# Эволюция границ раздела двух сред в задачах нелинейной фильтрации

А. А. Горинов[1,*] А. Г. Кушнер[2†]
[1] *ИПУ имени В. А. Трапезникова РАН Россия, 117997, Москва, ул. Профсоюзная, д. 65*
[2] *Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, физический факультет, физико–математических методов управления Россия, 119991, Москва, Ленинские горы, д. 1, стр. 2*
(Статья поступила 25.04.2016; Подписана в печать 05.05.2016)

Для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений, описывающей процесс нелинейной фильтрации, предложен геометрический метод построения решений задачи Коши.

PACS: 02.20.-a УДК: 517.955
Ключевые слова: нелинейная фильтрация, закон Дарси, модель Бакли-Леверетта, характеристические распределения.

При моделировании процесса добычи нефти и газа путем вытеснения их водой, возникает проблема управления границей раздела двух сред.

Процесс распространения нефти и воды описывается уравнением Бакли–Леверетта

$$ms_t + UF'(s)\,s_x = 0.$$

Здесь $s$ — относительная заполненность пор среды раствором, или водонасыщенность, $t$ — время, $x$ — пространственная координата, $m$ — коэффициент пористости среды, $U$ — скорость фильтрации, $F(s)$ — функция Баклея–Леверетта, имеющая вид

$$F(s) = \frac{f_w(s)}{f_w(s) + \frac{\mu_w}{\mu_o} f_o(s)},$$

где $f_w(s)$ и $f_o(s)$ — проницаемости раствора и нефти, $\mu_w$ и $\mu_o$ — динамические вязкости.

По закону Дарси $U = -\kappa h(s)\,q$, где $\kappa$ — коэффициент фильтрации, $q = p_x(t,x)$ — градиент давления,

$$h(s) = \frac{f_w(s)}{\mu_w} + \frac{f_o(s)}{\mu_o}.$$

Условие несжимаемости фракций приводит к тому, что суммарная скорость фильтрации не зависит от координаты, что приводит к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка относительно водонасыщенности и градиента давления ([1]):

$$\begin{cases} s_t + A(s)\,B(s)\,q s_x = 0, \\ B'(s) q s_x + B(s)\,q_x = 0, \end{cases}$$

где $A(s) = \frac{\kappa}{m} F'(s)$, $B(s) = h(s)$.

Эту систему мы будем называть системой Бакли–Леверетта. Для построения решения воспользуемся методом «ручного» интегрирования [2], состоящим в том, что для данной системы можно построить аналог характеристического векторного поля, вдоль которого сдвигается кривая начальных данных.

Системе отвечают две дифференциальные 2-формы $\omega_1$, $\omega_2$ на пространстве $\mathbb{R}^4$ с координатами $t, x, s, q$ таким образом, что нелинейные дифференциальные операторы $\nabla_{\omega_1}(\mathrm{s},\ \mathrm{q}) = \omega_1|_\Gamma$ и $\nabla_{\omega_2}(\mathrm{s},\ \mathrm{q}) = \omega_2|_\Gamma$, равные ограничению форм на решение задачи $\Gamma = \{s = s(t,x), q = q(t,x)\}$, совпадают с левыми частями исходной системы Бакли–Леверетта:

$$\begin{cases} \omega_1 = A(s)\,B(s)\,q\ dt \bigwedge ds + dx \bigwedge ds, \\ \omega_2 = B_s(s)\,q\ dt \bigwedge ds + B(s)\,dt \bigwedge dq. \end{cases}$$

Вместо 2-форм $\omega_1$ и $\omega_2$ мы можем рассматривать их линейные комбинации $\Omega_1$ и $\Omega_2$, удовлетворяющие следующим условиям ортогональности и нормировки: $\Omega_1 \bigwedge \Omega_2 = 0$, $\Omega_1 \bigwedge \Omega_1 + \Omega_2 \bigwedge \Omega_2 = 0$.

Далее построим поле линейных операторов $A_E$ на $\mathbb{R}^4$, определяемое равенством $X \rfloor \Omega_2 = A_E X \rfloor \Omega_1$, здесь $\rfloor$ — оператор внутреннего умножения, $X$ — произвольное векторное поле в пространстве $\mathbb{R}^4$.

В базисе $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial s}$, $\frac{\partial}{\partial q}$ поле линейных операторов $A_E$ имеет вид

$$A_E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2A(s)\,B(s)\,q & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2\frac{B_s(s)}{B(s)}q & -1 \end{pmatrix}.$$

Квадрат этой матрицы скалярен и равен $A_E^2 = 1$, а это значит, что система уравнений является системой гиперболического типа.

Собственные подпространства оператора $A_E$ порождают два двумерных характеристических распределения:

$$V_+ = Lin\left\langle X_+ = \frac{\partial}{\partial q} - \frac{B(s)}{B_s(s)\,q}\frac{\partial}{\partial s},\ Y_+ = \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle$$

и

$$V_- = Lin\left\langle X_- = \frac{\partial}{\partial q},\ Y_- = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{A(s)\,B(s) q}\frac{\partial}{\partial t} \right\rangle.$$

Распределение $V_+$ вполне интегрируемо и имеет два интеграла $H_1 = t$, $H_2 = B(s)\,q$. Их ограничения на

*E-mail: antong@t-human.com
†E-mail: kushner@physics.msu.ru

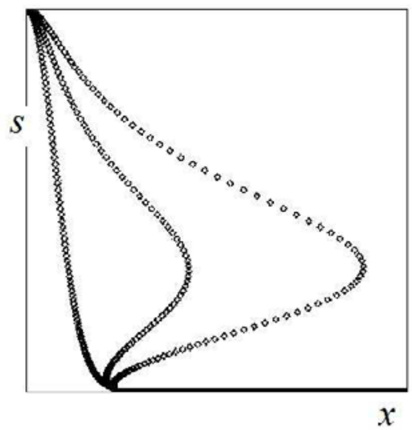


Рис. 1: Эволюция водонасыщенности

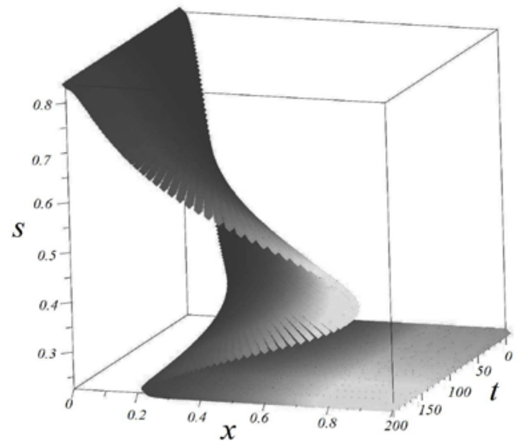


Рис. 2: Компонента водонасыщенности многозначного решения системы Бакли–Леверетта

граничные условия $\Gamma = \left( s|_{x=0} = S\left(t\right), \quad q|_{x=0} = Q\left(t\right)\right)$ принимают следующий вид

$$H_1|_{\Gamma} = t, \quad H_2|_{\Gamma} = f\left(t\right) = B\left(S\left(t\right)\right) Q\left(t\right).$$

$$F\left(\alpha, \beta\right) = \beta - f\left(\alpha\right), \qquad F\left(H_1,\ H_2\right) = H_2 - f\left(H_1\right).$$

Положим $H = F\left(H_1, H_2\right) = H_2 - f\left(H_1\right) = B\left(s\right) q - f(t)$. Тогда кривая $\Gamma$ лежит на решении $M_0$ исходной системы, если $H = 0$. Найдем одномерное распределение $l_- = V_- \bigcap T M_0$, задающее кривую, лежащую на решении системы. Для этого должно выполняться условие $Z\left(H\right) = 0$, где $Z$ — векторное поле из распределения $l_-$, определенное с точностью до умножения на функцию:

$$Z = \frac{\partial}{\partial t} - A\left(s\right) B\left(s\right) q \frac{\partial}{\partial x} + \frac{f_t(t)}{B(s)} \frac{\partial}{\partial q}.$$

Будем считать, что водонасыщенность на нагнетающей скважине постоянна и равна максимальной $S\left(t\right) = S_{max}$, давление поддерживается постоянным, а градиент давления задается функцией $Q(t)$. Тогда график решения системы Бакли–Леверетта получается сдвигом кривой начальных данных $K = \{t = 0, s = S_K(x), q = Q_K(x)\}$ вдоль траекторий векторного поля $Z$.

Таким образом, получен алгоритм построения многозначных численных решений для системы уравнений Баклея–Леверетта. Сечения графиков решений функции водонасыщенности $s$ для различных значений времени приведены на рис. 1. Горизонтальная ось отвечает переменной $x$, а вертикальная — функции водонасыщенности $s$. График многозначний функции $s = s(t, x)$ представлен на рис. 2.

Так как функция зависимости водонасыщенности от пространственной координаты неоднозначна, то возникает разрыв, характеристики которого находятся по правилу Максвелла (рис. 3), согласно которому разрыв многозначного решения происходит в тех точках оси $x$, в которых площади заштрихованных областей равны.

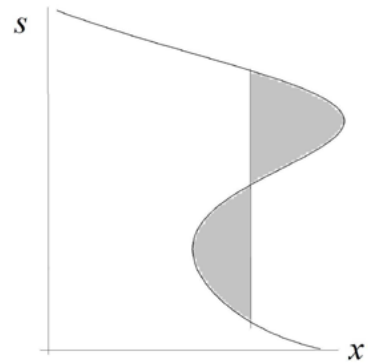


Рис. 3: Правило Максвелла

Исследования поддержаны грантом Российского научного фонда (проект 15–19–00275).

[1] *Ахметзянов А.В., Кушнер А.Г., Лычагин В.В.* ДАН. Математика. **469**, № 2. С. 1. (2016).
[2] *Kushner, A.G. Lychagin V.V., Rubtsov V.N.* Contact geometry and nonlinear differential equations. Encyclopedia of Mathematics and Its. **101**. (Cambridge: Cambridge University Press. 2007).

# Evolution of borders between two medias in nonlinear filtering models

**A. A. Gorinov**[a], **A.G. Kushner**[b]

*Department of Applied Mathematics, Faculty of Physics,*
*M.V.Lomonosov Moscow State University, Moscow 119991, Russia*
*E-mail:* [a]*antong@t-human.com,* [b]*kushner@physics.msu.ru*

For a system of two nonlinear differential equations describing the nonlinear filtering, a geometric method of solving the Cauchy problem was constructed.

PACS: 02.30.Jr
Keywords: nonlinear filtering, Darcy's law, the Buckley–Leverett model, the characteristic distributions.
Received 25.04.2016.

**Сведения об авторах**

1. Горинов Антон Андреевич — математик лаборатории №6 «Проблем качественного исследования нелинейных динамических систем» ИПИ имени В. А. Трапезникова РАН; тел. (495) 334–89–61, e-mail: antong@t-human.com.
2. Кушнер Алексей Гурьевич — докт. физ.-мат. наук, профессор кафедры физико-математических методов управления Физического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова; тел. (495) 334–89–61, e-mail: kushner@physics.msu.ru.