ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2016, том 52, № 11, с. 1533–1544

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977

О СВОЙСТВАХ НУЛЕВОЙ ДИНАМИКИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

© 2016 г. В. В. Фомичев, А. В. Краев, А. И. Роговский

Рассматривается линейная стационарная многосвязная квадратная система управления. Для неё изучается вопрос об описании нулевой динамики, т.е. динамики системы в случае, когда её выход тождественно равен нулю. Изучается случай, когда для системы не определён относительный порядок.

DOI: 10.1134/S0374064116110091

1. Введение. Рассматривается линейная стационарная система управления

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t > 0, \quad y(t) = Cx(t), \tag{1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – фазовый вектор системы, $u(t) \in \mathbb{R}^l$ – вход, $y(t) \in \mathbb{R}^l$ – выход, A, B, C – матрицы соответствующих размерностей, $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$. Предполагается также, что $\operatorname{rank} B = l$. Система (1) однозначно определяется своими матрицами, поэтому далее будем говорить о системе $\{A, B, C\}$.

Изучается нулевая динамика данной системы, т.е. движение системы по многообразию $y = Cx \equiv 0$. Описание нулевой динамики системы (1) играет важную роль в теории управления, в частности, при решении задачи стабилизации по выходу. В этой задаче, как правило, стараются добиться выполнения равенства $y(t) = 0$ (либо точно, либо приближённо, либо в асимптотике). Но тождество $y(t) \equiv 0$ не гарантирует, что $x(t) \equiv 0$, и, следовательно, стабилизация выхода не гарантирует стабилизации системы в целом. Нулевая динамика как раз и показывает, как изменяется $x(t)$ при $y(t) \equiv 0$ (и если нулевая динамика устойчива, то при стабилизации выхода системы она стабилизируется в целом).

При описании нулевой динамики рассматриваются следующие вопросы: какова размерность нулевой динамики (т.е. каков порядок системы уравнений, описывающей динамику системы при $y(t) \equiv 0$); устойчива ли она (т.е. устойчивы ли решения этих уравнений); как найти уравнения нулевой динамики (желательно получить каноническую форму исходной системы, из которой эти уравнения легко находятся, например, являются подсистемой системы в канонической форме).

Известно, что если для системы (1) определён относительный порядок (ОП), можно дать исчерпывающие ответы на поставленные вопросы (см. [1, с. 92; 2; 3]). Также при описании нулевой динамики важную роль играет матрица Розенброка

$$R(s) = \left(\begin{array}{c|c} sI - A & -B \\ \hline C & 0 \end{array}\right), \quad s \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

Пусть $\beta(s) = \det R(s)$. Известно, что корни s^* полинома $\beta(s)$ (так называемые инвариантные нули системы) образуют спектр нулевой динамики. Поэтому полином $\beta(s)$ иногда называют характеристическим полиномом нулевой динамики.

Интерес представляет случай, когда ОП для системы не определён. В настоящей работе рассматривается именно такой случай. Далее предложен метод нахождения уравнений нулевой динамики, применимый к любой системе вида (1).

2. Основные определения. Нам понадобятся понятие ОП, а также некоторые его обобщения, введённые в работах [4–6] (где были изучены свойства ОП и его обобщений). Для удобства дальнейшего изложения введём здесь эти понятия.

В работе [7, с. 220] введено

Определение 1. Вектор $r=(r_1,r_2,\ldots,r_l)\in\mathbb{N}^l$ называется вектором ОП системы (1), если

1) $C_iB=0,\ C_iAB=0,\ldots,\ \ C_iA^{r_i-2}B=0,\quad C_iA^{r_i-1}B\neq 0$;

2) $\det H(r)\neq 0$,

где $C_i,\ \ i=\overline{1,l},$ – строки матрицы C,

$$H(r)=\begin{pmatrix}C_1A^{r_1-1}B\\ \ldots\\ C_lA^{r_l-1}B\end{pmatrix}.$$

Заметим, что условия определения 1 выполняются не всегда (см. [1, с. 72]). Поэтому целесообразным является введение обобщений ОП. Одно из обобщений ОП – главный неполный относительный порядок (ГНОП) – введено в работе [4]. Формально определение ГНОП можно сформулировать, например, следующим образом.

Определение 2. Вектор $r=(r_1,r_2,\ldots,r_l)\in\mathbb{N}^l$ называется вектором ГНОП, если выполнены условие 1) определения 1 и условия

2) $r_i\le r_{i+1},\ \ i=\overline{1,l-1}$;

3) для любого набора различных индексов $i_1,\ldots,i_q\in\{1,2,\ldots,l\}$, таких, что $r_{i_1}= =r_{i_2}=\ldots=r_{i_q}$, строки $H_{i_1},\ldots,H_{i_q}$ линейно независимы.

В работе [4] показано, что данное понятие инвариантно к невырожденным преобразованиям выходов (если под ГНОП понимать вектор ГНОП приведённой системы, т.е. системы, приведённой с помощью линейных невырожденных преобразований выходов к виду с выполненными условиями определения 2). Более того, согласно [6], вектор ГНОП можно использовать для оценки размерности нулевой динамики системы, у которой $\beta(s)\not\equiv 0$. Однако вектор ГНОП существует не для любой системы (он может быть не определён, если система не является управляемой). Поэтому рассмотрим ещё одно обобщение ОП из работы [6].

Определение 3. Вектор $\rho=(\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_l)\in(\mathbb{N}\cup\{0\})^l$, компоненты которого определяются следующим образом:

$$\rho_i=0,\quad \text{если}\quad C_iA^{q-1}B=0,\quad q\in\mathbb{N},$$

$$\rho_i=q,\quad \text{если}\quad C_iA^{q-1}B\neq 0,\quad \text{и}\quad C_iA^{j-1}B=0\quad \text{для любых}\quad j,\quad j<q,\quad j\in\mathbb{N},$$

назовём вектором вырожденного относительного порядка (ВОП). Здесь, как и ранее, C_i – i-я строка матрицы C.

Вместе с вектором ВОП аналогично определению 1 рассмотрим матрицу

$$\mathcal{H}(\rho)=\begin{pmatrix}\mathcal{H}_1\\ \ldots\\ \mathcal{H}_l\end{pmatrix},$$

где $\mathcal{H}_i=0$, если $\rho_i=0$, и $\mathcal{H}_i=C_iA^{\rho_i-1}B$, если $\rho_i\neq 0$. Ясно, что вектор ВОП определён для любой системы вида (1). Из работы [6] известно, что любая система, имеющая ненулевой вектор ВОП, может быть приведена к специальному виду, схожему с канонической формой системы, имеющей ОП.

Перейдём теперь к рассмотрению вопроса о нахождении уравнений нулевой динамики системы (1).

3. Нулевая динамика одного класса систем. Предположим сначала, что для системы (1) выполняется условие

$$CA^{q-1}B=0,\quad q\in\mathbb{N}. \tag{3}$$

Найдём уравнения нулевой динамики данной системы. Если матрица C нулевая, то эти уравнения, очевидно, имеют вид

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t).$$

Если матрица выходов имеет неполный ранг, т.е. $\operatorname{rank} C = m < l$, то сделаем замену выходов $\tilde{y}(t) = Ty(t)$, $T \in \mathbb{R}^{l\times l}$, $\det T \neq 0$, так, чтобы первые m строк преобразованной матрицы выходов $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \ldots, \tilde{C}_m$ были линейно независимыми, а остальные строки $\tilde{C}_{m+1}, \tilde{C}_{m+2}, \ldots, \tilde{C}_l$ – нулевыми. Поскольку нулевые строки матрицы выходов не влияют на нулевую динамику системы, то можно рассматривать преобразованную систему как систему с l входами и m выходами (т.е. исключить из рассмотрения нулевые строки матрицы выходов). Оставим за преобразованной системой те же обозначения, что и у исходной, т.е. будем считать, что $B \in \mathbb{R}^{n\times l}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$, причём $m \le l$, и эти матрицы имеют полный ранг.

Покажем теперь, что любую систему из рассматриваемого класса с помощью преобразования фазовых координат можно привести к виду, в котором уравнения нулевой динамики легко находятся.

Утверждение 1. *Пусть для системы* $\{A, B, C\}$, *где* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times l}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\operatorname{rank} B = l$, $\operatorname{rank} C = m$, $m \le l$, *выполнено условие (3). Тогда существует невырожденная матрица* $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *такая, что уравнения системы* $\{M^{-1}AM, M^{-1}B, CM\}$ *имеют вид*

$$\dot{\check{x}}(t) = \tilde{A}_{11}\check{x}(t), \quad \dot{\hat{x}}(t) = \tilde{A}_{21}\check{x}(t) + \tilde{A}_{22}\hat{x}(t) + \bar{B}u(t), \quad y(t) = \bar{C}\check{x}(t). \tag{4}$$

Здесь $\check{x} \in \mathbb{R}^d$, $\hat{x} \in \mathbb{R}^{n-d}$, $m \le d \le n - l$, *причём из тождества* $y(t) \equiv 0$ *следует, что* $\check{x}(t) \equiv 0$.

Доказательство. Известно, что для выхода $y(t)$ справедливо равенство

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + \int\limits_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau.$$

В силу условия (3) второе слагаемое в правой части этого соотношения равно нулю, т.е.

$$y(t) = Ce^{At}x_0. \tag{5}$$

Из равенства (5) следует, что для рассматриваемого класса систем выход равен нулю тогда и только тогда, когда

$$CA^{q-1}x_0 = 0, \quad q \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Поскольку степени матрицы A выше $(n-1)$-й линейно выражаются через $I, A, \ldots, A^{n-1}$ (в силу теоремы Гамильтона–Кэли), то для выполнения равенства (6) необходимо и достаточно, чтобы $CA^jx_0 = 0$, $j = \overline{0, n-1}$, т.е. чтобы $x_0 \in \ker N_{A,C}$, где

$$N_{A,C} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \ldots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

– матрица наблюдаемости системы.

Заметим, что $\dim\ker N_{A,C} \ge l$, так как в силу условия (3) $B_i \in \ker N_{A,C}$, $i = \overline{1, l}$, где B_i обозначает i-й столбец матрицы B. Покажем, что подпространство $\ker N_{A,C}$ инвариантно относительно оператора, задаваемого матрицей A. В самом деле, пусть $\eta \in \ker N_{A,C}$. Обозначим $\xi = A\eta$. Тогда $CA^{q-1}\xi = CA^{q-1}A\eta = CA^q\eta = 0$, $q \in \mathbb{N}$, т.е. $\xi \in \ker N_{A,C}$.

Пусть $\dim\ker N_{A,C} = p$ (т.е. $\operatorname{rank} N_{A,C} = n - p$). Дополним столбцы $B_1, \ldots, B_l$ до базиса $\ker N_{A,C}$ векторами $V_1, V_2, \ldots, V_{p-l}$, а затем систему векторов $B_1, \ldots, B_l, V_1, \ldots, V_{p-l}$ до базиса всего пространства векторами $U_1, \ldots, U_{n-p}$ (если $\dim\ker N_{A,C} = l$, то первый этап не потребуется). Рассмотрим невырожденную матрицу

$$M = (U_1, \ldots, U_{n-p}, V_1, \ldots, V_{p-l}, B_1, \ldots, B_l)$$

и проведём преобразование фазовых координат $\tilde{x} = M^{-1}x$. При этом, поскольку последние p столбцов матрицы M образуют базис инвариантного относительно оператора A подпространства, то матрица $\tilde{A}$ преобразованной системы примет вид

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & 0 \\ \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{22} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}_{11} \in \mathbb{R}^{(n-p)\times(n-p)}, \quad \tilde{A}_{21} \in \mathbb{R}^{p\times(n-p)}, \quad \tilde{A}_{22} \in \mathbb{R}^{p\times p}.$$

Для матрицы $\tilde{B}$ имеем

$$\tilde{B} = M^{-1}B = (U_1, \ldots, U_{n-p}, V_1, \ldots, V_{p-l}, B_1, \ldots, B_l)^{-1}B.$$

Так как последние l столбцов матрицы M являются столбцами матрицы B, то

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ I_l \end{pmatrix},$$

где I_l – единичная матрица порядка l.

Матрица выходов $\tilde{C}$ изменяется следующим образом:

$$\tilde{C} = CM. \tag{7}$$

Из определения матрицы наблюдаемости следует, что $\ker N_{A,C} \subset \ker C$, поэтому последние p столбцов матрицы M принадлежат ядру матрицы C. Отсюда с учётом равенства (7) следует, что

$$\tilde{C} = (\bar{C}, 0), \quad \bar{C} \in \mathbb{R}^{m\times(n-p)},$$

т.е. последние p столбцов этой матрицы нулевые.

Таким образом, уравнения преобразованной системы имеют вид

$$\dot{\check{x}}(t) = \tilde{A}_{11}\check{x}(t), \quad \dot{\hat{x}}(t) = \tilde{A}_{21}\check{x}(t) + \tilde{A}_{22}\hat{x}(t) + \bar{B}u(t), \quad y(t) = \bar{C}\check{x}(t). \tag{8}$$

Здесь $\bar{B} = (0, I_l)^T$, $\bar{B} \in \mathbb{R}^{p\times l}$, $\check{x} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{n-p})^T$, $\hat{x} = (\tilde{x}_{n-p+1}, \ldots, \tilde{x}_n)^T$. Уравнения (8) фактически представляют собой калмановскую декомпозицию не полностью наблюдаемой системы (см. [8, с. 18]). В данном частном случае $N_{A,C}B = 0$ (согласно условию (3)), поэтому наблюдаемая часть (уравнения для $\check{x}(t)$) не зависит от управления $u(t)$.

Размерность d вектора $\check{x}$ равна рангу матрицы наблюдаемости системы, т.е. $d = n - p$. Поскольку матрица C имеет полный ранг и $N_{A,C}B = 0$, то получаем оценку $m \le d \le n - l$.

Покажем, что выход системы $\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}\}$ нулевой тогда и только тогда, когда

$$\tilde{x}_0 = (0, \ldots, 0, \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_p). \tag{9}$$

В самом деле, согласно сказанному выше, выход $\tilde{y}(t)$ равен нулю тогда и только тогда, когда $\tilde{x}_0 \in \ker N_{\tilde{A},\tilde{C}}$. Заметим, что $N_{\tilde{A},\tilde{C}} = N_{A,C}M$. Поскольку последние p столбцов матрицы M принадлежат ядру матрицы $N_{A,C}$, то условие $\tilde{x}_0 \in \ker N_{\tilde{A},\tilde{C}}$ эквивалентно условию (9).

Покажем, что для системы (8) выполнено следующее условие: из тождества $y(t) \equiv 0$ следует, что $\check{x}(t) \equiv 0$. В самом деле, согласно (9), если $y(t) \equiv 0$, то $\check{x}(0) = 0$. Отсюда, поскольку $\check{x}(t)$ удовлетворяет системе линейных однородных дифференциальных уравнений, следует, что $\check{x}(t) \equiv 0$. Утверждение доказано.

Если уравнения системы имеют вид (4) и из условия $y(t) \equiv 0$ следует, что $\check{x}(t) \equiv 0$, то уравнения нулевой динамики такой системы, очевидно, имеют вид

$$\check{x}(t) \equiv 0, \quad \dot{\hat{x}}(t) = A_{22}\hat{x}(t) + \bar{B}u(t), \quad t > 0, \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \in \mathbb{R}^{n-d}.$$

Таким образом, найдены уравнения нулевой динамики системы (1), для которой выполнено условие (3).

4. Уравнения нулевой динамики в общем случае. Согласно изложенному выше, уравнения нулевой динамики могут быть найдены для двух классов систем: для систем, имеющих вектор ОП (см. [1, с. 92]), и для систем, удовлетворяющих условию (3). Это, в частности, позволяет найти уравнения нулевой динамики для скалярных систем (т.е. имеющих один вход и один выход). В самом деле, в случае $l = 1$ матрица H и вектор r из определения ОП являются числами, поэтому либо $CA^{q-1}B = 0$, $q \in \mathbb{N}$, и выполняется условие (3), либо существует число q такое, что $CA^{q-1}B \ne 0$, и выполняются условия ОП. Покажем, что и многосвязные системы вида (1) могут быть приведены к виду, для которого уравнения нулевой динамики могут быть найдены.

Теорема 1. *Любая система (1), для которой не выполнены условие (3) и условия ОП, с помощью невырожденных преобразований входов, выходов и фазовых координат может быть приведена к виду*

$$\dot{x}^{(i)} = \sum_{j=1}^{p} A_{ij}x^{(j)} + A_{i0}x^{(0)} + B_i\tilde{u}_i, \quad i=\overline{1,p}, \quad \dot{x}^{(0)} = \sum_{j=1}^{p} A_{0j}x^{(j)} + \bar{A}x^{(0)} + \bar{B}\bar{u},$$
$$\tilde{y}_i = \sum_{j=1}^{i} C_{ij}x^{(j)}, \quad i=\overline{1,p}, \quad \bar{y} = \sum_{j=1}^{p} C_{0j}x^{(j)} + \bar{C}x^{(0)}, \tag{10}$$

где $x = (x^{(1)^T}, x^{(2)^T}, \ldots, x^{(p)^T}, x^{(0)^T})^T$ *– фазовый вектор системы,* $x^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_i}$, $i=\overline{1,p}$, $x^{(0)} \in \mathbb{R}^{N_0}$, $N_0+n_1+\ldots+n_p = n$, $u = (\tilde{u}^T, \bar{u}^T)^T$ *– её вход,* $\tilde{u} \in \mathbb{R}^p$, $\bar{u} \in \mathbb{R}^{l-p}$, $y = (\tilde{y}^T, \bar{y}^T)^T$ *– выход,* $\tilde{y} \in \mathbb{R}^p$, $\bar{y} \in \mathbb{R}^{l-p}$. *При этом*

$$A_{ii} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ * & * & * & \ldots & * \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i},$$

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ * & * & \ldots & * \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j} \quad \textit{при} \quad j > i,$$

а при $j < i$ *матрица* $A_{ij} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$ *произвольная,*

$$A_{i0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ * & * & \ldots & * \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_i \times N_0}, \quad B_i = (0, \ldots, 0, 1)^T \in \mathbb{R}^{n_i}, \quad C_{ii} = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{1 \times n_i},$$

$$C_{ij} \in \mathbb{R}^{1 \times n_j}, \quad C_{0j} \in \mathbb{R}^{(l-p) \times n_j}, \quad \bar{C} \in \mathbb{R}^{(l-p) \times N_0}, \quad \bar{B} \in \mathbb{R}^{N_0 \times (l-p)}, \quad A_{0i} \in \mathbb{R}^{N_0 \times n_i}, \quad i,j=\overline{1,p},$$

а для системы $\{\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}\}$ *выполняются либо условие (3), либо условия ОП.*

Доказательство. Приведём алгоритм построения искомого преобразования.

Шаг 1. Рассмотрим систему $\{A, B, C\}$. Заметим, что для неё вектор ВОП не равен нулю (в противном случае выполнено условие (3)). Тогда, согласно теореме 1 из работы [6], с помощью преобразований фазовых координат с невырожденной матрицей $M_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, входов с невырожденной матрицей $N_1 \in \mathbb{R}^{l \times l}$ и выходов с невырожденной матрицей $T_1 \in \mathbb{R}^{l \times l}$ система может быть приведена к виду

$$\dot{x}^{(i)} = \sum_{j=1}^{p_1} A_{ij}^{(1)}x^{(j)} + A_{i0}^{(1)}x^{(0)} + B_i^{(1)}\tilde{u}_i, \quad i=\overline{1,p_1},$$
$$\dot{x}^{(0)} = \sum_{j=1}^{p_1} A_{0j}^{(1)}x^{(j)} + \bar{A}^{(1)}x^{(0)} + \bar{B}^{(1)}\bar{u}, \tag{11}$$
$$\tilde{y}_i = C_{ii}^{(1)}x^{(i)}, \quad i=\overline{1,p_1}, \quad \bar{y} = \sum_{j=1}^{p_1} C_{0j}^{(1)}x^{(j)} + \bar{C}^{(1)}x^{(0)}.$$

Здесь $x = (x^{(1)^T}, x^{(2)^T}, \ldots, x^{(p_1)^T}, x^{(0)^T})^T$ – фазовый вектор системы, $x^{(i)} \in \mathbb{R}^{n_i}$, $i = \overline{0, p_1}$, $n_0 + n_1 + \ldots + n_{p_1} = n$, $u = (\tilde{u}^T, \bar{u}^T)^T$ – её вход, $\tilde{u} \in \mathbb{R}^{p_1}$, $\bar{u} \in \mathbb{R}^{l-p_1}$, $y = (\tilde{y}^T, \bar{y}^T)^T$ – выход, $\tilde{y} \in \mathbb{R}^{p_1}$, $\bar{y} \in \mathbb{R}^{l-p_1}$, $p_1 = \operatorname{rank} \mathcal{H}^{(1)}$. Верхние индексы матриц соответствуют номеру итерации. При этом блоки матриц преобразованной системы имеют вид

$$A_{ii}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ * & * & \ldots & * \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}, \quad A_{ij}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 \\ * & \ldots & * \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}, \quad i \neq j,$$

$$A_{i0}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 \\ * & \ldots & * \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_0}, \tag{12}$$

$$B_i^{(1)} = (0, \ldots, 0, 1)^T \in \mathbb{R}^{n_i}, \quad C_{ii}^{(1)} = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{1 \times n_i}, \quad C_{0i} \in \mathbb{R}^{(l-p_1) \times n_i}, \quad \bar{C}^{(1)} \in \mathbb{R}^{(l-p_1) \times n_0},$$

$$\bar{B}^{(1)} \in \mathbb{R}^{n_0 \times (l-p_1)}, \quad \bar{A}^{(1)} \in \mathbb{R}^{n_0 \times n_0}, \quad A_{0i}^{(1)} \in \mathbb{R}^{n_0 \times n_i}, \quad i, j = \overline{1, p_1}, \quad p_1 < l, \quad n_0 > 0.$$

Если для системы $\{\bar{A}^{(1)}, \bar{B}^{(1)}, \bar{C}^{(1)}\}$ выполнено условие (3) или условия ОП, то исходная система приведена к требуемому виду (в этом случае $N_0 = n_0$). В противном случае обозначим матрицы системы (11) через $A^{(1)}$, $B^{(1)}$, $C^{(1)}$ и перейдём к следующему шагу.

Шаг 2. На предыдущем шаге получена система $\{A^{(1)}, B^{(1)}, C^{(1)}\}$ вида (11). Рассмотрим систему $\{\bar{A}^{(1)}, \bar{B}^{(1)}, \bar{C}^{(1)}\}$. Для данной системы не выполнено условие (3), следовательно, вектор ВОП данной системы отличен от нуля, поэтому с помощью преобразования фазовых координат $\zeta = \bar{M}_2 x^{(0)}$, входов $\nu = \bar{N}_2 \bar{u}$ и выходов $\mu = \bar{T}_2 \bar{y}$ эта система может быть приведена к виду

$$\dot{\zeta}^{(i)} = \sum_{j=1}^{\bar{p}_1} \tilde{A}_{ij}^{(2)} \zeta^{(j)} + \tilde{A}_{i0}^{(2)} \zeta^{(0)} + \tilde{B}_i^{(2)} \tilde{\nu}_i, \quad i = \overline{1, \bar{p}_1},$$

$$\dot{\zeta}^{(0)} = \sum_{j=1}^{\bar{p}_1} \tilde{A}_{0j}^{(2)} \zeta^{(j)} + \tilde{\bar{A}}^{(2)} \zeta^{(0)} + \tilde{\bar{B}}^{(2)} \bar{\nu}, \tag{13}$$

$$\tilde{\mu}_i = \tilde{C}_{ii}^{(2)} \zeta^{(i)}, \quad i = \overline{1, \bar{p}_1}, \quad \bar{\mu} = \sum_{j=1}^{\bar{p}_1} \tilde{C}_{0j}^{(2)} \zeta^{(j)} + \tilde{\bar{C}}^{(2)} \zeta^{(0)},$$

где $\zeta^{(i)} \in \mathbb{R}^{\bar{n}_i}$, $i = \overline{0, \bar{p}_1}$, $\tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in \mathbb{R}^{\bar{p}_1}$, $\bar{\mu}, \bar{\nu} \in \mathbb{R}^{l-p_1-\bar{p}_1}$, причём $\bar{n}_0 + \bar{n}_1 + \ldots + \bar{n}_{\bar{p}_1} = n_0$, $\bar{p}_1 < l - p_1$, $\bar{n}_0 > 0$, $\bar{p}_1 = \operatorname{rank} \bar{\mathcal{H}}^{(1)}$. Размерности матриц согласованы с размерностями соответствующих векторов, структура аналогична (12) (с учётом разницы в размерностях).

Для системы $\{A^{(1)}, B^{(1)}, C^{(1)}\}$ рассмотрим преобразования координат $z = M_2 x$, входов $v = N_2 u$ и выходов $w = T_2 y$, где

$$M_2 = \begin{pmatrix} I_{n-n_0} & 0 \\ 0 & \bar{M}_2 \end{pmatrix}, \quad N_2 = \begin{pmatrix} I_{p_1} & 0 \\ 0 & \bar{N}_2 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} I_{p_1} & 0 \\ 0 & \bar{T}_2 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что данные преобразования не изменяют матриц $A_{ij}^{(1)}$, $B_i^{(1)}$, $C_{ij}^{(1)}$, $i, j = \overline{1, p_1}$, системы (11) (в данном случае $C_{ij} = 0$ при $i \neq j$). При этом структура матриц $A_{i0}^{(1)}$, $i = \overline{1, p_1}$, также не изменяется, хотя коэффициенты матриц могут меняться. Таким образом, при рассматриваемом преобразовании изменяется только структура матриц $\bar{A}^{(1)}$, $\bar{B}^{(1)}$, $\bar{C}^{(1)}$ согласно формуле (13), следовательно, после указанного преобразования система $\{A^{(1)}, B^{(1)}, C^{(1)}\}$ примет вид

$$\dot{z}^{(i)} = \sum_{j=1}^{p_1} A_{ij}^{(1)} z^{(j)} + \sum_{j=1}^{\bar{p}_1} \hat{A}_{ij}^{(1)} \zeta^{(j)} + \hat{A}_{i0}^{(1)} \zeta^{(0)} + B_i^{(1)} \tilde{v}_i, \quad i = \overline{1, p_1},$$

$$\dot{\zeta}^{(i)} = \sum_{j=1}^{p_1} \check{A}_{ij}^{(1)} z^{(j)} + \sum_{j=1}^{\bar{p}_1} \tilde{A}_{ij}^{(2)} \zeta^{(j)} + \tilde{A}_{i0}^{(2)} \zeta^{(0)} + \tilde{B}_i^{(2)} \tilde{\nu}_i, \quad i = \overline{1, \bar{p}_1},$$

$$\dot{\zeta}^{(0)} = \sum_{j=1}^{p_1} \check{A}_{0j}^{(1)} z^{(j)} + \sum_{j=1}^{\bar{p}_1} \tilde{A}_{0j}^{(2)} \zeta^{(j)} + \tilde{\bar{A}}^{(2)} \zeta^{(0)} + \tilde{\bar{B}}^{(2)} \bar{\nu}, \tag{14}$$

$$\tilde{w}_i = C_{ii}^{(1)} z^{(i)}, \quad i = \overline{1, p_1},$$

$$\tilde{\mu}_i = \sum_{j=1}^{p_1} \check{C}_{ij}^{(1)} z^{(j)} + \tilde{C}_{ii}^{(2)} \zeta^{(i)}, \quad i = \overline{1, \bar{p}_1}, \quad \bar{\mu} = \sum_{j=1}^{p_1} \check{C}_{0j}^{(1)} z^{(j)} + \sum_{j=1}^{\bar{p}_1} \tilde{C}_{0j}^{(2)} \zeta^{(j)} + \tilde{\bar{C}}^{(2)} \zeta^{(0)}.$$

Здесь $z = (z^{(1)^T}, \ldots, z^{(p_1)^T}, \zeta^{(1)^T}, \ldots, \zeta^{(\bar{p}_1)^T}, \zeta^{(0)^T})^T$ – фазовый вектор системы с коэффициентами $z^{(j)} = x^{(j)}$, $j = \overline{1, p_1}$; $u = (\tilde{v}^T, \tilde{\nu}^T, \bar{\nu}^T)^T$ – вход системы, причём $\tilde{v} = \tilde{u}$; $w = (\tilde{w}^T, \tilde{\mu}^T, \bar{\mu}^T)^T$ – выход системы, в котором $\tilde{w} = \tilde{y}$ ($\zeta^{(i)}$, $\tilde{\nu}$, $\bar{\nu}$, $\tilde{\mu}$, $\bar{\mu}$ и соответствующие им матрицы определяются из системы (13), а $\tilde{u}$, $\tilde{y}$, $x^{(i)}$ – из системы (11)). Матрицы $\check{A}_{ij}^{(1)}$, $\check{A}_i^{(1)}$, $\hat{A}_{ij}^{(1)}$, $\hat{A}_i^{(1)}$, $\check{C}_{ij}^{(1)}$, $\check{C}_{0j}^{(1)}$ получаются в результате разбиения на блоки, соответствующие размерностям векторов $\zeta^{(i)}$, преобразованных матриц $A_{0j}^{(1)}$, $A_{i0}^{(1)}$, $C_{0j}^{(1)}$, т.е.

$$\check{A}_{ij}^{(1)} = (0_{\bar{n}_i \times \bar{n}_1 + \ldots + \bar{n}_{i-1}}, I_{\bar{n}_i}, 0_{\bar{n}_i \times \bar{n}_{i+1} + \ldots + \bar{n}_{\bar{p}_1}}, 0_{\bar{n}_i \times \bar{n}_0}) \bar{M}_2 A_{0j}^{(1)}, \quad i = \overline{1, \bar{p}_1}, \quad j = \overline{1, p_1},$$

$$\hat{A}_{ij}^{(1)} = A_{i0}^{(1)} \bar{M}_2^{-1} (0_{\bar{n}_j \times \bar{n}_1 + \ldots + \bar{n}_{j-1}}, I_{\bar{n}_j}, 0_{\bar{n}_i \times \bar{n}_{j+1} + \ldots + \bar{n}_{\bar{p}_1}}, 0_{\bar{n}_j \times \bar{n}_0})^T, \quad i = \overline{1, p_1}, \quad j = \overline{1, \bar{p}_1},$$

$$\check{A}_{0j}^{(1)} = (0_{\bar{n}_0 \times \bar{n}_1 + \ldots + \bar{n}_{\bar{p}_1}}, I_{\bar{n}_0}) \bar{M}_2 A_{0j}^{(1)}, \quad j = \overline{1, p_1},$$

$$\hat{A}_{i0}^{(1)} = A_{i0}^{(1)} \bar{M}_2^{-1} (0_{\bar{n}_0 \times \bar{n}_1 + \ldots + \bar{n}_{\bar{p}_1}}, I_{\bar{n}_0})^T, \quad i = \overline{1, p_1},$$

$$\check{C}_{ij}^{(1)} = (0_{1 \times i-1}, 1, 0_{1 \times \bar{p}_1 - i}, 0_{1 \times l - p_1 - \bar{p}_1}) \bar{T}_2 C_{0j}^{(1)}, \quad i = \overline{1, \bar{p}_1}, \quad j = \overline{1, p_1},$$

$$\check{C}_{0j}^{(1)} = (0_{l - p_1 - \bar{p}_1 \times \bar{p}_1}, I_{l - p_1 - \bar{p}_1}) \bar{T}_2 C_{0j}^{(1)}, \quad j = \overline{1, p_1}.$$

Введём следующие обозначения:

$$p_2 = p_1 + \bar{p}_1, \quad z^{(i+p_1)} = \zeta^{(i)}, \quad n_{i+p_1} = \bar{n}_i, \quad i = \overline{1, \bar{p}_1},$$

$$\tilde{u} = (\tilde{v}^T, \tilde{\nu}^T)^T, \quad \bar{u} = \bar{\nu}, \quad \tilde{y} = (\tilde{w}^T, \tilde{\mu}^T)^T, \quad \bar{y} = \bar{\mu},$$

$$A_{ij}^{(2)} = A_{ij}^{(1)}, \quad A_{0j}^{(2)} = \check{A}_{0j}^{(1)}, \quad B_i^{(2)} = B_i^{(1)}, \quad C_{0j}^{(2)} = \check{C}_{0j}^{(1)}, \quad i, j = \overline{1, p_1},$$

$$A_{i+p_1, j+p_1}^{(2)} = \tilde{A}_{ij}^{(2)}, \quad A_{0, j+p_1}^{(2)} = \tilde{A}_{0j}^{(2)}, \quad B_{i+p_1}^{(2)} = \tilde{B}_i^{(2)}, \quad C_{0, j+p_1}^{(2)} = \tilde{C}_{0j}^{(2)}, \quad i, j = \overline{1, \bar{p}_1},$$

$$A_{i+p_1, j}^{(2)} = \check{A}_{ij}^{(1)}, \quad A_{j0}^{(2)} = \hat{A}_{j0}^{(1)}, \quad C_{i+p_1, j}^{(2)} = \check{C}_{ij}^{(1)}, \quad i = \overline{1, \bar{p}_1}, \quad j = \overline{1, p_1},$$

$$A_{i, j+p_1}^{(2)} = \hat{A}_{ij}^{(1)}, \quad A_{j+p_1, 0}^{(2)} = \tilde{A}_{j0}^{(2)}, \quad \bar{A}^{(2)} = \tilde{\bar{A}}^{(2)}, \quad i = \overline{1, p_1}, \quad j = \overline{1, \bar{p}_1},$$

$$C_{ii}^{(2)} = C_{ii}^{(1)}, \quad C_{ij}^{(2)} = 0, \quad i \neq j, \quad \bar{C}^{(2)} = \tilde{\bar{C}}^{(2)}, \quad \bar{B}^{(2)} = \tilde{\bar{B}}^{(2)}, \quad i, j = \overline{1, p_1},$$

$$C_{i+p_1, i+p_1}^{(2)} = \tilde{C}_{ii}^{(2)}, \quad \tilde{C}_{i+p_1, j+p_1}^{(2)} = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, \bar{p}_1}.$$

Тогда система (14) примет вид

$$\dot z^{(i)} = \sum_{j=1}^{p_2} A_{ij}^{(2)} z^{(j)} + A_{i0}^{(2)} z^{(0)} + B_i^{(2)} \tilde u_i, \quad i = \overline{1, p_2},$$

$$\dot z^{(0)} = \sum_{j=1}^{p_2} A_{0j}^{(2)} z^{(j)} + \bar A^{(2)} z^{(0)} + \bar B^{(2)} \bar u, \tag{15}$$

$$\tilde y_i = \sum_{j=1}^{i} C_{ij}^{(2)} z^{(i)}, \quad i = \overline{1, p_2}, \quad \bar y = \sum_{j=1}^{p_2} C_j^{(2)} z^{(j)} + \bar C^{(2)} z^{(0)},$$

причём $p_2 > p_1$. При $j < i$ матрицы A_{ij} не обязательно имеют только одну ненулевую строку (последнюю), поскольку некоторые из этих матриц являются подматрицами матриц $A_{0i}^{(1)}$, для которых это неверно. Аналогично не все C_{ij} равны нулю при $j < i$ (тем не менее матрица, составленная из этих блоков, имеет блочную нижнетреугольную структуру).

Если для системы $\{\bar A^{(2)}, \bar B^{(2)}, \bar C^{(2)}\}$ выполнено условие (3) или условия ОП, то исходная система приведена к требуемому виду (и $N_0 = \bar n_0$). Если нет, обозначим матрицы системы (15) через $\{A^{(2)}, B^{(2)}, C^{(2)}\}$ и перейдём к следующему шагу.

Последующие шаги делаются аналогично.

Данный алгоритм не может работать бесконечно. В самом деле, на каждом шаге размерность вектора $\bar y$ уменьшается по крайней мере на единицу. При этом для системы с одним входом и одним выходом всегда выполнены либо условия ОП, либо условие (3). Таким образом, не более чем через $l-1$ шагов алгоритм остановится. Теорема доказана.

Утверждение 2. *Пусть система $\{A, B, C\}$ имеет вид (10). Тогда нулевая динамика этой системы описывается уравнениями*

$$\begin{gathered} x^{(i)}(t) \equiv 0, \quad i = \overline{1, p}, \quad \bar C x^{(0)}(t) \equiv 0, \\ \dot x^{(0)}(t) = \bar A x^{(0)}(t) + \bar B \bar u(t), \quad t > 0, \quad x^{(0)}(0) = x_0 \in \mathbb{R}^{N_0}. \end{gathered} \tag{16}$$

Доказательство. Если $x(t)$ удовлетворяет уравнениям (16), то в силу формулы (10) выход $y(t)$ равен нулю. Покажем справедливость и обратного, т.е. из тождественного равенства нулю выходов $\tilde y(t)$ вытекает, что $x^{(i)}(t) \equiv 0$, $i = \overline{1, p}$. Из формулы (10) следует, что первые $n_1 - 1$ компонент вектора $x^{(1)}(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\dot x_i^{(1)} = x_{i+1}^{(1)}, \quad i = \overline{1, n_1 - 1}, \tag{17}$$

а выход $\tilde y_1(t)$ совпадает с $x_1^{(1)}(t)$. Если $\tilde y(t) \equiv 0$, то $\tilde y_1(t) \equiv 0$, а следовательно, и $x_1^{(1)}(t) \equiv 0$. Тогда в силу уравнений (17) из тождества $x_1^{(1)}(t) \equiv 0$ следует, что и $x_i^{(1)}(t) \equiv 0$, $i = \overline{2, n_1}$, т.е. из тождества $\tilde y_1(t) \equiv 0$ вытекает, что $x^{(1)}(t) \equiv 0$.

При $x^{(1)}(t) \equiv 0$ уравнения для $x_i^{(2)}(t)$, $i = \overline{1, n_2 - 1}$, примут вид

$$\dot x_i^{(2)} = x_{i+1}^{(2)}, \quad i = \overline{1, n_2 - 1}. \tag{18}$$

Также при $x^{(1)}(t) \equiv 0$ выход $\tilde y_2(t)$ совпадает с $x_1^{(2)}(t)$, поскольку матрица C имеет "нижнетреугольную структуру". Тогда, согласно уравнениям (18), из тождеств $\tilde y_1(t) \equiv 0$ и $\tilde y_2(t) \equiv 0$ следует, что $x^{(1)}(t) \equiv 0$ и $x^{(2)}(t) \equiv 0$.

Продолжая аналогичные рассуждения, получаем, что из равенства $\tilde y(t) \equiv 0$ следует равенство $x^{(i)}(t) \equiv 0$, $i = \overline{1, p}$. Таким образом, выход $\tilde y(t)$ тождественно равен нулю в том и только в том случае, когда $x^{(i)}(t) \equiv 0$, $i = \overline{1, p}$. Это означает, что нулевая динамика исходной системы описывается уравнениями (16). Утверждение доказано.

Из утверждения 2 следует, что нулевая динамика системы $\{A, B, C\}$, имеющей вид (10), совпадает с нулевой динамикой системы $\{\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}\}$. Согласно теореме 1, для системы $\{\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}\}$ выполнены либо условия ОП, либо условие (3), следовательно, уравнения нулевой динамики для неё могут быть найдены.

Таким образом, для нахождения уравнений нулевой динамики произвольной системы (1), достаточно привести её к виду (10) и найти нулевую динамику системы $\{\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}\}$.

Пример 1. Рассматривается система $\{A, B, C\}$, матрицы которой равны

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 5 & 5 & 3 & -8 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что для этой системы определитель матрицы Розенброка (2) тождественно равен нулю:

$$\beta(s) = \det\left(\begin{array}{c|c} sI - A & -B \\ \hline C & 0 \end{array}\right) = 0, \quad s \in \mathbb{C}.$$

Найдём вектор ВОП

$$C_1B = 0, \quad C_1AB = 0, \quad C_2A^2B = (1, 0, 0), \quad C_2B = 0, \quad C_2AB = (-3, 0, 0), \quad C_3B = (1, 0, 0),$$

т.е. $\rho = (3, 2, 1)$ – вектор ВОП системы. Соответствующая этому вектору матрица $\mathcal{H}(\rho)$ имеет вид

$$\mathcal{H}(\rho) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг этой матрицы равен единице, поэтому $p_1 = 1$. Согласно работе [6], найдём матрицу преобразования, приводящего систему к виду (11):

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проведём преобразование координат $z = M_1x$ и рассмотрим преобразованную систему

$$A^{(1)} = M_1AM_1^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 2 & 3 & 2 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right), \quad B^{(1)} = M_1B = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right),$$

$$C^{(1)} = CM_1^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Рассмотрим систему $\{\bar{A}^{(1)}, \bar{B}^{(1)}, \bar{C}^{(1)}\}$, где

$$\bar{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{B}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{C}^{(1)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для данной системы найдём вектор ВОП:

$$\bar{C}_1^{(1)}\bar{B}^{(1)} = 0, \quad \bar{C}_1^{(1)}\bar{A}^{(1)}\bar{B}^{(1)} = 0, \quad \bar{C}_1^{(1)}\bar{A}^{(1)^2}\bar{B}^{(1)} = (1,0), \quad \bar{C}_2^{(1)}\bar{B}^{(1)} = 0, \quad \bar{C}_2^{(1)}\bar{A}^{(1)}\bar{B}^{(1)} = (1,0),$$

т.е. $\bar{\rho}^{(1)} = (3,2)$, $\operatorname{rank}\bar{\mathcal{H}}^{(1)} = 1$, следовательно, $\bar{p}_1 = 1$. Найдём преобразование координат, приводящее данную систему к виду (11):

$$\bar{M}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Преобразованная система $\{\tilde{A}^{(2)}, \tilde{B}^{(2)}, \tilde{C}^{(2)}\}$ примет вид

$$\tilde{A}^{(2)} = \bar{M}_2\bar{A}^{(1)}\bar{M}_2^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ \hline -2 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right), \quad \tilde{B}^{(2)} = \bar{M}_2\bar{B}^{(1)} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ \hline 0 & 2 \end{array}\right),$$

$$\tilde{C}^{(2)} = \bar{C}^{(1)}\bar{M}_2^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Для этой системы $\bar{C}^{(2)} = 0$, поэтому выполнено условие (3). Таким образом, исходная система с помощью преобразования

$$z = Mx, \quad M = M_2M_1, \quad M_2 = \begin{pmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & \bar{M}_2 \end{pmatrix}$$

приводится к виду (10):

$$A^{(2)} = MAM^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline -2 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 1 & -2 & 3 & -1 & \mathbf{1} \end{array}\right), \quad B^{(2)} = MB = \left(\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathbf{2} \end{array}\right),$$

$$C^{(2)} = CM^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Тогда, согласно утверждению 2, уравнения нулевой динамики имеют вид

$$z_j(t) = 0, \quad j = \overline{1,6}, \quad \dot{z}_7(t) = z_7(t) + 2u_3(t).$$

Таким образом, нулевая динамика системы найдена. Обратим внимание, что нулевая динамика последней подсистемы зависит от управления, т.е. её спектр может меняться. Это соответствует тому, что $\beta(s) \equiv 0$, т.е. произвольное $s \in \mathbb{C}$ является корнем $\beta(s)$. Эта ситуация общая для случая $\beta(s) \equiv 0$.

5. Замечания о наблюдаемости. Известно, что система (1) наблюдаема тогда и только тогда, когда матрица наблюдаемости этой системы имеет полный ранг. Покажем, что для системы вида (10) критерий наблюдаемости может быть сформулирован в несколько иной форме.

Утверждение 3. *Пусть система $\{A, B, C\}$ имеет вид (10). Тогда данная система наблюдаема в том и только в том случае, когда пара $\{\bar{A}, C_a\}$ наблюдаема, где*

$$C_a = \begin{pmatrix} A_{10,n_1} \\ \cdots \\ A_{p0,n_p} \\ \bar{C} \end{pmatrix},$$

а A_{i0,n_i}, $i = \overline{1,p}$, – строка с номером n_i (т.е. последняя строка) матрицы A_{i0} системы (10) (это единственная ненулевая строка в данной матрице).

Доказательство. Необходимость. Предположим, что пара $\{A, C\}$ наблюдаема, а пара $\{\bar{A}, C_a\}$ ненаблюдаема, т.е. матрица $N_{\bar{A},C_a}$ имеет неполный ранг. Тогда существует вектор $\bar{x}_0 \neq 0$, $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^{N_0}$, такой, что $N_{\bar{A},C_a}\bar{x}_0 = 0$. Рассмотрим начальные условия $x_0 = (0, \ldots, 0, \bar{x}_0^T)^T \in \mathbb{R}^n$ и вход $u(t) \equiv 0$. Покажем, что им соответствует решение

$$x(t) = \begin{pmatrix} 0_{n-N_0,1} \\ e^{\bar{A}t}\bar{x}_0 \end{pmatrix} \tag{19}$$

системы (10). Подставив решение (19) в уравнения системы, для $x^{(i)}(t)$ получим уравнения

$$\dot{x}^{(i)}(t) = A_{i0}e^{\bar{A}t}\bar{x}_0, \quad i = \overline{1,p}.$$

Первые $n_i - 1$ строк матрицы A_{i0} нулевые, поэтому для $x_j^{(i)}$, $j = \overline{1, n_i - 1}$, уравнения обращаются в тождества. Покажем, что это верно и для $x_{n_i}^{(i)}$. В самом деле, так как по предположению $N_{\bar{A},C_a}\bar{x}_0 = 0$, то $A_{i,n_i}\bar{A}^{k-1}\bar{x}_0 = 0$, $k \in \mathbb{N}$, поэтому для $x_{n_i}^{(i)}$ уравнение также выполняется. Очевидно, что и уравнения для $x^{(0)}$ обращаются в тождества при данном $x(t)$, т.е. $x(t)$ из (19) – решение. Покажем, что соответствующий данному решению выход тождественно равен нулю. В самом деле, $\tilde{y}(t) \equiv 0$, так как $x^{(i)}(t) \equiv 0$. Для $\bar{y}(t)$ имеем $\bar{y}(t) = \bar{C}e^{\bar{A}t}\bar{x}_0$. Но $\bar{C}e^{\bar{A}t}\bar{x}_0 \equiv 0$, поскольку $\bar{x}_0 \in \ker N_{\bar{A},C_a}$, а $\bar{C}$ – подматрица C_a. Таким образом, существует отличное от нуля начальное условие x_0 такое, что при нулевом входе выход системы, соответствующий данному начальному условию, тождественно равен нулю. Это противоречит наблюдаемости системы. Необходимость доказана.

Достаточность. Предположим, что пара $\{A, C\}$ ненаблюдаема, а пара $\{\bar{A}, C_a\}$ наблюдаема. Тогда существует вектор $x_0 \neq 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, такой, что $y(t, x_0) \equiv 0$. Поскольку уравнения системы имеют вид (10), то из $\tilde{y}(t) \equiv 0$ следует, что $x^{(i)}(t) \equiv 0$, $i = \overline{1,p}$, поэтому $x_0 = (0_{1\times n-N_0}, \bar{x}_0^T)^T$, где $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^{N_0}$. Тогда $x(t)$ имеет вид (19). Так как $x^{(i)}(t) \equiv 0$ и $u(t) \equiv 0$, то из системы (10) следует, что

$$A_{i,n_i}e^{\bar{A}t}\bar{x}_0 \equiv 0, \quad i = \overline{1,p}. \tag{20}$$

Из тождества $\bar{y}(t) \equiv 0$ с учётом полученного представления для $x(t)$ следует, что

$$\bar{C}e^{\bar{A}t}\bar{x}_0 \equiv 0. \tag{21}$$

Заметим, что из соотношений (20) и (21) вытекает тождество $C_a e^{\bar{A}t}\bar{x}_0 \equiv 0$. Но $C_a e^{\bar{A}t}\bar{x}_0$ – выход системы $\{\bar{A}, C_a\}$, соответствующий начальным условиям $\bar{x}_0$. Таким образом, тождественно нулевому выходу системы $\{\bar{A}, C_a\}$ отвечает более одного начального условия, что противоречит наблюдаемости этой системы. Утверждение доказано.

Замечание 1. Утверждение 3 позволяет разрешить кажущееся противоречие, которое возникает в том случае, когда система $\{A, B, C\}$ вида (10) наблюдаема, а система $\{\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}\}$ ненаблюдаема (последнее имеет место, если, например, для системы $\{\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}\}$ выполнено условие (3)). В этом случае существует $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^{N_0}$ такой, что соответствующий выход системы $\{\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}\}$ при тождественно нулевом входе равен нулю. Возникает вопрос, каков выход исходной системы $\{A, B, C\}$, соответствующий начальным условиям $x_0 = (0, \ldots, 0, \bar{x}_0^T)^T$ (если он нулевой, то система $\{A, B, C\}$ ненаблюдаема, что противоречит исходному предположению). Покажем, что этот выход ненулевой, а именно покажем, что если $y(t) \equiv 0$ и $u(t) \equiv 0$, то и $\bar{x}_0 = 0$.

Если $\tilde{y}(t) \equiv 0$, то и $x^{(i)}(t) \equiv 0$, $i = \overline{1, p}$, следовательно, $\dot{x}^{(i)} \equiv 0$, а решение имеет вид (19). Рассматривая уравнения для $x_{n_i}^{(i)}$, с учётом $u(t) \equiv 0$ будем иметь

$$0 = A_{i,n_i} e^{\bar{A}t}\bar{x}_0, \quad i = \overline{1, p}. \tag{22}$$

Поскольку $x^{(i)}(t) \equiv 0$, $i = \overline{1, p}$, то для выхода $\bar{y}(t)$ системы справедливо представление

$$\bar{y}(t) = \bar{C} e^{\bar{A}t}\bar{x}_0 \equiv 0. \tag{23}$$

Из соотношений (22), (23) следует, что $C_a e^{\bar{A}t}\bar{x}_0 \equiv 0$. Но $C_a e^{\bar{A}t}\bar{x}_0$ – выход системы $\{\bar{A}, C_a\}$, соответствующий начальным условиям $\bar{x}_0$. В силу утверждения 3 система $\{\bar{A}, C_a\}$ наблюдаема, поэтому $\bar{x}_0 = 0$.

Таким образом, из ненаблюдаемости системы $\{\bar{A}, \bar{C}\}$ не следует ненаблюдаемость системы $\{A, C\}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 15-07-07579, 14-07-00795, 15-07-08198).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильин А.В., Коровин С.К., Фомичев В.В.* Методы робастного обращения динамических систем. М., 2009.
2. *Ильин А.В., Коровин С.К., Фомичев В.В.* Об уравнениях и свойствах нулевой динамики линейных управляемых статических систем // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 12. С. 1626–1636.
3. *Коровин С.К., Ильин А.В., Фомичев В.В.* Нулевая динамика линейных векторных стационарных систем // Докл. РАН. Теория управления. 2007. Т. 414. № 5. С. 598–604.
4. *Краев А.В., Фомичев В.В., Роговский А.И.* К обобщению относительного порядка // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 8. С. 1128–1132.
5. *Краев А.В., Фомичев В.В., Роговский А.И.* О приведении векторной системы к виду с относительным порядком // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычислит. математика и кибернетика. 2015. № 3. С. 20–26.
6. *Фомичев В.В., Краев А.В., Роговский А.И.* Обобщение понятия относительного порядка и его свойства // Дифференц. уравнения. 2016. Т. 52. № 8. С. 1099–1108.
7. *Isidori A.* Nonlinear Control Systems. London, 1995.
8. *Коровин С.К., Фомичев В.В.* Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределённостью. М., 2007.

Университет электроники Ханчжоу, Китай,
Центр информационных технологий
в проектировании РАН, г. Москва,
Институт проблем управления РАН,
г. Москва,
Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступила в редакцию
08.06.2016 г.