

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Шамин Александр Юрьевич

**Динамика саней Чаплыгина на горизонтальной
плоскости с трением**

Специальность 01.02.01 — теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2020

Работа выполнена на кафедре теоретической механики и мехатроники
механико-математического факультета Московского государственного
университета имени М.В. Ломоносова

Научные руководители: Александр Владиленович Карапетян,
доктор физико-математических наук,
профессор.

Владимир Евгеньевич Павловский,
доктор физико-математических наук,
профессор.

Официальные оппоненты: Борис Сабирович Бардин, профессор РАН
доктор физико-математических наук
заведующий кафедрой
мехатроники и теоретической механики
Московского авиационного института.

Александр Павлович Иванов, профессор
доктор физико-математических наук
профессор кафедры теоретической механики
Московского физико-технического института.

Александр Сумбатович Сумбатов,
старший научный сотрудник
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник
Вычислительный центр им. А.А. Дородницына
ФИЦ «Информатика и управление» РАН.

Защита диссертации состоится 4 сентября 2020 г. в 16 часов 00 минут на
заседании диссертационного совета МГУ.01.10 Московского государственного
университета имени М.В. Ломоносова, по адресу: 119991, Москва, Ленин-
ские горы, д.1, Главное здание МГУ, механико-математический факультет,
аудитория 16-24.

E-mail: dissovet.msu.01.10@math.msu.ru

С диссертацией, а также со сведениями о регистрации участия в удаленном
интерактивном режиме в защите можно ознакомиться на сайте ИАС «ИС-
ТИНА»: <https://istina.msu.ru/dissertations/301684751/>

Автореферат разослан 29 июня 2020 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета МГУ.01.10
кандидат физико-математических наук

А.А. Зобова

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Работа посвящена изучению динамики саней Чаплыгина – платформы, движущейся по плоскости с опорой на три точки так, что скорость одной из ее точек опоры имеет фиксированное направление относительно платформы. Динамика этой системы в исходной постановке была исследована С.А. Чаплыгиным. Он использовал эту механическую систему в качестве иллюстрации к методу приводящего множителя. Было получено решение задачи в квадратурах и показано, что в случае, когда центр масс проецируется в точку контакта лезвия с плоскостью (конек Чаплыгина), интегрирующий множитель постоянен.

Актуальность задач исследования таких систем возросла в контексте развития робототехники, в частности, мобильных транспортных средств. Известно, что динамика трехколесного экипажа с двумя ведущими колесами и одним пассивным описывается системой уравнений, аналогичной системе для саней Чаплыгина.

В настоящее время активно изучаются всевозможные обобщения исходной задачи: динамика саней на наклонной плоскости без трения (А.В. Борисов, И.С. Мамаев), на поверхностях ненулевой кривизны (С.В. Ифраимов, А.С. Кулешов, И.А. Бизяев, Л.Н. Орешкина), и т.д.

Цель работы. Целью работы является исследование движения механической системы, называемой санями Чаплыгина, по горизонтальной плоскости с учетом сил трения, в частности, изучение условий безотрывного движения, исследование влияния массовых и геометрических характеристик системы на качественный характер поведения фазовых кривых.

Научная новизна. Основные результаты, полученные в диссертационной работе, являются новыми. Явно получены выражения для нормальных реак-

ций и дана геометрическая интерпретация условий безотрывности движения саней. Построены фазовые портреты системы, на основе которых дан глобальный качественный анализ динамики саней Чаплыгина на плоскости с трением. Исследована финальная динамика саней Чаплыгина с трением в двух и трех точках контакта в зависимости от массовых и геометрических характеристик.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение при проведении исследований в МГУ имени М.В. Ломоносова, Институте проблем механики имени А.Ю. Ишлинского РАН, Институте прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН и научно-исследовательских центрах, занимающихся проектированием и исследованием транспортных средств различного назначения.

Методы исследования. Исследование выполнено методами теоретической механики, теории устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. При любых начальных значениях скорости скольжения и угловой скорости нормальные реакции во всех точках контакта положительны во все время движения, если высота центра масс саней Чаплыгина не превышает определенного положительного значения, которое зависит от начальных значений скоростей.

2. При положительном значении коэффициента трения в двух точках контакта ножек с опорной плоскостью независимо от наличия или отсутствия трения в точке контакта лезвия с плоскостью сани останавливаются за конечное время; в случае, когда коэффициент трения в точке контакта конька меньше некоторого определенного значения (или равен нулю), ско-

рость скольжения и угловая скорость вращения обращаются в нуль одновременно при ненулевом начальном значении угловой скорости; в случае, когда коэффициент трения в точке контакта конька больше указанного значения, в фазовом пространстве возникает зона застоя, при попадании в которую скорость скольжения конька тождественно равна нулю, а угловая скорость убывает (по модулю) до нуля по явно вычисленному закону.

3. Плоскость безразмерных параметров задачи, характеризующих массовые и геометрические параметры системы, разбивается на три области, различающиеся видом фазовых портретов на плоскости «угловая скорость– скорость скольжения» и, в частности, типом финальных движений: для первой области параметров фазовая траектория входит в начало координат по касательной к оси скорости скольжения, для третьей – по касательной к оси угловой скорости, а для второй (промежуточной) – вдоль прямой, угол наклона которой зависит от этих параметров.

Достоверность результатов. Основные результаты диссертации получены с помощью строгих математических рассуждений. Полученные результаты количественно и качественно подтверждаются результатами численных расчетов.

Апробация работы. Результаты, представленные в диссертации, докладывались автором и обсуждались на следующих конференциях и научных семинарах:

- XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Уфа, Россия, 19-24 августа 2019 г.
- Ломоносовские чтения - 2019, МГУ имени М.В. Ломоносова, Россия, 12-22 апреля 2019 г.

- Семинар по аналитической механике и теории устойчивости имени В.В. Румянцева под руководством д.ф.-м.н. проф. А.В. Карапетяна и к.ф.-м.н. доц. А.А. Зобовой (2018, 2019, 2020 гг.), на механико-математическом факультете МГУ им. М.В. Ломоносова
- Семинар «Динамические системы и механика» (2020 г.) на кафедре мехатроники и теоретической механики Московского авиационного института.

Публикации. Основные результаты диссертации изложены в 5 печатных работах, 4 из которых опубликованы в рецензируемых журналах, индексируемых в международных базах WebOfScience, Scopus и RSCI, а одна – в сборнике трудов XII Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики.

Список работ приведен в конце автореферата.

Личный вклад. Научными руководителями были предложены постановки задач и методы их исследований. Все представленные в диссертации результаты получены лично соискателем.

Объем и структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Полный объем диссертации **89** страниц текста с **13** рисунками. Список литературы содержит **104** наименования.

Содержание работы

Во введении указаны цели данной работы, ее научная новизна и научная и практическая значимость, дано описание предметной области выполненной работы, приведен список положений, выносимых на защиту, пред-

ставлен обзор литературы о динамике систем с трением, а также изложено краткое содержание работы.

Первая глава посвящена описанию механической системы, называемой сани Чаплыгина на шероховатой плоскости и изучению ее общих свойств.

Рассматривается твёрдое тело, опирающееся о горизонтальную плоскость тремя точками A , B и C (рис. 1), которые образуют равнобедренный треугольник ($AC = BC$, A и B – точки опоры ножек, C – точка опоры лезвия). Предполагается, что плоскость лезвия ортогональна опорной плоскости и пересекается с последней по оси симметрии EC треугольника ABC , а центр масс S тела проецируется в точку D , лежащую на этой оси ($AE = EB = a$, $ED = b$, $DC = c$, $DS = h$).

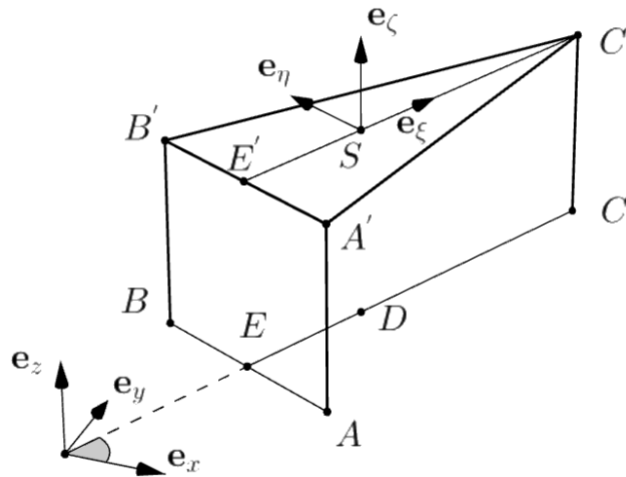


Рис. 1: Сани Чаплыгина.

Пусть $Oxyz$ – неподвижная система координат (Oxy – опорная плоскость, Oz – восходящая вертикаль), а $S\xi\eta\zeta$ – главные центральные оси инерции тела, причём $S\zeta \parallel Oz$. Предполагается, что скорость точки C тела $\vec{v}_C = v\vec{e}_\xi$ (тело не может скользить в направлении, ортогональном плоскости лезвия), а угловая скорость тела $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_\zeta$, то есть тело может вращаться только вокруг вертикали.

На данное тело действует сила тяжести, а наличие связей приводит к возникновению реакций в точках контакта.

$$\vec{R}_A = N_A \vec{e}_\zeta - k N_A \frac{\vec{v}_A}{v_A}, \vec{R}_B = N_B \vec{e}_\zeta - k N_B \frac{\vec{v}_B}{v_B}, \vec{R}_C = N_C \vec{e}_\zeta + F_{\text{тр}}(v) \vec{e}_\xi + R \vec{e}_\eta$$

Сила трения в точке контакта C моделируется следующим образом:

$$F_{\text{тр}}(v) = \begin{cases} -k_C N_C \frac{v}{v_C}, & v \neq 0, \\ \theta \in [-k_C N_C; k_C N_C], & v = 0. \end{cases} \quad (1)$$

В первой главе также выписаны уравнения движения и доказан ряд утверждений.

Утверждение 1.1. Существует значение $h_0 > 0$, зависящее только от параметров задачи и начальных скоростей v_0, ω_0 , такое, что при $h < h_0$ условия $N_A, N_B, N_C > 0$ выполнены для всех значений v, ω , при которых соответствующая кинетическая энергия $T(v, \omega)$ не превосходит начальную $T(v_0, \omega_0)$.

Утверждение 1.2. Движение саней Чаплыгина на горизонтальной плоскости с сухим трением при любых начальных значениях v_0 и ω_0 , одновременно не равных нулю, прекращается за конечное время.

Вторая глава посвящена исследованию задачи о движении саней по горизонтальной плоскости в однородном поле силы тяжести с учетом влияния сил трения Кулона в двух из трех точках контакта.

Получены явные выражения для нормальных реакций, а также представлена геометрическая интерпретация факта их положительности.

Утверждение 2.1. Для того, чтобы было выполнено условие безотрывности ($N_A, N_B, N_C > 0$), необходимо и достаточно, чтобы центр масс проецировался в треугольник $\triangle KLM$, полученный из $\triangle ABC$ соответствующим образом.

щими сдвигами вершин: векторы $\vec{\delta}_A, \vec{\delta}_B$ и $\vec{\delta}_C$ пропорциональны высоте центра масс, зависят от скорости скольжения и угловой скорости и обращаются в нуль при нулевых значениях этих скоростей. При этом нормальные реакции относятся к величине силы тяжести как относятся соответствующие площади треугольников к площади сдвинутого треугольника $\triangle KLM$:

$$N_A = \frac{S_{\triangle DML}}{S_{\triangle KLM}}P, \quad N_B = \frac{S_{\triangle DKM}}{S_{\triangle KLM}}P, \quad N_C = \frac{S_{\triangle DNK}}{S_{\triangle KLM}}P.$$

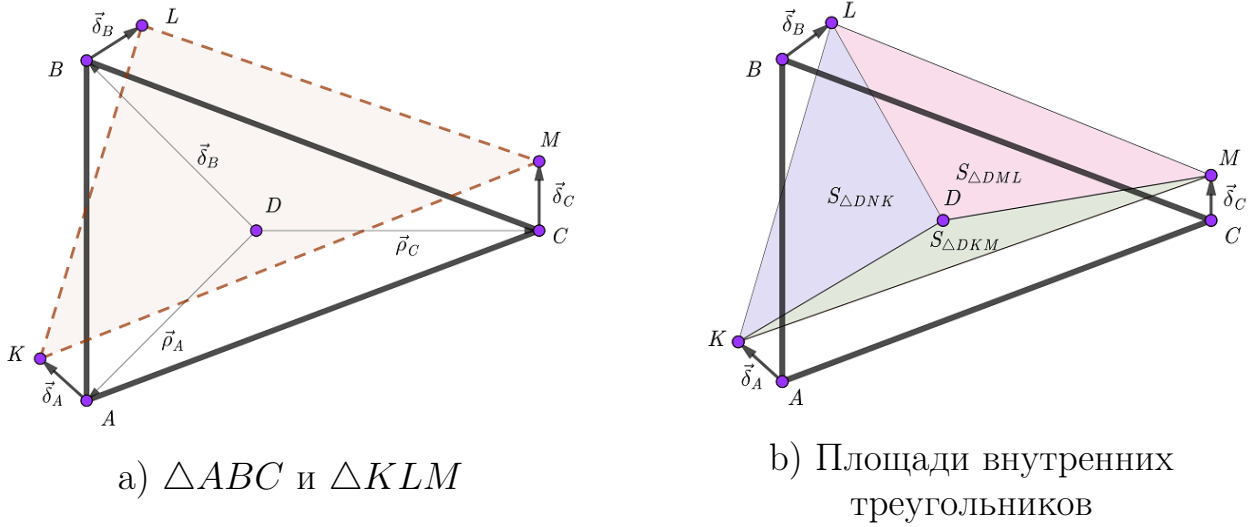


Рис. 2: К геометрической интерпретации

Во второй главе составлена система уравнений, определяющих динамику саней:

$$m\dot{v} + mc\omega^2 = -k \left(\frac{N_A}{v_A} + \frac{N_B}{v_B} \right) v + k \left(\frac{N_B}{v_B} - \frac{N_A}{v_A} \right) a\omega \quad (2)$$

$$I\dot{\omega} - mcv\omega = -k \left(\frac{N_A}{v_A} + \frac{N_B}{v_B} \right) l^2\omega + k \left(\frac{N_B}{v_B} - \frac{N_A}{v_A} \right) av. \quad (3)$$

Доказаны следующие утверждения:

Утверждение 2.2. Система (2), (3) допускает инвариантное множество $\omega \equiv 0$, вдоль которого движение саней Чаплыгина определяется соотно-

шениями

$$v(t) = v_0 - \frac{kgc}{(b+c) + kh}t, \quad t \in [0, t_+]; \quad t_+ = \frac{((b+c) + kh)v_0}{kgc} \quad (\text{при } v_0 > 0) \quad (4)$$

$$v(t) = v_0 + \frac{kgc}{(b+c) - kh}t, \quad t \in [0, t_-]; \quad t_- = -\frac{((b+c) - kh)v_0}{kgc} \quad (\text{при } v_0 < 0) \quad (5)$$

($v_0 = v(0)$; начальный момент без ограничения общности считается нулевым).

Утверждение 2.3. Система (2), (3) не допускает инвариантное множество $v \equiv 0$.

Далее во второй главе приведен анализ фазового портрета системы при нулевой высоте центра масс ($h = 0$). В частности, исследовано поведение линий переключения ($\dot{v} = 0$ и $\dot{\omega} = 0$).

Методом малого параметра, характеризующего начальное значение безразмерной кинетической энергии саней, найдены все типы фазовых кривых. Показано, что при нулевом значении h фазовые траектории входят в начало координат, касаясь оси $\omega = 0$ (при $\mu \leq \lambda$), оси $v = 0$ (при $\mu \geq \lambda + \frac{1}{\lambda}$) или прямой (при $\mu \in (\lambda; \lambda + \frac{1}{\lambda})$), угол наклона которой зависит от μ и стремится к $\frac{\pi}{2}$ при $\mu \rightarrow \lambda$ и к 0 при $\mu \rightarrow \lambda + \frac{1}{\lambda}$. Здесь

$$\mu^2 = \frac{I}{ma^2}, \quad \lambda = \frac{b+c}{a}.$$

Поскольку время движения конечно, то полученные при $h = 0$ качественные свойства системы распространяются на случай достаточно малого значения $h > 0$.

Третья глава посвящена исследованию задачи о движении саней по горизонтальной плоскости с учетом влияния сил трения Кулона во всех точках контакта, причем коэффициент трения в точке контакта лезвия, вообще говоря, не равен коэффициентам в двух других точках.

В силу того, что наложенные связи допускают такое движение системы, при котором скорость конька равна нулю, а угловая скорость при этом не равна нулю, в случае наличия трения в коньке отдельно рассматривается случаи $v_C \neq 0$ и $v_C = 0$.

При рассмотрении последнего случая показано, что он имеет место при

$$\omega^2 < \frac{g(Ibk_C - mc^2k^2h)}{cI(b+c) + mc^2k^2h^2 + k_CchI}$$

откуда следует, что для реализации этого случая необходимо, чтобы коэффициент трения в коньке был достаточно большим, а именно $k_C > \frac{mc^2k^2h}{Ib}$. Также делается вывод, что зона «застоя» ($v_C \equiv 0$) гарантированно существует, если высота центра масс равна нулю.

В случае скольжения конька явно приведены выражения для нормальных реакций и приведена геометрическая интерпретация их положительности аналогичная случаю из главы 2.

В случае попадания системы в условия, когда имеет место зона застоя, удается явно выписать закон изменения угловой скорости (при $\omega > 0$):

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{h}} \operatorname{tg} \left(\operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{h}{g}} \omega_0 \right) - \frac{mclk\sqrt{hg}}{I(b+c)} t \right).$$

В третьей главе проводится качественное исследование поведения фазовых кривых в окрестности равновесия при нулевой высоте саней методом малого параметра. В отличие от результатов второй главы имеет место существенная зависимость характера поведения фазовых кривых от коэффициента трения в коньке, а именно, от величины $\varkappa = \frac{bk_C}{ck}$. Показано, что в случае достаточно малых λ ($\lambda^2 < \frac{4(\varkappa+1)}{\varkappa}$) при $\mu^2 \in (0; \frac{\lambda^2}{1+\varkappa}]$ в фазовом пространстве (ω, v) фазовые траектории прижимаются к оси $\omega = 0$. При $\mu^2 \in (\frac{\lambda^2}{1+\varkappa}; \mu_{max}^2)$ фазовые

кривые прижимаются к наклонной прямой. В случае больших значений λ ($\lambda^2 > \frac{4(\kappa+1)}{\kappa}$) при $\mu^2 \in (0; \frac{\lambda^2}{1+\kappa})$ траектории прижимаются к оси $\omega = 0$.

Поскольку время движения конечно, то полученные при $h = 0$ качественные свойства системы распространяются на случай достаточно малого значения $h > 0$.

Рассмотрен частный случай, когда сила трения в точках контакта A и B отсутствует. В этом случае удастся явно выписать первые интегралы для случаев $v > 0$ и $v < 0$ соответственно:

$$\gamma v^2 + c\omega^2 \pm 2f_{\pm} \ln \omega = H_{\pm}, \quad \gamma = \frac{mc}{I}, \quad f_{\pm} = \frac{gbk_C}{b + c \mp hk_C}.$$

Исследован характер поведения неявных функций $v(\omega)$. Показано, что в области $v < 0$ функция $v(\omega)$ достигает своего минимума в точке ω_m , которая соответствует границе области «застоя»: $\omega_m^2 = \frac{f_-}{c} = \frac{gbk_C}{c(b+c+k_C h)}$. Таким образом, показано, что, если фазовая траектория приходит на ось $v = 0$ из области $v < 0$, то она обязательно попадает в область «застоя».

В заключении сформулированы основные результаты работы.

1. В задаче о движении саней Чаплыгина по горизонтальной шероховатой плоскости было доказано, что движение саней заканчивается за конечное время, если в точках контакта ножек коэффициент трения положителен. Показано, что для любых начальных условий найдется такая высота центра масс, что движение будет безотрывным на всем движении.
2. В задаче о движении саней Чаплыгина по горизонтальной шероховатой плоскости без трения в коньке дана геометрическая интерпретация безотрывности движения, исследован качественный характер фазовых траекторий в окрестности положения равновесия в зависимости от массовых, геометрических и фрикционных параметров системы.

3. В задаче о движении саней Чаплыгина по горизонтальной шероховатой плоскости с трением в коньке показано существование зоны «застоя», при попадании в которую точка контакта конька покоится, а сани имеют ненулевую угловую скорость. Найдены условия существования такой зоны. Исследован качественный характер фазовых траекторий в окрестности положения равновесия в зависимости от массовых, геометрических и фрикционных параметров системы.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Карапетыан А. В., Шамин А. Ю.* О движении саней Чаплыгина по горизонтальной плоскости с сухим трением // Прикладная математика и механика. — 2019. — Т. 83, № 2. — С. 228–233. Перевод: *A. V. Karapetyan, and A. Yu. Shamin* On Motion of Chaplygin Sleigh on a Horizontal Plane with Dry Friction, *Mechanics of Solids*, 2019, Vol. 54, No. 5, pp. 10–15, Web Of Science IF 0.508
2. *Shamin A. Y.* On the Motion of the Chaplygin Sleigh on a Horizontal Plane with Dry Friction at Three Points of Contact, *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2019, Vol. 15, no. 2, pp. 159-169, Scopus IF 0.6
3. *Шамин А.Ю.* Динамика саней Чаплыгина на горизонтальной плоскости с трением // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2020, № 1, с. 48–55, Scopus IF 0.5
4. *Karapetyan A. V., Shamin A. Y.* On the movement of the Chaplygin sleigh on a horizontal plane with dry friction // *Acta Astronautica*, 2020. doi: 10.1016/j.actaastro.2020.04.051, IF: Scopus IF 5.1

В сборниках трудов конференций:

1. *Шамин А.Ю.* Динамика саней Чаплыгина на шероховатой плоскости // XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов в 4 томах. Т. 1: Общая и прикладная механика.— Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. С. 150-152