МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

На правах рукописи

Лу Ли

Гомологические методы в коммутативной алгебре и алгебраической геометрии

01.01.06 - Математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертации
на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители: **Пионтковский Дмитрий Игоревич**,
доктор физ.-мат. наук,
профессор.

Гайфуллин Сергей Александрович,
кандидат физ.-мат. наук,
доцент.

Москва - 2020

Содержание

Введение

0.1 Актуальность темы

Гомологическая алгебра - ветвь алгебры, изучающая алгебраические объекты, заимствованные из алгебраической топологии. Первыми гомологические методы в алгебре применили в 40-х годах XX века Д. К. Фаддеев, С. Эйленберг и С. Маклейн при изучении расширений групп. Гомологическая алгебра играет важную роль в алгебраической топологии, применяется во многих разделах алгебры, таких, как теория групп, теория алгебр, алгебраическая геометрия, теория Галуа.

Аксиоматическое построение гомологических теорий опирается на понятие производных функторов, введенное Картаном и Эйленбергом. Эта техника была развита Гротендиком и в дальнейшем привела к введению Вердье новых понятий: производной категории и производных функторов между ними. Категорные основания позволяют переносить теоремы гомологической алгебры с одной ситуации на другую, часто значительно более общую.

В настоящей диссертации предпринят ряд таких обобщений. В частности, известные теоремы из теории модулей над коммутативными кольцами обобщаются на случай градуированных моделей над кольцами, градуированными группами; свойства регулярного локуса коммутативного нетерова кольца обобщается на случай нетеровой схемы; свойства категории особенностей горенштейновых колец переносятся на горенштейновы схемы. Результаты диссертации, таким образом, относятся к следующим трем областям.

Градуированные аналоги некоторых классических теорем

В последнее время отмечается значительный интерес к кольцам и другим алгебраическим структурам, снабжённым градуировкой. Это объясняется тем, что многие важные классы колец, например кольца многочленов, матричные кольца, групповые кольца, допускают естественную градуировку.

В теории градуированных колец вводятся стандартные градуированные аналоги понятий классической теории колец, которые принято обозначать приставкой «gr-». Например, gr-артинов (gr-нётеров) модуль - это градуированный модуль с условием минимальности (максимальности) для градуированных подмодулей.

Естественный и важный вопрос в теории градуированных колец состоит в том, чтобы найти градуированные аналоги некоторых классических теорем.

Например, Ч. Парк в своей работе [37] доказал теорему Крулля о главном идеале, теорему Крулля-Акизуки и теорему Мори-Нагата в градуированном случае. Дж. Белл и Дж. Чжан в своей работе [6] доказали, что если A и B - две (некоммутативные) $\mathbb{Z}$-градуированные алгебры, конечно порожденные в первой степени, и если A изоморфна B как неградуированная алгебра, то они также изоморфны друг другу как градуированные алгебры. Дж. Чен и Й. Ким в своей работе [9] показывают, что если градуированный подмодуль нетерова модуля не может быть записан как собственное пересечение градуированных подмодулей, то он не может быть записан как собственное пересечение подмодулей.

Как представляется автору, разложение инъективных модулей над нётеровыми кольцами и проективных модулей над артиновыми кольцами являются одними из наиболее красивых и важных результатов в коммутативной алгебре. Наша первая цель - доказать аналогичные результаты для градуированных колец. Это важно для нас, чтобы понять структуру модулей над градуированными кольцами.

Дополнительную информацию о градуированных кольцах можно получить в [37],[31], [30],[2],[18],[21],[41],[39].

Триангулированные эквивалентности и горенштейновы схемы

В классической коммутативной алгебре классы горенштейных колец и колец Коэна-Маколея относятся к числу наиболее важных классов колец с многочисленными приложениями в алгебраической геометрии и комбинаторике. Условие горенштейности давно введено в смежные области. Его первое воплощение было, вероятно, в работе [12] Феликса, Гальперина и Томаса о горенштейных пространствах в топологии.

Категория особенностей является важным инвариантом для колец бесконечной глобальной размерности и для сингулярных многообразий. Пусть R — коммутативное нетерово кольцо. Категория особенностей определяется как фактор триангулированной категории $\mathbf{D}^b(mod(R))$ по полной триангулированной подкатегории совершенных комплексов $\mathfrak{Perf}(R)$. Категория особенностей измеряет гомологическую особенность алгебры: алгебра имеет конечную глобальную размерность тогда и только тогда, когда ее категория особенностей тривиальна [20], отсюда происходит название.

Аналогично, пусть X является нетеровой схемой. Категория особенностей определяется как фактор триангулированной категории $\mathbf{D}^b(coh(X))$ по полной триангулированной подкатегории совершенных комплексов $\mathfrak{Perf}(X)$.

Категории особенностей изучались, например, в [8], [20], [35], [33] и [36]. В [8], Бухвайц доказал замечательную теорему:

Теорема 0.1 *(Бухвайц) Предположим, что R является горенштейновым кольцом. Его категория особенностей $\mathbf{D}_{sg}(R)$ триангулированно эквивалентна стабильной категории максимальных модулей Коэна-Маколея $\underline{\mathbf{MCM}}(R)$.*

Здесь стабильная категория $\underline{\mathbf{MCM}}(R)$ максимальных модулей Коэна-Маколея над R определяется следующим образом. Объектами являются максимальные R-модули Коэна-Маколея, т.е., $M \in mod(R)$ с $Ext^i_R(M,R) = 0$ для всех $i > 0$. Группа морфизмов $Hom_{\underline{\mathbf{MCM}}(R)}(M,N)$ определяется как факторгруппа абелевой группы $Hom_R(M,N)$ по подгруппе морфизмов $M \to N$, пропускаемых через проективные R-модули конечного типа.

Теорема Бухвайца сводит изучение категории особенностей к исследованию подобной категории небольшого классического класса модулей – максимальных модулей Коэна-Маколея.

Одна из наших целей — доказать аналогичный результат для горенштейновой схемы $(X, \mathcal{O}_X)$.

Классические генераторы и регулярный локус

Классические генераторы и регулярный локус изучались, например, в [1], [7], [33], [34], [24].

Пусть $\mathcal{A}$ — абелева категория, а $\mathcal{S}$ - непустая полная подкатегория в $\mathcal{A}$. $\mathcal{S}$ является *толстой подкатегорией* при условии, что она замкнута относительно прямых слагаемых и обладает свойством «два из трех» для точных последовательностей: для любой точной последовательности

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0 \tag{0.1}$$

в $\mathcal{A}$, если два из X, Y, Z находятся в $\mathcal{S}$, то и третий. Для объекта G в $\mathcal{A}$ мы пишем $thick_{\mathcal{A}}(G)$ для наименьшей толстой подкатегории $\mathcal{A}$, содержащей G. Объект G является *классическим генератором* для $\mathcal{A}$, если $thick_{\mathcal{A}}(G) = \mathcal{A}$.

Пусть $\mathcal{C}$ — триангулированная категория. Пусть E является объектом в $\mathcal{C}$. Обозначим $\langle E\rangle_1$ строго полную подкатегорию в $\mathcal{C}$, состоящую из объектов в $\mathcal{C}$, изоморфных прямым слагаемым конечных прямых сумм

$$\bigoplus_{i=1,2,\ldots,r} E[n_i] \tag{0.2}$$

сдвигов E. Для $n > 1$ пусть $\langle E\rangle_n$ обозначает полную подкатегорию категории $\mathcal{C}$, состоящую из объектов в $\mathcal{C}$, изоморфных прямым слагаемым объектов X, которые вписываются в треугольник

$$A \to X \to B \to A[1], \tag{0.3}$$

где A является объектом в $\langle E\rangle_1$, а B является объектом в $\langle E\rangle_{n-1}$. Подкатегория $\langle E\rangle := \bigcup_n^{+\infty}\langle E\rangle_n$ является триангулированной подкатегорией категории $\mathcal{C}$. Пусть E является объектом в $\mathcal{C}$. Мы говорим, что E является *классическим генератором* категории $\mathcal{C}$, если $\langle E\rangle = \mathcal{C}$. Мы говорим, что E является *сильным генератором*, если $\langle E\rangle_n = \mathcal{C}$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Пусть R — коммутативное нетерово кольцо. *Регулярный локус $Reg(R)$* в R - это множество точек $\mathfrak{p} \in Spec(R)$, таких что $R_{\mathfrak{p}}$ является регулярным локальным кольцом.

В [24], Срикант Б. Айенгар и Рио Такахаши утверждают замечательную теорему:

Теорема 0.2 *Для коммутативного нетерового кольца R следующие условия эквивалентны:*

- *(1) $Reg(R/\mathfrak{p})$ содержит непустое открытое подмножество для каждого $\mathfrak{p} \in Spec(R)$.*
- *(2) $Reg(R/\mathfrak{p})$ открыто для каждого $\mathfrak{p} \in Spec(R)$.*
- *(3) Абелева категория $mod(R/\mathfrak{p})$ имеет генератор для каждого $\mathfrak{p} \in Spec(R)$.*
- *(4) Триангулированная категория $\mathbf{D}^b(mod(R/\mathfrak{p}))$ имеет генератор для каждого $\mathfrak{p} \in Spec(R)$.*
- *(5) Триангулированная категория $\mathbf{D}_{sg}(mod(R/\mathfrak{p}))$ имеет генератор для каждого $\mathfrak{p} \in Spec(R)$.*

Когда они выполняются, абелева категория $mod(R)$ и триангулированные категории $\mathbf{D}^b(mod(R))$, $\mathbf{D}_{sg}(R)$ имеют классические генераторы.

Теорема Сриканта Б. Айенгара и Рио Такахаши - прекрасный результат. Одна из наших целей — доказать аналогичный результат для нетеровой схемы $(X, \mathcal{O}_X)$.

0.2 Цели диссертации

Целью настоящей работы является нахождение градуированных аналогов некоторых классических теорем, изучение категории особенностей схем.

0.3 Научная новизна

Все оснавные результаты диссертации являются новыми и полученными автором самостоятельно. Их оиасание приведено в разделах "Содержание работы"и "Заключение".

0.4 Положения выносимые на защиту

- Доказательство теоремы, что каждый градуированный инъективный модуль над gr-нетеровым кольцом имеет неразложимое разложение.
- Доказательство теоремы, что каждый конечнопорожденный градуированный проективный модуль над gr-артиновым кольцом является конечной прямой суммой неразложимых gr-проективный модулей.
- Получение формулы для выражения градуированных чисел Басса с помощью функтора Ext для градуированных модулей.
- Доказательство теоремы, что левый точный радикальный функтор F имеет вид Γ_V для замкнутого по специализации подмножества V.
- Доказательство теоремы, что если схема является горенштейновой, нетеровой, отделимой, с конечной размерностью Крулля и категория когерентных пучков содержит достаточно много локально свободных пучков, тогда ее категория особенностей триангулированно эквивалентна стабильной категории максимальных пучков Коэна-Маколея.
- Получение необходимого и достаточного условия, чтобы категория особенностей нетеровой схемы имела классический генератор.

0.5 Основные методы исследования

В диссертации используются методы гомологической алгебры, коммутотивной алгебры и алгебраической геометрии.

0.6 Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Однако, доказательства многих результатов конструктивны. Результаты и методы могут быть применены в коммутативной алгебре, в алгебраической геометрии.

0.7 Апробация работы

Результаты диссертации докладывались:

- на «Международной конференции, посвящённой 90-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ» в г. Москве в 2019 г.;
- на «Международной алгебраической конференции, посвящённой 110-летию со дня рождения профессора А. Г. Куроша» в г. Москве в 2018 г.;
- на международной концеренции «Современные проблемы математики и ее приложений» в г. Екатеринбурге в 2019 г.;
- на международной концеренции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории» в г. Туле в 2019 г.;
- на научно-исследовательском семинаре и на семинаре «Коммутативная алгебра» кафедры высшей алгебры МГУ.

0.8 Публикации

Основные результаты по теме диссертации изложены в 3 печатных изданиях, 3 из которых изданы в журналах, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности, 3 — в периодических научных журналах, индексируемых Web of Science или Scopus.

0.9 Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, пяти глав и списка литературы из 48 наименований. Общий объем диссертации составляет 56 страницу.

0.10 Содержание работы

Во введении описывается структура диссертации и история рассматриваемых вопросов; обосновывается актуальность темы.

В **первой главе** приведены необходимые факты из теории триангулированных категорий, включая описание некоторых категорий комплексов, гомотопической категории, локализации категории и производной категории. Введены основные определения.

Во **второй главе** и в **третьей главе** мы докажем структурную теорему для gr-инъективных модулей над gr-нётеровыми G-градуированными коммутативными кольцами и структурную теорему для gr-конечнопорожденных gr-проективных модулей над gr-артиновыми G-градуированными коммутативными кольцами. Мы дадим определение G-градуированных чисел Басса и получим формулу для выражения G-градуированных чисел Басса с помощью функтора Ext для градуированных модулей. Покажем, что левый точный радикальный функтор F имеет вид Γ_V для замкнутого по специализации подмножества V.

Основная теорема 1 *Пусть R — gr-нётерово G-градуированное коммутативное кольцо, где G — некоторая линейно упорядоченная абелевая группа. Справедливы следующие утверждения:*

- *(1) Если $0 \neq E$ — gr-инъективный модуль, то E является прямой суммой неразложимых gr-инъективных модулей.*
- *(2) Если $0 \neq E$ — неразложимый gr-инъективный модуль, то $End_{Gr(R)}(E)$ является локальным кольцом.*
- *(3) Если $0 \neq E$ — неразложимый gr-инъективный модуль, то $E = E^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}}(g))$, где $\mathfrak{p} \in Spec^{gr}(R)$ и $g \in G$.*
- *(4) Если $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in Spec^{gr}(R)$, $g, h \in G$ и $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$,тогда $E^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}}(g)) \neq E^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{q}}(h))$.*

Основная теорема 2 *Пусть R — gr-артино G-градуированное коммутативное кольцо, где G — некоторая линейно упорядоченная абелевая группа. Справедливы следующие утверждения:*

- *(1) R является конечным произведением gr-артиновых gr-локальных колец:*

$$R = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_n. \tag{0.4}$$

  $End_{Gr(R)}(P_i) = (P_i)_e$ является локальным кольцом. Если $R = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_n = N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_m$, где P_i и N_j являются gr-артиновыми gr-локальными кольцами, то $m = n$, и существует такая биекция $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$, что $N_i \cong P_{\pi(i)}$. Здесь $P_1, P_2, \ldots, P_n$ являются попарно неизоморфными gr-неразложимыми прямыми слагаемыми модуля R.

- *(2) $J^{gr}(P_i)$ является единственным gr-максимальным подмодулем модуля P_i, и $S_i = \frac{P_i}{J^{gr}(P_i)}$ является gr-простым модулем.*
- *(3) Если S является gr-простым R-модулем, тогда существует такие P_i и $g \in G$, что $S = \frac{P_i}{J^{gr}(P_i)}(g)$.*
- *(4) Если $0 \neq P$ является gr-конечнопорожденным gr-проективным модулем, то P является конечной прямой суммой неразложимых gr-проективных модулей.*
- *(5) Если $0 \neq P$ является неразложимым gr-проективным модулем, то существуют такие P_i и $g \in G$, что $P \cong P_i(g)$.*
- *(6) Если $i \neq j$, то $\frac{P_i}{J^{gr}(P_i)} \neq \frac{P_j}{J^{gr}(P_j)}$.*

Основная теорема 3 *Пусть R является gr-нетеровым G-градуированным коммутативным кольцом и $M \in gr(R)$. Тогда $\mu_i^{gr}(\mathfrak{p}, g, M) = dim_{\kappa_{(\mathfrak{p})}} Ext^i_{R_{(\mathfrak{p})}}(\kappa_{(\mathfrak{p})}, M_{(\mathfrak{p})}(g))$.*

Основная теорема 4 *Следующие условия эквивалентны для точного слева предрадикального функтора F в $Gr(R)$.*

- *(1) F является радикальным функтором.*

- *(2) F сохраняет инъективность.*

- *(3) F является функтором сечения с носителем в замкнутом по специализации подмножестве множества $Spec^{gr}(R)$.*

- *(4) $\mathbf{R}F$ является абстрактным функтором локальных когомологий.*

Локально нетерова схема X называется горенштейновой, если кольцо $\mathcal{O}_{X,x}$ горенштейново для всех $x \in X$.

Говорят, что схема X удовлетворяет условию (**ELF**), если она отделима, нетерова, с конечной размерностью Крулля, и категория $coh(X)$ содержит достаточно много локально свободных пучков. Например, любая квази-проективная схема удовлетворяет этим условиям.

Стабильная категория $\underline{\mathbf{MCM}}(X)$ максимальных пучков Коэна-Маколея над X определяется следующим образом. Объектами являются максимальные $\mathcal{O}_X$-пучки Коэна-Маколея, т.е., $\mathcal{F} \in coh(X)$ с $\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X) = 0$ для всех $i > 0$. Группа морфизмов $Hom_{\underline{\mathbf{MCM}}(X)}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ определяется как факторгруппа абелевой группы $Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ по подгруппе морфизмов $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$, пропускаемых через локально свободные $\mathcal{O}_X$-пучки конечного типа.

В **четвертой главе** мы докажем, что если схема является горенштейновой, нетеровой, отделимой, с конечной размерностью Крулля и категория когерентных пучков содержит достаточно много локально свободных пучков, тогда ее категория особенностей триангулированно эквивалентна стабильной категории максимальных пучков Коэна-Маколея.

Основная теорема 5 *Пусть $(X, \mathcal{O}_X)$ – Горенштейна схема, удовлетворяющая условию* (**ELF**). *Тогда категория особенностей $\mathbf{D}_{sg}(X)$ триангулированно эквивалентна стабильной категории $\underline{\mathbf{MCM}}(X)$ максимальных пучков Коэна-Маколея над X.*

В **пятой главе** мы даем необходимое и достаточное условие, чтобы категория особенностей нетеровой схемы имела классический генератор.

Регулярный локус $Reg(X)$ в нетеровой схеме X - это множество точек $x \in X$, таких что $\mathcal{O}_{X,x}$ является регулярным локальным кольцом.

Основная теорема 6 *Следующие условия эквивалентны для нетеровой схемы X:*

- *(1) $Reg(Z)$ содержит непустое открытое подмножество для каждой целой замкнутой подсхемы $Z \subset X$.*

- *(2) $Reg(Z)$ открыто для каждой целой замкнутой подсхемы $Z \subset X$.*

- *(3) Абелева категория $coh(Z)$ имеет классический генератор для каждой целой замкнутой подсхемы $Z \subset X$.*

- *(4) Триангулированная категория $\mathbf{D}^b(coh(Z))$ имеет классический генератор для каждой целой замкнутой подсхемы $Z \subset X$.*

- *(5) Триангулированная категория $\mathbf{D}_{sg}(Z)$ имеет классический генератор для каждой целой замкнутой подсхемы $Z \subset X$.*

Когда они выполняются, абелева категория $coh(X)$ и триангулированные категории $\mathbf{D}^b(coh(X))$, $\mathbf{D}_{sg}(X)$ имеют классические генераторы.

0.11 Благодарности

Автор благодарен своему научному руководителям Д. И. Пионтковскому и С. А. Гайфуллину за многочисленные и плодотворные беседы, повлиявшие не только на содержание диссертации, но и на стиль мышления диссертанта. Автор хранит благодарную память о Евгении Соломоновиче Голоде. Евгений Соломонович был для меня не только учителем, но и образцом в жизни и в науке. Автор благодарен Л. В. Кузьмину за многочисленную помощь в самых разных вопросах и интересные математические дискуссии. Автор также очень признателен коллективу кафедры высшей алгебры за прекрасную атмосферу. Работа выполнена при поддержке **Китайского стипендиального совета**.

0.12 Заключение

В диссертации были найдены градуированные аналоги некоторых классических теорем, рассмотрены категории особенностей схем. Основные результаты исследования:

- Доказано, что каждый градуированный инъективный модуль над gr-нетеровым кольцом имеет неразложимое разложение.
- Доказано, что каждый конечнопорожденный градуированный проективный модуль над gr-артиновым кольцом является конечной прямой суммой неразложимых gr-проективный модулей.
- Найдена формула для выражения градуированных чисел Басса с помощью функтора Ext для градуированных модулей.
- Доказано, что левый точный радикальный функтор F имеет вид Γ_V для замкнутого по специализации подмножества V.
- Доказано, что если схема является горенштейновой, нетеровой, отделимой, с конечной размерностью Крулля и категория когерентных пучков содержит достаточно много локально свободных пучков, тогда ее категория особенностей триангулированно эквивалентна стабильной категории максимальных пучков Коэна-Маколея.
- Получено необходимое и достаточное условие, чтобы категория особенностей нетеровой схемы имела классический генератор.

0.13 Список публикаций автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности

- [**1**] Li Lu, “Triangle equivalences and Gorenstein schemes”, International Journal of Mathematics and Computer Science, Volume 15, No. 1, p. 301-307.

  Журнал индексируется в Web of Science/ Scopus.

  Импакт-фактор 0.7 (Scopus)

- [**2**] Li Lu, "Gr-injective modules and gr-projective modules over G-graded commutative rings Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI, Volume 478, p. 172-193.

  Журнал индексируется в Web of Science/ Scopus.

  Импакт-фактор 0.300 (Scopus)

- [**3**] Li Lu, “Structural theorem for gr-injective modules over gr-noetherian G-graded commutative ring and local cohomology functors”, Proceedings of the Institute of Mathematics and Informatics at Udmurt State University, Volume 53, p. 127-137.

  Журнал индексируется в Web of Science/ Scopus.

  Импакт-фактор 0.1 (Scopus)

0.14 Основные обозначения

G	линейная упорядоченная абелева группа
R	кольцо
X	схема
$Mod(R)$	категория R-модулей
$mod(R)$	категория R-модулей конечного типа
$Gr(R)$	категория градуированных R-модулей
$gr(R)$	категория gr-нетеровых градуированных R-модулей
$Qcoh(X)$	категория когерентных пучков над X
$coh(X)$	категория когерентных пучков над X
$\mathcal{A}$	абелева категория
$\mathbf{C}(\mathcal{A})$	категория $\mathcal{A}$-комплексов
$\mathbf{K}(\mathcal{A})$	гомотопическая категория комплексов в $\mathcal{A}$
$\mathbf{D}(\mathcal{A})$	производная категория категории $\mathcal{A}$
$\mathbf{D}_{sg}(X)$	категория особенностей схемы X

1 Основные определения и конструкции

1.1 Триангулированная категория

Понятие триангулированной категории введено Вердье [45]. В этом разделе дан краткий обзор некоторых понятий и результатов теории триангулированной категории. Подробности и детали можно найти в [16], [32], [46]

Пусть $\mathcal{A}$ — аддитивная категория, эндофунктор $[1]$ — аддитивный автоморфизм категории $\mathcal{A}$. *Треугольник* в $\mathcal{A}$ — это диаграмма вида $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$.

Определение 1.1 *(Триангулированная категория) Триангулированной категорией называется категория $\mathcal{A}$ с автоморфизмом $[1]$, в которой выделен класс треугольников $\mathcal{E}$, удовлетворяющий следующим аксиомам:*

- *(TR1)*
  - *Треугольник $X \xrightarrow{1_X} X \to 0 \to X[1]$ выделен;*
  - *Треугольник, изоморфный выделенному, выделен;*
  - *Любой морфизм $u : X \to Y$ можно дополнить до выделенного треугольника $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$.*
- *(TR2) Треугольник $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ выделен, тогда выделен треугольник $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] \xrightarrow{-u[1]} Y[1]$.*
- *(TR3) Если даны два выделенных треугольника и два морфизма между их началами, образующие коммутативный квадрат, тогда эта диаграмма дополняется до морфизма треугольников:*

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"'] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"'] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"'] \arrow[d, dashed, "h"'] & X[1] \arrow[d, "f[1]"'] \\
X' \arrow[r, "u'"'] & Y' \arrow[r, "v'"'] & Z' \arrow[r, "w'"'] & X'[1].
\end{tikzcd}
$$

- *(TR4)Для каждой пары морфизмов $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$ существует коммутативная диаграмма*

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"'] \arrow[d, "1"'] & Y \arrow[r, "x"'] \arrow[d, "v"'] & Z' \arrow[r] \arrow[d, "w"'] & X[1] \arrow[d, "1"'] \\
X \arrow[r] & Z \arrow[r, "y"'] \arrow[d] & Y' \arrow[r, "w'"'] \arrow[d, "t"'] & X[1] \arrow[d, "u[1]"'] \\
 & X' \arrow[r, "1"'] \arrow[d, "r"'] & X' \arrow[r, "r"'] \arrow[d] & Y[1] \\
 & Y[1] \arrow[r, "x[1]"'] & Z'[1]. &
\end{tikzcd}
$$

где первые две строчки и два центральных столбца - выделенные треугольники.

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$- триангулированные категории. Аддитивный функтор $F:\mathcal{A}\to\mathcal{A}'$ называется точным, если:

- существует изоморфизм функторов $\theta : F\circ[1]\to[1]\circ F$;
- F переводит выделенные треугольники в выделенные, то есть для всякого выделенного треугольника $X\overset{u}{\to}Y\overset{v}{\to}Z\overset{w}{\to}X[1]$ в $\mathcal{A}$ треугольник $F(X)\xrightarrow{F(u)}F(Y)\xrightarrow{F(v)}F(Z)\xrightarrow{\theta_X\circ F(w)}F(X)[1]$ выделен в $\mathcal{A}'$.

Более правильно было бы называть точным функтором пару (F,θ).

Пусть $\mathcal{A}$ - триангулированная категория. Подкатегория $\mathcal{T}$ называется триангулированной подкатегорией, если на $\mathcal{T}$ существует структура триангулированной категории, такая что функтор вложения точен.

1.2 Категория комплексов и гомотопическая категория

Пусть $\mathcal{A}$— абелевая категория, комплекс $X^\bullet$ в $\mathcal{A}$ есть набор объектов X^i и морфизмов $d^i:X^i\to X^{i+1}$, таких что $d^{i+1}d^i=0$. Будем называть $i-$й когомологией комплекса $X^\bullet$ — $H^i(X^\bullet)=kerd^i/imd^{i-1}$. Верхняя грань, нижняя грань и амплитуда комплекса $X^\bullet$ определяются соответственно равенствами

$$sup(X^\bullet)=sup\{i|X^i\neq 0\},$$

$$inf(X^\bullet)=inf\{i|X^i\neq 0\},$$
$$amp(X^\bullet)=sup(X^\bullet)-inf(X^\bullet).$$

Комплекс называется ограниченным (ограниченным сверху, ограниченным снизу), если $amp(X^\bullet)<+\infty$ (соответственно $sup(X^\bullet)<+\infty, inf(X^\bullet)>-\infty$).

Морфизм комплексов $f^\bullet:X^\bullet\to Y^\bullet$ есть набор морфизмов $f^i:X^i\to Y^i$, таких что $f^{i+1}d^i_X=d^i_Yf^i$. Морфизм комплексов f индуцирует морфизм в когомологиях $H^n(f^\bullet):H^n(X^\bullet)\to H^n(Y^\bullet)$.

Обозначим через $C(\mathcal{A})$ категорию комплексов. $C(\mathcal{A})$ является абелевой категорией[46]. Будем обозначать через $C^+(\mathcal{A})$ ($C^-(\mathcal{A})$,$C^b(\mathcal{A})$) полные подкатегории в $C(\mathcal{A})$, образованные ограниченными снизу комплексами (соответственно ограниченными сверху комплексами, ограниченными комплексами). Они тоже абелевые категории. Морфизм комплексов $f^\bullet:X^\bullet\to Y^\bullet$ будем называть **гомотопным нулю** , если $f^p=d_Yh^p+h^{p+1}d_X$ для всех $p\in\mathbb{Z}$ для некоторого семейства морфизмов $h^p:X^{p+1}\to Y^p$.Морфизмы комплексов $f^\bullet,g^\bullet:X^\bullet\to Y^\bullet$ будем называть гомотопными, если $f^\bullet-g^\bullet$ гомотопен 0, будем обозначать через $f^\bullet\sim g^\bullet$ гомотопные морфизмы. Пусть

$$Htp(X^\bullet,Y^\bullet):=\{f^\bullet:X^\bullet\to Y^\bullet, f^\bullet\sim 0\}.$$

$Htp(X,Y)$ является подгруппой $Hom_{C(\mathcal{A})}(X,Y)$. Определим **гомотопическую категорию** $K(\mathcal{A})$ как категорию, которая имеет те же самые объекты как и $C(\mathcal{A})$, а морфизмы в $K(\mathcal{A})$ - это $Hom_{K(\mathcal{A})}(X,Y)=Hom_{C(\mathcal{A})}(X,Y)/Htp(X,Y)$. $K(\mathcal{A})$ является аддитивной категорией.

Конус морфизма комплексов $f^\bullet:X^\bullet\to Y^\bullet$ есть комплекс $Cone(f^\bullet)$, у которого $Cone(f^\bullet)^n=X^{n+1}\oplus Y^n$, $d_n^{Cone(f^\bullet)}=\begin{bmatrix}-d_X^{n+1} & 0\\ f^{n+1} & d_Y^n\end{bmatrix}$. Определим стандартный треугольник в $K(\mathcal{A})$ как последовательность

$$X^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} Y^\bullet \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} Cone(f^\bullet) \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}} X^\bullet[1]. \tag{1.5}$$

Лемма 1.2 *([46]) Категория $K(\mathcal{A})$, снабженная функтором сдвига* $[1]$ *и классом треугольников, изоморфных стандартным, является триангулированной категорией.*

Обозначим через $K^+(\mathcal{A})$, $K^-(\mathcal{A})$ и $K^b(\mathcal{A})$ образы категорий $C^+(\mathcal{A})$, $C^-(\mathcal{A})$ и $C^b(\mathcal{A})$ соответственно в категории $K(\mathcal{A})$. Эти категории также являются триангулированными категориями.

Для комплексов $X^\bullet$ и $Y^\bullet$ определим комплекс $V^\bullet = Hom^\bullet(X^\bullet, Y^\bullet)$ следующим образом:

$$V^n = \prod_{p\in\mathbb{Z}} Hom_{\mathcal{A}}(X^p, Y^{p+n}), (d_V^n(f))^p = d_Y^{n+p} f^n + (-1)^{n+1} f^{p+1} d_X^p.$$

Следующую лемму будем использовать:

Лемма 1.3 *([19]) Для комплексов $X^\bullet$ и $Y^\bullet$, следующая формула справедлива:*

$$Hom_{K(A)}(X^\bullet, Y^\bullet[n]) = H^n Hom_A(X^\bullet, Y^\bullet).$$

1.3 Локализация категории

Определение 1.4 *Мультипликативно замкнутой системой S триангулированной категории $\mathcal{A}$ будем называть класс морфизмов $\mathcal{A}$, удовлетворяющий условиям:*

- *(FR1) Все тождественные морфизмы категории $\mathcal{A}$ принадлежат S; композиция любых двух морфизмов из S также принадлежит S.*

- *(FR2) Любую диаграмму вида*

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[d, Rightarrow, "s"'] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

где $s \in S$, можно дополнить до коммутативного квадрата

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow, "t"'] & \bullet \arrow[d, Rightarrow, "s"'] \\ \bullet \arrow[r] & \bullet \end{tikzcd}$$

где $t \in S$;любую диаграмму вида

$$\begin{tikzcd} & \bullet \\ \bullet & \bullet \arrow[l] \arrow[u, Rightarrow, "s"'] \end{tikzcd}$$

где $s \in S$, можно дополнить до коммутативного квадрата

$$\begin{tikzcd}
\bullet & \bullet \arrow[l] \\
\bullet \arrow[u, Rightarrow, "t"] & \bullet \arrow[l] \arrow[u, Rightarrow, "s"']
\end{tikzcd}$$

где $t \in S$;

- *(FR3) если $sf = sg$ и $s \in S$, то существует морфизм $t \in S$ такой, что $ft = gt$; если $fs = gs$ и $s \in S$, то существует морфизм $t \in S$ такой, что $tf = tg$;*
- *(FR4) $s \in S \Leftrightarrow s[1] \in S$;*
- *(FR5) Если даны два выделенных треугольника и два морфизма между их началами, образующие коммутативный квадрат, и $f, g \in S$, тогда эта диаграмма дополняется до морфизма треугольников:*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"'] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[r, "v"'] \arrow[d, "g"'] & Z \arrow[r, "w"'] \arrow[d, dashed, "h"'] & X[1] \arrow[d, "f[1]"'] \\
X' \arrow[r, "u'"'] & Y' \arrow[r, "v'"'] & Z' \arrow[r, "w'"'] & X'[1].
\end{tikzcd}$$

и здесь $h \in S$.

Мультипликативно замкнутая система S называется насыщенной, если

- *(FR6) $fs \in S, sg \in S \Rightarrow s \in S$.*

Пусть $(\mathcal{A}, \mathcal{E}, [1])$ является триангулированной категорией, S является насыщенной мультипликативно замкнутой системой. Всегда существует категория $\mathcal{A}[S^{-1}]$ и функтор $Q : \mathcal{A} \to \mathcal{A}[S^{-1}]$, который универсальный среди функторов, делающих морфизмы из S обратимыми[46]. Объекты $\mathcal{A}[S^{-1}]$ - это объекты $\mathcal{A}$. Морфизмы в $\mathcal{A}[S^{-1}]$ из X в Y - это классы эквивалентности диаграмм (b, s) в $\mathcal{A}$ вида

$$\begin{tikzcd}
X & \bullet \arrow[l, Rightarrow, "s"'] \arrow[r, "b"'] & Y
\end{tikzcd}$$

здесь $s \in S$. причем две диаграммы (a, r) и (b, s) эквивалентны, если их включить в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
& \bullet \arrow[dl, Rightarrow, "r"'] \arrow[dr, "a"] & \\
X & \bullet \arrow[l, Rightarrow, "u"'] \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & Y \\
& \bullet \arrow[ul, Rightarrow, "s"] \arrow[ur, "b"'] &
\end{tikzcd}$$

такую что $u \in S$.будем обозначать через $(a, r) \sim (b, s)$ эквивалентные диаграммы. Пусть $b/s := \{(a, r) | (a, r) \sim (b, s)\}$. композиция морфизмов b/s и a/r есть морфизм

bc/rt, который получается из них достройкой с помощью квадрата из (FR2):

$$\begin{tikzcd}
& & \bullet \arrow[dl, Rightarrow, "t"'] \arrow[dr, "c"] & & \\
& \bullet \arrow[dl, Rightarrow, "r"'] \arrow[dr, "a"] & & \bullet \arrow[dl, Rightarrow, "s"'] \arrow[dr, "b"] & \\
X & & Y & & Z
\end{tikzcd}$$

легко видеть , что $\mathcal{A}[S^{-1}]$, построенная таким образом действительно является категорией, и канонический функтор

$$Q : \mathcal{A} \to \mathcal{A}[S^{-1}], X \mapsto X, f \mapsto f/1$$

обращает все морфизмы из S и является универсальным в этом смысле[46].

1.4 Производная категория

Определение 1.5 *Морфизм комплекса* $f^\bullet : \mathcal{C}^\bullet \to \mathcal{B}^\bullet$ *называется квазиизоморфизмом , если* $H^n(f^\bullet) : H^n(X^\bullet) \xrightarrow{\cong} H^n(Y^\bullet)$ *для любого* $n \in \mathbb{Z}$.

Лемма 1.6 *([46])* $f^\bullet : \mathcal{C}^\bullet \to \mathcal{B}^\bullet$ *является квазиизоморфизмом тогда и только тогда, когда* $Cone(f^\bullet)$ *является точным комплексом.*

Теорема 1.7 *Пусть* $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ *является гомотопической категорией, класс всех квазиизоморфизмов* Q *является насыщенной мультипликативно замкнутой системой, удовлетворяющей всем аксиомам (FR1)-(FR6).*

Определение 1.8 *Пусть* $\mathcal{A}$ *является абелевой категорией,* ***производная категория*** $\mathbf{D}(\mathcal{A})$ *- это локализация гомотопной категории* $\mathbf{K}(\mathcal{A})$ *относительно класса всех квазиизоморфизмов* Q :

$$\mathbf{D}(\mathcal{A}) := K(\mathcal{A})[Q^{-1}].$$

Аналогично, определены $\mathbf{D}^-(\mathcal{A})$, $\mathbf{D}^+(\mathcal{A})$ *и* $\mathbf{D}^b(\mathcal{A})$.

2 Gr-инъективные модули над gr-нётеровым кольцом и gr-проективные модули над gr-артиновым кольцом

В этой главе после предоставления некоторых необходимых определений и предварительных результатов в Разделе 2.1, мы докажем в разделе 2.2 структурную теорему для gr-инъективных модулей над gr-нётеровыми G-градуированными коммутативными кольцами. В разделе 2.3 будет доказана структурная теорема для gr-конечнопорожденных gr-проективных модулей над gr-артиновыми G-градуированными коммутативными кольцами.

2.1 Основные определения и свойства

2.1.1 Градуированные кольца, градуированные модули и градуированные гомоморфизмы

Абелева группа G называется *линейно упорядоченной*, если между элементами установлено отношение линейного порядка $\leq$, подчиненное требованию: если $a \leq b$, то $ca \leq cb$. В данной главе G всегда является линейно упорядоченной абелевой группой.

Определение 2.1 *Коммутативное кольцо R называется G-градуированным, если $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$, где $\{R_g : g \in G\}$ является семейством аддитивных подгрупп кольца R, таких что $R_g R_h \subset R_{gh}$ для всех $g, h \in G$. Элементы множества $h(R) = \bigcup_{g \in G} R_g$ называются однородными, ненулевой элемент $r \in R_g$ называется однородным элементом степени g; обозначение: $deg(r) = g$. Градуированное кольцо, каждый ненулевой однородный элемент которого обратим, называется градуированным полем. Однородный элемент a называется однородным делителем нуля, если существует ненулевое однородное b такое, что $ab = 0$. Gr-областью целостности называется градуированное коммутативное кольцо без однородных делителей нуля.*

Замечание. ([30], предложение 5.2.16) Gr-область целостности всегда является областью целостности. Gr-поле не всегда является полем!

Пример 2.1 *Пусть k является полем, $R = k[x, x^{-1}]$ является $\mathbb{Z}$-градуированным кольцом с градуировкой $R_n = kx_n, n \in \mathbb{Z}$. Тогда R является gr-полем, но не является полем.*

Предложение 2.2 *([30], предложение 1.1.1) Для градуированного кольца $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ справедливы следующие утверждения:*

- *(1)* $1 \in R_e$*;*
- *(2) если* $r \in R_g$*, то* $r^{-1} \in R_{g^{-1}}$*.*

Определение 2.3 *Модуль M над R называется G-градуированным, если $M = \bigoplus_{g \in G} M_g$, где $\{M_g : g \in G\}$ является семейством аддитивных подгрупп абелевой группы $(M, +)$, таких что $R_g M_h \subset M_{gh}$ для всех $g, h \in G$. Элементы множества $h(M) =$*

$\bigcup_{g\in G} M_g$ называются однородными; ненулевые элементы в M_g называются однородными степени g. Подмодуль N градуированного модуля M является градуированным, если $N = \bigoplus_{g\in G} N_g$, где $N_g = N \cap M_g$. Градуировка модуля M индуцирует градуировку на фактор-модуле M/N по градуированному подмодулю N:

$$(M/N)_g = \{m + N | m \in M_g\}. \tag{2.6}$$

Градуированный подмодуль I модуля R называется градуированным идеалом (или gr-идеалом). Обозначим через $Mod(R)$ категорию R-модулей, а через $Gr(R)$ категорию градуированных R-модулей, объектами которой являются градуированные R-модули, а морфизмами являются гомоморфизмы, сохраняющие градуировку, т.е.

$$Hom_{Gr(R)}(M, N) = \{f \in Hom_R(M, N) : f(M_g) \subseteq N_g\}. \tag{2.7}$$

Очевидно, что $Gr(R)$ является абелевой категорией(см. [30], Раздел 2.2).

Определение 2.4 *Если $M = \bigoplus_{g\in G} M_g$ является градуированным R-модулем и $g \in G$, то обозначим через $M(g)$ модуль M, рассматриваемый с градуировкой $M(g)_h = M_{gh}, h \in G$. Градуированный R-модуль $M(g)$ называется g-сдвигом модуля M.*

Определение 2.5 *Градуированный модуль F называется gr-свободным, если он обладает базисом, состоящим из однородных элементов, т.е. если для некоторого множества $\mathcal{I}$, $g_i \in G$ при $i \in \mathcal{I}$, и $F \cong \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} R(g_i)$. Если $\mathcal{I}$ является конечным множеством, то F называется gr-конечнопорождённым свободным модулем.*

Предложение 2.6 *([49], Предложение 2.6.14) Каждый градуированный R-модуль M изоморфен фактор-модулю некоторого gr-свободного модуля.*

Определение 2.7 *M называется gr-конечнопорождённым модулем, если существует точная последовательность*

$$F \to M \to 0, \tag{2.8}$$

где F является gr-конечнопорождённым свободным модулем.

2.1.2 Gr-идеалы

Определение 2.8 *Gr-идеал $\mathfrak{p}$ градуированного кольца R называется gr-простым идеалом, если для любых двух однородных элементов x, y из $xy \in \mathfrak{p}$ следует либо $x \in \mathfrak{p}$, либо $y \in \mathfrak{p}$. Через $Spec^{gr}(R)$ обозначаем множество всех gr-простых идеалов кольца R. Gr-идеал $\mathfrak{m}$ называется gr-максимальным идеалом, если не существует gr-идеал I такой, что $\mathfrak{m} \subsetneqq I \subsetneqq R$. Через $Max^{gr}(R)$ обозначаем множество всех gr-максимальных идеалов кольца R.*

Предложение 2.9 *([30], предложение 5.2.16) В градуированном кольце R идеал $\mathfrak{p}$ является gr-простым идеалом тогда и только тогда, когда он одновременно является простым идеалом(обычным) и градуированном идеалом.*

Определение 2.10 *Gr-высота gr-простого идеала $\mathfrak{p}$ является супремумом длин цепочек gr-простых идеалов, содержащихся в $\mathfrak{p}$. Обозначаем gr-высоту $\mathfrak{p}$ через h-$ht(\mathfrak{p})$. Gr-размерность Крулля градуированного кольца R является максимумом длины по множеству всех цепочек gr-простых идеалов R. Обозначаем gr-размерность Крулля R через h-$dim(R)$.*

Определение 2.11 *В градуированном кольце R однородный элемент $x \in h(R)$ называется gr-нильпотентом, если $x^n = 0$ для некоторого $n > 0$. Идеал $Nil^{gr}(R)$ порождённый всеми gr-нильпотентами называется gr-нильрадикалом.*

Предложение 2.12 *Gr-нильрадикал градуированного кольца R совпадает с пересечением всех его gr-простых идеалов.*

Доказательство. В неградуированном случае это классический результат (см. [11], Предложение 2.12). В градуированном случае можно повторить это доказательство. □

Предложение 2.13 *([30], предложение 5.2.16) Gr-нильрадикал $Nil^{gr}(R)$ градуированного кольца R совпадает с нильрадикалом $Nil(R)$.*

Определение 2.14 *В градуированном кольце R однородный элемент $u \in R_e$ называется gr-идемпотентом, если $u^2 = u$.*

Предложение 2.15 *Пусть R является градуированным кольцом. Пусть $R = \bigoplus_{a \in A} I_a$, где I_a является gr-идеалом для любого $a \in A$. Справедливы следующие утверждения:*

- *(1) A является конечным множеством.*
- *(2) Пусть $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, тогда для каждого $a \in A$ существует $u_a \in I_a$ такое, что*
  - *(i) $I_a = Ru_a$;*
  - *(ii) $1 = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$;*
  - *(iii) $u_a u_b = u_a \delta_{ab}$, где δ_{ij} является символом Кронекера.*

Обратно, если существуют gr-идемпотенты $u_1, u_2, \cdots, u_n$ такие, что $1 = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ и $u_a u_b = u_a \delta_{ab}$, то $R = \bigoplus_{a=1}^{n} Ru_a$.

Доказательство. В неградуированном случае это классический результат (см. [3], Предложения 7.2, 7.3, 7.5). В градуированном случае можно повторить эти доказательства. Нам нужно еще доказать только то, что $u_a \in R_e$ для каждого $a \in A$.

Пусть $u_a = x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_s}$, где $i_1, i_2, \cdots, i_s \in G$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_s$, и x_{i_s} является однородным элементом степени i_s. Пусть $x_{i_1} \neq 0$. Раз $u_a u_a = u_a$, сравниваем коэффициент и получаем, что $u_a = x_{i_1} \in R_e$. □

2.1.3 Gr-кольцо частных и gr-модуль частных

Определение 2.16 *Gr-мультипликативной системой в градуированном кольце R называется подмножество S в $h(R)$, содержащее 1, не содержащее нуля и замкнутое по умножению (в кольце R).*
Градуировка кольца R индуцирует градуировку на кольце частных $S^{-1}R$ по gr-мультипликативной системе S: $(S^{-1}R)_g = \{\frac{r}{s} \in S^{-1}R | r \in R_h, s \in S \cap R_k, g = hk^{-1}\}$.
Пусть $M = \oplus_{g \in G} M_g$ - градуированный R-модуль. Градуировка модуля M индуцирует градуировку на модуле частных $S^{-1}M$ по gr - мультипликативной системе S: $(S^{-1}M)_g = \{\frac{m}{s} \in S^{-1}M | m \in M_h, s \in S \cap R_k, g = hk^{-1}\}$.

Пример 2.2 *Пусть $R = F[x]$ является кольцом многочленов над полем F.*

- *Если рассматриваем R как обычное кольцо, $S = R - 0$, тогда $S^{-1}R = F(x)$.*
- *Если рассматриваем R как $\mathbb{Z}$-градуированное кольцо $R = \bigoplus_{n=0}^{+\infty} Fx^n$, $S = h(R) - 0$, тогда $S^{-1}R = F[x, x^{-1}]$.*

Определение 2.17 *Градуированное кольцо R gr-локально, если R имеет единственный gr-максимальный идеал.*

Пример 2.3 *Пусть R является градуированной областью целостности, $S = h(R) - 0$, тогда $S^{-1}R$ называется gr-полем частных R(обозначение: $Frac^{gr}(R)$).*

Пример 2.4 *пусть R является градуированным кольцом, $\mathfrak{p} \in Spec^{gr}(R)$, тогда $S = h(R) - \mathfrak{p}$ является gr-мультипликативной системой и $R_{(\mathfrak{p})} := S^{-1}R$ является gr-локальным кольцом. $\mathfrak{p}R_{(\mathfrak{p})}$ является единственным gr-максимальным идеалом $R_{(\mathfrak{p})}$. Определяем $\kappa_{(\mathfrak{p})} = \frac{R_{(\mathfrak{p})}}{\mathfrak{p}R_{(\mathfrak{p})}}$.*

2.1.4 Gr-проективные модули и gr-инъективные модули

Определение 2.18 *Градуированный R-модуль gr-проективен, если он проективен как объект в категории $Gr(R)$.*

Предложение 2.19 *([30], Раздел 2.2) Пусть P является градуированным R-модулем, следующие условия эквивалентны:*

- *(1) P gr-проективен.*
- *(2) Существует такой gr-модуль K, что прямая сумма $F = P \oplus K$ gr-свободна.*

Предложение 2.20 *Пусть P является градуированным R-модулем, следующие условия эквивалентны:*

- *(1) P gr-проективен.*
- *(2) Существует такое множество $\{x_i \in h(P) : i \in \mathcal{I}\}$ и существует такое множество $\{f_i \in Hom_{Gr(R)}(P, R) : i \in \mathcal{I}\}$, что $\{i \in I \mid f_i(x) \neq 0\}$ является конечным множеством для любого $x \in P$, и $x = \sum_{i \in \mathcal{I}} f_i(x) x_i$.*

Доказательство. В неградуированном случае это классический результат (см. [40], Предложения 3.10). В градуированном случае можно повторить это доказательство. $\square$

Определение 2.21 *Градуированный R-модуль M gr-инъективен, если он инъективен как объект в категории $Gr(R)$.*

Предложение 2.22 *(Критерий Бэра для градуированных модулей, [30], Предложение 2.4.8) Пусть Q является градуированным R-модулем, следующие условия эквивалентны:*

- *1) Q gr-инъективен.*

- *2) Для любого градуированного идеала I кольца R, пусть $i : I \to R$ каноническое вложение, тогда*

$$Hom_{Gr(R)}(R, Q) \xrightarrow{i^*} Hom_{Gr(R)}(I, Q) \to 0 \tag{2.9}$$

точна.

Пример 2.5 *Пусть R является градуированной областью целостности, тогда $F = Frac^{gr}(R)$ gr-инъективен.*

Доказательство. Возьмем любой gr-идеал $I \neq 0$, и пусть $f : I \to F$ является gr-гомоморфизмом, нам нужно найти такой gr-гомоморфизм $g : R \to F$, что $g|_I = f$.

Пусть $0 \neq a \in h(I)$, существует такое $x_a \in h(F)$, что $ax_a = f(a)$. Для любых $a, b \in h(I) - 0$, мы имеем $f(ab) = af(b) = bf(a)$, то есть $abx_a = abx_b$, так что $x_a = x_b$, значит $x = x_a$ не зависит от выбора $a \in h(I) - 0$. Теперь пусть $g(r) = rx$, тогда $g|_I = f$. $\square$

Определение 2.23 *Градуированный подмодуль N градуированного модуля M называется gr-существенным, если для любого градуированного подмодуля N' равенство $N \cap N' = 0$ влечет $N' = 0$.*

Определение 2.24 *([49], предложение 33) Пусть $M \subset E$ являются градуированными R-модулями. Следующие условия равносильны:*

- *(1) E является максимальным gr-существенным расширением M.*
- *(2) E является gr-существенным расширением M и E является gr-инъективным модулем.*
- *(3) E является минимальным gr-инъективным модулем, содержащим M.*

При выполнении эквивалентных условий (1)–(3) модуль E называется gr-инъективной оболочкой модуля M и обозначается через $E^{gr}(M)$.

Пример 2.6 *Пусть R является градуированной областью целостности, тогда $F = Frac^{gr}(R)$ является gr-инъективной оболочкой R.*

Доказательство. Мы уже доказали, что F gr-инъективен (см. Пример 2.5). Очевидно, что $R \subset F$ является gr-существенным расширением. $\square$

2.1.5 Gr-простотой модуль, gr-радикал Джекобсона, gr-полупростой модуль

Определение 2.25 • *(1) Градуированный модуль M, имеющий ровно два градуированных подмодуля 0 и M, называется gr-простым модулем.*

- *(2) Градуированный подмодуль N градуированного модуля M называется gr-минимальным (gr-максимальным), если N является минимальным ненулевым (максимальным собственным) элементом множества градуированных подмодулей M.*

Предложение 2.26 *([30], Предложение 2.7.1). Пусть M является gr-простым модулем. Тогда*

- *(1) Для всех $g \in G$, R_e-модуль M_g либо нулевой, либо простой.*
- *(2) Если $M_g \neq 0$, то $M \cong (R/I)(g^{-1})$ для некоторого gr-максимального идеала I кольца R.*

Определение 2.27 *Градуированный подмодуль N градуированного модуля M называется gr-малым, если для любого градуированного подмодуля N' равенство $N + N' = M$ влечет $N' = M$.*

Определение 2.28 *([30], Раздел 2.9) Сумма всех малых gr-подмодулей $J^{gr}(M)$ совпадает с пересечением всех gr-максимальных подмодулей. $J^{gr}(M)$ называется gr-радикалом Джекобсона.*

Предложение 2.29 *([30], предложение 2.9.1; [3], Предложение 9.13, Предложение 9.14) Для градуированного кольца $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ справедливы следующие утверждения:*

- *(1) Если $f \in Hom_{Gr(R)}(M, N)$, то $f(J^{gr}(M)) \subset J^{gr}(N)$.*
- *(2) (Лемма Накаямы) $J^{gr}(R) \cdot M \subset J^{gr}(M)$.*
- *(3) Если M является gr-конечнопорождённым модулем, то $J^{gr}(M)$ является gr-малым.*
- *(4) Верно $h(J^{gr}(R)) = \bigcup_{g \in G} \{r \in R_g | \text{для всех } s \in R_{g^{-1}},\ 1 - rs \text{ обратим}\}$.*

Предложение 2.30 *Для градуированного кольца $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$, если P gr-проективен, то $J^{gr}(R) \cdot P = J^{gr}(P)$.*

Доказательство. По предложению 2.20, существует такое множество $\{x_i \in h(P) : i \in \mathcal{I}\}$ и существует такое множество $\{f_i \in Hom_{Gr(R)}(P, R) : i \in \mathcal{I}\}$, что для любого $x \in P$, $\{i \in \mathcal{I} : f_i(x) \neq 0\}$ является конечным множеством, и $x = \sum_{i \in \mathcal{I}} f_i(x) x_i$. По предложению 2.29 (1) мы имеем $f_i(J^{gr}(P)) \subset J^{gr}(R)$, так что для любого $u \in J^{gr}(P)$, $u = \sum_{i \in \mathcal{I}} f_i(u) x_i \in J^{gr}(R) \cdot P$. □

Определение 2.31 *Пусть R является градуированным кольцом, P, M являются градуированными R-модулями и P gr-проективен. Если $f : P \to M$ является эпиморфизмом в категории $Gr(R)$ и $Kerf$ является gr-малым подмодулем модуля P, тогда P называется gr-проективным накрытием модуля M и обозначается через $P^{gr}(M)$.*

Предложение 2.32 *Gr-проективное накрытие если существует, то единственно с точностью до изоморфизма (в категории $Gr(R)$).*

Доказательство. В неградуированном случае это классический результат (см.[3], Лемма 17.12). В градуированном случае можно повторить это доказательство. □

Определение 2.33 *Градуированный модуль M называется gr-полупростым, если M изоморфен прямой сумме gr-простых модулей.*

Предложение 2.34 *Пусть M является градуированным R-модулем, следующие условия эквивалентны:*

- *1) M является gr-полупростым.*
- *2) Для каждого gr-подмодуля N существует дополнение P, такое что $M = N \oplus P$.*
- *3) M можно разложить в прямую сумму gr-простых подмодулей M.*
- *4) Любая точная последовательность вида $0 \to N \to M \to S \to 0$ в категории $Gr(R)$ расщепляется.*

Доказательство. В неградуированном случае это классический результат (см.[3], Теорема 9.6). В градуированном случае можно повторить это доказательство. □

2.1.6 Gr-неразложимый модуль

Определение 2.35 *Градуированный модуль M называется gr-неразложимым, если он ненулевой и его нельзя разложить в прямую сумму двух ненулевых градуированных модулей.*

Предложение 2.36 *Пусть R является градуированным кольцом, следующие условия эквивалентны:*

- *(1) R не имеет gr-идемпотента $u \neq 0, 1$.*
- *(2) R как градуированный R-модуль gr-неразложим.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть $R = A \oplus B$. По предложению 2.15, существует gr-идемпотент u такой, что $A = Ru$. Раз $u = 0$ или $u = 1$, мы имеем $A = 0$ или $A = R$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть u является gr-идемпотентом, тогда мы имеем $u(1-u) = 0$ и $1 = u+(1-u)$. По предложению 2.15, $R = Ru \oplus R(1-u)$. Раз R как G-градуированный R-модуль gr-неразложим, мы имеем $Ru = 0$ или $R(1-u) = 0$.

Если $Ru = 0$, то $u = 0$.

Если $R(1-u) = 0$, то $Ru = R$, $R(1-u) = Ru(1-u) = 0$, так что $(1-u)1 = 1-u = 0$.
□

Предложение 2.37 *Пусть M является градуированным R-модуль и $S = End_{Gr(R)}(M)$, следующие условия эквивалентны:*

- *1) Кольцо S неразложимо.*
- *2) M как градуированный R-модуль gr-неразложим.*

Доказательство. В неградуированном случае это классический результат (см.[3], Предложения 5.10). В градуированном случае можно повторить это доказательство.
□

2.1.7 Gr-нётеров модуль и gr-артинов модуль

Определение 2.38 *Gr-нётеровым модулем называется градуированный R-модуль M, в котором всякая последовательность gr-подмодулей $N_1 \subset N_2 \subset \cdots \subset N_n \subset \cdots$ стабилизируется, то есть $N_n = N_{n+1} = \cdots$, начиная с некоторого n. Если R как градуированный R-модуль gr-нётеров, то называем R gr-нётеровым кольцом.*

Определение 2.39 *Gr-артиновым модулем называется градуированный R-модуль M, в котором всякая последовательность gr-подмодулей $N_1 \supset N_2 \supset \cdots \supset N_n \supset \cdots$ стабилизируется, то есть $N_n = N_{n+1} = \cdots$, начиная с некоторого n. Если R как градуированный R-модуль gr-артинов, то называем R gr-артиновым кольцом.*

Определение 2.40 *Пусть M является градуированным R-модулем. Мы говорим что gr-длина цепочки его gr-подмодулей вида $N_1 \subset N_2 \subset \cdots \subset N_n$ равна n. Gr-длина модуля M является наибольшей gr-длиной цепочки среди всех цепочек его gr-подмодулей. Если наибольшей gr-длины цепочки не существует, то gr-длина M равна бесконечности. Очевидно что градуированный модуль имеет конечную gr-длину тогда и только тогда, когда он является gr-артиновым и gr-нётеровым.*

Предложение 2.41 *(Лемма Фитинга в градуированном случае) Пусть M является градуированным R-модулем. M имеет конечную gr-длину. Справедливы следующие утверждения:*

- *(1) Пусть $f \in End_{Gr(R)}(M)$, тогда f является мономорфизмом $\Leftrightarrow$ f является эпиморфизмом $\Leftrightarrow$ f является изоморфизмом $\Leftrightarrow$ f не является нильпотентным.*
- *(2) Пусть $f \in End_{Gr(R)}(M)$, тогда существует $n_0 \in \mathbb{Z}_{>0}$ такое, что для любого $n > n_0$, $M = Imf^n \oplus Kerf^n$.*
- *(3) Если M gr-неразложим, тогда $End_{Gr(R)}(M)$ является локальным кольцом.*

Доказательство. В неградуированном случае это классический результат (см. [3], Лемма 11.6, Предложение 11.7, Предложение 11.8, Лемма 12.8). В градуированном случае можно повторить эти доказательства. □

Предложение 2.42 *(Теорема Крулля-Ремака-Шмидта в градуированном случае) Пусть M является градуированным R-модулем. M имеет конечную gr-длину, тогда M является конечной прямой суммой gr-неразложимых модулей. Если $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_n = N_1 \oplus N_2 \oplus \ldots \oplus N_m$, где M_i и N_j являются gr-неразложимыми модулями, тогда $m = n$, и существует такая биекция $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$, что $N_i \cong M_{\pi(i)}$.*

Доказательство. В неградуированном случае это классический результат (см.[3], Теорема 12.9). В градуированном случае можно повторить это доказательство. □

Предложение 2.43 *([41], Лемма 2.3) Справедливы следующие утверждения:*

- *(1) градуированное кольцо R gr-нётерово тогда и только тогда, когда в любом непустом множестве gr-идеалов R существует максимальный элемент;*

- *(2) градуированное кольцо R gr-нётерово тогда и только тогда, когда любой gr-идеал конечно порождён;*

- *(3) градуированное кольцо R gr-нётерово тогда и только тогда, когда любой gr-простой идеал конечно порождён.*

Предложение 2.44 *Пусть R является gr-нётеровым градуированным коммутативным кольцом, тогда нильрадикал $Nil(R)$ нильпотентен.*

Доказательство. Пусть $Nil(R) = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$, здесь $x_i \in h(R)$, ${x_i}^{n_i} = 0$. Пусть $m = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$, тогда мы имеем $(Nil(R))^m = 0$. □

Определение 2.45 *Градуированное кольцо R называется gr-полупростым, если оно gr-полупросто как градуированный модуль над самим собой.*

Предложение 2.46 *([30], предложение 2.10.10) Пусть R является градуированным коммутативным кольцом, следующие условия эквивалентны:*

- *(1) R является gr-полупростым кольцом.*

- *(2) Каждый градуированный R-модуль M gr-проективен.*

- *(3) Каждый градуированный R-модуль M gr-инъективен.*

- *(4) R изоморфно конечному прямому произведению gr-полей.*

- *(5) R является gr-артиновым кольцом, и $J^{gr}(R) = 0$.*

Предложение 2.47 *Пусть R является gr-артиновым градуированным коммутативным кольцом. Справедливы следующие утверждения:*

- *(1) Если R является gr-областью целостности, то R является gr-полем.*

- *(2) $Spec^{gr}(R) = Max^{gr}(R)$.*

- *(3) $h\text{-}dim(R) = 0$.*

- *(4) R имеет только конечное число gr-максимальных идеалов.*

- *(5) Пусть $J = J^{gr}(R)$, тогда существует такое $m \in \mathbb{Z}_{>0}$, что $J^m = 0$.*

Доказательство. В неградуированном случае это классический результат (см. [4], Предложения 8.1, 8.3, 8.4). В градуированном случае можно повторить эти доказательства. □

Предложение 2.48 *Градуированное коммутативное кольцо R является gr-артиновым тогда и только тогда, когда R является gr-нетеровым, и $J^{gr}(R)$ является нильпотентным gr-идеалом и $\frac{R}{J^{gr}(R)}$ gr-полупросто.*

Доказательство. В неградуированном случае это классический результат (см.[3], Теорема 15.20). В градуированном случае можно повторить это доказательство. □

2.2 Структурная теорема для gr-инъективных модулей над gr-нётеровыми G-градуированными коммутативными кольцами

2.2.1 Gr-ассоциированные простые идеалы

Определение 2.49 *Пусть R является gr-нётеровым кольцом, а M является градуированным модулем над R. $\mathfrak{p} \in Spec^{gr}(R)$ называется ассоциированным с M (обозначение: $\mathfrak{p} \in Ass_R^{gr}(M)$), если $\mathfrak{p} = Ann(x)$ для некоторого $x \in h(M)$. Очевидно, если $\mathfrak{p} \in Spec^{gr}(R)$, то $Ass^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}}) = \{\mathfrak{p}\}$.*

Предложение 2.50 *Множество gr-ассоциированных простых непусто, $\bigcup_{\mathfrak{p}\in Ass_R^{gr}(M)} h(\mathfrak{p}) - \{0\}$ является множеством gr-делителей нуля в M.*

Доказательство. Легко показать, что максимальные элементы в семействе gr-идеалов вида $Ann(x)$ являются gr-простыми идеалами, их множество и будет $Ass^{gr}(M)$, $\bigcup_{\mathfrak{p}\in Ass_R^{gr}(M)} h(\mathfrak{p}) - \{0\}$ - это в точности делители нуля в M. $\square$

Лемма 2.51 *Пусть $0 \to L \to M \to N \to 0$ является точной последовательностью, тогда $Ass^{gr}(L) \subset Ass^{gr}(M) \subset Ass^{gr}(L) \cup Ass^{gr}(N)$.*

Доказательство. Первое включение очевидно. Теперь пусть $\mathfrak{p} \in Ass^{gr}(M) - Ass^{gr}(L)$, $\mathfrak{p} = Ann_R(x)$. Имеем $Rx \cap L = 0$, поскольку любой ненулевой элемент из пересечения имел бы $\mathfrak{p}$ своим аннулятором, как следует из gr-простоты $\mathfrak{p}$. Значит, Rx изоморфен gr-подмодулю модуля N, так что $\mathfrak{p} \in Ass_R^{gr}(N)$. $\square$

Предложение 2.52 *Для gr-конечнопорожденного модуля M существует конечная цепочка gr-подмодулей $M = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n$, где $M_{i+1}/M_i \cong (R/\mathfrak{p}_i)(g_i)$ для некоторых gr-простых идеалов $\mathfrak{p}_i$ и некоторых $g_i \in G$.*

Доказательство. Возьмем $\mathfrak{p}_1 \in Ass_R^{gr}(M), \mathfrak{p}_1 = Ann(x)$ и $Rx \cong \frac{R}{Ann(x)}(g_1)$, где $g_1 = deg(x)$. Пусть $M_1 = Rx$. Если $M_1 \neq M$, для $\frac{M}{M_1}$ повторяем этот процесс, получаем последовательность gr-модулей $0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n \subset \cdots$. По gr-нётеровости лемма доказана. $\square$

Предложение 2.53 *Для gr-конечнопорожденного модуля M, $Ass^{gr}(M)$ является конечным множеством.*

Доказательство. Действительно, ассоциированные простые идеалы содержатся среди $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ предыдущего предложения. $\square$

2.2.2 Gr-инъективные модули над gr-нётеровым кольцом

Определение 2.54 *Градуированный подмодуль N градуированного модуля M называется gr-неприводимым, если он не является пересечением двух не совпадающих с ним градуированных подмодулей.*

Gr-неприводимое разложение модуля N - это представление $N = N_1 \cap \cdots \cap N_r$, где все N_i gr-неприводимы. Оно называется несократимым, если оттуда нельзя ничего выкинуть.

Очевидно, что если R является gr-нётеровым кольцом и M является gr-конечнопорожденным, то существует несократимое gr-неприводимое разложение модуля N.

Предложение 2.55 *Пусть Q является gr-инъективным R-модулем, следующие условия эквивалентны:*

- *(1) Q gr-неразложим.*
- *(2) Q является gr-инъективной оболочкой любого ненулевого градуированного подмодуля.*
- *(3) Пусть U является любым ненулевым градуированным подмодулем Q, тогда 0 является неприводимым gr-подмодулем U.*
- *(4) Существует такой ненулевой градуированный подмодуль $U \subset Q$, что 0 является неприводимым gr-подмодулем U, и $Q = E^{gr}(U)$.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть U является ненулевым градуированным подмодулем мудуля Q, тогда $0 \neq E^{gr}(U) \subset Q$, так что $E^{gr}(U)$ является прямым слагаемым Q, но Q gr-неразложим, мы получаем $E^{gr}(U) = Q$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Пусть $0 \neq A \subset U$, $0 \neq B \subset U$, Q является gr-инъективной оболочкой A, так что A является gr-существенным подмодулем Q, $A \cap B \neq 0$.

(3) $\Rightarrow$ (4). Возьмем $U = Q$.

(4) $\Rightarrow$ (1). Предположим что $Q = A \oplus B$, $A \neq 0$, $B \neq 0$. Ввиду того что U является gr-существенным подмодулем Q, мы имеем $U \cap A \neq 0$ и $U \cap B \neq 0$. По условию (4) 0 является неприводимым gr-подмодулем U, мы получаем $(U \cap A) \cap (U \cap B) \neq 0$, но $A \cap B = 0$ - это противоречие. □

Предложение 2.56 *Пусть R является градуированным кольцом, следующие условия эквивалентны:*

- *(1) R является gr-нётеровым кольцом.*
- *(2) Прямая сумма gr-инъективных R-модулей является gr-инъективным модулем.*

Доказательство. В неградуированном случае это классический результат (см.[3], Предложение 18.13). В градуированном случае можно повторить это доказательство. □

Предложение 2.57
- *Пусть R является gr-областью целостности, тогда (0) является gr-неприводимым идеалом.*
- *Пусть R является градуированным кольцом, тогда $\mathfrak{p} \in Spec^{gr}(R)$ gr-неприводим и $E^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}})$ является gr-неразложимым gr-инъективным модулем.*

Доказательство. Мы знаем что $E^{gr}(R) = Frac^{gr}(R) = F = \oplus_{g \in G} F_g$ (см. Пример 2.6). Здесь $End_{Gr(R)}(F) = F_e$ является полем. Так что F является gr-неразложимым модулем, (0) является gr-неприводимым идеалом. □

Лемма 2.58 *Пусть R является gr-нётеровым G-градуированным коммутативным кольцом, если $0 \neq E$ является gr-неразложимым gr-инъективным модулем, то существует такой $\mathfrak{p} \in Spec^{gr}(R)$ и $g \in G$, что $E = E^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}}(g))$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{p} \in Ass^{gr}(E)$, существует $x \in h(E)$ и $g \in G$, что $Rx \cong \frac{R}{\mathfrak{p}}(g)$ и $\mathfrak{p} \in Spec^{gr}(R)$. По предложению 2.55 мы имеем $E = E^{gr}(Rx)$. Лемма доказана. $\square$

Предложение 2.59 *Пусть R является gr-нётеровым G-градуированным коммутативным кольцом. Справедливы следующие утверждения:*

- *(1) Если $0 \neq E$ является gr-инъективным модулем, то E имеет gr-неразложимый gr-инъективный подмодуль.*

- *(2) Если $0 \neq E$ является gr-инъективным модулем, E_1, E_2 являются gr-неразложимыми gr-инъективными подмодулями и E_1 gr-неразложим, тогда либо $E_1 \cap E_2 = 0$, либо $E_1 \subset E_2$.*

- *(3) Пусть $E = \sum_{i \in S} E_i$, где E_i является gr-неразложимым gr-инъективным модулем, тогда существует такое $X \subset S$, что $E = \bigoplus_{i \in X} E_i$.*

Доказательство. (1) Возьмем такие $\mathfrak{p} \in Ass^{gr}(E)$, $g \in G$ и $x \in h(E)$, что $Rx \cong \frac{R}{\mathfrak{p}}(g)$, мы имеем $E_0 = E^{gr}(Rx)$ является gr-неразложимым gr-инъективным подмодулем.

(2) Если $N = E_1 \cap E_2 \neq 0$, ввиду того что E_1 gr-неразложим, мы имеем $E_1 = E^{gr}(N) \subset E_2$.

(3) Пусть $\Gamma = \{X \subset S | \sum_{i \in X} E_i$ является прямой суммой$\}$. Для $i \in S$, мы имеем $\{i\} \in \Gamma$, так что Γ непусто. Возьмем любую цепь $X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \cdots \subset \Gamma$, и пусть $X = \bigcup X_k$. Для любого $i \in X$, пусть $E_i' = \sum_{j \in X, j \neq i} E_j$. Предположим что $E_i' \cap E_i \neq 0$, $0 \neq x \in h(E_i' \cap E_i)$, существует k и $j_1, \ldots, j_n \in X_k - \{i\}$ такие, что $i \in X_k$ $x \in E_{j_1} + E_{j_2} + \ldots + E_{j_n}$, но $\sum_{j \in X_k} E_j$ является прямой суммой, это не может быть. Так что мы получили $E_i' \cap E_i = 0$, то есть $\sum_{i \in X} E_i$ является прямой суммой. По лемме Цорна, Γ имеет максимальный элемент X. По предложению 2.56 мы имеем $\sum_{i \in X} E_i = \bigoplus_{i \in X} E_i$ является gr-инъективным подмодулем E. Пусть $E = (\bigoplus_{i \in X} E_i) \oplus M$, по (1) (2) мы имеем $M = 0$, то есть $E = \bigoplus_{i \in X} E_i$. $\square$

Лемма 2.60 *Пусть R является gr-нётеровым G-градуированным коммутативным кольцом, если $0 \neq E$ является gr-инъективным модулем, то E является прямой суммой gr-неразложимых gr-инъективных модулей.*

Доказательство. Пусть $\{E_i | i \in S\}$ является множеством всех gr-неразложимых gr-инъективных подмодулей E, и пусть $E' = \sum_{i \in S} E_i$. По предложению 2.56 и предложению 2.59 (3), E' является gr-инъективным подмодулем, так что $E = E' \oplus M$. По предложению 2.59 (1), мы имеем $M = 0$, то есть E является прямой суммой gr-неразложимых gr-инъективных модулей. $\square$

Лемма 2.61 *Пусть R является gr-нётеровым G-градуированным коммутативным кольцом, если $\mathfrak{p} \in Spec^{gr}(R)$, то $Ass^{gr}(E^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}})) = \{\mathfrak{p}\}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{q} \in Ass^{gr}(E^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}}))$, $\mathfrak{q} = Ann_R(x)$, где $0 \neq x \in h(E^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}}))$. По определению gr-инъективной оболочкой, $\frac{R}{\mathfrak{p}}$ является gr-существенным подмодулем $E^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}})$, поэтому существует такое $r \in h(R)$, что $0 \neq rx \in \frac{R}{\mathfrak{p}}$. Очевидно что $r \notin \mathfrak{p}$ и $r \notin \mathfrak{q}$, мы имеем $Ann(rx) = \mathfrak{p} \supset Ann(x) = \mathfrak{p}$. Для любого $p \in \mathfrak{p}$, $prx = 0 \Rightarrow pr \in \mathfrak{q}$, но $r \notin \mathfrak{q}$, так что $p \in \mathfrak{q}$, то есть $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$. $\square$

Следующая теорема является одним из главных результатов нашей работы:

Теорема 2.62 *Пусть R — gr-нётерово G-градуированное коммутативное кольцо, где G — некоторая линейно упорядоченная абелевая группа. Справедливы следующие утверждения:*

- *(1) Если $0 \neq E$ — gr-инъективный модуль, то E является прямой суммой неразложимых gr-инъективных модулей.*
- *(2) Если $0 \neq E$ — неразложимый gr-инъективный модуль, то $End_{Gr(R)}(E)$ является локальным кольцом.*
- *(3) Если $0 \neq E$ — неразложимый gr-инъективный модуль, то $E = E^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}}(g))$, где $\mathfrak{p} \in Spec^{gr}(R)$ и $g \in G$.*
- *(4) Если $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in Spec^{gr}(R)$, $g, h \in G$ и $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$,тогда $E^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}}(g)) \neq E^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{q}}(h))$.*

Доказательство. (1) Это лемма 2.60.

(2) Пусть $f \in End_{Gr(R)}(E)$, если f является мономорфизмом, то $f(E) \subset E$ является gr-инъективным модулем, так что $f(E) = E$, то есть мы уже доказали ,что f является мономорфизмом $\Leftrightarrow$ f является изоморфизмом. Теперь пусть $f_1, f_2 \in End_{Gr(R)}(E)$, f_1, f_2 необратимые, $kerf_1 \neq 0, kerf_2 \neq 0$, по предложению 2.55, $0 \neq kerf_1 \cap kerf_2 \subset ker(f_1 + f_2)$, так что $f_1 + f_2$ необратимо, то есть $End_{Gr(R)}(E)$ является локальным кольцом.

(3) Это лемма 2.58.

(4) Это лемма 2.61. □

2.3 Структурная теорема для gr-конечнопорожденных gr-проективных модулей над gr-артиновыми G-градуированными коммутативными кольцами

Лемма 2.63 *Пусть $(R, \mathfrak{m})$ является gr-артиновым gr-локальным G-градуированным коммутативным кольцом, тогда $(R_e, \mathfrak{m}_e)$ является артиновым локальным кольцом.*

Доказательство. $Nil(R) = J^{gr}(R) = \mathfrak{m}$, то есть однородный элемент R либо нильпотентный, либо обратимый. $\mathfrak{m}_e = \mathfrak{m} \cap R_e$ одновременно является множеством нильпотентов и множеством необратимых элементов R_e, так что $(R_e, \mathfrak{m}_e)$ является артиновым локальным кольцом. □

Лемма 2.64 *Пусть R является G-градуированным коммутативным кольцом. R является gr-артиновым тогда и только тогда, когда R является gr-нетеровым и h-$dim(R) = 0$.*

Доказательство. Пусть R является gr-артиновым кольцом, по предложению 2.48 мы имеем что R является gr-нетеровым, по предложению 2.47, h-$dim(R) = 0$.

Теперь пусть R является gr-нетеровым кольцом и h-$dim(R) = 0$, по предложению 2.44 , $J^{gr}(R) = Nil(R)$ является нильпотентным gr-идеалом. По предложению 2.48, еще нужно доказать, что $\frac{R}{J^{gr}(R)}$ gr-полупросто. R имеет только конечное число gr-максимальных идеалов $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \cdots, \mathfrak{m}_s$. Мы знаем что $(J^{gr}(R))^k = 0$, так что $\mathfrak{m}_1^k \mathfrak{m}_2^k \ldots \mathfrak{m}_s^k = 0$. Мы получаем

$$R = \frac{R}{\mathfrak{m}_1^k \mathfrak{m}_2^k \ldots \mathfrak{m}_s^k} \cong \frac{R}{\mathfrak{m}_1^k} \times \frac{R}{\mathfrak{m}_2^k} \times \ldots \times \frac{R}{\mathfrak{m}_s^k}. \tag{2.10}$$

Так что R является конечным произведением gr-нетеровых gr-локальных колец gr-размерности 0, то есть $\frac{R}{J^{gr}(R)}$ gr-полупросто. $\square$

Следующая теорема является одним из главных результатов нашей работы:

Теорема 2.65 *Пусть R — gr-артино G-градуированное коммутативное кольцо, где G — некоторая линейно упорядоченная абелевая группа. Справедливы следующие утверждения:*

- *(1) R является конечным произведением gr-артиновых gr-локальных колец:*

$$R = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_n. \tag{2.11}$$

  $End_{Gr(R)}(P_i) = (P_i)_e$ является локальным кольцом. Если $R = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_n = N_1 \times N_2 \times \ldots \times N_m$, где P_i и N_j являются gr-артиновыми gr-локальными кольцами, то $m = n$, и существует такая биекция $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$, что $N_i \cong P_{\pi(i)}$. Здесь $P_1, P_2, \ldots, P_n$ являются попарно неизоморфными gr-неразложимыми прямыми слагаемыми модуля R.

- *(2) $J^{gr}(P_i)$ является единственным gr-максимальным подмодулем модуля P_i, и $S_i = \frac{P_i}{J^{gr}(P_i)}$ является gr-простым модулем.*

- *(3) Если S является gr-простым R-модулем, тогда существует такие P_i и $g \in G$, что $S = \frac{P_i}{J^{gr}(P_i)}(g)$.*

- *(4) Если $0 \neq P$ является gr-конечнопорожденным gr-проективным модулем, то P является конечной прямой суммой неразложимых gr-проективных модулей.*

- *(5) Если $0 \neq P$ является неразложимым gr-проективным модулем, то существуют такие P_i и $g \in G$, что $P \cong P_i(g)$.*

- *(6) Если $i \neq j$, то $\frac{P_i}{J^{gr}(P_i)} \neq \frac{P_j}{J^{gr}(P_j)}$.*

Доказательство. (1) В Лемме 2.64 мы уже доказали, что R является конечным произведением gr-артиновых gr-локальных колец

$$R = P_1 \times P_2 \times \ldots \times P_n. \tag{2.12}$$

Мы знаем что $End_{Gr(R)}(P_i) = (P_i)_e$. По Лемме 2.63 $(P_i)_e$ является локальным кольцом. По Лемме 2.37 P_i является gr-неразложимым R-подмодулем. Мы можем использовать теорему Крулля-Ремака-Шмидта в градуированном случае (см. предложение 2.42) и получаем единственность.

(2) Обратим внимание на то, что P_i является gr-артиновым gr-локальным кольцом, по предложению 2.48 пункт (2) справедлив.

(3) Это просто другой вариант предложения 2.26 (2).

(4) P имеет конечную gr-длину, по теореме Крулля-Ремака-Шмидта в градуированном случае (см. предложение 2.42), пункт (4) справедлив.

(5) P является прямым слагаемым $R(g_1) \oplus R(g_2) \oplus \cdots \oplus R(g_s)$, по теореме Крулля-Ремака-Шмидта в градуированном случае (см. предложение 2.42), существуют такие P_i и $g \in G$, что $P \cong P_i(g)$.

(6) P_i является gr-проективным накрытием $\frac{P_i}{J^{gr}(P_i)}$, по предложению 2.32 мы знаем gr-проективное накрытие единственно. $\square$

Пример 2.7 *Пусть k является алгебраически замкнутым полем, $R = k[x, x^{-1}]$ является $\mathbb{Z}$-градуированным кольцом с градуировкой $R_n = kx^n, n \in \mathbb{Z}$. Тогда R является gr-полем. R не является полем, но является областью главных идеалов, так что все проективные модули свободны. Мы еще знаем что $Spec(R) = \{(0)\} \cup \bigcup_{c \in k^*} \{(x - c)\}$.*

- *Gr-неразложимые gr-проективные R-модули: $R(n)$, $n \in \mathbb{Z}$.*
- *Gr-неразложимые gr-инъективные R-модули: $R(n)$, $n \in \mathbb{Z}$.*
- *Неразложимые проективные R-модули: R.*
- *Неразложимые инъективные R-модули: $k(x)$ и $\frac{k[x,x^{-1},(x-c)^{-1}]}{k[x,x^{-1}]}$, где $c \in k^*$.*

3 Абстрактный функтор локальных когомологий

3.1 Введение

Эта глава является продолжением предыдущей главы. Мы продолжим обсуждать градуированные кольца.

В 3.2, мы устанавливаем обозначения и рассматриваем некоторые основы градуированных коммутативных колец, теории кручения и t-структур.

В 3.3, мы дадим определение gr-чисел Басса и получим следующую важную теорему:

Основная теорема 1 *(Теорема 3.12) Пусть R является gr-нетеровым G-градуированным коммутативным кольцом и $M \in gr(R)$. Тогда $\mu_i^{gr}(\mathfrak{p}, g, M) = dim_{\kappa_{(\mathfrak{p})}} Ext^i_{R_{(\mathfrak{p})}}(\kappa_{(\mathfrak{p})}, M_{(\mathfrak{p})}(g))$.*

В 3.4, мы покажем, что левый точный радикальный функтор F имеет вид Γ_V, где V является замкнутым по специализации подмножеством. Это обобщение теоремы Йошино и Йошизавы на случай градуированных колец. (смотрите также [47], Theorem 2.6).

3.2 Основные определения и конструкции

3.2.1 Теория кручения

Наши основные ссылки на теории кручения: [10], [38], [26].

Теория кручения в категории Гротендика $\mathcal{A}$ представляет собой такую пару $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ строго полных аддитивных подкатегорий, называемых классом кручения $\mathcal{T}$ и класс без кручения $\mathcal{F}$, что выполняются следующие условия:

- (1) $Hom(\mathcal{T}, \mathcal{F}) = 0$.
- (2) Для всех $M \in Obj(\mathcal{A})$, существует такое $N \subset M$, что $N \in Obj(\mathcal{T})$ и $M/N \in Obj(\mathcal{F})$.

Для каждого объекта M существует самый большой подобъект $t(M) \subset M$, который находится в $\mathcal{T}$ и называется частью кручения объекта M. Существует такой аддитивный функтор

$$t : \mathcal{A} \to \mathcal{T}, M \mapsto t(M). \tag{3.13}$$

Теория кручения наследственна, если $\mathcal{T}$ замкнуто относительно подобъектов, или, что то же самое, t является точным слева функтором.

Радикальный функтор, или, в более общем случае, предрадикальный функтор, имеет долгую историю в теории категорий и функторов, см. [17] или [28] для случая категории модулей. Пусть $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ является функторами. Напомним, что F называется подфунктором функтора G, обозначаемым через $F \subset G$, если $F(M)$ является подобъектом объекта $G(M)$ для всех $M \in \mathcal{A}$, и если $F(f)$ является ограничением $G(f)$ на $F(M)$ для всех $f \in Hom_{\mathcal{A}}(M, N)$.

Определение 3.1 *Функтор $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ называется предрадикальным функтором, если F является подфунктором функтора $\mathbf{1}$.*

Лемма 3.2 *([47], Lemma 1.1) Пусть $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ является точным слева предрадикальным функтором. Если N является подобъектом M, то равенство $F(N) = N \cap F(M)$ имеет место.*

Определение 3.3 *Предрадикальный функтор F называется радикальным функтором, если $F(M/F(M)) = 0$ для всех $M \in Obj(\mathcal{A})$.*

Если $F : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ является точным слева радикальным функтором, то существует следующая наследственная теория кручения $(\mathcal{T}_F, \mathcal{F}_F)$

$$\mathcal{T}_F = \{M \in \mathcal{A} | F(M) = M\},$$
$$\mathcal{F}_F = \{M \in \mathcal{A} | F(M) = 0\}. \tag{3.14}$$

3.2.2 t-структуры

Понятие t-структуры возникло в работе [5] Бейлинсона, Бернштейна, Делиня и Габбера о пучках.

Пусть $\mathcal{D}$ является триангулированной категорией. t-структура в $\mathcal{D}$ является парой $\mathbf{t} = (\mathcal{U}, \mathcal{W})$ полных подкатегорий, замкнутых относительно принятия прямых слагаемых в $\mathcal{D}$, которые удовлетворяют следующим свойствам:

- (t-S.1) $Hom_{\mathcal{D}}(U, W[-1]) = 0$, для всех $U \in \mathcal{U}$ и $W \in \mathcal{W}$;
- (t-S.2) $\mathcal{U}[1] \subset \mathcal{U}$, $\mathcal{W}[-1] \subset \mathcal{W}$;
- (t-S.3) для каждого $Y \in \mathcal{D}$, есть треугольник $A \to Y \to B \to A[1]$ в $\mathcal{D}$, где $A \in \mathcal{U}$ и $B \in \mathcal{W}[-1]$.

t-структура $\mathbf{t} = (\mathcal{U}, \mathcal{W})$ в $\mathcal{D}$ называется стабильной t-структурой если $\mathcal{U}$ и $\mathcal{W}$ являются триангулированными подкатегориями.

Теорема 3.4 *([29], Proposition 2.6) Пусть $\mathcal{D}$ является триангулированной категорией, а $\mathcal{U}$ является триангулированной подкатегорией категории $\mathcal{D}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

- *(1) Существует триангулированная подкатегория $\mathcal{W}$ категории $\mathcal{D}$, такая, что $(\mathcal{U}, \mathcal{W})$ является стабильной t-структурой в $\mathcal{D}$.*
- *(2) Функтор вложения $i : \mathcal{U} \to \mathcal{D}$ имеет сопряжённый справа $\rho : \mathcal{D} \to \mathcal{U}$.*

Если это так, установив $\delta = i \circ \rho : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$, мы получим равенства $\mathcal{U} = Im(\delta)$ и $\mathcal{W} = Ker(\delta)$. Существует естественный морфизм $\phi : \delta \to \mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ - это тождественный функтор на $\mathcal{D}$. Каждый $C \in \mathcal{D}$ может быть вложен в треугольник вида

$$\delta(C) \xrightarrow{\phi(C)} C \to D \to \delta(C)[1]. \tag{3.15}$$

3.3 Gr-число Басса

Пусть R является gr-нетеровым G-градуированным кольцом, $\mathfrak{p} \in Spec^{gr}(R)$, тогда $S = h(R) - \mathfrak{p}$ является gr-мультипликативной системой и $R_{(\mathfrak{p})} := S^{-1}R$ является gr-локальным кольцом. $\mathfrak{p}R_{(\mathfrak{p})}$ является единственным gr-максимальным идеалом кольца $R_{(\mathfrak{p})}$. Определяем $\kappa_{(\mathfrak{p})} = \frac{R_{(\mathfrak{p})}}{\mathfrak{p}R_{(\mathfrak{p})}}$.

Предложение 3.5 *Если M является градуированным R-подмодулем модуля N, $f : M \to N$ является вложением, то N является существенным расширением M тогда и только тогда, когда для любого $\mathfrak{p} \in Spec^{gr}(R)$ индуцированный морфизм $f_{(\mathfrak{p})} : Hom_{R_{(\mathfrak{p})}}(\kappa_{(\mathfrak{p})}, M_{(\mathfrak{p})}) \to Hom_{R_{(\mathfrak{p})}}(\kappa_{(\mathfrak{p})}, N_{(\mathfrak{p})})$ является изоморфизмом.*

Доказательство. Ввиду того что локальзация является точным функтором и $Hom_{R_{(\mathfrak{p})}}(\kappa_{(\mathfrak{p})}, -)$ точно слева, $f_{(\mathfrak{p})}$ всегда является мономорфизом. Пусть $S = h(R) - \mathfrak{p}$. Ввиду того что $\frac{R}{\mathfrak{p}}$ конечно представлен, мы имеем $S^{-1}Hom_R(\frac{R}{\mathfrak{p}}, M) \cong Hom_{R_{(\mathfrak{p})}}(\kappa_{(\mathfrak{p})}, M_{(\mathfrak{p})})$ и $S^{-1}Hom_R(\frac{R}{\mathfrak{p}}, N) \cong Hom_{R_{(\mathfrak{p})}}(\kappa_{(\mathfrak{p})}, N_{(\mathfrak{p})})$.

Пусть N является существенным расширением M и $0 \neq \frac{f}{s} \in S^{-1}Hom_R(\frac{R}{\mathfrak{p}}, N)$. $0 \neq f(1) \in N$, так что существует $r \in h(R)$, такое что $0 \neq rf(1) = f(r) \in M$. Очевидно что $r \notin \mathfrak{p}$, то есть $r \in S$, так что $\frac{rf}{rs} \in S^{-1}Hom_R(\frac{R}{\mathfrak{p}}, M)$ и его образ в $S^{-1}Hom_R(\frac{R}{\mathfrak{p}}, N)$ является $\frac{f}{s}$, так что $f_{(\mathfrak{p})}$ является изоморфизмом.

Теперь пусть $f_{(\mathfrak{p})}$ является изоморфизмом для любого $\mathfrak{p} \in Spec^{gr}(Rx)$ и пусть $x \in h(N)$. Существует $\mathfrak{p} \in Ass^{gr}(Rx)$ и $r \in h(R)$ такие, что $y = rx$ и $Ann_R(y) = \mathfrak{p}$. Определяем гомоморфизм $f \in Hom_R(\frac{R}{\mathfrak{p}}, N)$ такой что $f(1) = y$. Существует $h \in Hom_R(\frac{R}{\mathfrak{p}}, M)$ и $s \in S$ такие, что $\frac{h}{s}(\frac{1}{1}) = \frac{f}{1}(\frac{1}{1}) = \frac{y}{1}$. Существует $u \in S$ такое, что $h(1) = usy = usrx \in M$, так что N является существенным расширением M. $\square$

Определение 3.6 *Пусть M является градуированным R-модулем, gr-инъективной резольвентой называется точная последовательность*

$$E^\bullet = 0 \to M \to E^0 \xrightarrow{d^0} E^1 \xrightarrow{d^1} E^2 \xrightarrow{d^2} \dots, \tag{3.16}$$

где E^i является gr-инъективным модулем. Если $Ker(d^i) \to E^i$ является существенным расширением, то мы говорим, что $E^\bullet$ является gr-минимальной инъективной резольвентой.

Предложение 3.7 *Пусть R является gr-нетеровым градуированным кольцом и M является градуированным модулем с gr-инъективной резольвентой $E^\bullet$. Тогда $E^\bullet$ является gr-минимальной инъективной резольвентой тогда и только тогда, когда для любого $\mathfrak{p} \in Spec^{gr}(R)$ и для любого i, индуцированный морфизм $Hom_{R_{(\mathfrak{p})}}(\kappa_{(\mathfrak{p})}, E^i_{(\mathfrak{p})}) \to Hom_{R_{(\mathfrak{p})}}(\kappa_{(\mathfrak{p})}, E^{i+1}_{(\mathfrak{p})})$ является нулевым.*

Доказательство. Пусть $Z^i = ker(d^i) = Im(d^{i-1})$. $E^\bullet$ является gr-минимальной тогда и только тогда, когда E^i является существенным расширением Z^i, тогда и только тогда, когда индуцированный морфизм $Hom_{R_{(\mathfrak{p})}}(\kappa_{(\mathfrak{p})}, Z^i_{(\mathfrak{p})}) \to Hom_{R_{(\mathfrak{p})}}(\kappa_{(\mathfrak{p})}, E^i_{(\mathfrak{p})})$ является изоморфизмом (по предложению 3.5).Ввиду того что существует точная последлвательность $0 \to Z^i \to E^i \to E^{i+1}$, и $Hom_{R_{(\mathfrak{p})}}(\kappa_{(\mathfrak{p})}, -)$ точно слева, последнее условие справедливо тогда и только тогда, когда индуцированный морфизм $Hom_{R_{(\mathfrak{p})}}(\kappa_{(\mathfrak{p})}, E^i_{(\mathfrak{p})}) \to Hom_{R_{(\mathfrak{p})}}(\kappa_{(\mathfrak{p})}, E^{i+1}_{(\mathfrak{p})})$ является 0. $\square$

Предложение 3.8 *Пусть R является gr-нетеровым градуированным кольцом и S является gr-мультипликативной системой. Если M является gr-инъективным R-модулем, то $S^{-1}M$ является gr-инъективным $S^{-1}R$-модулем.*

Доказательство. В неградуированном случае это классический результат (см.[22], теорема 2.8). В градуированном случае можно повторить это доказательство. □

Предложение 3.9 *Пусть R является gr-нетеровым градуированным кольцом и M является градуированным R-модулем с gr-минимальной инъективной резольвентой $E^\bullet$. Тогда для любого $\mathfrak{p} \in Spec^{gr}(R)$, $E^\bullet_{(\mathfrak{p})}$ является gr-минимальной инъективной резольвентой $M_{(\mathfrak{p})}$.*

Доказательство. Мы знаем что $E^i_{(\mathfrak{p})}$ является gr-инъективным $R_{(\mathfrak{p})}$-модулем (по предложению 3.8). По предложению 3.7 нужно только доказать, что $Hom_{R_{(\mathfrak{q})}}(\kappa_{(\mathfrak{q})}, (E^i_{(\mathfrak{p})})_{(\mathfrak{q})}) \to Hom_{R_{(\mathfrak{q})}}(\kappa_{(\mathfrak{q})}, (E^{i+1}_{(\mathfrak{p})})_{(\mathfrak{q})})$ является 0 для всех $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$. Мы знаем что $(E^i_{\mathfrak{p}})_{(\mathfrak{q})} = E^i_{(\mathfrak{q})}$, так что по предложению 3.7 $E^\bullet_{(\mathfrak{p})}$ является gr-минимальной инъективной резольвентой $M_{(\mathfrak{p})}$. □

Определение 3.10 *(Gr-число Басса) Пусть R является gr-нетеровым градуированным кольцом и M является конечнопорождённым градуированным R-модулем с gr-минимальной инъективной резольвентой $E^\bullet$. По теореме 2.62, мы имеем*

$$E^i = \bigoplus_{\mathfrak{p} \in Spec^{gr}(R)} \bigoplus_{g \in G} [E^{gr}_R(\frac{R}{\mathfrak{p}})(g)]^{\mu_i^{gr}(\mathfrak{p},g,M)}.$$

$\mu_i^{gr}(\mathfrak{p}, g, M)$ называется gr-числом Басса.

Предложение 3.11 *Пусть R является gr-нетеровым градуированным кольцом и M является конечнопорождённым градуированным R-модулем. Тогда $\mu_i^{gr}(\mathfrak{p}, M) = \mu_i^{gr}(\mathfrak{p}_{(\mathfrak{p})}, M_{(\mathfrak{p})})$ для любого i.*

Доказательство. Возьмем gr-минимальную инъективную резольвенту $E^\bullet$. По предложению 3.9 $E^\bullet_{(\mathfrak{p})}$ является gr-минимальной инъективной резольвентой $M_{(\mathfrak{p})}$. $E^i = \oplus_{\mathfrak{p} \in Spec^{gr}(R)} \oplus_{g \in G} [E^{gr}_R(\frac{R}{\mathfrak{p}})(g)]^{\mu_i^{gr}(\mathfrak{p},g,M)}$. Делаем локальзацию и получаем результат. □

Теорема 3.12 *Пусть R является gr-нетеровым G-градуированным коммутативным кольцом и $M \in gr(R)$. Тогда $\mu_i^{gr}(\mathfrak{p}, g, M) = dim_{\kappa_{(\mathfrak{p})}} Ext^i_{R_{(\mathfrak{p})}}(\kappa_{(\mathfrak{p})}, M_{(\mathfrak{p})}(g))$.*

Доказательство. В силу предложения 3.11 достаточно рассмотреть случай, когда $(R, \mathfrak{m}, \kappa)$ является gr-нётеровым gr-локальным кольцом и $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$. Пусть $E^\bullet$ является gr-минимальной инъективной резольвентой M. Тогда $Ext^i_{Gr(R)}(\kappa, M)$ является i-й когомологией комплекса $Hom_{Gr(R)}(\kappa, E^\bullet)$.

По минимальности резольвенты все дифференциалы в этом комплексе нулевые, так что $Ext^i_{Gr(R)}(\kappa, M) = Hom_{Gr(R)}(\kappa, E^i)$. Для завершения доказательства достаточно показать, что

$$Hom_{Gr(R)}(\kappa, E^{gr}_R(\frac{R}{\mathfrak{p}})) = \begin{cases} 0 \ (if \ \mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}) \\ \kappa \ (if \ \mathfrak{p} = \mathfrak{m}). \end{cases} \tag{3.17}$$

Если $\mathfrak{p} = \mathfrak{m}$, по предложению 3.5 $Hom_{Gr(R)}(\kappa, E^{gr}_R(\kappa)) = Hom_{Gr(R)}(\kappa, \kappa) = \kappa$.

Если $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$, то существует однородный элемент x из $\mathfrak{m}$ не в $\mathfrak{p}$. Пусть $f \in Hom_{Gr(R)}(\kappa, \frac{R}{\mathfrak{p}})$, тогда $0 = f(x) = xf(1)$, но x в $\frac{R}{\mathfrak{p}}$ не является делителем нуля, так что $f(1) = 0$, то есть $Hom_{Gr(R)}(\kappa, \frac{R}{\mathfrak{p}}) = 0$. По предложению 3.5 $Hom_{Gr(R)}(\kappa, E^{gr}_R(\frac{R}{\mathfrak{p}})) = Hom_{Gr(R)}(\kappa, \frac{R}{\mathfrak{p}}) = 0$. □

3.4 Локальные когомологии

Определение 3.13 *Пусть R является gr-нетеровым G-градуированным кольцом. Пусть $M \in Gr(R)$.*

- *(1) Малый gr-носитель ([13]) модуля M является*

$$supp^{gr}(M) = \{\mathfrak{p} \in Spec^{gr}(R) | Tor_*^{R_{(\mathfrak{p})}}(M_{(\mathfrak{p})}, \kappa_{(\mathfrak{p})}) \neq 0\}. \tag{3.18}$$

- *(2) (Обычный) gr-носитель модуля M является*

$$Supp^{gr}(M) = \{\mathfrak{p} \in Spec^{gr}(R) | M_{(\mathfrak{p})} \neq 0\}. \tag{3.19}$$

Замечание. Обратим внимание, что $supp^{gr}(M) \subset Supp^{gr}(M)$ и равенство выполняется, если $M \in gr(R)$ (см. [13], Lemma 2.6).

Определение 3.14 *Пусть R является gr-нетеровым G-градуированным кольцом. Пусть $M \in Gr(R)$.*

- *(1) Для любого подмножества $V \subset Spec^{gr}(R)$ мы говорим, что V является замкнутым по специализации подмножеством, если для любого $\mathfrak{p} \in V$ и любого $\mathfrak{q} \in Spec^{gr}(R)$ у нас есть $\mathfrak{q} \in V$ если $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$.*
- *(2) Пусть V - замкнутое по специализации подмножество в $Spec^{gr}(R)$. Мы можем определить функтор сечения Γ_V с носителем в V:*

$$\Gamma_V(M) = \bigcup \{N \subset M | Supp^{gr}(N) \subset V\} = \bigcup \{N \subset M | supp^{gr}(N) \subset V\}$$

  для всех $M \in Gr(R)$.

Определение 3.15 *В этом определении мы обозначаем $\mathcal{C} = \mathbf{D}^+(Gr(R))$. Пусть $\delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ является триангулированным функтором. Мы будем говорить, что δ является абстрактным функтором локальных когомологий, если выполняются следующие условия:*

- *(1) Функтор вложения $i : Im(\delta) \to \mathcal{C}$ имеет сопряжённый справа $\rho : \mathcal{C} \to Im(\delta)$ и $\delta \cong i \circ \rho$.*
- *(2) t-структура $(Im(\delta), Ker(\delta))$ делит неразложимые инъективные объекты, т.е. , каждый неразложимый инъективный объект принадлежит либо $Im(\delta)$, либо $Ker(\delta)$.*

Теорема 3.16 *Следующие условия эквивалентны для точного слево предрадикального функтора F в $Gr(R)$.*

- *(1) F является радикальным функтором.*
- *(2) F сохраняет инъективность.*
- *(3) F является функтором сечения с носителем в замкнутом по специализации подмножестве множества $Spec^{gr}(R)$.*

- *(4)* $\mathbf{R}F$ *является абстрактным функтором локальных когомологий.*

Доказательство теоремы 3.16 состоит из последовательности относительно коротких лемм.

Лемма 3.17 *Пусть R является gr-нетеровым G-градуированным кольцом, а V является замкнутым по специализации подмножеством множества $Spec^{gr}(R)$.*

- *(1) Если N является градуированным подмодулем модуля M, то $\Gamma_V(N) = N \cap \Gamma_V(M)$.*
- *(2) $\Gamma_V(M/\Gamma_V(M)) = 0$ для каждого $M \in Gr(R)$.*
- *(3) Γ_V является точным слево радикальным функтором.*

Доказательство. (1) Если $H \in Gr(R)$, то

$$H \subset \Gamma_V(N) \Leftrightarrow H \subset N \; and \; Supp^{gr}(H) \subset V \Leftrightarrow H \subset \Gamma_V(M) \cap N.$$

(2) Если $H \in Gr(R)$, то

$$H \subset \Gamma_V(M/\Gamma_V(M)) \Leftrightarrow H \subset M/\Gamma_V(M) \; and \; Supp^{gr}(H) \subset V \Rightarrow H = 0.$$

(3) Пусть $0 \to K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ является точной последовательностью в $Gr(R)$. Согласно (1) имеем $\Gamma_V(K) = K \cap \Gamma_V(M)$, следовательно, $0 \to \Gamma_V(K) \to \Gamma_V(M)$ является точной последовательностью. Пусть $H \in Gr(R)$, мы имеем

$$H \subset Ker\Gamma_V(g) \Leftrightarrow H \subset Kerg \cap \Gamma_V(M) = Imf \cap \Gamma_V(M) \Leftrightarrow H \subset Im\Gamma_V(f),$$

следовательно $0 \to \Gamma_V(K) \to \Gamma_V(M) \to \Gamma_V(N)$ является точной последовательностью. $\square$

Лемма 3.18 *Пусть R является gr-нетеровым G-градуированным кольцом. Пусть $F : Gr(R) \to Gr(R)$ является точным слева радикальным функтором.*

- *(1) Пусть $\mathfrak{p} \in Spec^{gr}(R)$, тогда $F(E_R^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}}))$ совпадает с $E_R^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}})$ или 0.*
- *(2) F сохраняет инъективность.*

Доказательство. (1) Так как F является точным слева радикальным функтором, существует наследственная теория кручения $(\mathcal{T}_F, \mathcal{F}_F)$, который определен в (3.14). Так что существует точная последовательность

$$0 \to N \to E_R^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}}) \to H \to 0$$

где $N \in \mathcal{T}_F$ и $H \in \mathcal{F}_F$. Если $N = 0$, то $E_R^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}}) \cong H \in \mathcal{F}_F$, следовательно $F(E_R^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}})) = 0$. Если $N \neq 0$, так как $Ass^{gr}(E_R^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}})) = \{\mathfrak{p}\}$, мы имеем $Ass^{gr}(N) = \{\mathfrak{p}\}$, следовательно $R/\mathfrak{p} \subset N$. Так как $\mathcal{T}_F$ является локализующей подкатегорией и $N \in \mathcal{T}_F$, мы имеем $R/\mathfrak{p} \in \mathcal{T}_F$. По Лемме 2.61 $E_R^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}}) \in \mathcal{T}_F$. Следовательно $F(E_R^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}})) = E_R^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}})$.

(2) Для инъективного $J \in Gr(R)$, по Теореме 2.62 существует разложение в сумму неразложимых $J = \bigoplus_{i\in\mathcal{I}} E_R^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}_i})(g_i)$. Мы устанавливаем $J_1 = \bigoplus_{i\in\mathcal{I}_1} E_R^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}_i})(g_i)$ и $J_2 = \bigoplus_{i\in\mathcal{I}_2} E_R^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}_i})(g_i)$, где

$$\mathcal{I}_1 = \{i \in \mathcal{I} | F(E_R^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}_i})) = E_R^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}_i})\}, \tag{3.20}$$

$$\mathcal{I}_2 = \{i \in \mathcal{I} | F(E_R^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}_i})) = 0\}. \tag{3.21}$$

По (1) мы имеем $J = J_1 \oplus J_2$. Так как $\mathcal{T}_F$ замкнуто относительно взятия прямых сумм и $\mathcal{F}_F$ замкнуто относительно взятия прямых произведений и подмодулей, мы имеем $J_1 \in \mathcal{T}_F$, и $J_2 \in \mathcal{F}_F$. Поэтому мы имеем равенство $F(J) = F(J_1) \oplus F(J_2) = J_1$, которое является gr-инъективным модулем. □

Предложение 3.19 *Пусть R является gr-нетеровым G-градуированным кольцом. Пусть $F : Gr(R) \to Gr(R)$ является точным слева прерадикальным функтором, сохраняющим инъективность. Тогда*

- *(1) $F(E_R^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}}))$ совпадает с $E_R^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}})$ или 0.*
- *(2) $F(\frac{R}{\mathfrak{p}})$ совпадает с $\frac{R}{\mathfrak{p}}$ или 0.*

Доказательство. (1) Поскольку $F(E_R^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}}))$ является gr-инъективным подмодулем gr-неразложимого инъективного модуля $E_R^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}})$, это прямое слагаемое модуля $E_R^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}})$. Таким образом по неразложимости модуля $E_R^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}})$ мы имеем, $F(E_R^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}}))$ — это либо $E_R^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}})$, либо 0.

(2) Из леммы 3.2 следует, что $F(\frac{R}{\mathfrak{p}}) = \frac{R}{\mathfrak{p}} \cap F(E_R^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}}))$, следовательно $F(\frac{R}{\mathfrak{p}})$ — это либо $\frac{R}{\mathfrak{p}}$, либо 0 по (1). □

Для точного слева предрадикального функтора F, который сохраняет инъективность, мы определяем подмножество V_F множества $Spec^{gr}(R)$ следующим образом:

$$V_F = \{\mathfrak{p} \in Spec^{gr}(R) : F(\frac{R}{\mathfrak{p}}) = \frac{R}{\mathfrak{p}}\}. \tag{3.22}$$

Обратим внимание на то, что по предложению 3.19, V_F совпадает с множеством

$$\{\mathfrak{p} \in Spec^{gr}(R) : F(E_R^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}})) = E_R^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}})\}. \tag{3.23}$$

Предложение 3.20 *Пусть $F : Gr(R) \to Gr(R)$ является точным слева прерадикальным функтором, сохраняющим инъективность. Тогда V_F является замкнутым по специализации подмножеством.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{p} \in V_F$ и $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{p}$. Существует точная последовательность

$$0 \to K \to \frac{R}{\mathfrak{p}} \to \frac{R}{\mathfrak{q}}. \tag{3.24}$$

Поскольку F является точным слева прерадикальным функтором, существует точная последовательность

$$0 \to F(K) \to F(\frac{R}{\mathfrak{p}}) \to F(\frac{R}{\mathfrak{q}}).$$

Мы имеем $F(\frac{R}{\mathfrak{p}}) = \frac{R}{\mathfrak{p}}$ и $F(K) = K \cap F(\frac{R}{\mathfrak{p}}) = K$ по лемме 3.2, следовательно $F(\frac{R}{\mathfrak{q}}) = \frac{R}{\mathfrak{q}}$, поэтому $\mathfrak{q} \in V_F$. □

Лемма 3.21 *Пусть $F : Gr(R) \to Gr(R)$ является точным слева прерадикальным функтором, сохраняющим инъективность. Тогда равенство $F = \Gamma_{V_F}$ выполняется в качестве подфункторов функтора $\mathbf{1}$, где V_F является замкнутым по специализации подмножеством в предложении 3.20.*

Доказательство. Прежде всего, рассмотрим случай, когда M является конечной прямой суммой неразложимых инъективных объектов $\bigoplus_{i=1}^n E_R^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}_i})(g_i)$ в $Gr(R)$. Тогда мы имеем равенство

$$F(M) = \bigoplus_{\mathfrak{p}_i \in V_F} E_R^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}_i})(g_i) = \Gamma_{V_F}(M)$$

по предложению 3.19.

Далее рассмотрим случай, когда $M \in gr(R)$. Поскольку gr-инъективная оболочка $E^{gr}(M)$ модуля M является конечной прямой суммой неразложимых gr-инъективных модулей, и мы уже показали, что $F(E^{gr}(M)) = \Gamma_{V_F}(E^{gr}(M))$, используя лемму 3.2, получаем

$$F(M) = M \cap F(E^{gr}(M)) = M \cap \Gamma_{V_F}(E^{gr}(M)) = \Gamma_{V_F}(M).$$

Наконец, рассмотрим общий случай. Следует отметить, что градуированный подмодуль $N \subset M$ принадлежит $F(M)$ тогда и только тогда, когда выполняется равенство $F(N) = N$. Действительно, эта эквивалентность легко наблюдается из равенства $F(N) = N \cap F(M)$ по лемме 3.2. Эта эквивалентность верна для функтора сечения Γ_{V_F}. Таким образом, $N \subset M$ принадлежит $\Gamma_{V_F}(M)$ тогда и только тогда, когда $\Gamma_{V_F}(N) = N$. Поэтому мы видим, что $N \subset F(M)$ тогда и только тогда, когда $N \subset \Gamma_{V_F}(M)$, и доказательство завершено. □

Лемма 3.22 *Пусть $M^\bullet \in \mathbf{D}(Gr(R))$ и пусть V является замкнутым по специализации подмножеством множества $Spec^{gr}(R)$. Тогда*

- *(1) $M^\bullet$ принадлежит $Im(\mathbf{R}\Gamma_V)$ если и только если $M^\bullet$ квазиизоморфен gr-инъективному комплексу, компоненты которого являются прямыми суммами $E_R^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}})(g)$ где $\mathfrak{p} \in V$.*

- *(2) $M^\bullet$ принадлежит $Ker(\mathbf{R}\Gamma_V)$ если и только если $M^\bullet$ квазиизоморфен gr-инъективному комплексу, компоненты которого являются прямыми суммами $E_R^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}})(g)$ где $\mathfrak{p} \in Spec^{gr}(R) - V$.*

- *(3) $\mathbf{R}F$ — абстрактный функтор локальных когомологий.*

Доказательство. По Теореме 5.4 в [42] или по предложении B.2 в [25], каждый комплекс градуированного R-модуля имеет K-инъективную резольвенту. Для любого gr-инъективного комплекса $J^\bullet \in \mathbf{K}(\mathcal{I})$, $\mathbf{R}\Gamma_V(J^\bullet) = \Gamma_V(J^\bullet)$ — это подкомплекс комплекса $J^\bullet$, состоящий из gr-инъективных модулей, носители которого в V. Следовательно, каждый объект в $Im(\mathbf{R}\Gamma_V)$ (соответственно $Ker(\mathbf{R}\Gamma_V)$) является gr-инъективным комплексом, компоненты которого являются прямыми суммами $E_R^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}})(g)$ где $\mathfrak{p} \in V$ (соответственно $\mathfrak{p} \in Spec^{gr}(R) - V$). Особенно, если $\mathfrak{p} \in V$ (соответственно $\mathfrak{p} \in Spec^{gr}(R) - V$), то $E_R^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}})(g) \in Im(\mathbf{R}\Gamma_V)$ (соответственно $E_R^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}})(g) \in Ker(\mathbf{R}\Gamma_V)$). Поскольку $Hom_{Gr(R)}(E_R^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{p}})(g)), E_R^{gr}(\frac{R}{\mathfrak{q}})(h)) = 0$ для $\mathfrak{p} \in V$ и $\mathfrak{q} \in Spec^{gr}(R) - V$, мы видим, что $Hom_{\mathbf{K}(\mathcal{I})}(J_1^\bullet, J_2^\bullet) = Hom_{\mathbf{K}(\mathcal{I})}(J_1^\bullet, \Gamma_V(J_2^\bullet))$ для любого $J_1^\bullet \in Im(\mathbf{R}\Gamma_V)$ и

$J_2^\bullet \in \mathbf{K}(\mathcal{I})$. Следовательно, из приведенной выше эквивалентности следует, что $\mathbf{R}\Gamma_V$ является правым сопряжением естественного вложения $i : Im(\mathbf{R}\Gamma_V) \to \mathbf{D}(Gr(R))$.
□

Доказательство Теоремы 3.16. (1) ⇒ (2), (2) ⇒ (3), (3) ⇒ (1) и (3) ⇒ (4) уже доказано соответственно в леммах 3.18(2), 3.21, 3.17(3) и 3.22(3).

Предположим, что $\mathbf{R}F$ является абстрактным функтором локальных когомологий. Мы должны показать, что $F(M/F(M)) = 0$ для любого градуированного модуля M. Достаточно показать, что $F(E/F(E)) = 0$ для любого gr-инъективного модуля E. Фактически, для любого градуированного модуля M, рассматриваем gr-инъективную оболочку $E^{gr}(M)$ модуля M, имеем $F(M/F(M)) \subset F(E^{gr}(M)/F(E^{gr}(M)))$ по лемме 3.2.

Отметим, что естественное вложение $F \subset \mathbf{1}$ функторов на $Gr(R)$ индуцирует естественный морфизм $\phi : \mathbf{R}F \to \mathbf{1}$ функторов на $\mathbf{D}^+(Gr(R))$. Поскольку $(Im(\mathbf{R}F), Ker(\mathbf{R}F))$ является стабильной t-структурой на $\mathbf{D}^+(Gr(R))$, по теореме 3.4, каждый gr-инъективный модуль E вложен в треугольник

$$\mathbf{R}F(E) \xrightarrow{\phi(E)} E \to N \to \mathbf{R}F(E)[1], \tag{3.25}$$

где $\mathbf{R}F(E) \in Im(\mathbf{R}F)$ и $N \in Ker(\mathbf{R}F)$.

Поскольку E является gr-инъективным модулем и поскольку $\mathbf{R}F$ является правым производным функтором точного слева функтора, $\mathbf{R}F(E) = F(E)$ является подмодулем модуля E через морфизм $\phi(E)$. Поэтому мы имеем $N \cong E/F(E)$ в $\mathbf{D}^+(Gr(R))$. В частности, $H^0(\mathbf{R}F(E/F(E))) \cong H^0(\mathbf{R}F(N)) = 0$. Поскольку F является точным слева функтором, мы имеем $F(E/F(E)) = 0$. Доказательство теоремы 3.16 завершено. □

4 Триангулированные эквивалентности и горенштейновы схемы

Пусть X является схемой. Мы говорим, что X является горенштейновой, если X локально нетерова, и $\mathcal{O}_{X,x}$ является горенштейновым кольцом для всех $x \in X$.

Пусть X является схемой. Мы будем говорить, что она удовлетворяет условию (**ELF**), если она отделима, нетерова, с конечной размерностью Крулля, и категория $coh(X)$ имеет достаточно много локально свободных пучков. Например, любая квази-проективная схема удовлетворяет этим условиям. **Мы по умолчанию предполагаем, что X удовлетворяет условию (ELF).**

Стабильная категория $\underline{\mathbf{MCM}}(X)$ максимальных пучков Коэна-Маколея над X определяется следующим образом. Объектами являются максимальные $\mathcal{O}_X$-пучки Коэна-Маколея, т.е., $\mathcal{F} \in coh(X)$ с $\mathcal{E}xt^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X) = 0$ для всех $i > 0$.

Hom-множество $Hom_{\underline{\mathbf{MCM}}(X)}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ является частным от $Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ по абелевой группе, состоящей из гомоморфизмов $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ через некоторые локально свободные $\mathcal{O}_X$-пучки конечного типа.

В этой главе мы докажем, что если схема является горенштейновой, нетеровой, отделимой, с конечной размерностью Крулля и категория когерентных пучков содержит достаточно много локально свободных пучков, тогда ее категория особенностей триангулированно эквивалентна стабильной категории максимальных пучков Коэна-Маколея.

4.1 Основные понятия

4.1.1 Триангулированные категории

Пусть $\mathbf{K}(X) = \mathbf{K}(coh(X))$ - гомотопическая категория неограниченных комплексов когерентных пучков. Пусть $\mathbf{K}$ - гомотопическая категория неограниченных комплексов локально свободных пучков конечного типа. Следующие триангулированные подкатегории категории $\mathbf{K}$ представляют интерес для нас.

$$\mathbf{K}^{\infty,b} = \{\mathcal{F}^\bullet \in \mathbf{K} | H^i(\mathcal{F}^\bullet) = 0 \text{ (кроме конечного } i)\}. \tag{4.26}$$

$$\mathbf{K}^{-,b} = \{\mathcal{F}^\bullet \in \mathbf{K}^{\infty,b} | \mathcal{F}^i = 0 \text{ (для достаточно больших } i)\}. \tag{4.27}$$

$$\mathbf{K}^{b} = \{\mathcal{F} \in \mathbf{K} | \mathcal{F}^i = 0 \text{ (кроме конечного } i)\}. \tag{4.28}$$

Категория особенностей схемы X по определению является фактором Вердье

$$\mathbf{D}_{sg}(X) = \mathbf{K}^{-,b}/\mathbf{K}^b. \tag{4.29}$$

Категория особенностей $\mathbf{D}_{sg}(X)$ является триангулированной категорией.

Пусть $\underline{\mathbf{APC}}(X)$ является полной подкатегорией в $\mathbf{K}$, состоящей из тех комплексов, которые изоморфны ациклическим комплексам локально свободных пучков конечного типа.

Предложение 4.1 *([48], Proposition 3.5.7) Пусть $\mathcal{X} \subset \mathbf{K}(X)$ является триангулированной подкатегорией. Пусть $\mathcal{F}^\bullet \in \mathbf{K}(X)$. Если $\mathcal{H}om_{\mathbf{K}(X)}(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet) = 0$ для каждого $\mathcal{G}^\bullet \in \mathcal{X}$, тогда канонический функтор $Q : \mathbf{K}(X) \to \mathbf{K}(X)/\mathcal{X}$ индуцирует изоморфизм*

$$\mathcal{H}om_{\mathbf{K}(X)}(\mathcal{F}^\bullet, -) \to \mathcal{H}om_{\mathbf{K}(X)/\mathcal{X}}(\mathcal{F}^\bullet, -). \tag{4.30}$$

4.1.2 Усечение комплексов

Пусть $\mathcal{F}^\bullet$ является комплексом. Есть несколько способов обрезать комплекс $\mathcal{F}^\bullet$:

- (1) *Левое глупое усечение* $\sigma_{\leq n}$ - это подкомплекс $\sigma_{\leq n}\mathcal{F}^\bullet$, определенный правилом
$$(\sigma_{\leq n}\mathcal{F}^\bullet)^i = \begin{cases} 0 \ (i > n) \\ \mathcal{F}^i \ (i \leq n). \end{cases} \tag{4.31}$$

- (2) *Правое глупое усечение* $\sigma_{\geq n}$ - это подкомплекс $\sigma_{\geq n}\mathcal{F}^\bullet$, определенный правилом
$$(\sigma_{\geq n}\mathcal{F}^\bullet)^i = \begin{cases} 0 \ (i < n) \\ \mathcal{F}^i \ (i \geq n). \end{cases} \tag{4.32}$$

Предложение 4.2 ([48], Lemma 2.6.1) *Пусть $\mathcal{F}^\bullet$ является комплексом. Тогда*
$$0 \to \sigma_{\geq n}\mathcal{F}^\bullet \to \mathcal{F}^\bullet \to \sigma_{\leq n-1}\mathcal{F}^\bullet \to 0 \tag{4.33}$$
является точной последовательностью.

Предложение 4.3 *Пусть $\mathcal{P}^\bullet \in \mathbf{K}^{-,b}$, тогда $\mathcal{P}^\bullet \to \sigma_{\leq n}\mathcal{P}^\bullet$ является изоморфизмом в $\mathbf{D}_{sg}(X)$.*

Доказательство. По предложению 4.2
$$\sigma_{\geq n+1}\mathcal{P}^\bullet \to \mathcal{P}^\bullet \to \sigma_{\leq n}\mathcal{P}^\bullet \to \sigma_{\geq n+1}P^\bullet[1] \tag{4.34}$$
является выделенным треугольником. Так как $\mathcal{P}^\bullet \in \mathbf{K}^{-,b}$, мы имеем $\sigma_{\geq n+1}\mathcal{P}^\bullet \in \mathbf{K}^b$, следовательно $\mathcal{P}^\bullet \to \sigma_{\leq n}\mathcal{P}^\bullet$ является изоморфизмом в $\mathbf{D}_{sg}(X)$. $\square$

4.1.3 Локально свободная резольвента

Ограниченный сверху локально свободный комплекс $\mathcal{P}^\bullet$ вместе с квазиизоморфизмом $\mathcal{P}^\bullet \to \mathcal{F}^\bullet$ называется *локально свободной резольвентой* $\mathcal{F}^\bullet$.

Предложение 4.4 *([48], Theorem 4.2.2) Пусть X удовлетворяет* (**ELF**)*, и пусть $coh(X)$ является категорией когерентных пучков на X. В категории $\mathbf{C}^-(coh(X))$ ограниченных сверху когерентных $\mathcal{O}_X$-комплексов, каждый объект имеет локально свободную резольвенту.*

Предложение 4.5 *Для любого $\mathcal{O}_X$-комплекса $\mathcal{G}^\bullet$ в $\mathbf{D}^b(coh(X))$ и целых $s = sup\{i|H^i(\mathcal{G}^\bullet) \neq 0\}$. Если $H^i(\mathcal{G}^\bullet) = 0$ для всех $i < m$, то существует выделенный треугольник*
$$\mathcal{P}^\bullet \to \mathcal{G}^\bullet \to \mathcal{F}[1-m] \to \mathcal{P}^\bullet[1] \tag{4.35}$$
в $\mathbf{D}^b(coh(X))$ где $\mathcal{F}$ является когерентным $\mathcal{O}_X$-пучком, и $\mathcal{P}^\bullet$ является совершенным комплексом с $\mathcal{P}^i = 0$ для $i > s$.

Доказательство. По Предложению 4.4, можно предположить, что каждый $\mathcal{G}^i$ является локально свободным пучком конечного типа, и $\mathcal{G}^i = 0$ для $i > s$:

$$\mathcal{G}^\bullet = \dots \xrightarrow{d^{-2}} \mathcal{G}^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} \mathcal{G}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{G}^1 \xrightarrow{d^1} \mathcal{G}^2 \xrightarrow{d^2} \dots \xrightarrow{d^{s-1}} \mathcal{G}^s \xrightarrow{0} 0 \to 0 \dots . \tag{4.36}$$

Существует точная последовательность

$$0 \to \sigma_{\geq m}\mathcal{G}^\bullet \to \mathcal{G}^\bullet \to \sigma_{\leq m-1}\mathcal{G}^\bullet \to 0, \tag{4.37}$$

таким образом, существует выделенный треугольник в $\mathbf{D}^b(coh(X))$:

$$\sigma_{\geq m}\mathcal{G}^\bullet \to \mathcal{G}^\bullet \to \sigma_{\leq m-1}\mathcal{G}^\bullet \to \sigma_{\geq m}\mathcal{G}^\bullet[1], \tag{4.38}$$

где $\sigma_{\geq m}\mathcal{G}^\bullet$ является совершенным комплексом. Пусть $\mathcal{P}^\bullet = \sigma_{\geq m}\mathcal{G}^\bullet$ и $\mathcal{F} = Imd^{m-1}$, тогда существует выделенный треугольник

$$\mathcal{P}^\bullet \to \mathcal{G}^\bullet \to \mathcal{F}[1-m] \to \mathcal{P}^\bullet[1] \tag{4.39}$$

в $\mathbf{D}^b(coh(X))$. $\square$

Предложение 4.6 *([35], Предложение 1.19) Пусть $(X, \mathcal{O}_X)$ – Горенштейна схема, удовлетворяющая условию* $(\mathbf{ELF})$. *Тогда следующие условия для когерентного пучка $\mathcal{F}$ эквивалентны.*

- *(1) Пучки $\underline{\mathcal{E}xt}^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X)$ тривиальны для всех $i > 0$.*
- *(2) Существует единственный локально свободная резольвента в* $\mathbf{K}(X)$

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{Q}^0 \to \mathcal{Q}^1 \to \mathcal{Q}^2 \to \dots . \tag{4.40}$$

4.2 Основная теорема

Сейчас мы определяем функтор $\Omega^k : \underline{\mathbf{APC}}(X) \to \underline{\mathbf{MCM}}(X)$ и показываем, что это эквивалентность между категориями.

Определение 4.7 *Для любого целого числа k пусть $\Omega^k : \underline{\mathbf{APC}}(X) \to \underline{\mathbf{MCM}}(X)$ будет функтором, который отправляет комплекс $\mathcal{F}^\bullet$ в ядро дифференциала $d^k : \mathcal{F}^k \to \mathcal{F}^{k+1}$.*

Лемма 4.8 *Функтор $\Omega^k : \underline{\mathbf{APC}}(X) \to \underline{\mathbf{MCM}}(X)$ является эквивалентностью категорий.*

Доказательство. Докажем, что функтор $\Omega^k : \underline{\mathbf{APC}}(X) \to \underline{\mathbf{MCM}}(X)$ плотный, полный и унивалентный.

Чтобы увидеть, что он плотный, пусть $\mathcal{F} \in coh(X)$ является максимальным пучком Коэна-Маколея. Существует комплекс $\mathcal{P}^\bullet$ локально свободных пучков, такой что $\mathcal{F} = Imd^{-1}$. Сдвиг так, что $\mathcal{F}$ является ядром d^k, дает объект $\mathcal{G}^\bullet \in \underline{\mathbf{APC}}(X)$ такой, что $\Omega^k(\mathcal{G}^\bullet) = \mathcal{F}$.

Чтобы убедиться, что Ω^k является полным и унивалентным, рассматриваем $\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet \in \underline{\mathbf{APC}}(X)$ и $f : \Omega^k(\mathcal{F}^\bullet) \to \Omega^k(\mathcal{G}^\bullet)$.

Обратим внимание, что комплекс $\mathcal{F}^\bullet$ дает левую и правую локально свободные резольвенты для $\Omega^k(\mathcal{F}^\bullet)$, а комплекс $\mathcal{G}^\bullet$ дает левую и правую локально свободные резольвенты для $\Omega^k(\mathcal{G}^\bullet)$. Таким образом, любой морфизм $\Omega^k(\mathcal{F}^\bullet) \to \Omega^k(\mathcal{G}^\bullet)$ можно поднять на морфизм комплекса $\mathcal{F}^\bullet \to \mathcal{G}^\bullet$, и этот морфизм единствен с точностью до гомотопии. □

Далее мы определяем функтор $\sigma_{\leq k} : \underline{\mathbf{APC}}(X) \to \mathbf{D}_{sg}(X)$ и показываем, что это эквивалентность категорий.

Определение 4.9 *Для любого целого числа k пусть $\sigma_{\leq k} : \underline{\mathbf{APC}}(X) \to \mathbf{D}_{sg}(X)$ будет левым жестоким усечением.*

Лемма 4.10 *Функтор $\sigma_{\leq k}$ плотен для всех k.*

Доказательство. Для любого $\mathcal{O}_X$-комплекса $\mathcal{G}^\bullet$ в $\mathbf{D}^b(coh(X))$ и целых $s = sup\{i|H^i(\mathcal{G}^\bullet) \neq 0\}$. Если $H^i(\mathcal{G}^\bullet) = 0$ для всех $i < m$, то по предложению 4.5 существует выделенный треугольник

$$\mathcal{P}^\bullet \to \mathcal{G}^\bullet \to \mathcal{F}[1-m] \to \mathcal{P}^\bullet[1] \tag{4.41}$$

в $\mathbf{D}^b(coh(X))$ где $\mathcal{F}$ является когерентным $\mathcal{O}_X$-пучком, а $\mathcal{P}^\bullet$ является совершенным комплексом с $\mathcal{P}^i = 0$ для $i > s$. Кроме того, мы получаем, что $\mathcal{G}^\bullet = \mathcal{F}[1-m]$ в $\mathbf{D}_{sg}(X)$.

Поскольку $\mathcal{G}^\bullet$ ограничен и X является горенштейновым, мы знаем, что комплекс $\mathbf{R}\underline{\mathcal{H}om}^\bullet(\mathcal{G}^\bullet, \mathcal{O}_X)$ ограничен. Это означает, что если $m \ll 0$, то $\underline{\mathcal{E}xt}^i(\mathcal{F}, \mathcal{O}_X) = 0$ для всех $i > 0$.

По предложению 4.6 существует правая локально свободная резольвента

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{Q}^0 \to \mathcal{Q}^1 \to \mathcal{Q}^2 \to \dots . \tag{4.42}$$

Следовательно, существует комплекс $\mathcal{Q}^\bullet$ локально свободных пучков, такой что $\mathcal{F} = Imd^{-1}$. Сдвиг так, что $\mathcal{F}$ является ядром d^k, это такой объект $\mathcal{H}^\bullet \in \underline{\mathbf{APC}}(X)$, что $\sigma_{\leq k}(\mathcal{H}^\bullet) = \mathcal{G}^\bullet$. □

Предложение 4.11 *Пусть $\mathcal{H}^\bullet \in \underline{\mathbf{APC}}(X)$. Тогда $\mathcal{H}om_{\mathbf{K}(X)}(\sigma_{\leq k}(\mathcal{H}^\bullet), \mathbf{K}^b) = 0$ для всех k.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{P}^\bullet \in \mathbf{K}^b$. Поскольку $\sigma_{\leq k}(\mathcal{H}^\bullet)$ изоморфны для всех k, достаточно показать, что существует такой k, что

$$\mathcal{H}om_{\mathbf{K}(X)}(\sigma_{\leq k}(\mathcal{H}^\bullet), \mathcal{P}^\bullet) = 0. \tag{4.43}$$

Для этого возьмем k ниже нижней границы гомологии $\mathcal{P}^\bullet$. □

Лемма 4.12 *Функтор $\sigma_{\leq k}$ является полным и унивалентным для всех k.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet \in \underline{\mathbf{APC}}(X)$. Так как $\mathbf{D}_{sg}(X) = \mathbf{K}^{-,b}/\mathbf{K}^b$, по предложению 4.1 и предложению 4.11 у нас есть

$$\mathcal{H}om_{\mathbf{K}(X)}(\sigma_{\leq k}(\mathcal{F}^\bullet), \sigma_{\leq k}(\mathcal{G}^\bullet)) = \mathcal{H}om_{\mathbf{D}_{sg}(X)}(\sigma_{\leq k}(\mathcal{F}^\bullet), \sigma_{\leq k}(\mathcal{G}^\bullet)). \tag{4.44}$$

Следовательно, достаточно показать, что

$$\mathcal{H}om_{\mathbf{K}(X)}(\mathcal{F}^\bullet, \mathcal{G}^\bullet) = \mathcal{H}om_{\mathbf{K}(X)}(\sigma_{\leq k}(\mathcal{F}^\bullet), \sigma_{\leq k}(\mathcal{G}^\bullet)). \tag{4.45}$$

По предложению 4.6 это верно. □

Теперь мы можем доказать наш основной результат.

Теорема 4.13 *Пусть* $(X, \mathcal{O}_X)$ *является горенштейной схемой, удовлетворяющей условию* (**ELF**)*. Тогда категория особенностей* $\mathbf{D}_{sg}(X)$ *триангулированно эквивалентна стабильной категории* $\underline{\mathbf{MCM}}(X)$ *максимальных пучков Коэна-Маколея над* X*.*

Доказательство. Пусть $\alpha : \underline{\mathbf{MCM}}(X) \to \mathbf{D}_{sg}(X)$ является функтором, который отправляет пучок $\mathcal{F}$ в комплекс

$$\mathcal{F}^{\bullet} = \ldots \to 0 \to \mathcal{F} \to 0 \to 0 \to 0 \to \ldots \tag{4.46}$$

где $\mathcal{F}^0 = \mathcal{F}$. По леммам 4.8, 4.10 и 4.12, α является эквивалентностью. $\square$

5 Классические генераторы для категорий когерентных пучков и регулярный локус

Пусть X — нетерова схема. Совершенные комплексы образуют толстую подкатегорию $\mathfrak{Perf}(X)$ в $\mathbf{D}^b(coh(X))$. Категория особенностей $\mathbf{D}_{sg}(X)$ по определению является фактором Вердиера

$$\mathbf{D}_{sg}(X) = \frac{\mathbf{D}^b(coh(X))}{\mathfrak{Perf}(X)}. \tag{5.47}$$

Регулярный локус $Reg(X)$ в X - это множество точек $x \in X$, таких что $\mathcal{O}_{X,x}$ является регулярным локальным кольцом.

Мы даем необходимое и достаточное условие, чтобы категория особенностей нетеровой схемы имела классический генератор.

5.1 Классические генераторы для абелевой категории и триангулированной категории

5.1.1 Классические генераторы для абелевой категории

Наши основные ссылки на абелевы категории: [15], [27], [14].

Рассмотрим определение толстой подкатегории абелевой категории. Пусть $\mathcal{A}$ - абелева категория, а $\mathcal{S}$ - непустая полная подкатегория в $\mathcal{A}$. $\mathcal{S}$ называется *толстой подкатегорией* при условии, что она замкнута относительно прямых слагаемых и обладает свойством «два из трех» для точных последовательностей: для любой точной последовательности

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0 \tag{5.48}$$

в $\mathcal{A}$, если два из X, Y, Z находятся в $\mathcal{S}$, то и третий.

Для объекта G в $\mathcal{A}$ мы пишем $thick_{\mathcal{A}}(G)$ для наименьшей толстой подкатегории $\mathcal{A}$, содержащей G. Объект G является *классическим генератором* для $\mathcal{A}$, если $thick_{\mathcal{A}}(G) = \mathcal{A}$.

5.1.2 Классические генераторы для триангулированной категории

Пусть $\mathcal{C}$ является триангулированной категорией. Пусть E является объектом в $\mathcal{C}$. Обозначим $\langle E\rangle_1$ строго полную подкатегорию в $\mathcal{C}$, состоящую из объектов в $\mathcal{C}$, изоморфных прямым слагаемым конечных прямых сумм

$$\bigoplus_{i=1,2,\ldots,r} E[n_i] \tag{5.49}$$

сдвигов E. Для $n > 1$ пусть $\langle E\rangle_n$ обозначает полную подкатегорию категории $\mathcal{C}$, состоящую из объектов в $\mathcal{C}$, изоморфных прямым слагаемым объектов X, которые вписываются в треугольник

$$A \to X \to B \to A[1], \tag{5.50}$$

где A является объектом в $\langle E\rangle_1$, а B является объектом в $\langle E\rangle_{n-1}$.

Подкатегория $\langle E\rangle := \bigcup_n^{+\infty} \langle E\rangle_n$ является триангулированной подкатегорией категории $\mathcal{C}$.

Пусть $\mathcal{C}$ — триангулированная категория. Пусть E является объектом в $\mathcal{C}$. Мы говорим, что E является *классическим генератором* категории $\mathcal{C}$, если $\langle E \rangle = \mathcal{C}$. Мы говорим, что E является *сильным генератором*, если $\langle E \rangle_n = \mathcal{C}$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

В дальнейшем мы будем опускать слово "классический"для классических генераторов в абелевых и триангулированных категориях.

5.2 Открытые множества

Пусть R является коммутативным нетеровым кольцом, а M является конечно порожденным R-модулем. Мы пишем $\Omega(M)$ для ядра любого сюръективного R-линейного отображения $P \to M$, где P-конечно порожденный проективный R-модуль. Для любого целого числа $n \geq 1$ мы устанавливаем $\Omega^n(M) := \Omega(\Omega^{n-1}(M))$ и называем его n-ным модулем сизигий M. Когда M конечно порожден, модули сизигий - также.

Лемма 5.1 *Пусть R является коммутативным нетеровым кольцом, а M является конечно порожденным R-модулем. Для любого целого числа $n \geq 1$ мы имеем*

$$Ext^n_R(M, \Omega^n M) = 0 \tag{5.51}$$

тогда и только тогда, когда проективная размерность $pd(M) \leq n-1$.

Доказательство. см. [23], Лемма 2.14. □

Лемма 5.2 *Пусть R является коммутативным нетеровым кольцом. Тогда верны следующие выводы:*

- *(1) Пусть M является конечно порожденным R-модулем , тогда $Supp(M) = \{\mathfrak{p} \in Spec(R) | M_{\mathfrak{p}} \neq 0\}$ замкнуто в $Spec(R)$.*
- *(2) Пусть M, N являются конечно порожденными R-модулями, и пусть $f \in Hom_R(M, N)$, тогда множество $\{\mathfrak{p} \in Spec(R) | f_{\mathfrak{p}}$ является* ***мономорфизмом*** *$\}$ открыто в $Spec(R)$.*
- *(3) Пусть M, N являются конечно порожденными R-модулями, и пусть $f \in Hom_R(M, N)$, тогда множество $\{\mathfrak{p} \in Spec(R) | f_{\mathfrak{p}}$ является* ***эпиморфизмом*** *$\}$ открыто в $Spec(R)$.*
- *(4) Пусть M, N являются конечно порожденными R-модулями, и пусть $f \in Hom_R(M, N)$, тогда множество $\{\mathfrak{p} \in Spec(R) | f_{\mathfrak{p}}$ является* ***изоморфизмом*** *$\}$ открыто в $Spec(R)$.*
- *(5) Пусть M является конечно порожденным R-модулем, тогда множество $\{\mathfrak{p} \in Spec(R) | M_{\mathfrak{p}}$* ***проективен*** *$\}$ открыто в $Spec(R)$.*
- *(6) Пусть M является конечно порожденным R-модулем, тогда множество $\{\mathfrak{p} \in Spec(R) | pd(M_{\mathfrak{p}}) < n\}$ открыто в $Spec(R)$.*

Доказательство. (1) $Supp(M) = \mathbb{V}(Ann(M))$ замкнуто в $Spec(R)$.

(2)(3)(4) Множества $\{\mathfrak{p} \in Spec(R) | (Kerf)_{\mathfrak{p}} \neq 0\}$ и $\{\mathfrak{p} \in Spec(R) | (Cokerf)_{\mathfrak{p}} \neq 0\}$ замкнуты в $Spec(R)$.

(5) По лемме 5.1, $Ext^1_R(M, \Omega^1 M) = 0$ тогда и только тогда, когда M проективен, множество

$$\{\mathfrak{p} \in Spec(R) | Ext^1_R(M, \Omega^1 M) = 0\} \tag{5.52}$$

открыто в $Spec(R)$, так что множество $\{\mathfrak{p} \in Spec(R) | M_{\mathfrak{p}}$ **проективен** $\}$ открыто в $Spec(R)$.

(6) По лемме 5.1, $Ext^n_R(M, \Omega^n M) = 0$ тогда и только тогда, когда $pd(M) < n$, множество

$$\{\mathfrak{p} \in Spec(R) | Ext^n_R(M, \Omega^n M) = 0\} \tag{5.53}$$

открыто в $Spec(R)$, так что множество

$$\{\mathfrak{p} \in Spec(R) | pd(M_{\mathfrak{p}}) < n\} \tag{5.54}$$

открыто в $Spec(R)$. □

Лемма 5.3 *Пусть X является нетеровой схемой. Тогда верны следующие утверждения:*

- *(1) Пусть $\mathcal{F}$ является когерентным $\mathcal{O}_X$-пучком, тогда $Supp(\mathcal{F}) = \{x \in X | \mathcal{F}_x \neq 0\}$ замкнуто в X.*
- *(2) Пусть $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ являются когерентными $\mathcal{O}_X$-пучками, и пусть $f \in Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, тогда множество $\{x \in X | f_x$ является мономорфизмом $\}$ открыто в X.*
- *(3) Пусть $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ являются когерентными $\mathcal{O}_X$-пучками, и пусть $f \in Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, тогда множество $\{x \in X | f_x$ является эпиморфизмом $\}$ открыто в X.*
- *(4) Пусть $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ являются когерентными $\mathcal{O}_X$-пучками, и пусть $f \in Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, тогда множество $\{x \in X | f_x$ является изоморфизмом $\}$ открыто в X.*
- *(5) Пусть $\mathcal{F}$ является когерентным $\mathcal{O}_X$-пучком, тогда множество $\{x \in X | \mathcal{F}_x$ свободен $\}$ открыто в X.*
- *(6) Пусть $\mathcal{F}$ является когерентным $\mathcal{O}_X$-пучком, тогда множество $\{x \in X | pd(\mathcal{F}_x) < n\}$ открыто в X.*

Доказательство. Это непосредственно вытекает из леммы 5.2. □

5.3 Совершенные комплексы

Совершенный комплекс когерентных пучков над нетеровой схемой X является объектом в производной категории $\mathbf{D}^b(coh(X))$, квазиизоморфной ограниченному комплексу локально свободных пучков конечного типа. Совершенный пучок - это пучок, который совершенно подходит, если рассматривать его как комплекс, сконцентрированный на нулевой степени.

Лемма 5.4 *Если $C^\bullet \in \mathbf{D}^b(coh(X))$, то существует ограниченный сверху комплекс локально свободных пучков конечного типа $P^\bullet$ с квазиизоморфизмом $C^\bullet \xrightarrow{\sim} P^\bullet$.*

Доказательство. См. [44]. $\square$

Лемма 5.5 *Для любого $\mathcal{O}_X$-комплекса $C^\bullet$ в $\mathbf{D}^b(Coh(X))$ и целых $s = sup\{i|H^i(C^\bullet) \neq 0\}$ и $m = inf\{i|H^i(C^\bullet) \neq 0\}$, существует выделенный треугольник*

$$P^\bullet \to C^\bullet \to \mathcal{F}[1-m] \to P^\bullet[1] \tag{5.55}$$

в $\mathbf{D}^b(Coh(X))$ где $\mathcal{F}$ является когерентным $\mathcal{O}_X$-пучком, и $P^\bullet$ является совершенным комплексом с $P^i = 0$ для $i > s$.

Доказательство. По Лемме 5.4, можно предположить, что каждый C^i является локально свободным пучком конечного типа, и $C^i = 0$ для $i > s$:

$$C^\bullet = \ldots \xrightarrow{d^{-2}} C^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} C^0 \xrightarrow{d^0} C^1 \xrightarrow{d^1} C^2 \xrightarrow{d^2} \ldots \xrightarrow{d^{s-1}} C^s \xrightarrow{0} 0 \to 0 \ldots . \tag{5.56}$$

Пусть

$$C^\bullet_{\geq m} = \ldots \to 0 \xrightarrow{0} C^m \xrightarrow{d^m} C^{m+1} \xrightarrow{d^{m+1}} \ldots \xrightarrow{d^{s-1}} C^s \xrightarrow{0} 0 \to 0 \ldots \tag{5.57}$$

и

$$C^\bullet_{<m} = \ldots \xrightarrow{d^{m-3}} C^{m-2} \xrightarrow{d^{m-2}} C^{m-1} \to 0 \to 0 \ldots . \tag{5.58}$$

Существует точная последовательность

$$0 \to C^\bullet_{\geq m} \to C^\bullet \to C^\bullet_{<m} \to 0. \tag{5.59}$$

Таким образом, существует выделенный треугольник в $\mathbf{D}^b(Coh(X))$:

$$C^\bullet_{\geq m} \to C^\bullet \to C^\bullet_{<m} \to C^\bullet_{\geq m}[1], \tag{5.60}$$

где $C^\bullet_{\geq m}$ является совершенным комплексом. Пусть $P^\bullet = C^\bullet_{\geq m}$ и $\mathcal{F} = Imd^{m-1}$, тогда существует выделенный треугольник

$$P^\bullet \to C^\bullet \to \mathcal{F}[1-m] \to P^\bullet[1] \tag{5.61}$$

в $\mathbf{D}^b(Coh(X))$. $\square$

Для любого $\mathcal{O}_X$-комплекса $C^\bullet$ мы пишем $Perf_{\mathcal{O}_X}(C^\bullet)$ для локуса, где $C^\bullet$ является совершенным комплексом: $Perf_{\mathcal{O}_X}(C^\bullet) := \{x \in X|\mathcal{O}_{X,x}-$комплекс $C^\bullet_x$ является совершенным $\}$.

Лемма 5.6 *(Формула Ауслендера-Буксбаума) Если R является коммутативным нетеровым локальным кольцом, а M является ненулевым конечно порожденным R-модулем конечной проективной размерности, то*

$$pd_R(M) + depth(M) = depth(R). \tag{5.62}$$

Доказательство. См. [46], Теорема 4.4.15. $\square$

Лемма 5.7 *Пусть X является нетеровой схемой с $dim(X) = d$. Для любого $C^\bullet$ в $\mathbf{D}^b(Coh(X))$ подмножество $Perf_{\mathcal{O}_X}(C^\bullet)$ открыто.*

Доказательство. Пусть $s = sup\{i|H^i(C^\bullet) \neq 0\}, m = inf\{i|H^i(C^\bullet) \neq 0\}$ и пусть $\mathcal{F}$ является когерентным $\mathcal{O}_X$-пучком в Лемме 5.5. Для каждого $x \in X$ существует точный треугольник

$$P^\bullet_x \to C^\bullet_x \to \mathcal{F}_x[1-m] \to P^\bullet[1]_x \tag{5.63}$$

в $\mathbf{D}^b(mod(\mathcal{O}_{X,x}))$.

Совершенные комплексы образуют толстую подкатегорию в $\mathbf{D}^b(mod(\mathcal{O}_{X,x}))$. $\mathcal{O}_{X,x}$-комплекс $P^\bullet_x$ совершен, отсюда следует, что $C^\bullet_x$ совершен тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}_x$ совершен, тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}_x$ имеет конечную проективную размерность. По лемме 5.6, $\mathcal{F}_x$ имеет конечную проективную размерность тогда и только тогда, когда $pd(\mathcal{F}_x) \leq d$. По лемме 5.3 (6) подмножество $Perf_{\mathcal{O}_X}(C^\bullet)$ открыто в X. $\square$

5.4 Генераторы категорий особенностей

Пусть X — квазикомпактная квазисепарабельная нетерова схема. Совершенные комплексы образуют толстую подкатегорию $\mathfrak{Perf}(X)$ в $\mathbf{D}^b(coh(X))$. А. Бондал и М. Ван ден Берг показали в [7], что триангулированная категория совершенных комплексы $\mathfrak{Perf}(X)$ имеет классический генератор:

Предложение 5.8 *([7], Теорема 3.1.1.) Пусть X - квазикомпактная квазисепарабельная нетерова схема, тогда $\mathfrak{Perf}(X)$ имеет классический генератор.*

Предложение 5.9 *Пусть X - квазикомпактная квазисепарабельная нетерова схема, тогда полная подкатегория категории $coh(X)$ локально свободных пучков конечного ранга $Vect_X$ имеет классический генератор H.*

Доказательство. По предложению 5.8 это ясно. □

Категория особенностей нетеровой схемы X по определению является фактором Вердиера

$$\mathbf{D}_{sg}(X) = \frac{\mathbf{D}^b(coh(X))}{\mathfrak{Perf}(X)}. \tag{5.64}$$

Категория особенностей $\mathbf{D}_{sg}(X)$ является триангулированной категорией.

$\mathcal{O}_X$-комплекс равен нулю в $\mathbf{D}_{sg}(X)$ тогда и только тогда, когда он совершенен. Категория особенностей является мерой особенности X: $\mathbf{D}_{sg}(X) = 0$ тогда и только тогда, когда X является регулярным.

Пусть X — нетерова схема. **регулярный локус** $Reg(X)$ в X — это множество точек $x \in X$, таких что $\mathcal{O}_{X,x}$ является регулярным локальным кольцом. **Особый локус** $Sing(X)$ в X является дополнением X-$Reg(X)$, т.е., множеством точек $x \in X$, таких что $\mathcal{O}_{X,x}$ не является регулярным локальным кольцом. Мы говорим, что

- (1) X является J-0, если $Reg(X)$ содержит непустое открытое подмножество в X.
- (2) X является J-1, если $Reg(X)$ открыто в X.

Лемма 5.10 *Пусть X — нетерова схема. Предположим, что каждая целая замкнутая подсхема $Z \subset X$ является J-0. Тогда X является J-1.*

Доказательство. См. [43], Lemma 15.46.3. □

Лемма 5.11 *Пусть X — нетерова схема. Пусть $\mathcal{F}$ — когерентный пучок над X. Существует фильтрация когерентных пучков*

$$0 = \mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_m = \mathcal{F} \tag{5.65}$$

такая, что для каждого $j = 1, \ldots, m$ существует такая целая замкнутая подсхема подсхема $Z_j \subset X$ и такой пучок идеалов $\mathcal{I}_j \subset \mathcal{O}_{Z_j}$ что $\mathcal{F}_j/\mathcal{F}_{j-1} \cong (Z_j \to X)_* \mathcal{I}_j$.

Доказательство. См. [43], Lemma 29.12.3. □

Лемма 5.12 *Если $coh(Z)$ имеет классический генератор для каждой целой замкнутой подсхемы $Z \subset X$, то и $coh(X)$. Аналоги для ограниченной производной категории и категории особенностей также имеют место.*

Доказательство. Существует такая фильтрация пучков идеалов $0 = \mathcal{J}_0 \subset \mathcal{J}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{J}_n = \mathcal{O}_X$, что для каждого i мы имеем $\mathcal{J}_j/\mathcal{J}_{j-1} \cong (Z_j \to X)_* \mathcal{I}_j$, где $Z_j \subset X$ является замкнутой целой подсхемой и $\mathcal{I}_j \subset \mathcal{O}_{Z_j}$ — это пучок идеалов.

Для когерентного пучка $\mathcal{F}$ на X последовательность

$$0 = \mathcal{J}_0\mathcal{F} \subset \mathcal{J}_1\mathcal{F} \subset \ldots \subset \mathcal{J}_n\mathcal{F} = \mathcal{F} \tag{5.66}$$

$\mathcal{O}_X$-подпучков дает точные последовательности

$$0 \to \mathcal{J}_{i-1}\mathcal{F} \to \mathcal{J}_i\mathcal{F} \to \mathcal{F}_i \to 0 \tag{5.67}$$

$\mathcal{O}_X$-пучков, где $\mathcal{F}_i$ является $\mathcal{O}_{Z_i}$-пучком. Предположим, что для $1 \le i \le n$ существует $\mathcal{O}_{Z_i}$- пучок $\mathcal{G}_i$ который генерирует $coh(Z_i)$. Пусть

$$\mathcal{G} := \bigoplus_i (Z_j \to X)_* \mathcal{G}_i. \tag{5.68}$$

Используя приведенные выше точные последовательности, очевидный индуктивный аргумент дает то, что $\mathcal{G}$ является классическим генератором для $coh(X)$.

Аналогичный аргумент применим также в случае ограниченной производной категории и категории особенности. □

Предположим, что $X = U_1 \cup U_2$ с U_1, U_2 открытыми и положим $U_{12} = U_1 \cap U_2$. Пусть j_1, j_2 и j_{12}-включения U_1, U_2 и U_{12} в X. У нас есть короткая точная последовательность в $coh(X)$:

$$0 \to j_{12!}\mathcal{O}_{U_{12}} \to j_{1!}\mathcal{O}_{U_1} \oplus j_{2!}\mathcal{O}_{U_2} \to \mathcal{O}_X \to 0. \tag{5.69}$$

Если $\mathcal{F} \in coh(X)$, то мы получим точную последовательность

$$0 \to j_{12!}j_{12}^{-1}\mathcal{F} \to j_{1!}j_1^{-1}\mathcal{F} \oplus j_{2!}j_2^{-1}\mathcal{F} \to \mathcal{F} \to 0. \tag{5.70}$$

Предложение 5.13 *(Принцип сокращения) Пусть P — свойство, удовлетворяемое некоторыми схемами. Предположим дополнительно следующие.*

- *1. P верно для аффинных нетеровых схем.*
- *2. Если P верно для U_1, U_2, U_{12}, как указано выше, то оно верно для X.*

Тогда P выполняется для всех нетеровых схем.

Доказательство. См. [7], Lemma 3.3.1. □

Теперь приведем основную теорему этой главы.

Теорема 5.14 *Следующие условия эквивалентны для нетеровой схемы X:*

- *(1) $Reg(Z)$ содержит непустое открытое подмножество для каждой целой замкнутой подсхемы $Z \subset X$.*
- *(2) $Reg(Z)$ открыто для каждой целой замкнутой подсхемы $Z \subset X$.*
- *(3) Абелева категория $coh(Z)$ имеет классический генератор для каждой целой замкнутой подсхемы $Z \subset X$.*

- *(4) Триангулированная категория $\mathbf{D}^b(Coh(Z))$ имеет классический генератор для каждой целой замкнутой подсхемы $Z \subset X$.*

- *(5) Триангулированная категория $\mathbf{D}_{sg}(Z)$ имеет классический генератор для каждой целой замкнутой подсхемы $Z \subset X$.*

Когда они выполняются, абелева категория $coh(X)$ и триангулированные категории $\mathbf{D}^b(coh(X))$, $\mathbf{D}_{sg}(X)$ имеют классические генераторы.

Доказательство. (5) $\Rightarrow$ (2) Если $\mathcal{O}_X$-комплекс $G^\bullet$ генерирует $\mathbf{D}^b_{sg}(X)$, то $\mathcal{O}_{X,x}$-комплекс $G^\bullet_x$ генерирует $\mathbf{D}^b_{sg}(\mathcal{O}_{X,x})$ для любого $x \in X$. Это означает, что $\mathbf{D}^b_{sg}(\mathcal{O}_{X,x}) = 0$ тогда и только тогда, когда $G^\bullet_x = 0$ в $\mathbf{D}^b_{sg}(\mathcal{O}_{X,x})$, то есть, тогда и только тогда, когда $\mathcal{O}_{X,x}$-комплекс $G^\bullet_x$ совершен. Так как $\mathbf{D}^b_{sg}(\mathcal{O}_{X,x}) = 0$ выполняется именно тогда, когда $\mathcal{O}_{X,x}$ является регулярным, следует равенство $Reg(X) = Perf_{\mathcal{O}_X}(G^\bullet)$. По лемме 5.7, $Reg(X)$ открыто в X.

(3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (5), (2) $\Rightarrow$ (1) ясны.

(1) $\Rightarrow$ (3). По лемме 5.10, X является J-1. Предположим, что (3) не имеет места, и пусть Z - минимальный элемент относительно включения со свойством, что $coh(Z)$ не имеет классического генератора.

Заменив X на Z, мы можем тогда предположить, что $coh(X)$ не имеет классического генератора, но $coh(Z)$ имеет классический генератор для каждой целой замкнутой подсхемы $Z \subset X$.

По точной последовательности (5.70) и по предложению 5.13 нам нужно только доказать следующий факт:

Пусть A - нетерова область, $Reg(A/\mathfrak{p})$ содержит непустое открытое подмножество для каждого $\mathfrak{p} \in Spec(A)$ и абелева категория $mod(A/\mathfrak{p})$ имеет классический генератор для каждого $0 \neq \mathfrak{p} \in Spec(A)$, тогда абелева категория $mod(A)$ имеет классический генератор.

A является J-1, поэтому $U = Reg(A)$ открыто в $Spec(A)$. Если A регулярно, то H в Замечании 5.8 будет классическим генератором для $mod(A)$. Таким образом, мы можем предположить, что $U \neq Spec(A)$. Пусть $Spec(S^{-1}A) \subset U$ - открытое множество, где $S = \{1, h, h^2, \dots\}$. Лемма 5.12 следует что $mod(A/(h))$ имеет классический генератор, скажем, G. Покажем, что $A \oplus G$ порождает $mod(A)$.

Пусть M - конечно порожденный A-модуль, и пусть $m = 2 + pd_{S^{-1}A}(S^{-1}M)$. У нас есть точная последовательность

$$0 \to P_m \xrightarrow{d_m} P_{m-1} \xrightarrow{d_{m-1}} P_{m-2} \xrightarrow{d_{m-2}} \dots \xrightarrow{d_1} P_0 \to M \to 0, \qquad (5.71)$$

где $P_1, P_2, \dots P_{m-1}$ локально свободны. Пусть $H_i = Im(d_i)$, тогда существуют точные последовательности

$$0 \to P_m \to P_{m-1} \to H_{m-1} \to 0, \qquad (5.72)$$

$$0 \to H_{m-1} \to P_{m-2} \to H_{m-2} \to 0 \qquad (5.73)$$

$$\dots$$

$$0 \to H_1 \to P_0 \to M \to 0. \qquad (5.74)$$

Так как $m = 2 + pd_{S^{-1}A}(S^{-1}M)$, то есть

$$Ext^1_{S^{-1}A}(S^{-1}H_{m-1}, S^{-1}P_m) = 0. \qquad (5.75)$$

Следовательно, для целого числа $p \in \mathbb{Z}$

$$h^p Ext^1_A(H_{m-1}, P_m) = 0. \tag{5.76}$$

Рассмотрим коммутативную диаграмму с точными строками:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & P_m \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & H_{m-1} \arrow[r] \arrow[d, "h^p"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_m \arrow[r] & P_{m-1} \arrow[r] & H_{m-1} \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

где X является расслоенным произведением. Поскольку $h^p Ext^1_A(H_{m-1}, P_m) = 0$, верхняя последовательность расщепляется, так что

$$X \cong H_{m-1} \oplus P_m. \tag{5.77}$$

Поскольку A является областью, а H_{m-1} не имеет кручения, то $H_{m-1} \xrightarrow{h^p} H_{m-1}$ является мономорфизмом, и существуют точные последовательности:

$$0 \to H_{m-1} \to H_{m-1} \to \frac{H_{m-1}}{h^p H_{m-1}} \to 0, \tag{5.78}$$

$$0 \to X \to P_{m-1} \to \frac{H_{m-1}}{h^p H_{m-1}} \to 0, \tag{5.79}$$

Следовательно,$A \oplus G$ генерирует $X \cong P_m \oplus H_{m-1}$ как A-модули, поэтому $A \oplus G$ генерирует H_{m-1}, поэтому $A \oplus G$ генерирует H_{m-2} , $\cdots$, поэтому $A \oplus G$ генерирует H_1 , поэтому $A \oplus G$ генерирует M. $\square$

6 Заключение

В диссертации были найдены градуированные аналоги некоторых классических теорем, рассмотрены категории особенностей схем. Основные результаты исследования:

- Доказано, что каждый градуированный инъективный модуль над gr-нетеровым кольцом имеет неразложимое разложение.
- Доказано, что каждый конечнопорожденный градуированный проективный модуль над gr-артиновым кольцом является конечной прямой суммой неразложимых gr-проективный модулей.
- Найдена формула для выражения градуированных чисел Басса с помощью функтора Ext для градуированных модулей.
- Доказано, что левый точный радикальный функтор F имеет вид Γ_V для замкнутого по специализации подмножества V.
- Доказано, что если схема является горенштейновой, нетеровой, отделимой, с конечной размерностью Крулля и категория когерентных пучков содержит достаточно много локально свободных пучков, тогда ее категория особенностей триангулированно эквивалентна стабильной категории максимальных пучков Коэна-Маколея.
- Получено необходимое и достаточное условие, чтобы категория особенностей нетеровой схемы имела классический генератор.

Список литературы

[1] T. Aihara and R. Takahashi. Generators and dimensions of derived categories of modules. *Communications in Algebra*, 43(11):5003–5029, 2015.

[2] D. D. Anderson and D. F. Anderson. Divisibility properties of graded domains. *Canadian Journal of Mathematics*, 34(1):196–215, 1982.

[3] F. W. Anderson and K. R. Fuller. *Rings and Categories of Modules*. Springer Science & Business Media, 2012.

[4] M. F. Atiyah and I. G. MacDonald. *Introduction to commutative algebra*. Westview Press, 2018.

[5] A. A. Beilinson, J. Bernstein, and P. Deligne. *Faisceaux pervers. Analysis and topology on singular spaces, I*, volume 100. Soc. Math. France, 1982.

[6] J. Bell and J. Zhang. An isomorphism lemma for graded rings. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 145(3):989–994, 2017.

[7] A. Bondal and M. Van den Bergh. Generators and Representability of Functors in Commutative and Noncommutative Geometry. *Moscow Mathematical Journal*, 3(1):1–36, 2003.

[8] Ragnar-Olaf Buchweitz. Maximal Cohen-Macaulay modules and Tate-cohomology over Gorenstein rings. *Unpublished manuscript*, 1987.

[9] J. Chen and Y. Kim. Graded-irreducible modules are irreducible. *Communications in Algebra*, 45(5):1907–1913, 2017.

[10] S. E. Dickson. A torsion theory for abelian categories. *Transactions of the American Mathematical Society*, 121(1):223–235, 1966.

[11] D. Eisenbud. *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*. Springer-Verlag, 1995.

[12] Yves Félix, Stephen Halperin, and Jean Claude Thomas. Gorenstein spaces. *Advances in Mathematics*, 71(1):92—112, 1988.

[13] H. B. Foxby. Bounded complexes of flat modules. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 15(2):149–172, 1979.

[14] P. J. Freyd. *Abelian categories*. Harper & Row; International edition, 1964.

[15] P. Gabriel. Des categories abeliennes. *Bulletin de la Societe Mathematique de France*, 90:323–448, 1962.

[16] Sergei I. Gelfand and Yuri I. Manin. *Methods of Homological Algebra*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1996.

[17] O. Goldman. Rings and modules of quotients. *Journal of Algebra*, 13(1):10–47, 1969.

[18] S. Goto and K. Yamagishi. Finite generation of Noetherian graded rings. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 89(1):41–44, 1983.

[19] D Happel. *Triangulated categories in the representation of finite dimensional algebras*. Cambridge University Press, 2010.

[20] Dieter Happel. On Gorenstein Algebras. In *Representation Theory of Finite Groups and Finite-Dimensional Algebras*, pages 389–404. Springer, 1991.

[21] W. Heinzer and M. Roitman. The homogeneous spectrum of a graded commutative ring. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 130(6):1573–1580, 2001.

[22] M. Hochster. Local cohomology. *unpublished notes*, 2011.

[23] Srikanth B Iyengar and R. Takahashi. Annihilation of cohomology and strong generation of module categories. *International Mathematics Research Notices*, 2016(2):499–535, 2015.

[24] Srikanth B. Iyengar and R. Takahashi. Openness of the Regular Locus and Generators for Module Categories. *Acta Mathematica Vietnamica*, 44(1):207–212, 2019.

[25] H. Krause. The stable derived category of a Noetherian scheme. *Compositio Mathematica*, 141(5):1128, 2005.

[26] J. Lamber. *Torsion theories, additive semantics, and rings of quotients*, volume 117. Springer, Berlin, Heidelberg, 2006.

[27] S. MacLane. Natural associativity and commutativity. *Rice University Studies*, 49(4):28–46, 1963.

[28] J. M. Maranda. Injective structures. *Transactions of the American Mathematical Society*, 110(1):98–135, 1964.

[29] J. Miyachi. Localization of triangulated categories and derived categories. *Journal of Algebra*, 141(2):463–483, 1991.

[30] C. Nastasescu and F. Van Oystaeyen. *Methods of Graded Rings*. Springer, 2004.

[31] C. Nastasescu and F. Van Oystaeyen. *Graded Ring Theory*. Elsevier, 2011.

[32] A. Neeman. *Triangulated Categories.(AM-148)*, volume 148. Princeton University Press, 2014.

[33] D. Orlov. Derived categories of coherent sheaves and triangulated categories of singularities. In *Algebra, arithmetic, and geometry*, pages 503–531. Birkhäuser Boston, 2009.

[34] D. Orlov. Remarks on Generators and Dimensions of Triangulated Categories. *Moscow Mathematical Journal*, 9(1):143–149, 2009.

[35] Dmitri Orlov. Triangulated categories of singularities and D-branes in Landau-Ginzburg models. *arXiv preprint math/0302304*, 2003.

[36] Dmitri O Orlov. Triangulated categories of singularities and equivalences between Landau-Ginzburg models. *Sbornik: Mathematics*, 197(12):1827, 2006.

[37] C. Park and M. Park. Integral closure of a graded Noetherian domain. *Journal of the Korean Mathematical Society*, 48(3):449–464, 2011.

[38] N. Popescu. *Abelian categories with applications to rings and modules*, volume 3. Academic Press London, 1973.

[39] L. J. Ratliff and D. E. Rush. Two notes on homogeneous prime ideals in graded Noetherian rings. *Journal of Algebra*, 264(1):211–230, 2003.

[40] J. Rotman. *An Introduction to Homological Algebra.* Springer, 1988.

[41] D. E. Rush. Noetherian properties in monoid rings. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 185(1–3):259–278, 2003.

[42] L. A. Tarrío, A. J. López, and M. J. S. Salorio. Localization in categories of complexes and unbounded resolutions. *Canadian Journal of Mathematics*, 52(1):225–247, 2000.

[43] The Stacks Project Authors. Stacks Project.

[44] Robert W Thomason and Thomas Trobaugh. *Higher algebraic K-theory of schemes and of derived categories.* Springer, 1990.

[45] J. Verdier. *Des Catégories Dérivées des Catégories Abéliennes.* Paris: Société Mathématique de France, 239, 1996.

[46] C. A. Weibel. *An Introduction to Homological Algebra.* Cambridge University Press, 2013.

[47] Y. Yoshino and T. Yoshizawa. Abstract local cohomology functors. *Mathematical Journal of Okayama University*, 53:129–154, 2011.

[48] P. Zhang. *Triangulated category and derived categories.* Science Press, 2015.

[49] И. Н. Балаба. Кольца частных градуированных ассоциативных колец. I. *Фундаментальная и прикладная математика*, 17(2):3–74, 2012.

Список публикаций автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности

[50] Li Lu, “Triangle equivalences and Gorenstein schemes”, International Journal of Mathematics and Computer Science, Volume 15, No. 1, p. 301-307. Журнал индексируется в Web of Science/ Scopus. Импакт-фактор 0.7 (Scopus)

[51] Li Lu, "*Gr*-injective modules and *gr*-projective modules over *G*-graded commutative rings Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI, Volume 478, p. 172-193. Журнал индексируется в Web of Science/ Scopus. Импакт-фактор 0.300 (Scopus)

[52] Li Lu, “Structural theorem for *gr*-injective modules over *gr*-noetherian *G*-graded commutative ring and local cohomology functors”, Proceedings of the Institute of Mathematics and Informatics at Udmurt State University, Volume 53, p. 127-137. Журнал индексируется в Web of Science/ Scopus. Импакт-фактор 0.1 (Scopus)