А.Я. Канель-Белов. Теорема Рамсея и нестандартный анализ. (9-10)

Пусть заданы множество V и E — набор некоторых пар элементов множества V . Тогда пара (V, E) называется *графом*, V называется множеством *вершин* графа, E — множеством его *рёбер*. Аналогично, если E_k — это некоторый набор k -элементных подмножеств V , то пара (V, E_k) называется *мультиграфом* или *k -графом*. E_k называется множеством его *мультирёбер*. *Полным* называется k -граф, в котором присутствуют все возможные мультирёбра (то есть E_k состоит из всех возможных k -подмножеств множества V). Отметим, что граф и 2-граф, по определению, одно и то же. Широко известна следующая

Задача: *рёбра полного графа с L вершинами раскрашены в n цветов. Доказать, что при достаточно больших L можно выбрать полный одноцветный подграф, содержащий более 100 вершин.*

Обобщением этой задачи на случай мультиграфов является

Теорема Рамсея. *Пусть мультирёбра полного k -графа с L вершинами раскрашены в n цветов. Тогда для любого числа M , при достаточно большом L , из графа можно выбрать полный одноцветный k -подграф, содержащий не менее M вершин.*

Однако сам Рамсей доказал свою теорему для бесконечных множеств.

Бесконечная теорема Рамсея (БТР). *Пусть мультирёбра полного бесконечного k -графа раскрашены в n цветов. Тогда существует его бесконечный полный подграф, в котором все k -рёбра имеют один и тот же цвет.*

Доказательство. Докажем сначала для $k = 2$, то есть для обычного графа, в котором ребро соединяет 2 вершины. Определим следующую последовательность вершин графа, цветов и подграфов. Сначала выбираем произвольную вершину $a_0 \in V$. Из неё выходит бесконечное число рёбер к остальным вершинам графа. Среди них найдётся бесконечно много рёбер одного цвета, обозначим этот цвет через c_0 , а (бесконечное) множество конечных вершин этих рёбер — через V_1 . Таким образом, $V_1 \subset V_0 = V$, и вершина a_0 с вершинами из V_1 связана только рёбрами цвета c_0 . Затем выбираем произвольную вершину $a_1 \in V_1$. Из неё в сторону остальных вершин V_1 исходит бесконечное число рёбер, среди них — бесконечное число рёбер одного цвета, который обозначим через c_1 . Соответствующее (бесконечное) множество конечных вершин этих рёбер обозначим через V_2 . Таким образом, $V_2 \subset V_1 \subset V_0$, и вершина a_1 с вершинами из V_2 связана только рёбрами цвета c_1 . Затем выбираем произвольную вершину $a_2 \in V_2$, и так далее.

В итоге получили последовательность вершин $\{a_i\}$, последовательность цветов $\{c_i\}$ и последовательность вложенных подмножеств $V = V_0 \supset V_1 \supset V_2 \dots$. Причём каждая вершина $a_i \in V_{i-1} \setminus V_i$. В последовательности цветов всего n различных элементов, значит есть цвет, который встречается бесконечно много раз. Обозначим его c , тогда $c = c_{i_1} = c_{i_2} = \dots$. Множество соответствующих им вершин обозначим за $H = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \dots\}$. Тогда по построению имеем, что все рёбра внутри этого подграфа имеют цвет c , тем самым мы предъявили полный одноцветный подграф с бесконечным количеством вершин. Случай $k = 2$ доказан.

Задачу для k -графа естественно решать индукцией по k . Случай $k = 1$ равносильен тому, что если бесконечное множество разбито на n подмножеств, то по крайней мере одно из них также бесконечно, что очевидно.

Базой индукции будет случай $k = 2$, доказанный выше.

Предположение индукции: если Бесконечная теорема Рамсея верна для $k = l$, то верна и для $k = l + 1$.

Переход индукции: пусть имеется произвольная вершина графа p и не содержащее её бесконечное подмножество $M \subset V$. Докажем, что можно выбрать бесконечное подмножество $M_1 \subset M$ такое, что все $(l + 1)$ -рёбра вида $\{p, p_1, \dots, p_l\}$ одноцветны (тут p — изначальная, а

⁰Материал системы дистанционного обучения математике <http://math.olymp.mioo.ru>

$p_1, p_2, \dots, p_l \in M_1$). Рассмотрим l -граф с множеством вершин M . Каждое его l -ребро $\{p_1, \dots, p_l\}$ покрасим в тот же цвет, в который было покрашено $(l+1)$ -ребро $\{p, p_1, \dots, p_l\}$ изначального графа. Тогда получим бесконечный полный l -граф, раскрашенный в n цветов. По предположению индукции, в нём содержится бесконечный полный одноцветный l -подграф на множестве вершин N . Но тогда в исходном $(l+1)$ -графе все рёбра вида $\{p, p_1, \dots, p_l\}$, где $p_1, p_2, \dots, p_l \in N$ имеют тот же цвет. Значит можем принять $M_1 := N$. Что и требовалось.

Теперь мы можем построить аналогичную последовательность вершин графа, цветов и подмножеств, что и в случае $k = 2$. Именно: сначала выбираем произвольную вершину $a_0 \in V$. Применим для этой вершины и подмножества $V \setminus \{a_0\}$ только что доказанное утверждение. Получаем подмножество V_1 , в которое из a_0 входят $(l+1)$ -рёбра одного цвета, который мы обозначим через c_0 . Аналогично выбираем вершину $a_1 \in V_1$, строим по ней подмножество V_2 и цвет c_1 и так далее, следуя уже проведённому доказательству. В итоге, аналогично выбираем бесконечный полный $(l+1)$ -подграф. Что и требовалось. Переход индукции доказан, а с ней и Бесконечная теорема Рамсея.

Более того, известна также Усиленная теорема Рамсея. Если сама Теорема Рамсея доказывается конструктивно, то усиленная теорема так уже недоказуема. Пусть все вершины графа занумерованы натуральными числами подряд, начиная с 1. Назовём k -подграф *дисперсным*, если он полный, и количество его элементов больше номера минимальной вершины. У дисперсности можно указать 2 полезных свойства:

а) Если множества H_1, H_2 таковы, что $H_1 \subset H_2$, а H_1 дисперсно, то и H_2 также дисперсно.

б) Если множество H бесконечно и занумеровано натуральными числами (не обязательно подряд), то в нём можно выбрать сколь угодно большое дисперсное подмножество.

Замечание. Можно также определить Φ -дисперсность — когда количество элементов больше Φ и номера минимальной вершины. Однако от этого рассуждения нигде не изменятся. Кроме того, для Φ -дисперсности верны те же два свойства.

Замечание. Дисперсность была введена для того, чтобы при стремлении L к бесконечности номер k -ой вершины одноцветного подграфа к бесконечности не стремился.

Усиленная теорема Рамсея (УТР). Пусть мультирёбра полного k -графа с L вершинами раскрашены в n цветов. Тогда для любого числа M , при достаточно большом L , из графа можно выбрать **дисперсный** одноцветный k -подграф, содержащий не менее M вершин.

Замечание. Усиленная теорема Рамсея невыводима из системы аксиом Пеано. Это означает, что доказать УТР финитными (конечными) средствами нельзя, так как её доказательство принципиально неконструктивно и не даёт никаких оценок.

Доказательство. Вместо множеств будем рассматривать номера элементов этих множеств. Для множества $[1, k]$ существует всего n различных раскрасок единственного k -ребра. Далее, для любой раскраски отрезка натурального ряда $[1, N]$ существует всего конечное количество продолжений этой раскраски на отрезок $[1, N+1]$ (потому что надо докрасить лишь те k -рёбра, которые появятся с добавлением вершины $(N+1)$, а таких рёбер конечное количество).

Рассмотрим новый граф D — дерево раскрасок k -рёбер в n цветов. Его вершины будут поделены на уровни $(k-1), k, (k+1), \dots$. На $(k-1)$ -ом, условном, уровне будет одна вершина. Она нужна нам только для удобства, назовём её корнем дерева. При $l > k-1$ на l -ом уровне расположены вершины, соответствующие всевозможным раскраскам k -рёбер множества $[1, l]$ в n цветов. Все k вершин k -ого уровня соединим с корнем. Рассмотрим произвольную вершину a l -го уровня ($l > k$). Она соответствует некоторой раскраске множества $[1, l]$. Но если из этого множества удалить вершину l , то останется множество $[1, l-1]$ с уже заданной раскраской оставшихся k -рёбер. Этой раскраске соответствует некоторая вершина b уровня $(l-1)$. Соединим в графе D все пары вершин ab , которые получаются одна из другой при помощи такой редукции. В результате мы получим дерево, степень каждой вершины которого будет конечна.

Назовём вершину графа G *хорошей*, если в соответствующем ей раскрашенном k -графе найдётся дисперсный одноцветный подграф, содержащий не менее M вершин. Из первого свойства дисперсности следует, что любому продолжению раскраски этого подграфа (при добавлении новых вершин) также соответствует вершина, которая является хорошей. Но отсюда следует равносильность Усиленной теоремы Рамсея тому, что в графе G *не хорошие*, то есть *плохие* вершины содержатся лишь на конечном количестве уровней. А это равносильно тому, что вообще плохих вершин конечное количество, так как степень каждой вершины конечна.

Предположим противное, то есть, что G содержит бесконечно много плохих вершин. Тут мы воспользуемся леммой Кёнига, которую читатель может доказать самостоятельно.

Лемма Кёнига. *Если дерево содержит бесконечно много вершин, степень каждой из которых конечна, то в нём имеется бесконечная ветвь (то есть бесконечная цепочка рёбер).*³

Из леммы следует, что в графе G найдётся бесконечная ветвь, которая содержит лишь плохие вершины. Эта ветвь задаёт некоторую раскраску ряда натуральных чисел в n цветов, так как все раскраски этой ветви согласованы. Но к раскраске натурального ряда можно применить Бесконечную теорему Рамсея. Мы получим некоторое бесконечное одноцветное подмножество H натурального ряда. По свойству 2 дисперсности, из бесконечного подмножества H можно выбрать дисперсное подмножество, содержащее более M элементов. Пусть номер максимального из них равен T . Но тогда множество $[1, T]$ уже содержало одноцветное дисперсное подмножество, содержащее более M элементов. Значит в графе G ему соответствовала хорошая вершина. Но с другой стороны, эта вершина принадлежала бесконечной плохой ветви, то есть была плохой. Получили противоречие с определением хорошей вершины. Тем самым доказана Усиленная теорема Рамсея.

1. Все рёбра полного графа с N вершинами раскрасили в M цветов. Докажите, что найдётся полный подграф с k вершинами, все рёбра которого покрашены в один цвет, при условии, если M и k заданы, а N достаточно большое.

2. Все последовательности, состоящие из 0 и 1 разбиты на два непересекающихся класса: "синие" и "красные". Доказать, что любую бесконечную последовательность из 0 и 1 можно, выкинув несколько первых членов, разбить на куски так, чтобы соседи имели один цвет.

3. Из любой бесконечной последовательности целых чисел можно выбрать подпоследовательность так, чтобы каждый её член делился на предыдущий, или чтобы никто ни на кого не делился.

Решения и указания.

Зачётные задачи: 1, любая одна из задач 2 и 3.

³Мы разрешаем пользоваться леммой без доказательства