

ОТЗЫВ официального оппонента
на диссертацию на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Юровой Екатерины Владимировны

на тему: «Измеримые линейные и полилинейные отображения
бесконечномерных пространств»

по специальности 01.01.01 – «вещественный, комплексный и
функциональный анализ»

Диссертация Е.В. Юровой посвящена исследованию свойств измеримых линейных и полилинейных отображений бесконечномерных топологических векторных пространств, снабженных радоновскими мерами. Проведен анализ различных подходов к определению измеримости линейных и полилинейных отображений. А именно исследованы свойства измеримых линейных отображений пространства Фреше, снабженного радоновской мерой, в пространство Фреше; при этом изучены различные подходы к определению измеримости линейного отображения. Исследованы взаимосвязи свойства измеримости линейного оператора между сепарабельными пространствами Фреше, свойства сосредоточенности радоновской меры на пространстве Фреше на сепарабельном рефлексивном банаховом пространстве, компактно вложенном в исходное пространство Фреше, и свойства непрерывности сужения измеримого оператора на носитель меры. Установлены отличия свойств измеримости у полилинейных отображений от аналогичных свойств у линейных. Для гауссовских мер, заданных на произведении двух суслинских локально выпуклых пространств, исследована измеримость зависимости условных мер на слое от точки базы.

бесконечномерных пространств актуальны как для развития анализа на бесконечномерных пространствах, так и для приложений в теории случайных процессов и дифференциальных уравнений для функций бесконечномерного аргумента. Свойство меры, заданной на бесконечномерном топологическом векторном пространстве, быть сосредоточенной на некотором его подпространстве играет важную роль при изучении случайных процессов со значениями в бесконечномерном пространстве и связанных с ними дифференциальных уравнений. Так, при изучении случайных блужданий в банаховом пространстве от этого свойства зависят такие свойства полугрупп, описывающих математические ожидания от случайных блужданий, как сильная непрерывность и область определения генератора полугруппы. От подпространств, на которых сосредоточена мера, зависят свойства инвариантности или квазиинвариантности меры по отношению к сдвигам на векторы пространства. Согласованность свойства измеримости векторнозначного или операторнозначного отображения со свойствами носителя меры играет важную роль при изучении случайных линейных операторов и случайных полугрупп, случайных процессов со значениями в пространстве отображений, которые возникают при изучении открытых квантовых систем и гамильтоновых систем с особенностями типа вырождения. В силу вышеизложенного тема диссертационного исследования является актуальной.

В **первой** главе изучены два подхода к определению измеримости линейного оператора из одного сепарабельного пространства Фреше, снабженного мерой Радона, в другое сепарабельное пространство Фреше. Установлено, что измеримость такого линейного оператора, определяемая как почти всюду аппроксимируемость последовательностью непрерывных операторов, эквивалентна его измеримости, определяемой как существование собственно линейной версии оператора – линейного непрерывного сужения

оператора на сепарабельное рефлексивное банахово пространство полной меры, компактно вложенное в исходное пространство Фреше в том случае, если область значений операторов — банахово пространство с базисом Шаудера. В случае, когда линейный оператор принимает значения в банаховом пространстве, получены условия поточечной аппроксимируемости линейного непрерывного оператора последовательностью линейных операторов конечного ранга, выраженные в терминах существования базиса Шаудера в пространстве значений.

Во **второй** главе для полилинейных функционалов на произведении пространств Фреше, снабженных мерой, исследуется взаимосвязь аппроксимируемости почти всюду полилинейного функционала последовательностью полилинейных непрерывных функций и существования компактно вложенного в исходное пространство Фреше банахова пространства полной меры, сужение на степень которого полилинейного функционала непрерывно. Для измеримых линейных функционалов в первой главе получен результат об эквивалентности этих двух свойств. Одним из основных результатов второй главы является пример, показывающий, что даже для билинейного функционала эти свойства не эквивалентны — из первого условия не следует второе. Таким образом, показано, что эквивалентные подходы к определению понятия измеримости линейных операторов (и линейных функционалов) становятся не эквивалентными для полилинейных функционалов.

Второй подход к определению понятия измеримости оператора, связанный с существованием непрерывной линейной версии оператора, имеет различные модификации для полилинейных отображений. Установлена эквивалентность некоторых таких модификаций. Во **второй** главе установлена эквивалентность следующих двух условий на полилинейные функционалы на пространстве Фреше, снабженном мерой, — существования компактно вложенного в степень пространства Фреше с

мерой сепарабельного рефлексивного банахова пространства полной меры, на котором измеримый функционал непрерывен, и существование компактно вложенного в исходное пространство Фреше сепарабельного рефлексивного банахова пространства с мерой, сужение полилинейного функционала на степень которого является непрерывным.

В **третьей** главе диссертации изучаются центрированные гауссовские меры, заданные на произведении двух суслинских локально выпуклых пространств, одно из которых является базой, а другое — слоем в тривиальном расслоении прямого произведения. Исследуется вопрос о сведении интеграла от ограниченной борелевской функции на произведении пространств к повторному интегралу по зависящим от точки базы условным мерам на слое и по проекции меры на базу прямого произведения пространств. Для этого решается вопрос об измеримой зависимости условной меры на слое от точки в базе. В случае однопараметрического семейства таких гауссовских мер, измеримо зависящих от параметра, исследуется измеримая зависимость условной меры от точки в базе и от параметра. В диссертационной работе получены условия борелевской измеримости условных мер, порождаемых измеримым семейством гауссовских мер на произведении двух суслинских локально выпуклых пространств, от параметра и точки базы. Этот результат является развитием полученного в 2016 г. результата И.И. Малофеева, в котором для радоновской меры на произведении двух суслинских пространств была установлена измеримая зависимость условной меры от точки базы относительно более широкой чем борелевская топологии, порожденной суслинскими множествами.

Таким образом, полученные в диссертации результаты служат развитием теории измеримых линейных и полилинейных отображений топологических векторных пространств и являются новыми. Достоверность полученных в диссертации результатов обоснована строгими доказательствами сформулированных утверждений.

По тексту диссертации имеются следующие критические замечания. Во второй главе при описании полилинейных функций на линейном пространстве рассматривается прямое произведение нескольких экземпляров линейного пространства. Изучается вопрос о вложении некоторого банахова пространства в топологическое пространство, являющееся прямым произведением пространств Фреше. При рассмотрении такого вложения было бы, на мой взгляд, естественно наделить прямое произведение структурой линейного пространства, превращающей его в прямую сумму линейных пространств, что позволило бы рассмотреть вложение банахова пространства в топологическое векторное пространство в качестве линейного подпространства. Впрочем, это лишь одно из возможных направлений развития диссертационной работы.

Вместе с тем, указанные замечания не умаляют значимости диссертационного исследования. Диссертация Е.В.Юровой «Измеримые линейные и полилинейные отображения бесконечномерных пространств» отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В.Ломоносова к работам подобного рода. Содержание диссертации соответствует паспорту специальности 01.01.01 – «вещественный, комплексный и функциональный анализ» (по физико-математическим наукам), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова, а также оформлена согласно приложениям № 5, 6 Положения о диссертационном совете Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова.

Таким образом, соискатель Юрова Екатерина Владимировна заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – «вещественный, комплексный и функциональный анализ».

Официальный оппонент:

Доктор физико-математических наук,

ПРОФЕССОР кафедры высшей математики

ФГАОУВО «Московский физико-технический институт (государственный университет)»

САКБАЕВ Всеволод Жанович

Контактные данные:

тел.: 7(495)4088172, e-mail: sakbaev.vzh@mipt.ru

Специальность, по которой официальным оппонентом

защищена диссертация:

01.01.02 – Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Адрес места работы:

141701, Московская область г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9,

Московский физико-технический институт (государственный университет),
кафедра высшей математики

Тел.: +74954088172; e-mail: sakbaev.vzh@mipt.ru

Подпись сотрудника Московского физико-технического института (государственного университета) В. Ж. Сакбаева удостоверяю:

Ученый секретарь МФТИ

Ю.И. Скалько