой области, и, тем самым, в определенный момент времени покидают ее, при этом поперечная и угловая скорости корпуса аппарата v_y и ω_z не стремятся к нулевым значениям, как это было при исследовании систем (2.6.12) или (2.6.25) (на рис. 2.12 в качестве примера показан случай, когда положение равновесия S находится в области BOD).

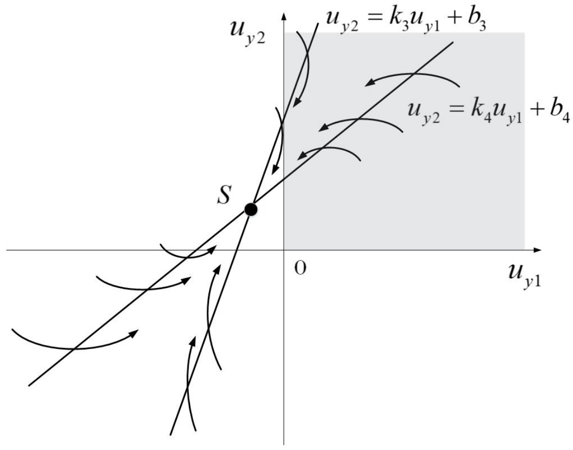


Рис. 2.12. Положение равновесия S системы (2.6.34) (ее область определения заштрихована)

Область BOD **(неравенство (2.6.30)).** В этой области система (2.6.33) принимает вид

$$
\begin{aligned}
u'_{y1} &= -\frac{2\kappa_0 n_1}{v_0 i_z^2}(a_1^2 + i_z^2)u_{y1} + \frac{(\kappa_0 + \kappa_M)n_2}{v_0 i_z^2}(a_1 a_2 - i_z^2)u_{y2} + \\
&+ \frac{\xi a_1 c}{v_0 i_z^2}\left[2\kappa_{z0} n_1(-u_{y1} + v_0) + (\kappa_{z0} + \kappa_{zM})n_2(u_{y2} - v_0)\right] \\
u'_{y2} &= \frac{2\kappa_0 n_1}{v_0 i_z^2}(a_1 a_2 - i_z^2)u_{y1} - \frac{(\kappa_0 + \kappa_M)n_2}{v_0 i_z^2}(a_2^2 + i_z^2)u_{y2} - \\
&- \frac{\xi a_2 c}{v_0 i_z^2}\left[2\kappa_{z0} n_1(-u_{y1} + v_0) + (\kappa_{z0} + \kappa_{zM})n_2(u_{y2} - v_0)\right]
\end{aligned}
\tag{2.6.42}
$$

Изучим свойства фазового портрета системы (2.6.42) на плоскости u_{y1}, u_{y2} (v_y, ω_z) в области (2.6.30). Уравнением прямой, в точках которой правая часть первого уравнения (2.6.42) обращается в нуль, а, значит, фазовые траектории имеют вертикальные касательные, служит

$$
\begin{aligned}
&u_{y2} = k_5 u_{y1} + b_5 \\
&k_5 = \frac{\kappa_0(a_1^2 + i_z^2) + \kappa_{z0} a_1 c\xi}{(\kappa_0 + \kappa_M)(a_1 a_2 - i_z^2) + (\kappa_{z0} + \kappa_{zM})a_1 c\xi} \cdot \frac{2n_1}{n_2} > 0 \\
&b_5 = \frac{-\left(2\kappa_{z0} n_1 - (\kappa_{z0} + \kappa_{zM})n_2\right) a_1 v_0 c\xi}{(\kappa_0 + \kappa_M)(a_1 a_2 - i_z^2) + (\kappa_{z0} + \kappa_{zM})a_1 c\xi} \cdot \frac{1}{n_2} < 0
\end{aligned}
\tag{2.6.43}
$$

Прямая, на которой обращается в нуль правая часть второго уравнения системы (2.6.42), и фазовые траектории имеют горизонтальные касательные, имеет вид

$$u_{y2} = k_6 u_{y1} + b_6, \quad k_6 = \frac{\kappa_0(a_1 a_2 - i_z^2) + \kappa_{z0} a_2 c\xi}{(\kappa_0 + \kappa_M)(a_2^2 + i_z^2) + (\kappa_{z0} + \kappa_{zM}) a_2 c\xi} \cdot \frac{2n_1}{n_2}$$
$$b_6 = \frac{-\left(2\kappa_{z0} n_1 - (\kappa_{z0} + \kappa_{zM}) n_2\right) a_2 v_0 c\xi}{(\kappa_0 + \kappa_M)(a_2^2 + i_z^2) + (\kappa_{z0} + \kappa_{zM}) a_2 c\xi} \cdot \frac{1}{n_2} \qquad (2.6.44)$$

Из (2.6.16) вытекают неравенства k_5, $k_6 > 0$, b_5, $b_6 < 0$. Сравнение коэффициентов k_5 и k_6, b_5 и b_6 прямых (2.6.43) и (2.6.44) с учетом (2.6.9), (2.6.16), (2.6.21) приводит к неравенствам

$$k_5 > k_6 > 0, \qquad b_5 < b_6 < 0 \qquad (2.6.45)$$

Координатами положения равновесия системы (2.6.42) — точки пересечения прямых (2.6.43) и (2.6.44), служат

$$u_{y1} = u_{y1}^0 = -\frac{b_5 - b_6}{k_5 - k_6}, \qquad u_{y2} = u_{y2}^0 = \frac{k_5 b_6 - k_6 b_5}{k_5 - k_6} \qquad (2.6.46)$$

Соответствующие ему значения $v_y = v_y^0$ и $\omega_z = \omega_z^0$ находятся подстановкой (2.6.46) в (2.6.28). В силу неоднородности (2.6.42) координаты (2.6.46) отличны от нуля. Учитывая (2.6.45), получаем, что положение равновесия находится в первой (область (2.6.29)) или четвертой (область (2.6.32)) координатной четверти и не принадлежит исследуемой области BOD (2.6.30). Для исследования устойчивости этого положения равновесия, составим характеристическое уравнение системы (2.6.42) в малых отклонениях от положения равновесия

$$\begin{vmatrix} \dfrac{-2\kappa_0 n_1(a_1^2 + i_z^2) - 2\kappa_{z0} a_1 c\xi}{i_z^2 v_0} - \lambda & \dfrac{(\kappa_0 + \kappa_M) n_2 (a_1 a_2 - i_z^2) + (\kappa_{z0} + \kappa_{zM}) n_2 a_1 c\xi}{i_z^2 v_0} \\ \dfrac{2\kappa_0 n_1 (a_1 a_2 - i_z^2) + 2\kappa_{z0} n_1 a_2 c\xi}{i_z^2 v_0} & \dfrac{-(\kappa_0 + \kappa_M) n_2 (a_2^2 + i_z^2) - (\kappa_{z0} + \kappa_{zM}) n_2 a_2 c\xi}{i_z^2 v_0} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.6.47)$$

которое имеет вид

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \qquad (2.6.48)$$

где

$$p = \frac{2\kappa_0 n_1(a_1^2 + i_z^2) + (\kappa_0 + \kappa_M) n_2 (a_2^2 + i_z^2) + (\kappa_{z0} + \kappa_{zM})\, n_2 a_2 c\xi + 2\kappa_{z0} n_1 a_1 c\xi}{v_0 i_z^2} > 0$$

$$q=\frac{\left[2\kappa_0(a_1^2+i_z^2)+2\kappa_{z0}a_1c\xi\right]\left[(\kappa_0+\kappa_M)(a_2^2+i_z^2)+(\kappa_{z0}+\kappa_{zM})\,a_2c\xi\right]n_1n_2}{i_z^4v_0^2}-$$

$$-\frac{\left[2\kappa_0(a_1a_2-i_z^2)+2\kappa_{z0}a_2c\xi\right]\left[(\kappa_0+\kappa_M)(a_1a_2-i_z^2)+(\kappa_{z0}+\kappa_{zM})\,a_1c\xi\right]n_1n_2}{i_z^4v_0^2}=$$

$$=\left[\kappa_0(\kappa_0+\kappa_M)+(\kappa_{z0}+\kappa_{zM})\,\kappa_0c\xi+\kappa_{z0}c(\kappa_0+\kappa_M)\xi\right]\cdot\frac{2n_1n_2}{i_z^2v_0^2}$$

Поскольку все коэффициенты полинома (2.6.48) положительны, определяемое из (2.6.46) положение равновесия $S(u_{y1}^0,u_{y2}^0)$ линейной неоднородной системы (2.6.42), лежащее за пределами исследуемой области BOD, асимптотически устойчиво. Фазовые траектории при $t\to\infty$ стремятся к нему из любой точки этой области, то есть в определенный момент времени покидают ее, при этом поперечная и угловая скорости корпуса аппарата v_y и ω_z не стремятся к нулевым значениям, как это было при исследовании систем (2.6.12) или (2.6.25).

Область AOD (неравенство (2.6.31)). Здесь система (2.6.33) принимает вид

$$\begin{aligned}
u'_{y1}&=-\frac{2\kappa_0n_1}{v_0i_z^2}(a_1^2+i_z^2)u_{y1}+\frac{(\kappa_0+\kappa_M)n_2}{v_0i_z^2}(a_1a_2-i_z^2)u_{y2}+\\
&+\frac{\xi a_1c}{v_0i_z^2}\left[2\kappa_{z0}n_1(-u_{y1}+v_0)+(\kappa_{z0}+\kappa_{zM})n_2(-u_{y2}+v_0)\right]\\
u'_{y2}&=\frac{2\kappa_0n_1}{v_0i_z^2}(a_1a_2-i_z^2)u_{y1}-\frac{(\kappa_0+\kappa_M)n_2}{v_0i_z^2}(a_2^2+i_z^2)u_{y2}-\\
&-\frac{\xi a_2c}{v_0i_z^2}\left[2\kappa_{z0}n_1(-u_{y1}+v_0)+(\kappa_{z0}+\kappa_{zM})n_2(-u_{y2}+v_0)\right]
\end{aligned}\qquad(2.6.49)$$

Проведем анализ фазового портрета системы (2.6.49) на плоскости u_{y1}, u_{y2} (v_y,ω_z) в области (2.6.31). На прямой

$$\begin{aligned}
&u_{y2}=k_7u_{y1}+b_7\\
&k_7=\frac{\kappa_0(a_1^2+i_z^2)+\kappa_{z0}a_1c\xi}{(\kappa_0+\kappa_M)(a_1a_2-i_z^2)-(\kappa_{z0}+\kappa_{zM})a_1c\xi}\cdot\frac{2n_1}{n_2}\\
&b_7=\frac{-\left(2\kappa_{z0}n_1+(\kappa_{z0}+\kappa_{zM})n_2\right)a_1v_0c\xi}{(\kappa_0+\kappa_M)(a_1a_2-i_z^2)-(\kappa_{z0}+\kappa_{zM})a_1c\xi}\cdot\frac{1}{n_2}
\end{aligned}\qquad(2.6.50)$$

правая часть первого уравнения (2.6.49) обращается в нуль — фазовые траектории имеют вертикальные касательные. Прямая, на которой обращается в нуль правая часть второго уравнения системы (2.6.49), и фазовые траектории имеют горизонтальные касательные, имеет вид

$$u_{y2} = k_8 u_{y1} + b_8, \quad k_8 = \frac{\kappa_0(a_1a_2 - i_z^2) + \kappa_{z0}a_2c\xi}{(\kappa_0+\kappa_M)(a_2^2+i_z^2) - (\kappa_{z0}+\kappa_{zM})a_2c\xi} \cdot \frac{2n_1}{n_2}$$

$$b_8 = \frac{-\left(2\kappa_{z0}n_1 + (\kappa_{z0}+\kappa_{zM})n_2\right)a_2v_0c\xi}{(\kappa_0+\kappa_M)(a_2^2+i_z^2) - (\kappa_{z0}+\kappa_{zM})a_2c\xi} \cdot \frac{1}{n_2} \tag{2.6.51}$$

Из (2.6.8) вытекают неравенства

$$\frac{a_1a_2 - i_z^2}{a_1} > \frac{\kappa_{z0}+\kappa_{zM}}{\kappa_0+\kappa_M}c\xi$$

следовательно, знаменатели правых частей в выражениях для k_7 и b_7 положительны, и $k_7 > 0$, $b_7 < 0$. Аналогично из (2.6.8) получаем неравенства

$$\frac{a_2^2 + i_z^2}{a_2} > \frac{a_1a_2 - i_z^2}{a_1} > \frac{\kappa_{z0}+\kappa_{zM}}{\kappa_0+\kappa_M}c\xi$$

обеспечивающие положительность знаменателей правых частей в выражениях для k_8 и b_8, откуда следует $k_8 > 0$, $b_8 < 0$.

Легко проверить, что $b_7 < b_8$. Из неравенств $a_1, a_2 < 1$ и (2.6.8) имеем

$$1 > \frac{a_1a_2 - i_z^2}{\max(a_1, a_2)} > \left(\frac{\kappa_{z0}+\kappa_{zM}}{\kappa_0+\kappa_M} + \frac{\kappa_{z0}}{\kappa_0}\right)c\xi > \left(\frac{\kappa_{z0}+\kappa_{zM}}{\kappa_0+\kappa_M} - \frac{\kappa_{z0}}{\kappa_0}\right)c\xi$$

откуда получаем неравенство

$$\kappa_0(\kappa_0+\kappa_M) - (\kappa_{z0}+\kappa_{zM})\,\kappa_0c\xi + \kappa_{z0}(\kappa_0+\kappa_M)c\xi > 0$$

согласно которому $k_7 > k_8$. Таким образом, сравнение коэффициентов k_7 и k_8, b_7 и b_8 прямых (2.6.50) и (2.6.51) приводит к неравенствам

$$k_7 > k_8 > 0, \qquad b_7 < b_8 < 0 \tag{2.6.52}$$

Положение равновесия системы (2.6.49)

$$u_{y1} = u_{y1}^0 = -\frac{b_7 - b_8}{k_7 - k_8}, \qquad u_{y2} = u_{y2}^0 = \frac{k_7b_8 - k_8b_7}{k_7 - k_8} \tag{2.6.53}$$

– точка пересечения прямых (2.6.50) и (2.6.51). Соответствующие ему значения $v_y = v_y^0$ и $\omega_z = \omega_z^0$ находятся подстановкой (2.6.53) в (2.6.28). В силу неоднородности (2.6.49) его координаты отличны от нуля. Учитывая (2.6.52), получаем, что положение равновесия находится в первой (область (2.6.29)) или четвертой (область (2.6.32)) координатной четверти и не принадлежит исследуемой области AOD (2.6.31). Характеристическое уравнение системы (2.6.49) в малых отклонениях от положения равновесия

$$\begin{vmatrix} \dfrac{-2\kappa_0 n_1(a_1^2+i_z^2)-2\kappa_{z0}n_1a_1c\xi}{i_z^2v_0}-\lambda & \dfrac{(\kappa_0+\kappa_M)n_2(a_1a_2-i_z^2)-(\kappa_{z0}+\kappa_{zM})\,n_2a_1c\xi}{i_z^2v_0} \\ \dfrac{2\kappa_0 n_1(a_1a_2-i_z^2)+2\kappa_{z0}n_1a_2c\xi}{i_z^2v_0} & \dfrac{-(\kappa_0+\kappa_M)n_2(a_2^2+i_z^2)+(\kappa_{z0}+\kappa_{zM})\,n_2a_2c\xi}{i_z^2v_0}-\lambda \end{vmatrix}=0 \tag{2.6.54}$$

имеет вид

$$\lambda^2+p\lambda+q=0 \tag{2.6.55}$$

где

$$p=\frac{2\kappa_0 n_1(a_1^2+i_z^2)+(\kappa_0+\kappa_M)n_2(a_2^2+i_z^2)-(\kappa_{z0}+\kappa_{zM})\,n_2a_2c\xi+2\kappa_{z0}n_1a_1c\xi}{v_0i_z^2}$$

$$q=\frac{[2\kappa_0(a_1^2+i_z^2)+2\kappa_{z0}a_1c\xi]\,[(\kappa_0+\kappa_M)(a_2^2+i_z^2)-(\kappa_{z0}+\kappa_{zM})\,a_2c\xi]\,n_1n_2}{i_z^4v_0^2}-$$

$$-\frac{[2\kappa_0(a_1a_2-i_z^2)+2\kappa_{z0}a_2c\xi]\,[(\kappa_0+\kappa_M)(a_1a_2-i_z^2)-(\kappa_{z0}+\kappa_{zM})\,a_1c\xi]\,n_1n_2}{i_z^4v_0^2}=$$

$$=[\kappa_0(\kappa_0+\kappa_M)-(\kappa_{z0}+\kappa_{zM})\,\kappa_0c\xi+(\kappa_0+\kappa_M)\kappa_{z0}c\xi]\cdot\frac{2n_1n_2}{i_z^2v_0^2}$$

Из (2.6.8) вытекают неравенства

$$\frac{a_2^2+i_z^2}{a_2}>\frac{a_1a_2-i_z^2}{a_1}>\frac{\kappa_{z0}+\kappa_{zM}}{\kappa_0+\kappa_M}c\xi$$

согласно которым

$$(\kappa_0+\kappa_M)(a_2^2+i_z^2)-(\kappa_{z0}+\kappa_{zM})\,a_2c\xi>0$$

и $p>0$. Из неравенств $a_1, a_2<1$ и (2.6.8) получаем

$$1>\frac{a_1a_2-i_z^2}{\max(a_1,a_2)}>\frac{\kappa_{z0}+\kappa_{zM}}{\kappa_0+\kappa_M}c\xi$$

Следовательно,

$$\kappa_0(\kappa_0+\kappa_M)-(\kappa_{z0}+\kappa_{zM})\,\kappa_0c\xi>0$$

и $q > 0$. Таким образом, все коэффициенты полинома (2.6.55) положительны. Положение равновесия $S(u_{y1}^0, u_{y2}^0)$ (2.6.53) системы (2.6.49) асимптотически устойчиво и лежит за пределами исследуемой области определения AOD, а значит, фазовые траектории в определенный момент времени покидают ее, при этом поперечная и угловая скорости корпуса аппарата v_y и ω_z не стремятся к нулевым значениям, как это было при исследовании систем (2.6.12) или (2.6.25).

Область AOC (неравенство (2.6.32)). Здесь система (2.6.33) принимает вид

$$\begin{aligned}
u'_{y1} &= -\frac{2\kappa_0 n_1}{v_0 i_z^2}(a_1^2 + i_z^2)u_{y1} + \frac{(\kappa_0 + \kappa_M)n_2}{v_0 i_z^2}(a_1 a_2 - i_z^2)u_{y2} + \\
&+ \frac{\xi a_1 c}{v_0 i_z^2}\left[2\kappa_{z0} n_1 (u_{y1} - v_0) + (\kappa_{z0} + \kappa_{zM}) n_2 (-u_{y2} + v_0)\right] \\
u'_{y2} &= \frac{2\kappa_0 n_1}{v_0 i_z^2}(a_1 a_2 - i_z^2)u_{y1} - \frac{(\kappa_0 + \kappa_M)n_2}{v_0 i_z^2}(a_2^2 + i_z^2)u_{y2} - \\
&- \frac{\xi a_2 c}{v_0 i_z^2}\left[2\kappa_{z0} n_1 (u_{y1} - v_0) + (\kappa_{z0} + \kappa_{zM}) n_2 (-u_{y2} + v_0)\right]
\end{aligned} \tag{2.6.56}$$

Исследуем свойства фазового портрета системы (2.6.56) на плоскости u_{y1}, u_{y2} (v_y, ω_z) в области (2.6.32). Уравнением прямой, в точках которой правая часть первого уравнения (2.6.56) обращается в нуль, то есть фазовые траектории имеют вертикальные касательные, служит

$$\begin{aligned}
&u_{y2} = k_9 u_{y1} + b_9 \\
&k_9 = \frac{\kappa_0(a_1^2 + i_z^2) - \kappa_{z0} a_1 c\xi}{(\kappa_0 + \kappa_M)(a_1 a_2 - i_z^2) - (\kappa_{z0} + \kappa_{zM}) a_1 c\xi} \cdot \frac{2n_1}{n_2} \\
&b_9 = \frac{\left(2\kappa_{z0} n_1 - (\kappa_{z0} + \kappa_{zM}) n_2\right) a_1 v_0 c\xi}{(\kappa_0 + \kappa_M)(a_1 a_2 - i_z^2) - (\kappa_{z0} + \kappa_{zM}) a_1 c\xi} \cdot \frac{1}{n_2}
\end{aligned} \tag{2.6.57}$$

Прямая, на которой обращается в нуль правая часть второго уравнения системы (2.6.56), и фазовые траектории имеют горизонтальные касательные, имеет вид

$$\begin{aligned}
&u_{y2} = k_{10} u_{y1} + b_{10}, \quad k_{10} = \frac{\kappa_0(a_1 a_2 - i_z^2) - \kappa_{z0} a_2 c\xi}{(\kappa_0 + \kappa_M)(a_2^2 + i_z^2) - (\kappa_{z0} + \kappa_{zM}) a_2 c\xi} \cdot \frac{2n_1}{n_2} \\
&b_{10} = \frac{\left(2\kappa_{z0} n_1 - (\kappa_{z0} + \kappa_{zM}) n_2\right) a_2 v_0 c\xi}{(\kappa_0 + \kappa_M)(a_2^2 + i_z^2) - (\kappa_{z0} + \kappa_{zM}) a_2 c\xi} \cdot \frac{1}{n_2}
\end{aligned} \tag{2.6.58}$$

Из (2.6.8) вытекают неравенства

$$\frac{a_1^2+i_z^2}{a_1} > \frac{a_1a_2-i_z^2}{a_2} > \frac{\kappa_{z0}}{\kappa_0}c\xi$$

следовательно, числитель правой части в выражении для k_9 положителен. Также из (2.6.8) получаем неравентсва

$$\frac{a_1a_2-i_z^2}{a_1} > \frac{\kappa_{z0}+\kappa_{zM}}{\kappa_0+\kappa_M}c\xi$$

в соответствии с которыми знаменатели правых частей в выражениях для k_9 и b_9 положительны, и $k_9>0$, $b_9>0$. Аналогично из (2.6.8) имеем

$$\frac{a_1a_2-i_z^2}{a_1} > \frac{\kappa_{z0}}{\kappa_0}c\xi$$

следовательно, числитель правой части в выражении для k_{10} положителен. Также из (2.6.8) имеем

$$\frac{a_2^2+i_z^2}{a_2} > \frac{a_1a_2-i_z^2}{a_1} > \frac{\kappa_{z0}+\kappa_{zM}}{\kappa_0+\kappa_M}c\xi$$

в результате чего знаменатели правых частей в выражениях для k_{10} и b_{10} положительны, и $k_{10}>0$, $b_{10}>0$.

Легко проверить, что $b_9>b_{10}$. Из неравенств $a_1,a_2<1$ и (2.6.8) можно получить

$$1 > \frac{a_1a_2-i_z^2}{\max(a_1,a_2)} > \left(\frac{\kappa_{z0}+\kappa_{zM}}{\kappa_0+\kappa_M}+\frac{\kappa_{z0}}{\kappa_0}\right)c\xi$$

откуда следует неравенство

$$\kappa_0(\kappa_0+\kappa_M)-(\kappa_{z0}+\kappa_{zM})\,\kappa_0c\xi-(\kappa_0+\kappa_M)\kappa_{z0}c\xi>0$$

согласно которому $k_9>k_{10}$. Тем самым сравнение коэффициентов k_9 и k_{10}, b_9 и b_{10} прямых (2.6.57) и (2.6.58) приводит к неравенствам

$$k_9>k_{10}>0, \qquad b_9>b_{10}>0 \tag{2.6.59}$$

Положение равновесия системы (2.6.56)

$$u_{y1}=u_{y1}^0=-\frac{b_9-b_{10}}{k_9-k_{10}}, \qquad u_{y2}=u_{y2}^0=\frac{k_9b_{10}-k_{10}b_9}{k_9-k_{10}} \tag{2.6.60}$$

– точка пересечения прямых (2.6.57) и (2.6.58). Соответствующие ему значения $v_y=v_y^0$ и $\omega_z=\omega_z^0$ находятся подстановкой (2.6.60) в (2.6.28). В силу неоднородности (2.6.56) его координаты отличны от нуля. Учитывая (2.6.59), получаем, что положение равновесия находится во второй (область (2.6.30)) или третьей (область (2.6.31)) координатной четверти и не принадлежит исследуемой области AOC (2.6.32). Характеристическое уравнение системы (2.6.56) в малых отклонениях от положения равновесия

$$\begin{vmatrix} \dfrac{-2\kappa_0 n_1(a_1^2+i_z^2)+2\kappa_{z0}n_1a_1c\xi}{i_z^2v_0}-\lambda & \dfrac{(\kappa_0+\kappa_M)n_2(a_1a_2-i_z^2)-(\kappa_{z0}+\kappa_{zM})\,n_2a_1c\xi}{i_z^2v_0} \\ \\ \dfrac{2\kappa_0 n_1(a_1a_2-i_z^2)-2\kappa_{z0}n_1a_2c\xi}{i_z^2v_0} & \dfrac{-(\kappa_0+\kappa_M)n_2(a_2^2+i_z^2)+(\kappa_{z0}+\kappa_{zM})\,n_2a_2c\xi}{i_z^2v_0}-\lambda \\ \end{vmatrix}=0 \tag{2.6.61}$$

имеет вид

$$\lambda^2+p\lambda+q=0 \tag{2.6.62}$$

где

$$p=\frac{2\kappa_0n_1(a_1^2+i_z^2)+(\kappa_0+\kappa_M)n_2(a_2^2+i_z^2)-(\kappa_{z0}+\kappa_{zM})\,n_2a_2c\xi-2\kappa_{z0}n_1a_1c\xi}{v_0i_z^2}$$

$$q=\frac{[2\kappa_0(a_1^2+i_z^2)-2\kappa_{z0}a_1c\xi]\,[(\kappa_0+\kappa_M)(a_2^2+i_z^2)-(\kappa_{z0}+\kappa_{zM})\,a_2c\xi]\,n_1n_2}{i_z^4v_0^2}-$$

$$-\frac{[2\kappa_0(a_1a_2-i_z^2)-2\kappa_{z0}a_2c\xi]\,[(\kappa_0+\kappa_M)(a_1a_2-i_z^2)-(\kappa_{z0}+\kappa_{zM})\,a_1c\xi]\,n_1n_2}{i_z^4v_0^2}=$$

$$=[\kappa_0(\kappa_0+\kappa_M)-(\kappa_{z0}+\kappa_{zM})\,\kappa_0c\xi-(\kappa_0+\kappa_M)\kappa_{z0}c\xi]\cdot\frac{2n_1n_2}{i_z^2v_0^2}$$

Из (2.6.8) получаем

$$\frac{a_1^2+i_z^2}{a_1}>\frac{a_1a_2-i_z^2}{a_2}>\frac{\kappa_{z0}}{\kappa_0}c\xi$$

следовательно

$$\kappa_0(a_1^2+i_z^2)-a_1\kappa_{z0}c\xi>0$$

Из (2.6.8) также вытекают неравенства

$$\frac{a_2^2+i_z^2}{a_2}>\frac{a_1a_2-i_z^2}{a_1}>\frac{\kappa_{z0}+\kappa_{zM}}{\kappa_0+\kappa_M}c\xi$$

в соответствии с которыми

$$(\kappa_0+\kappa_M)(a_2^2+i_z^2)-(\kappa_{z0}+\kappa_{zM})\,a_2c\xi>0$$

Таким образом, $p > 0$. Аналогично из неравенств $a_1, a_2 < 1$ и (2.6.8) вытекают неравенства

$$1 > \frac{a_1 a_2 - i_z^2}{\max(a_1, a_2)} > \left(\frac{\kappa_{z0} + \kappa_{zM}}{\kappa_0 + \kappa_M} + \frac{\kappa_{z0}}{\kappa_0} \right) c\xi$$

следовательно

$$\kappa_0(\kappa_0 + \kappa_M) - (\kappa_{z0} + \kappa_{zM})\kappa_0 c\xi - (\kappa_0 + \kappa_M)\kappa_{z0} c\xi > 0$$

и $q > 0$. Таким образом, все коэффициенты полинома (2.6.62) положительны, то есть положение равновесия $S(u_{y1}^0, u_{y2}^0)$ (2.6.60) системы (2.6.56) асимптотически устойчиво. Поскольку оно лежит за пределами исследуемой области определения AOC, фазовые траектории в определенный момент времени покидают ее, при этом поперечная и угловая скорости корпуса аппарата v_y и ω_z не стремятся к нулевым значениям, как это было при исследовании систем (2.6.12) или (2.6.25).

2.6.2 Модель динамики корпуса. Колеса, за исключением правого заднего, сохраняют сцепление с опорной плоскостью

Рассмотрим случай из раздела 2.4, когда не попавшие на скользкий участок колеса аппарата сохраняют сцепление с опорной плоскостью, и это взаимодействие описывается модифицированной моделью увода, учитывающей малые деформации колес (псевдоскольжение) в продольном и поперечном направлениях, а также стабилизирующие моменты. Правое заднее попавшее на участок с меньшим коэффициентом трения колесо скользит по опорной плоскости и взаимодействует с ней посредством сухого трения. В отличие от раздела 2.4, где основное внимание уделялось исследованию быстрого изменения продольных скоростей точек контакта колес, не потерявших сцепление с опорной плоскостью, и угловой скорости выходного вала двигателя, определяющего переходный процесс выравнивания контактных сил на колесах ведущей оси, этот раздел, как и раздел 2.6.1, посвящен исследованию более медленных поперечных и угловых движений корпуса аппарата после завершения переходного процесса.

Нормализованные уравнения движения аппарата имеют вид (2.4.8), (2.4.9), вырожденные по малому параметру μ уравнения, описывающие движение аппарата после завершения быстрого переходного процесса — вид (2.4.10). Проведем уточнение последних членами первого порядка по μ, используя системы (2.4.8), (2.4.9) и (Б.3). По аналогии с разделом 2.6.1 на уровне точности $O(\mu)$ системы (Б.3) его конечные уравнения совпадают с конечными уравнениями вырожденной системы (2.4.10). Дифференциальные уравнения системы (Б.3), построенные для (2.4.8), (2.4.9) и имеющие ту же структуру, что и дифференциальные уравнения (2.4.10), помимо слагаемых порядка μ содержат и члены порядка $\varepsilon \gg \mu$. Будем исследовать уточненные уравнения при помощи подходов, аналогичных используемым в разделе 2.6.1.

В силу слабой связанности эти уравнения с погрешностью $O(\varepsilon)$ позволяют исследовать изменение быстрых переменных v_y и ω_z, изменяющихся на интервале времени $t \sim 1$ ($T \sim T_2$), независимо от медленной переменной v_x, изменяющейся на интервале $t \sim 1/\varepsilon$ ($T \sim T_1$).

Перейдя к (2.4.10) и приняв $\varepsilon = 0$, составим порождающую по Пуанкаре систему [14, 46]

$$
\begin{gathered}
v_x' = 0, \quad v_y' = f_2, \quad i_z^2 \omega_z' = f_3 \\
p_{x1j} = 0, \quad p_{x2j} = l = \frac{n}{2} m(\omega, \eta) \quad (j = 1, 2)
\end{gathered}
\tag{2.6.63}
$$

правые части которой следует вычислять из (2.4.8), (2.4.9) без учета членов $O(\varepsilon)$. Согласно первому уравнению (2.6.63) медленная переменная v_x постоянна и равна своему начальному значению (2.3.14): $v_x = v_0 = \mathrm{const} > 0$; решение (2.4.11) и (2.4.14) конечных уравнений системы (2.6.63) и выражение для u_{x22} из (2.4.9) на принятом уровне точности имеет вид

$$
\begin{gathered}
u_{x11} = u_{x12} = 0, \quad u_{x21} = \frac{\kappa_M}{\kappa_0} v_0 \mathrm{sgn} \left(v_0 - \frac{\omega}{n} \right), \quad u_{x22} = 2v_0 - \frac{2}{n}\omega \\
\omega = \omega_M = \omega_{M2}
\end{gathered}
\tag{2.6.64}
$$

В соответствии с (2.3.11), (2.6.64) динамические уравнения (2.6.63) принимают вид

$$
v_x = v_0, \quad v_y' = p_{y11} + p_{y12} + p_{y21} \tag{2.6.65}
$$

$$
i_z^2 \omega_z' = (p_{y11} + p_{y12}) a_1 - (p_{y21} + p_{y22}) a_2 + \varepsilon_1 c (m_{S11} + m_{S12} + m_{S21})
$$

где выражения для контактных сил и стабилизирующих моментов для колес, не потерявших сцепление с опорной плоскостью, а также момента сухого трения верчения для колеса, попавшего на участок с меньшим коэффициентом трения, с учетом (2.4.9) на принятом уровне точности вычисляются по формулам

$$
\begin{gathered}
p_{y11} = -\kappa_0 n_1 \frac{u_{y1}}{v_0}, \quad p_{y12} = -\kappa_0 n_1 \frac{u_{y1}}{v_0} \\
p_{y21} = -\kappa_0 n_2 \frac{u_{y2}}{v_0}, \quad p_{y22} = -\kappa_M n_2 \frac{\varepsilon u_{y2}}{\sqrt{u_{x22}^2 + \varepsilon^2 u_{y2}^2}} = O(\varepsilon) = 0
\end{gathered}
\tag{2.6.66}
$$

$$
\begin{gathered}
u_{y1} = u_{y1j} = v_y + a_1 \omega_z, \quad u_{y2} = u_{y2j} = v_y - a_2 \omega_z \\
m_{S1j} = -\kappa_{z0} n_1 \zeta \frac{u_{y1}}{v_0} \mathrm{sgn} u_{y1} \quad \text{при } |\varepsilon_{y1j}| < \varepsilon_m \quad (j = 1, 2) \\
m_{S21} = -\kappa_{z0} n_2 \zeta \frac{u_{y2}}{v_0} \mathrm{sgn} u_{y2} \quad \text{при } |\varepsilon_{y21}| < \varepsilon_m \\
m_{S1j} = \frac{\kappa_{z0}}{\nu} n_1 \left(\frac{u_{y1}}{v_0} - 1 \right) \mathrm{sgn} u_{y1} \quad \text{при } \varepsilon_m \le |\varepsilon_{y1j}| < \varepsilon
\end{gathered}
\tag{2.6.67}
$$

$$m_{S21} = \frac{\kappa_{z0}}{\nu} n_2 \left(\frac{u_{y2}}{v_0} - 1 \right) \mathrm{sgn} u_{y2} \quad \text{при} \ \varepsilon_m \le |\varepsilon_{y21}| < \varepsilon$$

$$m_{S22} = -\gamma \kappa_M n_2 \frac{\varepsilon \varepsilon_1 c \omega_z}{\alpha \sqrt{u_{x22}^2 + \varepsilon^2 u_{y22}^2} + \varepsilon \varepsilon_1 c |\omega_z|} = O(\varepsilon \varepsilon_1) = 0$$

$$\varepsilon_{yij} = \frac{\varepsilon u_{yij}}{\omega_{ij}}, \quad \omega_{ij} = v_0 \quad (i = 1, j = 1, 2; \ i = 2, j = 1) \tag{2.6.68}$$

$$\zeta = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_m}, \quad \nu = \frac{\varepsilon - \varepsilon_m}{\varepsilon} = 1 - \frac{1}{\zeta}$$

Здесь κ_0, κ_M, κ_{z0} и κ_{zM} удовлетворяют (2.2.19); ε_m введено при записи (2.2.12).

Структура уравнений (2.6.65) и оценки $p_{y21} = O(\varepsilon)$, $m_{S22} = O(\varepsilon\varepsilon_1)$ показывают, что сила и момент сухого трения верчения в области контакта правого заднего колеса с опорной плоскостью слабо влияют на динамику корпуса аппарата на «миксте». Система (2.6.65)–(2.6.68) получается из аналогичной системы (2.6.3)–(2.6.6), описывающей движение аппарата в случае, когда при попадании на «микст» все колеса сохраняют сцепление с опорной плоскостью, при

$$p_{y22} = 0, \quad m_{S22} = 0 \tag{2.6.69}$$

Перейдем к изучению системы (2.6.65)–(2.6.68) для случаев пренебрежимо малых и конечных по отношению к ε значений параметров $\kappa_{zM}\zeta$ и κ_{zM}/ν.

Будем рассматривать такие аппараты и условия движения, при которых выполнены те же, что и в разделе 2.6.1, неравенства (2.6.7) и (2.6.8).

2.6.2.1 Стабилизирующие моменты для всех колес не учитываются

При моделировании движения колесных аппаратов значениями стабилизирующих моментов часто пренебрегают, поскольку они существенно меньше моментов поперечных составляющих контактных сил относительно центра масс корпуса аппарата. В рамках рассматриваемой постановки задачи это означает, что $\kappa_{zM} \to 0$, когда $\kappa_{zM}\zeta \to 0$, $\kappa_{zM}/\nu \to 0$, при этом последнее слагаемое в третьем уравнении (2.6.65) не превосходит $O(\varepsilon)$ и может считаться пренебрежимо малым. На выбранном уровне точности изменение переменных v_y, ω_z из (2.6.65) описывается линейной системой с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} v_y' &= -\frac{2\kappa_0 n_1}{v_0}(v_y + a_1\omega_z) - \frac{\kappa_0 n_2}{v_0}(v_y - a_2\omega_z) \\ i_z^2 \omega_z' &= -\frac{2\kappa_0 n_1 a_1}{v_0}(v_y + a_1\omega_z) + \frac{\kappa_0 n_2 a_2}{v_0}(v_y - a_2\omega_z) \end{aligned} \tag{2.6.70}$$

которая может быть получена из (2.6.10) путем формальной замены множителя $\kappa_0 + \kappa_M$ при переменной $u_{y2} = v_y - a_2\omega_z$ множителем κ_0.

Ее положение равновесия

$$v_y = v_y^0 = 0, \quad \omega_z = \omega_z^0 = 0 \tag{2.6.71}$$

совпадает с (2.6.11) и отвечает отсутствию заноса корпуса аппарата. Как и в разделе 2.6.1, будем исследовать стойчивость этого положения, перейдя от переменных v_y, ω_z к переменным u_{y1}, u_{y2} при помощи линейной замены (2.6.12). Системой в новых переменных для (2.6.70) служит

$$\begin{aligned} u'_{y1} &= -\frac{2\kappa_0 n_1}{v_0 i_z^2}(a_1^2 + i_z^2)u_{y1} + \frac{\kappa_0 n_2}{v_0 i_z^2}(a_1 a_2 - i_z^2)u_{y2} \\ u'_{y2} &= \frac{2\kappa_0 n_1}{v_0 i_z^2}(a_1 a_2 - i_z^2)u_{y1} - \frac{\kappa_0 n_2}{v_0 i_z^2}(a_2^2 + i_z^2)u_{y2} \end{aligned} \tag{2.6.72}$$

Построим фазовый портрет системы (2.6.72) на плоскости u_{y1}, u_{y2}. На прямой

$$u_{y2} = \widetilde{k}_1 u_{y1}, \quad \widetilde{k}_1 = \frac{2(a_1^2 + i_z^2)}{a_1 a_2 - i_z^2} \cdot \frac{n_1}{n_2} \tag{2.6.73}$$

правая часть первого уравнения (2.6.72) обращается в нуль, а, значит, фазовые траектории имеют вертикальные касательные. Прямая, на которой обращается в нуль правая часть второго уравнения системы (2.6.72), и фазовые траектории имеют горизонтальные касательные, имеет вид

$$u_{y2} = \widetilde{k}_2 u_{y1}, \quad \widetilde{k}_2 = \frac{2(a_1 a_2 - i_z^2)}{a_2^2 + i_z^2} \cdot \frac{n_1}{n_2} \tag{2.6.74}$$

Из (2.6.8) вытекает неравентво вида (2.6.17) $\widetilde{k}_1 > \widetilde{k}_2 > 0$. Положению равновесия системы (2.6.72)

$$u_{y1} = u_{y1}^0 = 0, \quad u_{y2} = u_{y2}^0 = 0 \tag{2.6.75}$$

отвечающему условиям непроскальзывания колес аппарата в поперечном направлении, согласно (2.6.12) в переменных v_y, ω_z соответствует точка (2.6.71).

Выясним его тип, составив характеристическое уравнение системы (2.6.72)

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{2\kappa_0 n_1}{v_0 i_z^2}(a_1^2 + i_z^2) - \lambda & \dfrac{\kappa_0 n_2}{v_0 i_z^2}(a_1 a_2 - i_z^2) \\ \dfrac{2\kappa_0 n_1}{v_0 i_z^2}(a_1 a_2 - i_z^2) & -\dfrac{\kappa_0 n_2}{v_0 i_z^2}(a_2^2 + i_z^2) - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{2.6.76}$$

которое принимает вид

$$\lambda^2 + \widetilde{p}\lambda + \widetilde{q} = 0 \tag{2.6.77}$$

После упрощающих преобразований по аналогии с разделом 2.6.1 имеем выражения

$$
\begin{gathered}
\widetilde{p} = \frac{2\kappa_0(a_1^2+i_z^2)n_1+\kappa_0(a_2^2+i_z^2)n_2}{v_0 i_z^2} > 0 \\
\widetilde{q} = \frac{2\kappa_0^2 n_1 n_2(a_1^2+i_z^2)(a_2^2+i_z^2)-2\kappa_0^2 n_1 n_2(a_1a_2-i_z^2)^2}{v_0^2 i_z^4} = \frac{2\kappa_0^2 n_1 n_2}{v_0^2 i_z^2} > 0
\end{gathered}
\tag{2.6.78}
$$

которые могут быть получены из соответствующих выражений для p и q из (2.6.22) после формальной замены множителя $\kappa_0+\kappa_M$ множителем κ_0. Таким образом, точка покоя (2.6.75) асимптотически устойчива: $u_{y1}, u_{y2} \to 0$ при $t \to \infty$, следовательно, угловая и поперечная скорости корпуса аппарата при возрастании времени также стремятся к нулевым значениям.

Отвечающее (2.6.23) выражение для дискриминанта характеристического уравнения (2.6.76)

$$
D = \frac{[2\kappa_0(a_1^2+i_z^2)n_1+\kappa_0(a_2^2+i_z^2)n_2]^2-8i_z^2\kappa_0^2 n_1 n_2}{v_0^2 i_z^4} \tag{2.6.79}
$$

после упрощающих преобразований, проведенных по аналогии с (2.6.24), принимает вид

$$
D = \frac{[2\kappa_0(a_1^2+i_z^2)n_1-\kappa_0(a_2^2+i_z^2)n_2]^2+8\kappa_0^2(a_1a_2-i_z^2)^2 n_1 n_2}{v_0^2 i_z^4} > 0 \tag{2.6.80}
$$

Следовательно, корни уравнения (2.6.76), как и корни (2.6.19), вещественные и отрицательные, то есть точка покоя (2.6.75) — устойчивый узел на фазовой плоскости u_{y1}, u_{y2} (v_y, ω_z). Тем самым здесь, как и в случае из раздела 2.6.1.1, поперечная и угловая скорости аппарата при $t \to \infty$ стремятся к нулевым значениям, и его занос, спровоцированный импульсом $\omega_z(0,\mu)$ угловой скорости корпуса, уменьшается со временем.

Рассмотрим меньшие по модулю корни уравнений (2.6.20), (2.6.22) и (2.6.77), (2.6.78)

$$
\lambda_1^{(1)} = \frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}, \quad \lambda_1^{(2)} = \frac{-\widetilde{p}+\sqrt{\widetilde{p}^2-4\widetilde{q}}}{2} \tag{2.6.81}
$$

и выясним, решения какой из систем (2.6.10) или (2.6.70) затухают скорее. Приведем численные результаты для параметров автомобиля, взятых из [53]. В качестве примера возьмем $\kappa_0 = 0,8$, $\kappa_M = 0,2$, $a_1 = 0,4$, $a_2 = 0,6$, $i_z = 0,4$. Тогда из (2.6.22), (2.6.78), (2.6.81) получим

$$
\lambda_1^{(1)} \approx -\frac{0,8}{v_0} + \frac{1}{2v_0}\sqrt{0,1}, \quad \lambda_1^{(2)} \approx -\frac{0,725}{v_0} + \frac{1}{2v_0}\sqrt{0,103}
$$

откуда вытекают неравенства

$$
\lambda_1^{(1)} < \lambda_1^{(2)} < 0
$$

Следовательно, поперечная и угловая скорости корпуса аппарата скорее стремятся к нулевым значениям в случае, когда все колеса сохраняют сцепление с опорной плоскостью.

2.6.2.2 Движение аппарата, отвечающее возрастающему участку характеристики стабилизирующего момента

Перейдем к рассмотрению случая $|\varepsilon_{yij}| < \varepsilon_m$ $(i = 1, j = 1, 2; i = 2, j = 1)$, когда стабилизирующие моменты для не потерявших сцепление с опорной плоскостью колес, имеют вид (2.6.67), что отвечает возрастающей линейной зоне характеристики $\chi(|\varepsilon_{yij}|)$ на рис. 2.3 (б). Уравнения изменения переменных v_y и ω_z системы (2.6.65) после пренебрежения членами $O(\varepsilon_1)$ (см. (2.2.21)) примут вид

$$v_y' = -\frac{2\kappa_0 n_1}{v_0}(v_y + a_1\omega_z) - \frac{\kappa_0 n_2}{v_0}(v_y - a_2\omega_z)$$

$$i_z^2\omega_z' = -\frac{2\kappa_0 n_1 a_1}{v_0}(v_y + a_1\omega_z) + \frac{\kappa_0 n_2 a_2}{v_0}(v_y - a_2\omega_z) - \tag{2.6.82}$$

$$-\frac{2\kappa_{z0}}{v_0}\varepsilon_1\zeta c(|v_y + a_1\omega_z|n_1 + |v_y - a_2\omega_z|n_2)$$

Они получаются из (2.6.25) формальной заменой множителей $\kappa_0 + \kappa_M$ и $\kappa_{z0} + \kappa_{zM}$ множителями κ_0 и κ_{z0} соответственно.

Уравнения (2.6.82) на принятом уровне точности совпадают с (2.6.70). Таким образом, в этом случае занос аппарата уменьшается со временем, а стабилизирующий момент слабо влияет на этот процесс.

2.6.2.3 Движение аппарата, отвечающее убывающему участку характеристики стабилизирующего момента

Рассмотрим случай $\varepsilon_m \le |\varepsilon_{yij}| < \varepsilon$ $(i = 1, j = 1, 2; i = 2, j = 1)$, когда стабилизирующие моменты для не потерявших сцепление с опорной плоскостью колес, имеют вид (2.6.68), что отвечает убывающим линейным участкам характеристик $\chi(|\varepsilon_{yij}|)$ на рис. 2.3 (б). Уравнения изменения переменных v_y и ω_z системы (2.6.65)–(2.6.68) получаются из (2.6.26) после формальной замены множителей $\kappa_0 + \kappa_M$ и $\kappa_{z0} + \kappa_{zM}$ множителями κ_0 и κ_{z0}:

$$v_y' = -\frac{2\kappa_0 n_1}{v_0}(v_y + a_1\omega_z) - \frac{\kappa_0 n_2}{v_0}(v_y - a_2\omega_z), \quad \xi = \frac{\varepsilon_1}{\nu} \tag{2.6.83}$$

$$i_z^2\omega_z' = -\frac{2\kappa_0 n_1 a_1}{v_0}(v_y + a_1\omega_z) + \frac{\kappa_0 n_2 a_2}{v_0}(v_y - a_2\omega_z) + \frac{1}{v_0}\xi c\kappa_{z0}[2n_1(|v_y + a_1\omega_z| -$$

$$-v_0\mathrm{sgn}(v_y + a_1\omega_z)) + (|v_y - a_2\omega_z| - v_0\mathrm{sgn}(v_y - a_2\omega_z))n_2]$$

Как и для системы (2.6.26), в случае $\nu \sim \varepsilon$ согласно (2.2.21) и (2.6.6) справедлива оценка (2.6.27), то есть стабилизирующий момент внесет более существенный вклад в динамику аппарата по сравнению со случаем из раздела 2.6.2.2; для $\nu \sim 1$ имеем $\xi \sim \varepsilon_1$, — следовательно, стабилизирующий момент, как и в разделе 2.6.2.2, слабо влияет на динамику аппарата — в пренебрежении членами $O(\varepsilon_1)$ система (2.6.83) совпадает с (2.6.70). Проведем исследование движения аппарата в первом случае (2.6.27).

После перехода к переменным u_{y1}, u_{y2} по формулам (2.6.28) система (2.6.83) переходит в систему

$$\begin{aligned}
u'_{y1} &= -\frac{2\kappa_0 n_1}{v_0 i_z^2}(a_1^2+i_z^2)u_{y1} + \frac{\kappa_0 n_2}{v_0 i_z^2}(a_1a_2-i_z^2)u_{y2}+\\
&+\frac{\kappa_{z0}}{v_0 i_z^2}\xi a_1 c\left[2(|u_{y1}|-v_0\mathrm{sgn}u_{y1})n_1+(|u_{y2}|-v_0\mathrm{sgn}u_{y2})n_2\right]\\
u'_{y2} &= \frac{2\kappa_0 n_1}{v_0 i_z^2}(a_1a_2-i_z^2)u_{y1} - \frac{\kappa_0 n_2}{v_0 i_z^2}(a_2^2+i_z^2)u_{y2}-\\
&-\frac{\kappa_{z0}}{v_0 i_z^2}\xi c a_2\left[2(|u_{y1}|-v_0\mathrm{sgn}u_{y1})n_1+(|u_{y2}|-v_0\mathrm{sgn}u_{y2})n_2\right]
\end{aligned} \tag{2.6.84}$$

получаемую из (2.6.33) путем формальной замены множителей $\kappa_0+\kappa_M$ и $\kappa_{z0}+\kappa_{zM}$ множителями κ_0 и κ_{z0} соответственно. Исследуем поведение этой системы в областях (2.6.29)–(2.6.32).

Область BOC (неравенство (2.6.29)). Здесь (2.6.84) принимает вид

$$\begin{aligned}
u'_{y1} &= -\frac{2\kappa_0 n_1}{v_0 i_z^2}(a_1^2+i_z^2)u_{y1} + \frac{\kappa_0 n_2}{v_0 i_z^2}(a_1a_2-i_z^2)u_{y2}+\\
&+\frac{\kappa_{z0}}{v_0 i_z^2}\xi a_1 c\left[2n_1(u_{y1}-v_0)+n_2(u_{y2}-v_0)\right]\\
u'_{y2} &= \frac{2\kappa_0 n_1}{v_0 i_z^2}(a_1a_2-i_z^2)u_{y1} - \frac{\kappa_0 n_2}{v_0 i_z^2}(a_2^2+i_z^2)u_{y2}-\\
&-\frac{\kappa_{z0}}{v_0 i_z^2}\xi a_2 c\left[2n_1(u_{y1}-v_0)+n_2(u_{y2}-v_0)\right]
\end{aligned} \tag{2.6.85}$$

Исследуем свойства фазового портрета системы (2.6.85) на плоскости u_{y1}, u_{y2} (v_y, ω_z) в области (2.6.29). На прямой

$$\begin{aligned}
&u_{y2} = \widetilde{k}_3 u_{y1} + \widetilde{b}_3, \quad \widetilde{k}_3 = \frac{\kappa_0(a_1^2+i_z^2)-\kappa_{z0}a_1c\xi}{\kappa_0(a_1a_2-i_z^2)+\kappa_{z0}a_1c\xi}\cdot\frac{2n_1}{n_2}\\
&\widetilde{b}_3 = \frac{\kappa_{z0}(2n_1+n_2)a_1v_0c\xi}{\kappa_0(a_1a_2-i_z^2)+\kappa_{z0}a_1c\xi}\cdot\frac{1}{n_2}
\end{aligned} \tag{2.6.86}$$

правая часть первого уравнения (2.6.85) обращается в нуль, а, значит, фазовые траектории имеют вертикальные касательные. Прямая, на которой обращается в нуль правая часть второго уравнения системы (2.6.85), и фазовые траектории имеют горизонтальные касательные, имеет вид

$$u_{y2} = \widetilde{k}_4 u_{y1} + \widetilde{b}_4, \quad \widetilde{k}_4 = \frac{\kappa_0(a_1a_2 - i_z^2) - \kappa_{z0}a_2c\xi}{\kappa_0(a_2^2 + i_z^2) + \kappa_{z0}a_2c\xi} \cdot \frac{2n_1}{n_2}$$
$$\widetilde{b}_4 = \frac{\kappa_{z0}(2n_1 + n_2)a_2v_0c\xi}{\kappa_0(a_2^2 + i_z^2) + \kappa_{z0}a_2c\xi} \cdot \frac{1}{n_2} \tag{2.6.87}$$

Из (2.6.7), (2.6.8), (2.6.16), (2.6.37) следуют неравенства вида (2.6.38): $\widetilde{k}_3 > \widetilde{k}_4 > 0$, $\widetilde{b}_3 > \widetilde{b}_4 > 0$.

Положение равновесия системы (2.6.85)

$$u_{y1} = u_{y1}^0 = -\frac{\widetilde{b}_3 - \widetilde{b}_4}{\widetilde{k}_3 - \widetilde{k}_4}, \qquad u_{y2} = u_{y2}^0 = \frac{\widetilde{k}_3\widetilde{b}_4 - \widetilde{k}_4\widetilde{b}_3}{\widetilde{k}_3 - \widetilde{k}_4} \tag{2.6.88}$$

– точка пересечения прямых (2.6.86) и (2.6.87). Соответствующие ему значения $v_y = v_y^0$ и $\omega_z = \omega_z^0$ находятся подстановкой (2.6.88) в (2.6.28). В силу неоднородности (2.6.85) его координаты отличны от нуля. Положение равновесия находится во второй (область (2.6.30)) или третьей (область (2.6.31)) координатной четверти и не принадлежит исследуемой области BOC (2.6.29). Для исследования устойчивости этого положения равновесия, составим характеристическое уравнение системы (2.6.85) в малых отклонениях от положения равновесия, которое получается из (2.6.40) путем формальной замены множителя $\kappa_0 + \kappa_M$ множителем κ_0 и может быть приведено к виду (2.6.41)

$$\lambda^2 + \widetilde{p}\lambda + \widetilde{q} = 0 \tag{2.6.89}$$

где

$$\widetilde{p} = \frac{2\kappa_0n_1(a_1^2 + i_z^2) + \kappa_0n_2(a_2^2 + i_z^2) + \kappa_{z0}n_2a_2c\xi - 2\kappa_{z0}n_1a_1c\xi}{v_0i_z^2}$$

$$\widetilde{q} = \frac{[2\kappa_0(a_1^2 + i_z^2) - 2\kappa_{z0}a_1c\xi]\,[\kappa_0(a_2^2 + i_z^2) + \kappa_{z0}a_2c\xi]\,n_1n_2}{i_z^4v_0^2} -$$

$$- \frac{[2\kappa_0(a_1a_2 - i_z^2) - 2\kappa_{z0}a_2c\xi]\,[\kappa_0(a_1a_2 - i_z^2) + \kappa_{z0}a_1c\xi]\,n_1n_2}{i_z^4v_0^2} = \frac{\kappa_0^2n_1n_2}{i_z^2v_0^2}$$

Аналогично разделу 2.6.1 нетрудно показать, что все коэффициенты полинома (2.6.89) положительны, следовательно, определяемое из (2.6.88) положение равновесия $S(u_{y1}^0, u_{y2}^0)$ линейной неоднородной системы (2.6.85), лежащее за пределами исследуемой области определения BOC, асимптотически устойчиво. Фазовые траектории при $t \to \infty$ стремятся к нему из любой точки области (2.6.29), и, тем самым, в определенный момент времени покидают ее, при этом поперечная и угловая скорости корпуса аппарата v_y и ω_z не стремятся к нулевым значениям, как это было при исследовании систем (2.6.12) или (2.6.25).

Область BOD (неравенство (2.6.30)). В этой области система (2.6.84) принимает вид

$$\begin{aligned} u'_{y1} &= -\frac{2\kappa_0 n_1}{v_0 i_z^2}(a_1^2 + i_z^2)u_{y1} + \frac{\kappa_0 n_2}{v_0 i_z^2}(a_1 a_2 - i_z^2)u_{y2} + \\ &+ \frac{\kappa_{z0}}{v_0 i_z^2} a_1 c\xi \left[2n_1(-u_{y1} + v_0) + n_2(u_{y2} - v_0)\right] \\ u'_{y2} &= \frac{2\kappa_0 n_1}{v_0 i_z^2}(a_1 a_2 - i_z^2)u_{y1} - \frac{\kappa_0 n_2}{v_0 i_z^2}(a_2^2 + i_z^2)u_{y2} - \\ &- \frac{\kappa_{z0}}{v_0 i_z^2} a_2 c\xi \left[2n_1(-u_{y1} + v_0) + n_2(u_{y2} - v_0)\right] \end{aligned} \tag{2.6.90}$$

Изучим свойства фазового портрета системы (2.6.90) на плоскости u_{y1}, u_{y2} (v_y, ω_z) в области (2.6.30). Уравнением прямой, в точках которой правая часть первого уравнения (2.6.90) обращается в нуль, а, значит, фазовые траектории имеют вертикальные касательные, служит

$$\begin{aligned} &u_{y2} = \widetilde{k}_5 u_{y1} + \widetilde{b}_5, \quad \widetilde{k}_5 = \frac{\kappa_0(a_1^2 + i_z^2) + \kappa_{z0} a_1 c\xi}{\kappa_0(a_1 a_2 - i_z^2) + \kappa_{z0} a_1 c\xi} \cdot \frac{2n_1}{n_2} > 0 \\ &\widetilde{b}_5 = \frac{-\kappa_{z0} a_1 v_0 c\xi(2n_1 - n_2)}{\kappa_0(a_1 a_2 - i_z^2) + \kappa_{z0} a_1 c\xi} < 0 \end{aligned} \tag{2.6.91}$$

Последнее неравенство справедливо в силу (2.6.9). Прямая, на которой обращается в нуль правая часть второго уравнения системы (2.6.90), и фазовые траектории имеют горизонтальные касательные, имеет вид

$$\begin{aligned} &u_{y2} = \widetilde{k}_6 u_{y1} + \widetilde{b}_6, \quad \widetilde{k}_6 = \frac{\kappa_0(a_1 a_2 - i_z^2) + \kappa_{z0} a_2 c\xi}{\kappa_0(a_2^2 + i_z^2) + \kappa_{z0} a_2 c\xi} \cdot \frac{2n_1}{n_2} \\ &\widetilde{b}_6 = \frac{-\kappa_{z0} a_2 v_0 c\xi(2n_1 - n_2)}{\kappa_0(a_2^2 + i_z^2) + \kappa_{z0} a_2 c\xi} \end{aligned} \tag{2.6.92}$$

Из (2.6.16), (2.6.21) имеем неравентсва вида (2.6.45)

$$\widetilde{k}_5 > \widetilde{k}_6 > 0, \qquad \widetilde{b}_5 < \widetilde{b}_6 < 0 \tag{2.6.93}$$

Положение равновесия системы (2.6.90)

$$u_{y1} = u_{y1}^0 = -\frac{\widetilde{b}_5 - \widetilde{b}_6}{\widetilde{k}_5 - \widetilde{k}_6}, \qquad u_{y2} = u_{y2}^0 = \frac{\widetilde{k}_5 \widetilde{b}_6 - \widetilde{k}_6 \widetilde{b}_5}{\widetilde{k}_5 - \widetilde{k}_6} \tag{2.6.94}$$

— точка пересечения прямых (2.6.91) и (2.6.92). Соответствующие ему значения $v_y = v_y^0$ и $\omega_z = \omega_z^0$ находятся подстановкой (2.6.94) в (2.6.28). В силу неоднородности (2.6.90) его координаты отличны от нуля. Учитывая (2.6.93), получаем, что положение равновесия находится в первой (область (2.6.29)) или четвертой (область (2.6.32)) координатной четверти и не принадлежит исследуемой области BOD (2.6.30). Характеристическое уравнение системы (2.6.90) в малых отклонениях от положения равновесия получается из (2.6.47) после формальной замены множителей $\kappa_0 + \kappa_M$ и $\kappa_{z0} + \kappa_{zM}$ множителями κ_0 и κ_{z0} соответственно. Аналогично разделу 2.6.1 нетрудно показать, что все коэффициенты соответствующего (2.6.47) полинома положительны, определяемое из (2.6.94) положение равновесия $S(u_{y1}^0, u_{y2}^0)$ линейной неоднородной системы (2.6.90), лежащее за пределами исследуемой области определения BOD, асимптотически устойчиво. Фазовые траектории при $t \to \infty$ стремятся к нему из любой точки этой области (2.6.30), и, тем самым, в определенный момент времени покидают ее, при этом поперечная и угловая скорости корпуса аппарата v_y и ω_z не стремятся к нулевым значениям.

Область AOD (неравенство (2.6.31)). Здесь система (2.6.84) принимает вид

$$\begin{aligned}
u'_{y1} &= -\frac{2\kappa_0 n_1}{v_0 i_z^2}(a_1^2 + i_z^2)u_{y1} + \frac{\kappa_0 n_2}{v_0 i_z^2}(a_1 a_2 - i_z^2)u_{y2} + \\
&+ \frac{\kappa_{z0}}{v_0 i_z^2} a_1 c\xi \left[2n_1(-u_{y1} + v_0) + n_2(-u_{y2} + v_0)\right] \\
u'_{y2} &= \frac{2\kappa_0 n_1}{v_0 i_z^2}(a_1 a_2 - i_z^2)u_{y1} - \frac{\kappa_0 n_2}{v_0 i_z^2}(a_2^2 + i_z^2)u_{y2} - \\
&- \frac{\kappa_{z0}}{v_0 i_z^2} a_2 c\xi \left[2n_1(-u_{y1} + v_0) + n_2(-u_{y2} + v_0)\right]
\end{aligned} \tag{2.6.95}$$

Проведем анализ фазового портрета системы (2.6.95) на плоскости u_{y1}, u_{y2} (v_y, ω_z) в области (2.6.31). На прямой

$$\begin{aligned}
&u_{y2} = \widetilde{k}_7 u_{y1} + \widetilde{b}_7, \quad \widetilde{k}_7 = \frac{\kappa_0(a_1^2 + i_z^2) + \kappa_{z0} a_1 c\xi}{\kappa_0(a_1 a_2 - i_z^2) - \kappa_{z0} a_1 c\xi} \cdot \frac{2n_1}{n_2} \\
&\widetilde{b}_7 = \frac{-(2n_1 + n_2)\kappa_{z0} a_1 c v_0 \xi}{\kappa_0(a_1 a_2 - i_z^2) - \kappa_{z0} a_1 c\xi}
\end{aligned} \tag{2.6.96}$$

правая часть первого уравнения (2.6.95) обращается в нуль — фазовые траектории имеют вертикальные касательные. Прямая, на которой обращается в нуль правая часть второго уравнения системы (2.6.95), и фазовые траектории имеют горизонтальные касательные, имеет вид

$$u_{y2} = \widetilde{k}_8 u_{y1} + \widetilde{b}_8, \quad \widetilde{k}_8 = \frac{\kappa_0(a_1 a_2 - i_z^2) + \kappa_{z0} a_2 c\xi}{\kappa_0(a_2^2 + i_z^2) - \kappa_{z0} a_2 c\xi} \cdot \frac{2n_1}{n_2} \tag{2.6.97}$$

$$\widetilde{b}_8 = \frac{-(2n_1 + n_2)\kappa_{z0} a_2 v_0 c\xi}{\kappa_0(a_2^2 + i_z^2) - \kappa_{z0} a_2 c\xi} \cdot \frac{1}{n_2}$$

Из (2.6.8) вытекают неравенства вида (2.6.52)

$$\widetilde{k}_7 > \widetilde{k}_8 > 0, \qquad \widetilde{b}_7 < \widetilde{b}_8 < 0 \tag{2.6.98}$$

Положение равновесия системы (2.6.95)

$$u_{y1} = u_{y1}^0 = -\frac{\widetilde{b}_7 - \widetilde{b}_8}{\widetilde{k}_7 - \widetilde{k}_8}, \qquad u_{y2} = u_{y2}^0 = \frac{\widetilde{k}_7\widetilde{b}_8 - \widetilde{k}_8\widetilde{b}_7}{\widetilde{k}_7 - \widetilde{k}_8} \tag{2.6.99}$$

– точка пересечения прямых (2.6.96) и (2.6.97). Соответствующие ему значения $v_y = v_y^0$ и $\omega_z = \omega_z^0$ находятся подстановкой (2.6.99) в (2.6.28). В силу неоднородности (2.6.95) его координаты отличны от нуля. Учитывая (2.6.98), получаем, что положение равновесия находится в первой (область (2.6.29)) или четвертой (область (2.6.32)) координатной четверти и не принадлежит исследуемой области AOD (2.6.31). Характеристическое уравнение системы (2.6.95) в малых отклонениях от положения равновесия, получается из (2.6.54) после формальной замены множителя $\kappa_0 + \kappa_M$ множителем κ_0. Аналогично разделу 2.6.1 нетрудно показать, что все коэффициенты соответствующего (2.6.55) полинома положительны, то есть определяемое из (2.6.99) положение равновесия $S(u_{y1}^0, u_{y2}^0)$ линейной неоднородной системы (2.6.95), лежащее за пределами исследуемой области определения AOD, асимптотически устойчиво. Фазовые траектории при $t \to \infty$ стремятся к нему из любой точки области (2.6.31), и, тем самым, в определенный момент времени покидают ее, при этом поперечная и угловая скорости корпуса аппарата v_y и ω_z не стремятся к нулевым значениям.

Область AOC (неравенство (2.6.32)). Здесь система (2.6.84) принимает вид

$$\begin{gathered}
u'_{y1} = -\frac{2\kappa_0 n_1}{v_0 i_z^2}(a_1^2 + i_z^2)u_{y1} + \frac{\kappa_0 n_2}{v_0 i_z^2}(a_1 a_2 - i_z^2)u_{y2} + \\
+\frac{\kappa_{z0}}{v_0 i_z^2} a_1 c\xi \left[2n_1(u_{y1} - v_0) + n_2(-u_{y2} + v_0)\right] \\
u'_{y2} = \frac{2\kappa_0 n_1}{v_0 i_z^2}(a_1 a_2 - i_z^2)u_{y1} - \frac{\kappa_0 n_2}{v_0 i_z^2}(a_2^2 + i_z^2)u_{y2} - \\
-\frac{\kappa_{z0}}{v_0 i_z^2} a_2 c\xi \left[2n_1(u_{y1} - v_0) + n_2(-u_{y2} + v_0)\right]
\end{gathered} \tag{2.6.100}$$

Исследуем свойства фазового портрета системы (2.6.100) на плоскости u_{y1}, u_{y2} (v_y, ω_z) в области (2.6.32). Уравнением прямой, в точках которых правая часть первого уравнения (2.6.100) обращается в нуль, то есть фазовые траектории имеют вертикальные касательные, служит

$$
\begin{aligned}
&u_{y2} = \widetilde{k}_9 u_{y1} + \widetilde{b}_9, \quad \widetilde{k}_9 = \frac{\kappa_0(a_1^2 + i_z^2) - \kappa_{z0} a_1 c\xi}{\kappa_0(a_1 a_2 - i_z^2) - \kappa_{z0} a_1 c\xi} \cdot \frac{2n_1}{n_2} \\
&\widetilde{b}_9 = \frac{\kappa_{z0}(2n_1 - n_2) a_1 v_0 c\xi}{\kappa_0(a_1 a_2 - i_z^2) - \kappa_{z0} a_1 c\xi} \cdot \frac{1}{n_2}
\end{aligned}
\tag{2.6.101}
$$

Прямая, на которой обращается в нуль правая часть второго уравнения системы (2.6.100), и фазовые траектории имеют горизонтальные касательные, имеет вид

$$
\begin{aligned}
&u_{y2} = \widetilde{k}_{10} u_{y1} + \widetilde{b}_{10}, \quad \widetilde{k}_{10} = \frac{\kappa_0(a_1 a_2 - i_z^2) - \kappa_{z0} a_1 c\xi}{\kappa_0(a_2^2 + i_z^2) - \kappa_{z0} a_2 c\xi} \cdot \frac{2n_1}{n_2} \\
&\widetilde{b}_{10} = \frac{\kappa_{z0}(2n_1 - n_2) a_2 v_0 c\xi}{\kappa_0(a_2^2 + i_z^2) - \kappa_{z0} a_2 c\xi} \cdot \frac{1}{n_2}
\end{aligned}
\tag{2.6.102}
$$

Из (2.6.8) вытекают неравенства вида (2.6.59)

$$
\widetilde{k}_9 > \widetilde{k}_{10} > 0, \qquad \widetilde{b}_9 > \widetilde{b}_{10} > 0 \tag{2.6.103}
$$

Положение равновесия системы (2.6.100)

$$
u_{y1} = u_{y1}^0 = -\frac{\widetilde{b}_9 - \widetilde{b}_{10}}{\widetilde{k}_9 - \widetilde{k}_{10}}, \qquad u_{y2} = u_{y2}^0 = \frac{\widetilde{k}_9 \widetilde{b}_{10} - \widetilde{k}_{10} \widetilde{b}_9}{\widetilde{k}_9 - \widetilde{k}_{10}} \tag{2.6.104}
$$

– точка пересечения прямых (2.6.101) и (2.6.102). Соответствующие ему значения $v_y = v_y^0$ и $\omega_z = \omega_z^0$ находятся подстановкой (2.6.104) в (2.6.28). В силу неоднородности (2.6.100) его координаты отличны от нуля. Учитывая неравенства (2.6.103), получаем, что положение равновесия находится во второй (область (2.6.30)) или третьей (область (2.6.31)) координатной четверти и не принадлежит исследуемой области AOC (2.6.32). Характеристическое уравнение системы (2.6.100) в малых отклонениях от положения равновесия, получается из (2.6.61) после формальной замены множителя $\kappa_0 + \kappa_M$ множителем κ_0.

Аналогично разделу 2.6.1 нетрудно показать, что все коэффициенты соотвествующего (2.6.61) полинома положительны, то есть определяемое из (2.6.104) положение равновесия $S(u_{y1}^0, u_{y2}^0)$ линейной неоднородной системы (2.6.100), лежащее за пределами исследуемой области AOC, асимптотически устойчиво. Фазовые траектории при $t \to \infty$ стремятся к нему из любой точки области (2.6.32), и, тем самым, в определенный момент времени покидают ее, при этом поперечная и угловая скорости корпуса аппарата v_y и ω_z не стремятся к нулевым значениям.

Полные фазовые портреты систем (2.6.26) и (2.6.83) для убывающего участка характеристики $\chi(|\varepsilon_{yij}|)$ стабилизирующих моментов (рис. 2.3 (б)) в областях контакта колес, не потерявших сцепление с опорной плоскостью, отвечающего конечным значениям (2.6.27) $\xi = \varepsilon/\nu \sim 1$, получаются путем объединения фазовых портретов для областей (2.6.29) – (2.6.32). Сравнение результатов их исследования с соответствующими фазовыми портретами систем (2.6.10), (2.6.25) и (2.6.26) или (2.6.70), (2.6.82) и (2.6.83), отвечающими, соответственно, случаям исчезающе малых стабилизирующих моментов (κ_{z0}, $\kappa_{zM} \to 0$) либо их ε_1-малости ($\xi \sim \varepsilon$), позволяет сделать следующие выводы. В то время как фазовые траектории последних стремятся к асимптотически устойчивому положению равновесия $v_y = 0$, $\omega_z = 0$ ($u_{y1} = 0$, $u_{y2} = 0$) или положению равновесия в его ε_1-окрестности, что отвечает уменьшению или достаточной малости заноса аппарата со временем, фазовые траектории систем (2.6.26) или (2.6.83) на убывающем участке характеристики $\chi(|\varepsilon_{yij}|)$ при $\xi \sim 1$ во все время движения выходят из области задания своих начальных условий в одну из несовпадающих с ней областей (2.6.29) – (2.6.32). При этом v_y и ω_z даже при малых начальных значениях становятся конечными (они могут быть оценены координатами (2.6.39), (2.6.46), (2.6.53), (2.6.60) или (2.6.88), (2.6.94), (2.6.99), (2.6.104) соответствующих положений равновесия S), и занос аппарата не может быть прекращен без привлечения дополнительных управляющих устройств, например, системы управления его передними колесами.

Сила и момент сухого трения верчения, возникающий в области контакта колеса, не потерявшего сцепление с опорной плоскостью, слабо влияют на динамику корпуса аппарата на «миксте».

2.6.3 Модель динамики корпуса. Колеса задней оси скользят, колеса передней оси сохраняют сцепление с опорной плоскостью

Рассмотрим случай из раздела 2.5, когда после попадания на «микст» задние колеса аппарата теряют сцепление с опорной плоскостью, а передние колеса продолжают сохранять сцепление с ней. Нормализованные уравнения движения аппарата имеют вид (2.5.10), (2.5.11), вырожденные по малому параметру μ уравнения, описывающие движение аппарата после завершения быстрого переходного процесса изменения угловой скорости выходного вала двигателя — вид (2.5.12). Проведем уточнение последних членами первого порядка по μ, используя системы (2.5.10), (2.5.12) и (Б.3). Поскольку согласно (2.5.13) (см. также (2.5.15)) производная корня ω конечного уравнения вырожденной системы имеет порядок $O(\varepsilon^2)$, второе слагаемое отвечающего уточненной системе (Б.3) конечного уравнения имеет порядок $\mu\varepsilon^2$. Следовательно, на уровне точности $O(\mu)$ системы (Б.3) этим слагаемым можно пренебречь, и его конечное уравнение, как и для системы из раздела 2.6.1, совпадает с конечным уравнением вырожденной системы (2.5.12). Дифференциальное (векторное) уравнение системы (Б.3), построенное для (2.5.10), (2.5.11), имеет ту же структуру, что и дифференциальное уравнение системы (2.5.12). С учетом (2.5.13), (2.5.17) и (2.5.18), уравнения уточненной системы имеют вид

$$v_x' = \varepsilon f_1, \quad v_y' = f_2, \quad \omega_z' = \frac{1}{i_z^2} f_3$$

$$\mu_1 \omega_{21}' = \frac{1}{2i_2^2}(p_{x22} - p_{x21}) = \frac{n_2}{2i_2^2}(\kappa_0 \mathrm{sgn} u_{x21} - \kappa_M \mathrm{sgn} u_{x22}) + O(\varepsilon^2)$$

$$\mu_1 \omega_{22}' = \frac{1}{2i_2^2}(p_{x21} - p_{x22}) = \frac{n_2}{2i_2^2}(\kappa_M \mathrm{sgn} u_{x22} - \kappa_0 \mathrm{sgn} u_{x21}) + O(\varepsilon^2) \tag{2.6.105}$$

$$\omega_{21} = \frac{2}{n}\omega - \omega_{22}, \quad m(\omega, \eta) = \frac{2}{n} l = \frac{1}{n}(p_{x21} + p_{x22}), \quad \omega = \omega_M = \omega_{M2}$$

$$0 < \mu_1 = \mu/\varepsilon \ll 1$$

Правые части (2.6.105) вычисляются при помощи (2.3.10), (2.3.12), (2.4.8), (2.5.11) и (2.5.13). В частности, выражения для продольных составляющих контактных сил на задних колесах аппарата имеют вид

$$p_{x21} = -\kappa_0 n_2 \mathrm{sgn} u_{x21} + O(\varepsilon^2), \quad p_{x22} = -\kappa_M n_2 \mathrm{sgn} u_{x22} + O(\varepsilon^2)$$

$$u_{x21} = v_x - \varepsilon b \omega_z - \omega_{21}, \quad u_{x22} = v_x - \varepsilon b \omega_z - \omega_{22} \tag{2.6.106}$$

Будем рассматривать наиболее вероятную ситуацию, когда в момент попадания на «микст» (и, следовательно, в близкие моменты времени) справедливы неравенства (2.5.2). В безразмерных переменных им отвечают неравенства (2.5.14)

$$u_{x21} < 0, \quad u_{x22} < 0 \tag{2.6.107}$$

откуда, согласно (2.6.106), имеем

$$\omega_{21} > v_x - \varepsilon b \omega_z, \quad \omega_{22} > v_x - \varepsilon b \omega_z \tag{2.6.108}$$

Поскольку переменные v_x, v_y и ω_z системы (2.6.105) изменяются существенно медленнее переменных ω_{2j} $(j = 1, 2)$, на дальнейшие значения переменных u_{x21} и u_{x22}, определяющих правые части уравнений изменения ω_{2j}, в наибольшей степени влияют переменные ω_{21} и ω_{22}, а переменные v_x, v_y и ω_z можно считать постоянными. При выполнении (2.6.107) два последних дифференциальных уравнения системы (2.6.105) принимают вид

$$\mu_1 \omega_{21}' = \frac{n_2}{2i_2^2}(\kappa_M - \kappa_0) + O(\varepsilon^2), \quad \mu_1 \omega_{22}' = \frac{n_2}{2i_2^2}(\kappa_0 - \kappa_M) + O(\varepsilon^2) \tag{2.6.109}$$

откуда, в силу первого условия (2.2.19) $\kappa_0 > \kappa_M$ следует, что переменная ω_{22} возрастает, переменная ω_{21} — убывает. Тем самым второе неравенство (2.6.108) и соответствующее второе неравенство (2.6.107) усиливаются (проскальзывание попавшего на участок с меньшим коэффициентом трения правого заднего колеса увеличивается), а первое неравенство (2.6.108) и соответствующее первое неравенство (2.6.107), — ослабевают, и на временах $t \sim \mu_1$ получаем

$$\omega_{21} = v_x - \varepsilon b \omega_z + O(\varepsilon), \quad u_{x21} = O(\varepsilon) \tag{2.6.110}$$

Это означает, что решение уравнений (2.6.109) входит в $O(\varepsilon)$–окрестность прямой

$$u_{x21} = 0 \tag{2.6.111}$$

разрыва правых частей этих уравнений, и (2.6.109) теряют смысл — левое заднее колесо аппарата обретает сцепление с опорной плоскостью в продольном направлении.

Для обсуждения того, как будет далее продолжаться взаимодействие этого колеса с опорной плоскостью (его сцепление с ней сохранится или начнется скольжение колеса) следует перейти к уравнению, описывающему движение при выполнении второго равенства (2.6.110), — вблизи прямой (2.6.111). Заменим p_{x21} из (2.6.106) выражением p_{x21} из (2.3.11) — нормализованным аналогом выражения P_{x21} в рамках модифицированной модели увода (2.2.7)–(2.2.10), отвечающего случаю выполнения первого неравенства (2.2.11) для $i = 2$, $j = 1$, когда $|U_{x21}| < \varepsilon \Omega_2 R$. Выражение для p_{x22} из (2.6.106), (2.6.107) оставим без изменения. Соответствующее уравнение изменения переменной $\widetilde{u}_{x21} = u_{x21}/\varepsilon$ в области, определяемой вторым равенством (2.6.110), получается по аналогии с (2.4.17), и с учетом конечного уравнения из (2.6.105), условия (2.2.21) и оценки $v_x = v_0 + O(\varepsilon)$, где v_0 определено в (2.3.14), имеет вид

$$\begin{aligned} \mu \widetilde{u}'_{x21} &= -\frac{1}{i_2^2}(-p_{x21} + l) + O(\mu) = -\frac{1}{2i_2^2}(p_{x22} - p_{x21}) + O(\mu) = \\ &= \frac{n_2}{2i_2^2}\left(-\kappa_0 \frac{u_{x21}}{v_0} - \kappa_M\right) + O(\varepsilon) \end{aligned} \tag{2.6.112}$$

Переменная $\widetilde{u}_{x21}$ отвечает замене выражения $U_{x21*} = V_{x*}$, принятого при переходе к нормализованному аналогу (2.5.10), (2.5.11) системы (2.5.8), (2.5.9), соответствующим выражением $U_{x21*} = \varepsilon V_{x*}$ из (2.3.9). Координата точки покоя уравнения (2.6.112) определяется равенством

$$\widetilde{u}_{x21} = \widetilde{u}^0_{x21} = -\frac{\kappa_M}{\kappa_0} v_0 + O(\varepsilon) \tag{2.6.113}$$

и с погрешностью $O(\varepsilon)$ может быть найдена графически как абсцисса точки пересечения прямой

$$p_{x21} = -\kappa_0 n_2 \frac{\widetilde{u}_{x21}}{v_0} \tag{2.6.114}$$

с горизонтальной прямой $p_{x21} = \kappa_M n_2$ (рис. 2.13). Тем самым в рамках этой погрешности точка покоя уравнения (2.6.112) определяется условием равновесия продольных составляющих контактных сил на задних колесах аппарата.

В силу отрицательности коэффициента наклона прямой (2.6.114) точка покоя (2.6.113) асимптотически устойчива по первому приближению и имеет неограниченную область влияния в пределах области определения $\widetilde{u}_{x21} = O(1)$. Тем самым на малых временах $t \sim -\mu \ln \varepsilon$ решение уравнения (2.6.112) оказывается в $O(\varepsilon)$–окрестности точки (2.6.113) и далее не выходит из нее — в системе устанавливается режим движения без потери сцепления левого заднего колеса с опорной плоскостью. Это означает, что от рассматриваемого в этом разделе случая движения со скольжением левого заднего колеса следует переходить к случаю из разделов 2.4, 2.6.2. Начальное условие для угловой скорости корпуса следует выбирать не нулевым, как это было в разделе 2.4 для системы (2.4.8), (2.4.9), а вычислять по формуле (2.5.26) ((2.5.27)).

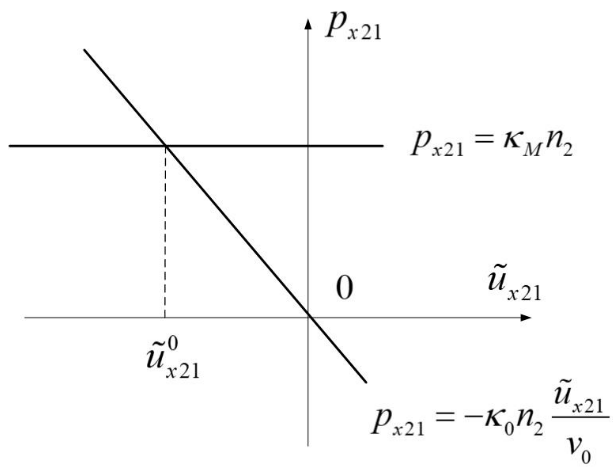


Рис. 2.13. Приближенное отыскание точки покоя уравнения (2.6.112)

После учета результата (2.4.32) ((2.4.33)) получаем, что по завершении быстрых переходных процессов изменения угловой скорости выходного вала двигателя до постоянного значения (2.5.17) и выравнивания касательных составляющих контактных сил на задних колесах поправка к начальным условиям по переменной ω_z, отвечающая рассматриваемому в этом разделе случаю, имеет вид (2.3.25), где

$$\mu\omega_z^{(1)}(0) = \mu\frac{2i_2^2 b}{i_z^2}\left[n(\omega_M^{**} - \omega_0) + \frac{\varepsilon_0\omega_2}{\varepsilon} - \frac{\kappa_M}{\kappa_0}v_0 \mathrm{sgn} u_{x22} + \frac{i_4^2}{n i_2^2 i_3^2}(\omega_0 - \omega_M^*)\right]$$
$$u_{x22} = v_0 - \frac{\omega}{n} \tag{2.6.115}$$

Значение $\omega_M^* = \omega_{M2}$ вычисляется из (2.4.25), $\omega_M^{**} = \omega_{M2}$ — (2.5.17).

Размерным аналогом (2.6.115) служит выражение

$$\Omega_z^{(1)}(0) = \frac{2I_2B}{I_zR}\left[n(\Omega_M^{**} - \Omega_0) + \varepsilon_0\Omega_2 - \varepsilon\frac{\kappa_M}{\kappa_0}\frac{V_0}{R}\mathrm{sgn} U_{x22} + \frac{1}{n}(\Omega_0 - \Omega_M^*)\right]$$
$$U_{x22} = V_0 - \frac{\Omega}{n} \tag{2.6.116}$$

где $\Omega_M^* = \Omega_{M2}$ и $\Omega_M^{**} = \Omega_{M2}$ — размерные аналоги значений (2.4.25) и (2.5.17) соответственно.

Заключение

В работе с использованием аналитических подходов построены и исследованы математические модели начальной стадии заноса двухосного четырехколесного аппарата на однородной опорной плоскости при блокировке или пробуксовке колес ведущей (передней или задней) оси, и на «миксте» — участке опорной плоскости, содержащем области с разными коэффициентами трения — в случае, когда коэффициент трения для одного из колес ведущей (задней) оси оказывается меньше коэффициента трения для других колес, и колеса передней оси сохраняют сцепление с опорной плоскостью. Рассматривались различные условия взаимодействия колес с опорной плоскостью (сохранение или потеря сцепления) и сравнивались способы его описания. В целом работа имеет теоретический характер, но полученные результаты позволяют дать ряд практических рекомендаций для построения алгоритмов работы систем управления рулем (поворотом передних колес вокруг вертикальной оси) и систем управления вращением колес.

Основные результаты работы состоят в следующем.

1. В случае, когда передние колеса аппарата заблокированы, а задние сохраняют сцепление с опорной плоскостью, поворот передних колес не влияет на динамику его корпуса, которая характеризуется убыванием продольной, поперечной и угловой скоростей. Получены формулы, позволяющие аналитически исследовать зависимости поперечной и угловой скоростей корпуса от его продольной скорости.

2. В случаях скольжения только пробуксовывающих передних колес либо только заблокированых или пробуксовывающих задних колес при повороте передних колес «в сторону заноса задней оси» занос аппарата в целом происходит менее интенсивно, чем при неповернутых или повернутых в другую сторону передних колесах. Первый случай характеризуется возрастанием продольной и убыванием поперечной и угловой скоростей корпуса аппарата (вплоть до достижения ими нулевых значений), второй — убыванием продольной скорости (для блокировки) и ее возрастанием (для пробуксовки), а также увеличением диапазонов убывания поперечной и угловой скоростей корпуса (вплоть до достижения ими нулевых значений), по сравнению со случаями неповернутых или повернутых в

другую сторону передних колес. Получены формулы, позволяющие аналитически исследовать зависимости поперечной и угловой скоростей корпуса аппарата от его продольной скорости для различных углов поворота передних колес.

3. Показано, что в ходе движения, при котором блокировка или пробуксовка колес ведущей оси аппарата приводит к скольжению колес другой оси, последние обретают сцепление с опорной плоскостью. Поворот заблокированных или пробуксовывающих передних колес не влияет на этот процесс; занос аппарата с заблокированными или пробуксовывающими задними колесами в целом минимален при неповернутых передних колесах. В рамках модели поликомпонентного сухого трения В.Ф. Журавлёва, учитывающей трение верчение в областях контакта колес с опорной плоскостью, в момент обретения ими сцепления занос прекращается для существенно большего диапазона начальных значений поперечной и угловой скоростей корпуса, чем для модели сухого трения Кулона.

4. Проведены аналитические оценки импульса угловой скорости, получаемого корпусом попавшего на «микст» аппарата после завершения процесса выравнивания контактных сил на колесах ведущей задней оси (в случае, когда хотя бы одно из этих колес сохраняет сцепление с опорной плоскостью) или процесса перехода к постоянному значению угловой скорости выходного вала двигателя (в случае скольжения обоих колес ведущей оси). Найдены условия реализации этих процессов. Установлена неправомерность использования модели, запрещающей проскальзывание передних или задних колес аппарата в поперечном направлении. Показано, что учет трения верчения не влияет на полученные результаты.

5. Рассмотрена поперечная и угловая динамика корпуса аппарата на «миксте». Показано, что в ходе движения со скольжением обоих колес ведущей задней оси колесо, не попавшее на участок с меньшим коэффициентом трения, обретает сцепление с опорной плоскостью. Исследованы оставшиеся возможные варианты движения аппарата: без потери сцепления колес с опорной плоскостью; со скольжением колеса, попавшего на участок с меньшим коэффициентом трения, и сохранением сцепления остальных колес с опорной плоскостью. В обоих случаях доказано, что для значений поперечных скоростей микропроскальзывания колес, отвечающих возрастанию стабилизирующих моментов, занос аппарата практически не развивается, тогда как в случае быстрого убывания стабилизирующих моментов начинается движение аппарата в режиме заноса. Сухое трение верчения в областях контакта колес, скользящих по опорной плоскости, слабо влияет на динамику корпуса аппарата.

Приложение А. Теорема Тихонова-Васильевой

Рассмотрим систему тихоновского вида

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{Y}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t, \mu), \quad \mathbf{y}(0, \mu) = \mathbf{y}_0$$

$$\mu\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{Z}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t, \mu), \quad \mathbf{z}(0, \mu) = \mathbf{z}_0, \quad 0 < \mu = \frac{T_2}{T_1} \ll 1 \tag{A.1}$$

$$\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T, \quad \mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_m)^T$$

Положив в (A.1) $\mu = 0$, получим невозмущенную (вырожденную по Тихонову) систему

$$\frac{d\bar{\mathbf{y}}}{dt} = \mathbf{Y}(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{z}}, t, 0), \quad \bar{\mathbf{y}}(0) = \mathbf{y}_0 \tag{A.2}$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{Z}(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{z}}, t, 0)$$

Будем считать выполненными следующие условия [11, 13, 14, 23, 46] (их формулировка взята из [13, 14, 23]).

1. Функции $\mathbf{Y}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t, \mu)$ и $\mathbf{Z}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t, \mu)$ при $0 \le \mu \le \mu_0$ являются аналитическими функциями всех своих аргументов в области

$$G = \{||\mathbf{y}|| \le a, ||\mathbf{z}|| \le b, 0 \le t \le t'\}$$

2. Уравнение $\mathbf{0} = \mathbf{Z}(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{z}}, t, 0)$ имеет в области $D = \{||\bar{\mathbf{y}}|| \le a, 0 \le t \le t'\}$ изолированный, непрерывный корень $\bar{\mathbf{z}} = \boldsymbol{\varphi}(\bar{\mathbf{y}}, t)$, для которого $||\bar{\mathbf{z}}|| \le b$, а дифференциальное уравнение системы (A.2), отвечающее этому корню, — единственное решение $\bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{y}}(t) \in D$.

3. Точка покоя $\widetilde{\mathbf{z}} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}, t)$ присоединенной системы

$$\frac{d\widetilde{\mathbf{z}}}{d\tau} = \mathbf{Z}(\mathbf{y}, \widetilde{\mathbf{z}}, t, 0) \tag{A.3}$$

где $\mathbf{y}$ и t рассматриваются как постоянные параметры из области G, асимптотически устойчива по первому приближению.

4. Решение $\widetilde{\mathbf{z}}(\tau)$ системы (A.3), отвечающее начальному условию $\widetilde{\mathbf{z}}(0) = \mathbf{z}_0$ и значениям параметров $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0$, $t = 0$

$$\frac{d\widetilde{\mathbf{z}}}{d\tau} = \mathbf{Z}(\mathbf{y}_0, \widetilde{\mathbf{z}}, 0, 0), \quad \widetilde{\mathbf{z}}(0) = \mathbf{z}_0$$

существует при $\tau \ge 0$, не выходит из области $||\widetilde{\mathbf{z}}|| \le b$ и стремится к точке покоя

$\widetilde{\mathbf{z}} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}_0, 0)$ при $\tau \to \infty$. (В таком случае говорят, что начальное условие $\mathbf{z}_0$ принадлежит области влияния точки покоя присоединенной системы.)

Теорема А (Теорема Тихонова-Васильевой [14])**.** *При выполнении условий 1–4 найдется постоянная* $0 < \mu' \le \mu_0$ *такая, что при* $0 < \mu \le \mu'$ *решение* $\mathbf{y}(t,\mu)$, $\mathbf{z}(t,\mu)$ *системы* (A.1) *существует, единственно в* G *и удовлетворяет оценкам*

$$||\mathbf{y}(t,\mu) - \bar{\mathbf{y}}(t)|| = O(\mu) \quad \textit{при} \quad 0 \le t \le t' \tag{A.4}$$

$$||\mathbf{z}(t,\mu) - \bar{\mathbf{z}}(t)|| = O(\mu) \quad \textit{при} \quad \Delta < t \le t', \quad \Delta = O(-\mu \ln \mu)$$

Интервал времени $0 \le t \le \Delta$ *называется пограничным слоем.*

Приложение Б. Внепогранслойная модель первого приближения

Рассмотрим систему тихоновского вида (A.1)

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{Y}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t, \mu), \quad \mathbf{y}(0,\mu) = \mathbf{y}_0$$

$$\mu\frac{d\mathbf{z}}{dt} = \mathbf{Z}(\mathbf{y}, \mathbf{z}, t, \mu), \quad \mathbf{z}(0,\mu) = \mathbf{z}_0, \quad 0 < \mu = \frac{T_2}{T_1} \ll 1 \tag{Б.1}$$

$$\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T, \quad \mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_m)^T$$

Методы [14], основанные на построении асимптотического разложения А.Б. Васильевой [11] для решения системы (Б.1), но не требующие привлечения итерационных процедур, дают возможность учесть влияние переходного процесса изменения быстрых переменных $\mathbf{z}$ внутри пограничного слоя (от начальных значений $\mathbf{z}_0$ до значений в $O(\mu)$–орестности точки $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}_0, 0)$) на медленные переменные. Модель, позволяющая уточнить вырожденную по Тихонову систему (A.2)

$$\frac{d\bar{\mathbf{y}}}{dt} = \mathbf{Y}(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{z}}, t, 0), \quad \bar{\mathbf{y}}(0) = \mathbf{y}_0 \tag{Б.2}$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{Z}(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{z}}, t, 0)$$

членами порядка μ, имеет вид [14]

$$\frac{d\hat{\mathbf{y}}}{dt} = \mathbf{Y}(\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}, t, \mu), \quad \hat{\mathbf{y}}(0,\mu) = \mathbf{y}_0 + \mu\overline{\mathbf{y}}^{(1)}(0) \tag{Б.3}$$

$$\mathbf{0} = \mathbf{Z}(\hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}, t, \mu) - \mu\frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt}$$

Здесь $\boldsymbol{\varphi}$ — изолированный корень конечного уравнения $\mathbf{0} = \mathbf{Z}(\bar{\mathbf{y}}, \bar{\mathbf{z}}, t, 0)$ системы (Б.2), определенный в условии 2 приложения А; $\mu\overline{\mathbf{y}}^{(1)}(0)$ — поправка к начальным условиям, вычисляемая по формуле

$$\overline{\mathbf{y}}^{(1)}(0) = \int_0^\infty \left[\mathbf{Y}(\mathbf{y}_0, \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}_0, 0) + \widetilde{\mathbf{z}}^{(0)}(s), 0, 0) - \mathbf{Y}(\mathbf{y_0}, \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y_0}, 0), 0, 0)\right] ds \tag{Б.4}$$

где $\widetilde{\mathbf{z}}^{(0)}(\tau)$ — решение уравнения

$$\frac{d\widetilde{\mathbf{z}}^{(0)}}{d\tau} = \mathbf{Z}(\mathbf{y}_0, \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}_0, 0) + \widetilde{\mathbf{z}}^{(0)}, 0, 0), \quad \widetilde{\mathbf{z}}^{(0)}(0) = \mathbf{z}_0 - \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y}_0, 0)$$

Теорема Б [14]. *При выполнении условий теоремы А найдется постоянная* $0 < \mu' \leq \mu_0$ *такая, что при* $0 < \mu \leq \mu'$ *решение* $\mathbf{y}(t, \mu)$, $\mathbf{z}(t, \mu)$ *системы* (Б.1) *существует, единственно в* G *и удовлетворяет оценкам*

$$||\mathbf{y}(t, \mu) - \hat{\mathbf{y}}(t, \mu)|| = O(\mu^2), \quad ||\mathbf{z}(t, \mu) - \hat{\mathbf{z}}(t, \mu)|| = O(\mu^2) \tag{Б.5}$$

$$\Delta \leq t \leq t', \quad \Delta = O(-\mu \ln \mu)$$

Литература

[1] *Алисейчик А.П., Павловский В.Е.* Модель и динамические оценки управляемости и комфортабельности движения многоколесного мобильного робота // Проблемы управления. 2013. №1. С. 70–78.

[2] *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Физматлит, 1959. 916 с.

[3] *Андронов В.В., Журавлёв В.Ф.* Сухое трение в задачах механики. М.; Ижевск: Ин-т космич. исслед., НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. 184 с.

[4] *Андронов А.А., Понтрягин Л.С.* Грубые системы // ДАН СССР. 1937. 14(5). С. 245–251.

[5] *Аппель П.* Теоретическая механика. М.: Физматлит, 1960. Т.1. 515 с.; Т.2. 487 с.

[6] *Берестова С. А., Мисюра Н. Е., Митюшов Е. А.* «Кинематическое управление движением колесных транспортных средств» // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 25:2. 2015. С. 254–266.

[7] *Болотин С.В., Карапетян А.В., Кугушев Е.И., Трещев Д.В.* Теоретическая механика. М.: Академия, 2010. 432 с.

[8] *Бурдаков С.Ф., Мирошник И.В., Стельмаков Р.Э.* Системы управления движением колесных роботов. Спб.: Наука, 2001. 227 с.

[9] *Бутузов В.Ф., Нефедов Н.Н.* Об одной задаче теории сингулярных возмущений // Дифференциальные уравнения. 1976. Т. XII. № 10. С. 1736–1747.

[10] *Бухгольц Н.Н.* Основной курс теоретической механики. М.: Наука, 1965. Ч.I. 468 с.; Ч.II. 332 с.

[11] *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990. 208 с.

[12] *Влахова А.В.* О реализации связей в задачах качения колесного аппарата // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 3. С. 22–39.

[13] *Влахова А.В.* Использование моделей контакта для математического описания механических и биомеханических систем: Дисс.... д-ра физ.-мат. наук. М.: 2013. 250 с.

[14] *Влахова А.В.* Математические модели движения колесных аппаратов. М.-Ижевск: АНО «Ижевский институт компьютерных исследований», 2014. 148 с.

[15] *Влахова А.В., Новодерова А.П.* Модель переменной структуры для описания заноса на вираже // Международная научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики», посвященная 170-летию со дня рождения великого русского ученого Николая Егоровича Жуковского (Москва, 24–27 октября 2017 г.): М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва. 2017. С. 98–99.

[16] *Влахова А.В., Новодерова А.П.* О влиянии моментов трения верчения на занос колесного аппарата // Фундамен. и прикл. математика. 2018. Т. 22. Вып. 2. С. 117–132.

[17] *Влахова А.В., Новодерова А.П.* Моделирование заноса колесного аппарата // Проблемы механики и управления: Материалы Международной конференции, Издательство Московского университета, Москва. 2018. С. 123–126.

[18] *Влахова А.В., Новодерова А.П.* Моделирование заноса аппарата с повернутыми передними колесами // Изв. РАН. МТТ. 2019. № 1. С. 23–49.

[19] *Влахова А.В., Новодерова А.П.* Занос колесного аппарата при попадании на «микст» // Современные проблемы математики и механики. Материалы международной конференции, посвященной 80-летию академика РАН В.А. Садовничего. Т. 2. МАКС Пресс Москва. 2019. С. 673–675.

[20] *Влахова А.В., Новодерова А.П.* Занос колесного аппарата на «миксте» // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1: Матем. Механ. 2020. № 5. С. 38–50.

[21] *Влахова А.В., Новожилов И.В.* Разделение движений в системах с разрывными правыми частями // Проблемы механики. К 90-летию акад. А.Ю. Ишлинского. М.: Физматлит. 2003. С. 187–195.

[22] *Влахова А.В., Новожилов И.В.* О заносе колесного экипажа при «блокировке» и «пробуксовке» одного из колес // Фундамен. и прикл. математика. 2005. Т. 11. Вып. 7. С. 11–20.

[23] *Влахова А.В., Мартыненко Ю.Г., Новожилов И.В.* Теория колебаний и фракционный анализ. М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2020. 412 с.

[24] *Влахова А.В., Новожилов И.В., Смирнов И.А.* Математическое моделирование заноса автомобиля // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1: Матем. Механ. 2007. № 6. С. 44–50.

[25] *Дячук М.В., Петренко Д.И.* Моделирование управляемости легкового автомобиля // Вiсник Приднiпровської державної академiї будiвництва та архiтектури. Днепропетровск: ПГАСА. 2010. №12. С. 29–37.

[26] *Журавлёв В.Ф.* Основы теоретической механики. М.: Физматлит, 2008. 304 с.

[27] *Журавлёв В.Ф.* Динамика тяжелого однородного шара на шероховатой плоскости // Изв. РАН. МТТ. 2006. № 6. С. 3–9.

[28] *Журавлёв В.Ф., Климов Д.М., Плотников П.К.* Новая модель шимми // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 5. С. 13–23.

[29] *Журавлёв В.Ф., Розенблат Г.М.* Парадоксы, контрпримеры и ошибки в механике. М.: ЛЕНАНД, 2017. 240 с.

[30] *Зобова А.А.* Динамика систем твердых тел с контактным взаимодействием // Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. М.: 2020. 259 с.

[31] *Иванов А.П.* Динамически совместная модель контактных напряжений при плоском движении трердого тела // ПММ. 2009. Т. 73. Вып. 2. С. 189–203.

[32] *Иванов А.П.* Основы теории систем с трением. М. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. 304 с.

[33] *Карапетян А.В.* О движении шайбы на вращающейся горизонтальной плоскости // Вестник Моск. ун-та. Сер. 1: Матем. Механ. 2019. № 5. С. 37–41.

[34] *Киреенков А.А., Семендяев С.В., Филатов В.Ф.* Экспериментальное исследование связанных двумерных моделей трения скольжения и верчения // Изв. РАН. МТТ. 2010. №6. С. 192–202.

[35] *Кручинин П.А.* Сухое трение в модели качения деформируемого колеса // Сб. научно-методических статей. М.: Изд-во МГУ. 2017. Вып. 30. С. 139–147.

[36] *Кручинин П.А., Ласкин А.А.* О моделях качения деформируемого колеса при описании движения роботизированных платформ // VII Всероссийское совещание-семинар заведующих кафедрами и преподавателей теоретической механики, робототехники, мехатроники вузов Российской Федерации. Материалы совещания / Под ред. В.А. Самсонова; Махачкала: Изд. центр «Мастер». 2016. С. 62–65.

[37] *Кручинин П.А., Ласкин А.А.* Стационарные режимы движения статически неустойчивого робота с двумя соосными деформируемыми колесами // Фундамен. и прикл. математика. 2018. Т. 22. Вып. 2. С.181–193.

[38] *Кугушев Е.И., Попова Т. В.* О движении шайбы по горизонтальной плоскости в модели вязкого трения с переменным коэффициентом // Нелинейная динамика. 2018. Т.14. № 1. С. 145–153.

[39] *Левин М.А., Фуфаев Н.А.* Теория качения деформируемого колеса. М: Наука, 1989. 272 с.

[40] *Литвинов А.С.* Управляемость и устойчивость автомобиля. М.: Машиностроение, 1971. 416 с.

[41] *Маркеев А.П.* Теоретическая механика. Изд. 3-е. М. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 592 с.

[42] *Мусарский Р.А.* Математические модели колесных экипажей. Нижний Новгород: Нижегородский гос. Ун-т им. Н.И. Лобачевского, 2008. 164 с.

[43] *Новодерова А.П.* Разделение движений колесного аппарата на «миксте» // Международная научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики», посвященная 100-летию со дня рождения академика Константина Сергеевича Колесникова (Москва, 10–12 декабря 2019 г.): Тезисы докладов / П.М.

Шкапов, М.Ю. Баркин, Е.В. Мелкумова, составители. Инженерный журнал: наука и инновации. 2020. Вып. 2. С. 178–179.

[44] *Newодерова А.П.* Моделирование заноса колесного аппарата на вираже // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов в 4 томах. Т. 1: Общая и прикладная механика. Т. 1. РИЦ БашГУ Уфа. 2019. С. 586–588.

[45] *Новожилов И.В.* Модель движения деформируемого колеса // Изв. АН. МТТ. 1995. № 6. С. 19–26.

[46] *Новожилов И.В.* Фракционный анализ. М.: Изд-во механико-математического факультета МГУ, 1995. 224 с.

[47] *Новожилов И.В., Кручинин П.А., Магомедов М.Х.* Контактные силы взаимодействия колеса с опорной поверхностью // Сб. научно-методических статей. М.: Изд-во МГУ. 2000. Вып. 23. С. 86–95.

[48] *Новожилов И.В., Павлов И.С., Фрольцов В.А.* О поведении автомобиля на «миксте» // Механика твердого тела. 2001. № 3. С. 61–67.

[49] *Павлов И.С.* Математическое моделирование пространственного движения автомобиля: Дисс.... канд. физ.-мат. наук. М.: 1998. 214 с.

[50] *Певзнер Я.М.* Теория устойчивости автомобиля. М.: Машгиз, 1947. 188 с.

[51] *Рокар И.* Неустойчивость в механике. М.: Издательство иностранной литературы, 1959. 285 с.

[52] *Смирнов Г.А.* Теория движения колесных машин. Учеб. для вузов – М.: Машиностроение, 1990. 352 с.

[53] *Смирнов И.А.* Математическое моделирование заноса автомобиля: Дисс.... канд. физ.-мат. наук. М.: 2011. 167 с.

[54] *Ткачев С.Б.* Реализация движения колесного робота по заданной траектории // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. 2008. № 2. С. 33–55.

[55] *Ткачев С.Б.* Стабилизация неминимально фазовых аффинных систем методом виртуальных выходов. // Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. М.: 2010. 256 с.

[56] *Хачатуров А.А., Афанасьев В.Л., Васильев В.С. и др.* Динамика системы дорога — шина — автомобиль — водитель. М.: Машиностроение, 1976. 535 с.

[57] *Чудаков Е.А.* Избранные труды. Т.1. Теория автомобиля. М.: Изд-во АНСССР, 1961. 464 с.

[58] *Широков Б.Н., Сорочан В.М., Альгин В.Б.* Оценка боковой скорости автомобиля с использованием фильтра Калмана для контроля устойчивости и управляемости в современных системах активной безопасности // Сб. науч. тр. МНТК «Инновации в машиностроении 2012». 2012. С. 320–323.

[59] *Abbas M.A., Milman R., Eklund J.M.* Obstacle avoidance in real time with Nonlinear Model Predictive Control of autonomous vehicles // IEEE Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering. 2014. P. 1–6.

[60] *Ackermann J., Guldner J., Sienel W., Steinhauser R., Utkin V.I.* Linear and Nonlinear Controller Design for Robust Automatic Steering // IEEE Trans. on Control System Technology. 1995. Vol. 3. No. 1. P. 132–143.

[61] *Abuzaid O.M., Ahmed A., Emheisen M., Emheisen A.* Evaluation Of Vehicle Stability Using Simple Single Track Model And Different Control Methods // Liceet 2018 Libyan international conference on electrical engineering and technologies. 2018.

[62] *Ahmed A., Emheisen M.* Analysis of Vehicle Handling Using a Simple Track Model of Automobile // 2019 19th International Conference on Sciences and Techniques of Automatic Control and Computer Engineering (STA). Sousse, Tunisia. 2019. P. 130–133.

[63] *Ahn C., Kim B., Lee M.* Modeling and control of an anti-lock brake and steering system for cooperative control on split-mu surfaces // International Journal of Automotive Technology. 2012. Vol. 13. No. 4. P. 571–581.

[64] *Altche F., Polack P., Fortelle A.* A Simple Dynamic Model for Aggressive, near-limits trajectory planning // IEEE Intelligent Vehicles Symposium (IV). Los Angeles, CA, USA. 2017. P. 141–147.

[65] *Altrock C.V.* Fuzzy logic technologies in automotive engineering // Proceedings of WESCON '94, Anaheim, CA, USA. 1994. P. 110–117.

[66] *Anderson R., Bevly D.M.* Using GPS with a model-based estimator to estimate critical vehicle states // Vehicle System Dynamics. 2010. Vol. 48. No. 12. P. 1413–1438.

[67] *Aripin, M. K., Yahaya Md Sam, Kumeresan A. Danapalasingam, Kemao Peng, N. Hamzah, M. F. Ismail.* A review of active yaw control system for vehicle handling and stability enhancement // International Journal of Vehicular Technology. 2014. 6. P. 1–15.

[68] *Baslamisli S.C., Kose I.E., Anlasë G.* Handling stability improvement through robust active front steering and active differential control // Vehicle System Dynamics. 2011. Vol. 49. No. 5. P. 657–683.

[69] *LeBlanc D., Johnson G., Venhovens P., Gerber G., DeSonia R., Ervin R., Lin C., Ulsoy A., Pilutti T.* CAPC: A Road-Departure Prevention System. // IEEE Control Systems Magazine. 1996. Vol. 16. No. 6. P. 61–71.

[70] *Borrelli F., Falcone P., Keviczky T., Asgari J., Hrovat D.* MPC-based approach to active steering for autonomous vehicle systems // International Journal of Vehicle Autonomous Systems. 2005. Vol. 3. No. 2/3/4. P. 265.

[71] *Broulhiet G.* The Suspension and the Automobile Steering Mechanism: Shimmy and Tramp // Bull Soc. Ing. Civ. Fr. 1925. 78. P. 540–554.

[72] *Campion G., Bastin G., D'Andrea-Novel B.* Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots // IEEE Transactions on robotics and automation. 1996. Vol. 12. No. 1. P. 47–62.

[73] *Canale M., Fagiano L., Milanese M., Borodani P.* Robust vehicle yaw control using an active differential and IMC techniques // Control Engineering Practice. 2007. Vol. 15. No. 8. P. 923–941.

[74] *Cardoso V., Oliveira J., Teixeira T., Badue C., Mutz F., Oliveira-Santos T., Veronese L., De Souza A.F.* A Model-Predictive Motion Planner for the IARA Autonomous Car // arXiv preprint arXiv:1611.04552. 2016.

[75] CarSim Website:http://www.carsim.com. Mechanical Simulation Corporation. 2008.

[76] *Chen Y., Li Y., King M., Shi Q., Wang C., Li P.* Identification methods of key contributing factors in crashes with high numbers of fatalities and injuries in China // Traffic Injury Prevention. 2016. 17(8). P. 878–883.

[77] *Cho W., Yoon J., Yim S., Koo B., Yi K.* Estimation of tire forces for application to vehicle stability control // IEEE Transactions on Vehicular Technology. 2010. Vol. 59. No. 2. P. 638–649.

[78] *Choi M., Choi S.B.* Model Predictive Control for Vehicle Yaw Stability With Practical Concerns // IEEE Transactions on Vehicular Technology. 2014. Vol. 63. No. 8. P. 3539–3548.

[79] *Cowlagi R.V., Tsiotras P.* Hierarchical motion planning with kinodynamic feasibility guarantees: Local trajectory planning via model predictive control // IEEE International Conference on Robotics and Automation, Saint Paul, MN. 2012. P. 4003–4008.

[80] *Doumiati M., Sename O., Dugard L., et al.* Integrated vehicle dynamics control via coordination of active front steering and rear braking // European Journal of Control. 2013. Vol. 19. № 2. P. 144–145.

[81] *Dudziaka M., Lewandowski A., Sledzinsk M.* Uncommon road safety hazards // Procedia Eng. (Elsevier) 177. 2017. P. 375–380.

[82] *Falcone P., Borrelli F., Asgari J., Tseng H.E., Hrovat D.* Predictive Active Steering Control for Autonomous Vehicle Systems // IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2007. Vol. 15. No. 3. P. 566–580.

[83] *Falcone P., Tseng H.E., Borrelli F., Asgari J., Hrovat D.* MPC-based yaw and lateral stabilisation via active front steering and braking // Vehicle System Dynamics: International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility. 2008. Vol. 46. No. 1. P. 611–628.

[84] *Fenton R.E., Melocik G.C., Olsen K.W.* On the Steering of Automated Vehicles: Theory and Experiment // IEEE Trans. on Automatic Control. 1976. Vol. 21. No. 3. P. 306–315.

[85] *Fischer-Wolfarth J., Meyer G.* Advanced Microsystems for automotive applications // Springer. 2013.

[86] *Gadola M., Chindamo D., Romano M., Padula F.* Development and validation of a Kalman filter-based model for vehicle slip angle estimation // Vehicle System Dynamics 52. 2014. Vol. 1. P. 68–84.

[87] *Gao Y., Lin T., Borrelli F., Tseng E., Hrovat D.* Predictive Control of Autonomous Ground Vehicles With Obstacle Avoidance on Slippery Roads // ASME Dynamic Systems and Control Conference. 2010. Vol. 1. P. 265–272.

[88] *Genta G.* Meccanica dell'autoveicolo // Levrotto and Bella. Torino. 2000. P. 37–104.

[89] *Guiggiani M.* Dinamica del Veicolo // Citta Studi Edizioni. Torino. 2007.

[90] *Gillespie T. D.* Fundamentals of vehicle dynamics. SAE International, 1992. 470 p.

[91] *Goh J. Y., Gerdes J. C.* Simultaneous stabilization and tracking of basic automobile drifting trajectories // IEEE Intelligent Vehicles Symposium (IV). 2016. P. 597–602.

[92] ISO 14512 Passenger cars - Straight-ahead braking on surfaces with split coefficient of friction – Open-loop test method. 1999.

[93] *Han S., Huh K.* Monitoring system design for lateral vehicle motion // IEEE Transactions on Vehicular Technology. 2011. Vol. 60. No. 4. P. 1394–1403.

[94] *Hejtmanek P., Cavoj O., Portes P.* Evaluation of vehicle handling by a simplified single track model // Electronical technical journal of technology, engineering and logistic in transport. 2013. Vol. VIII. № 2. P. 42–52.

[95] *Hessburg T., Lee M., Takagi H., Tomizuka M.* Automatic Design of Fuzzy Systems using Genetic Algorithms and its Application to Lateral Vehicle Guidance // SPIE's International Symposium on Optical Tools for Manufacturing and Advanced Automation. 1993. Vol. 2061.

[96] *Hindiyeh R.Y., Gerdes J.C.* A controller framework for autonomous drifting: Design, stability, and experimental validation // Dynamic Systems and Control. 2014. Vol. 136. №5. P. 051015.

[97] *Ji J., Khajepour A., Melek W., Huang Y.* Path Planning and Tracking for Vehicle Collision Avoidance based on Model Predictive Control with Multi-Constraints // IEEE Transactions on Vehicular Technology. 2017. Vol. 66. No. 2. P. 952–964.

[98] *Johnson K.L.* Contact Mechanics. N.Y. ets.: Cambrige: Univ. Press, 1985 = Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.

[99] *Kiencke U., Daiss A.* Observation of lateral vehicle dynamics // Control Engineering Practice. Kidlington: Elsevier Ltd. 1997. Vol. 5. No. 8. P. 1145-1150.

[100] *Kiefer J.R.* Modeling of road vehicle lateral dynamics. M. S. Thesis. Rochester Institute of Technology. New York, USA, 1996. 144 p.

[101] *Kim J.* Analysis of handling performance based on simplified lateral vehicle dynamics // International journal of automotive technology. 2008. Vol. 9. No. 6. P. 687–693.

[102] *Kong J., Pfeiffer M., Schildbach G., Borrelli F.* Kinematic and Dynamic Vehicle Models for Autonomous Driving Control Design // IEEE Intelligent Vehicles Symposium, Seoul, Korea. 2015. P. 1094–1099.

[103] *Lanchester F. William.* Some Reflections Peculiar to the Design of an Automobile // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. 1908. Vol. 2. P. 187–257.

[104] *Lee S., Nakano K., Ohori M.* On-board identification of tyre cornering stiffness using dual Kalman filterand GPS // Veh. Syst. Dyn. 2015. Vol. 53. No. 4. P. 437–448.

[105] *Li X., Song X., Chan C.* Reliable vehicle sideslip angle fusion estimation using low-cost sensors // Measurement. 2014. Vol. 51, No. 1. P. 241–258.

[106] *Liu G., Ren H., Chen S., Wang W.* The 3-DoF bicycle model with the simplified piecewise linear tire model // Proceedings 2013 International Conference on Mechatronic Sciences, Electric Engineering and Computer (MEC). 2013. P. 3530-3534.

[107] *Liu J., Jayakumar P., Stein J. L., Ersal T.* A multi-stage Optimization Formulations for MPC-based Obstacle Avoidance in Autonomous Vehicles using a LiDAR Sensor // ASME Dynamic Systems and Control Conference, San Antonio, TX, USA. 2014. P. 1–10.

[108] *Liu J., Jayakumar P., Stein J. L., Ersal T.* An MPC Algorithm with Combined Speed and Steering Control for Obstacle Avoidance in Autonomous Ground Vehicles // ASME Dynamic Systems and Control Conference. 2015. Vol. 3.

[109] *Lundahl K., Aslund J., Nielsen L.* Investigation vehicle model detail for close to limit maneuvers aiming at optimal control // 22nd International Symposium on Dynamics of Vehicles of Roads and Tracks. Manchester. 2011. P. 1–6.

[110] *Ma B., Liu Y., Gao Y., Yang Y., Ji X., Bo Y.* Estimation of vehicle sideslip angle based on steering torque // Int. J. Adv. Manuf. Technol. 2018. 94. P. 3229–3237.

[111] *MacMillin P., Hauser J.* Development and Exploration of a Rigid Motorcycle Model // 48h IEEE Conference on Decision and Control (CDC) held jointly with 2009 28th Chinese Control Conference, Shanghai. 2009. P. 4396–4401.

[112] *Manssouri K.* Integrated Motion Control of an Overactuated Vehicle. Master Thesis, Eindhoven, 2004.

[113] *Marino R., Scalzi S., Netto M.* Nested PID steering control for lane keeping in autonomous vehicles // Control Engineering Practice. 2011. Vol. 19. No. 12. P. 1459–1467.

[114] *Milliken W. F., Milliken D. L.* Race car vehicle dynamics. Society of Automotive Engineers, Inc., Warrendale, PA, 1995.

[115] *Naets F., van Aalst S., Boulkroune B., El Ghouti N., Desmet W.* Design and Experimental Validation of a Stable Two Stage Estimator for Automotive Sideslip Angle and Tire Parameters // IEEE Transactions on Vehicular Technology. 2017. Vol. 66. No. 11. P. 9727–9742.

[116] *Nam K., Oh S., Fujimoto H., Hori Y.* Estimation of sideslip and roll angles of electric vehicles using lateral tire force sensors through RLS and Kalman filter approaches // IEEE Trans. Ind. Electron. 2012. Vol. 60. P. 988–1000.

[117] *Nam K., Fujimoto H., Hori Y.* Lateral stability control of in-wheel-motor-driven electric vehicles based on sideslip angle estimation using lateral tire force sensors // IEEE Transactions on Vehicular Technology. 2012. Vol. 61. No. 5. P. 1972–1985.

[118] *Nguyen B.M., Wang Y., Fujimoto H., Hori Y.* Lateral stability control of electric vehicle based on disturbance accommodating kalman filter using the integration of single antenna GPS receiver and yaw rate sensor // Electron. Eng. Technol. 2013. Vol. 8. P. 899–910.

[119] *Olley M.* Suspension and Handling. Detroit, MI: ChevroletEngineering Center, 1937.

[120] *Oufroukh N.A, Benine-Neto A., Yacine Z., Mammar S., Glaser S.* Invariant set based vehicle handling improvement at tire saturation using fuzzy output feedback // IEEE Intelligent Vehicles Symposium (IV). 2011. P. 1104–1109.

[121] *Ozguner U., Unyeliog'lu K.A., Hatipog'lu C.* An Analytical Study of Vehicle Steering Control // 4Ih IEEE Conference on Control Applications, Albany, NY. 1995. P. 125–130.

[122] *Pacejka H.B.* Non-linearities in road vehicle dynamics // Veh. Syst. Dyn. 1986. Vol. 15. No. 5. P. 237–254.

[123] *Pacejka H.B.* Tyre and vehicle dynamics. Warrendale, PA. Soc. Automotive Eng., 2005. 621 p.

[124] *Pang S., Guan X., Zhan J.* Research of chassis torsional stiffness on vehicle handling performance // WASE International Conference on Information Engineering: Beidaihe, China. 2010. P. 254–256.

[125] *Park J.M., Kim D.W., Yoon Y.S., Kim H.J., Yi K.S.* Obstacle avoidance of autonomous vehicles based on model predictive control // Proc. of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering. 2009. Vol. 223. No. 12. P. 1499–1516.

[126] *Peng H., Tomizuka M.* Vehicle Lateral Control for Highway Automation // American Control Conference, San Diego, CAY. 1990. P. 788–793.

[127] *Peng H., Tomizuka M.* Preview Control for Vehicle Lateral Guidance in Highway Automation // American Control Conference, Boston, MA. 1991. P. 3090–3095.

[128] *Polack P., Altche F., d'Andrea-Novel B., Fortelle A.* The kinematic bicycle model: A consistent model for planning feasible trajectories for autonomous vehicles? // IEEE Intelligent Vehicles Symposium (IV), Los Angeles, CA. 2017. P. 812–818.

[129] *Ren H., Shim T., Ryu J., Chen S.* Development of Effective Bicycle Model for Wide Ranges of Vehicle Operations // SAE Technical Papers. 2014. Vol. 1. P. 1-9.

[130] *Rucco A., Notarstefano G., Hauser J.* Dynamics exploration of a single-track rigid car model with load transfer // 49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC). 2010. P. 4934–4939.

[131] *Ryu J., Gerdes J.C.* Integrating inertial sensors with global positioning system (GPS) for vehicle dynamics control // ASME Trans. J. Dyn. Syst. Meas. Control. 2004. Vol. 126. No. 2. P. 243–254.

[132] *Saccon A.* Maneuver Regulation of Nonlinear Systems: The Challenge of Motorcycle Control. Ph.D. Thesis, Padova, 2006.

[133] *Savkoor A.R., Happel H., Horkay F.* Vehicle handling and sensitivity in transient manoeuvres // PAUWELUSSEN, J. Vehicle performance: understanding human monitoring and assessment. Exton, PA: Swets. 1999. P. 121–147.

[134] *Segel L.* Theoretical Prediction and Experimental Substantiation of the Response of the Automobile to Steering Control // Automobile Division, The Institute of Mechanical Engineers. 1956. P. 26–46.

[135] *Sharp R.S., Bettella M.* On the construction of a general numerical tyre shear force model from limited data // Proc. of the Inst. of Mech. Eng., Pt. D: J. Automobile Eng. 2003. Vol. 217. No. 3. P. 165–172.

[136] *Shladover S.E., Wormley D.N., Richardson H.H., Fish R.* Steering Controller Design for Automated Guideway Transit Vehicles // ASME Journal of Dynamic System, Measurement and Control. 1978. Vol. 100. No. 3. P. 1–8.

[137] *Van Zanten A., Erhardt R., Pfaff G., Kost F., Hartmann U., Ehret T.* Control Aspects of the Bosch-VDC // Int. Symposium on Advanced Vehicle Control (AVEC), Aachen, Germany. 1996.

[138] *Varszegi B., Takacs D., Orosz G..* On the nonlinear dynamics of automated vehicles – a nonholonomic approach // European Journal of Mechanics A: Solids. 2019. Vol. 74. P. 371–380.

[139] *Venhovens P.J.T., Naab K.* Vehicle dynamics estimation using Kalman filters // Veh. Syst. Dyn. 1999. Vol. 32. P. 171–184.

[140] *Wang J., Hsieh M.F.* Vehicle yaw inertia and mass independent adaptive control for stability and trajectory tracking enhancements // IEEE American Control Conference St. Louis, MO, USA, New York. 2009. P. 689–694.

[141] *Whitcomb D.W., Milliken W.F.* Design Implications of a General Theory of Automobile Stability and Control // Proc. Inst. Mech. Eng. (Auto. Div.). 1956. 7. P. 367–391.

[142] *Wong J.Y.* Theory of Ground Vehicles, New York: Wiley, 1976.

[143] *Yoshida H., Shinohara S., Nagai M.* Lane change steering manoeuvre using model predictive control theory // Vehicle System Dynamics: International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility. 2008. Vol. 46. No. 1. P. 669–681.

[144] *Zhou S., Zhang S., Zhao G.* Stability control on tractor semi-trailer during split-mu braking // Advanced Materials Research. 2011. Vol. 230. P. 549–553.

[145] *Zong C., Liang H., Tian C., Hu R.* Vehicle chassis coordinated control strategy based on model predictive control method // IEEE International Conference on Information and Automation. 2010. P. 655–659.