

Московский государственный университет
им.М.В.Ломоносова
Физический факультет
Кафедра физики атмосферы

Илюшин Я.А.

Модели флуктуирующих каналов распространения радиоволн

Учебно-методическое пособие для специального практикума кафедры физики атмосферы "Замирания КВ радиосигналов при ионосферном распространении радиоволн".

Москва 2009 г.

УДК 534.222

Илюшин Я.А.

Модели флуктуирующих каналов распространения радиоволн.

Аннотация

Дополнительная методическая разработка к задаче специального практикума кафедры физики атмосферы физического факультета МГУ "Замирания КВ радиосигналов при ионосферном распространении радиоволн."

В предлагаемом учебном пособии рассмотрен ряд статистических моделей флуктуаций радиоволн в нестационарной неоднородной среде, в том числе несколько моделей бимультимативных вероятностных распределений (К-распределение и т.д.)

Приводится формулировка моделей флуктуирующих сред и детальное изложение решения задач распространения волн в них, приводящих к устойчивым распределениям вероятностей флуктуаций интенсивности сигналов, инвариантных относительно широкого класса возмущений и справедливых в обширной области изменения параметров моделей.

Обсуждаются основные физические модели процессов рассеяния волн во флуктуирующих средах, лежащих в основе теоретического вывода соответствующих статистических моделей флуктуаций радиосигналов, и областей их применимости.

Рецензент: д.ф.-м.н., профессор Андреев А.В.
(физический факультет МГУ им. М.В.Ломоносова)

Издательство физического факультета МГУ
Лицензия

Подписано к печати

Объем 2 п.л. Тираж 20 экз. Заказ

Отпечатано в Отделе оперативной печати

Физического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова

(с) Илюшин Я.А., 2009

(с) Физический факультет МГУ, 2009

Содержание

1	Введение.	4
1.0.1	Геометрии рассеяния.	5
1.0.2	Зона Френеля, $z \gg kW^2$	7
1.0.3	Зона Френеля $z \ll kW^2$	7
1.1	Статистические модели.	8
1.1.1	Модель случайных блужданий.	8
2	К-распределение.	12
2.1	Флуктуации численности рассеивателей и отрицательное биномиальное распределение.	13
2.2	Предельные распределения.	16
2.2.1	Статистика одной переменной	16
2.2.2	Корреляционные свойства.	20
2.2.3	Другие подобные законы распределения	22
3	Обобщенное К-распределение: статистическая модель для слабого рассеяния.	24
3.1	Случайные блуждания в n измерениях: К-распределение и распределение Райса.	25
3.2	Случайные блуждания в n -мерном пространстве со смещением: обобщенное К-распределение	28
3.3	Комбинированные представления.	32
3.4	Приложения: модели статистики рассеянных волн.	37
4	I-К распределение как универсальная модель распространения лазерных пучков в турбулентной атмосфере.	43
4.1	Модели атмосферной турбулентности.	45
4.2	Теоретические модели для условной функции распределения флуктуаций интенсивности.	46
4.3	I-К распределение.	47
4.4	Обсуждение.	49
4.5	Заключительные замечания.	52

1 Введение.

После многих десятилетий интенсивного исследования распространения волн в случайных средах в отдельных направлениях этой области науки удалось достичь значительного прогресса [1-4]. Это обусловлено появлением в распоряжении исследователей источников когерентного излучения различных областей спектра. Так, после изобретения лазера, природа случайных картин светлых и темных областей, образующихся в дальнем поле, когда когерентный свет рассеивается неровной поверхностью, обычно называемых "спеклами достаточно хорошо понятна как с феноменологической, так и статистической точек зрения.

С другой стороны, широкое разнообразие встречающихся в природе явлений, в том числе наблюдаемых невооруженным глазом, и поэтому доступных для исследования в течение значительно более длительного периода времени, продолжает оставаться плохо описанным с феноменологической точки зрения и непонятным с точки зрения статистики. К подобным явлениям относятся мерцание звезд, блики на освещенной поверхности моря, красивые узоры каустик на полу бассейна от солнечного света, играющего на взволнованной поверхности воды, замирания радиосигналов в ионосфере и космическом пространстве и так далее. Такая ситуация имеет как теоретические, так и экспериментальные обоснования. Свою роль в этом сыграли ограниченные возможности инструментов и общеизвестные трудности, связанные с экспериментальным получением хороших статистических данных наблюдений природных явлений. Доминирующим обстоятельством несомненно является простота статистических моделей, которым подчиняются обыкновенные спеклы. Это позволило надежно охарактеризовать и исследовать указанные явления и в дальнейшем использовать их на практике. Под термином "спеклы" обычно понимают интерференционную картину, порожденную сложением полей большого числа рассеивателей. Какова бы ни была индивидуальная структура каждого рассеивателя, результирующее поле оказывается распределенным по Гауссу в соответствии с центральной предельной теоремой, и все статистические и корреляционные свойства такого поля однозначно описываются его корреляционной функцией первого порядка по времени и пространству.

Пространственная зависимость этой величины определяется областью нахождения рассеивателей, вносящих вклад в регистрируемое детектором поле, и только её временная зависимость, или частотный спектр, отражает какие-либо внутренние свойства рассеивателя, а именно, относительные внутренние перемещения. Вышеуказанные природные явления не являются Гауссовскими интерференционными эффектами, порожденными рассеянием широкополосного излучения (например, белого света). Статистические свойства и пространственная и временная

когерентность рассеянного излучения зависят от деталей внутренней структуры рассеивающей среды. Более того, часто такая информация о внутренней структуре отсутствует. Поэтому, хотя механизм рассеяния сам по себе может быть хорошо исследован, построение удовлетворительной статистической модели оказывается затруднительным. В результате каждая конкретная система рассеивателей требует разработки отдельной специальной модели.

В последние годы большое внимание исследователей привлечено к исследованию негауссовской статистики рассеяния волн. В некоторой мере это тем, что возможности многих оптических и радиотехнических систем ограничены негауссовскими шумами, и частично обусловлено интересом к исследованию систем с негауссовской статистикой флуктуаций, как таковых. Заметим, что многие характерные для оптики явления были одновременно исследованы и в области физики микроволн, причем гауссовские микроволновые спеклы были относительно хорошо изучены в середине двадцатого столетия. Это следует считать своего рода достижением, учитывая отсутствие визуальных средств исследования микроволновых полей.

К настоящему времени накоплен большой объём знаний в области негауссовских эффектов рассеяния, в частности, для рассеивателей типа шероховатых поверхностей [5, 6]. Развитые теории успешно применяются к широкому классу практически важных систем, работающих как в оптическом диапазоне электромагнитных волн, так и за его пределами. Более того, есть экспериментальные подтверждения того, что определенные статистические модели имеют более широкий диапазон применимости, чем того следовало бы ожидать. В некоторых случаях может оказаться возможным распознавание типа объекта по характеристикам интенсивности негауссовского рассеяния. В особых частных случаях может оказаться также возможным определение масштаба и величины шероховатостей по данным измерений определенных параметров негауссовской статистики рассеяния.

1.0.1 Геометрии рассеяния.

Можно выделить широкий класс объектов, рассеивающих излучение, которые можно назвать "системами поверхностного типа". Самой простейшей моделью системы такого типа является прозрачный или отражающий фазовый экран, который просто вносит случайные вариации фазы в отраженную или проходящую монохроматическую волну. В частности, модель случайного фазового экрана в течение многих лет являлась одной из основных моделей в теоретических исследованиях ионосферного распространения радиоволн. В случае очень сильно

неровных поверхностей, эти изменения эквивалентны вариациям фазового пути волны, большим по сравнению с длиной волны. После рассеяния в плоскости $z = 0$, искаженный волновой фронт распространяется свободно в соответствии с уравнениями Максвелла, и комплексная амплитуда поля при заданной частоте и длине волны в приближении Гюйгенса-Френеля выражается в виде

$$E(R, t) = A \exp(i\omega t) \int_{-\infty}^{\infty} d^2 r_0 \exp(i\phi(\vec{r}_0, t)) \times \exp\left(ik\left(\frac{\vec{r}_0^2}{2z} + \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{r}}{R}\right) - \frac{r_0}{W^2}\right), \quad (1)$$

где $\vec{R} = (\vec{r}, z)$ - координаты местонахождения детектора излучения в цилиндрической системе координат; $\phi(\vec{r}_0, t)$ - вариации фазы, вносимые рассеивателем в плоскости $z = 0$ в момент времени t ; и W - ширина падающего пучка излучения, профиль которого, для математической простоты и удобства вычислений, выбран гауссовским. Множитель A перед интегралом может включать в себя другие пространственные и временные зависимости, не существенные для исследования негауссовской статистики рассеяния. Очевидно, уравнение (1) представляет собой сильно упрощенную модель реальной рассеивающей поверхности, поскольку вариации коэффициента отражения, поляризационных эффектов и различных угловых зависимостей в нем не учтены. Тем не менее, оно многократно принималось в качестве исходного предположения для исследования негауссовской статистики рассеяния и позволило получить значительные результаты в этой области.

Для дальнейшего исследования уравнение (1) должно быть дополнено какой-либо моделью статистических свойств фазы $\phi(\vec{r}_0, t)$. Практически всегда распределение фазы в различных точках рассеивателя считается совместным нормальным распределением многих случайных величин, хотя предлагались и другие модели. В рамках предположения о гауссовском совместном распределении фаз остается определить корреляционную функцию фазы первого порядка. Статистические свойства интерференционной картины, предсказываемые на основе уравнения (1), оказываются весьма чувствительны к выбору этой функции, но временно мы будем считать, что эта функция просто характеризуется некоторым масштабом ζ , соответствующим характерному размеру деталей интерференционной картины. Очевидно, что негауссовский характер рассеяния будет иметь место лишь тогда, когда в интеграл (1) вносит вклад лишь небольшое число элементарных рассеивателей, для которого центральная предельная теорема заведомо несправедлива. Эта ситуация может быть реализована для двух различных геометрий рассеяния.

1.0.2 Зона Френеля, $z \gg kW^2$

В этой зоне уравнение (1) сводится к

$$E(\theta, t) = A \exp(i\omega t) \int_{-\infty}^{\infty} d^2 r_0 \exp \left(i\phi(r_0, t) + ikr_0 \sin \theta - \frac{r_0^2}{W^2} \right), \quad (2)$$

где $\sin \theta = |r|/R$, и развитых флуктуаций можно ожидать при $W \leq \zeta$. Интересующими нас величинами, доступными для наблюдения в эксперименте, в этом случае являются статистическое распределение интенсивности

$$I = |E^2(\theta, t)| \quad (3)$$

и его нормированные моменты $\langle I^r \rangle / \langle I \rangle^r$, которые будут отличны от нормированных моментов интенсивности гауссовских спеклов

$$\frac{\langle I^r \rangle}{\langle I \rangle^r} = r! \quad (4)$$

Пространственные и угловые вариации моментов (4) несут дополнительную информацию, и корреляции поля и интенсивности не будут в этом случае связаны теоремой факторизации Зигерта (Рида)

$$\frac{\langle I(\theta, t)I(\theta', t') \rangle}{\langle I(\theta, t) \rangle \langle I(\theta', t') \rangle} = 1 + \frac{|\langle E^*(\theta, t)E(\theta', t') \rangle|^2}{\langle I(\theta, t) \rangle \langle I(\theta', t') \rangle} \quad (5)$$

1.0.3 Зона Френеля $z \ll kW^2$

В этой зоне уравнение (1) сводится к

$$E(z, t) = A \exp(i\omega t) \int_{-\infty}^{\infty} d^2 r_0 \exp \left(i\phi(r_0, t) + i\frac{kr_0^2}{2z} \right). \quad (6)$$

При этом существенно, что освещенная область бесконечна. Отклонение статистики флуктуаций интенсивности от гауссовской в этом случае не очевидно, и в некоторых случаях они в самом деле не предсказываются теорией. Однако, простые геометрические оценки в рамках фасеточной модели ведут к заключению, что по мере приближения точки наблюдения к плоскости рассеяния, все меньшее и меньшее число фасеток будут в среднем вносить вклад в поле, регистрируемое

направленным детектором излучения. Таким образом, возможность наблюдения негауссовских флуктуаций имеется при условии $z\phi_0/k\zeta^2 \leq 1$, где $\phi_0^2 = \langle \phi^2 \rangle$ (отношение $\phi_0/k\zeta$ имеет смысл среднеквадратичного наклона поверхности). Отсюда следует, что для очень шероховатых поверхностей ($\phi_0 \gg 1$) это неравенство удовлетворяется лишь в зоне Френеля единичной фасетки (т.е. при $z \leq k\zeta^2$). Наблюдаемые случайные интерференционные картины, образующиеся в такой конфигурации, будут, вообще говоря, отличаться от интерференционных картин в дальней зоне, т.е. статистика распределения интенсивности будет зависеть от расстояния z как от параметра.

Хотя эксперименты в зоне Фраунгофера, скорее всего, являются наиболее распространенными в оптических экспериментах по рассеянию света, эффекты в зоне Френеля весьма важны в других областях электромагнитного спектра, в частности, в задачах атмосферного распространения. Они проявляются в искажениях изображений, даже в случае поверхностей, шероховатых в масштабе длины волны излучения, и часто содержат в себе больше информации, чем соответствующие флуктуации в зоне Фраунгофера.

1.1 Статистические модели.

В исследованиях негауссовской статистики рассеяния шероховатыми поверхностями обычно пользуются математическими подходами двух основных типов. С одной стороны, возможен аналитический подход на основе уравнения (1), и с другой стороны, используются модели дискретных рассеивателей, в которых поверхность представляется в виде конечного числа некоррелированных рассеивающих центров, вклады которых в рассеянное поле случайны по фазе. Второй подход, хотя отличается меньшей строгостью, гораздо проще осуществляется на практике и привел к значительному прогрессу в понимании общих закономерностей негауссовской статистики рассеяния. Дадим краткий обзор различных вариантов уточнения этой простой модели, а также некоторых аналитических результатов для отдельных моделей шероховатых поверхностей.

1.1.1 Модель случайных блужданий.

В этом подходе регистрируемое волновое поле представляется в виде двумерного случайного блуждания, состоящего из N шагов:

$$E(\vec{r}, t) = \sum_{n=1}^N a_n(\vec{r}, t) \exp i\phi_n(\vec{r}, t) \quad (7)$$

Случайные фазы $\{\phi_n\}$ считаются статистически независимыми и равномерно распределенными (справедливо для сильно шероховатых поверхностей). В то же время число рассеивателей N и амплитуды $\{a_n\}$ (вклады отдельных рассеивателей) также могут быть статистически независимыми случайными величинами с соответствующими законами распределения. Модели этого типа в основном применялись к исследованию флуктуаций поля в зоне Фраунгофера, поскольку вычисление амплитуд $\{a_n\}$ и оценка числа рассеивателей N в зоне Френеля затруднительны. Распределение интенсивности, соответствующее уравнению (7), может быть формально записано в виде

$$P(I) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} u du J_0(u\sqrt{I}) \langle J_0^N(ua) \rangle_{N,a}, \quad (8)$$

где $J_0(\cdot)$ - функция Бесселя нулевого порядка, и амплитуды $\{a_n\}$ распределены по одинаковому закону. Если число рассеивателей N фиксировано, из уравнения (8) следуют два хорошо известных результата:

(а) центральная предельная теорема

$$P(I) \rightarrow \langle I \rangle^{-1} \exp\left(-\frac{I}{\langle I \rangle}\right) \quad (9)$$

при $N \rightarrow \infty$ для всех "непатологических" законов распределения вероятности амплитуд $p(a)$

(б) условие устойчивости
если

$$p(a) = \frac{2a}{\langle a^2 \rangle} \exp\left(-\frac{a}{\langle a^2 \rangle}\right), \quad (10)$$

тогда

$$p(I) = \langle I \rangle^{-1} \exp\left(-\frac{I}{\langle I \rangle}\right) \quad (11)$$

для всех конечных N .

Кроме предельного и гауссовского случаев (а) и (б), решение уравнения (8) было до сих пор найдено лишь для нескольких небольших фиксированных значений числа рассеивателей N и постоянных амплитуд $\{a_n\}$. Для больших фиксированных N вычисление распределения интенсивности оказывается затруднительным даже в случае постоянных амплитуд, и более практически полезными оказываются оценки в предположении, что число рассеивателей и амплитуды рассеяния являются случайными величинами. Моменты распределения (8) могут, однако,

всегда быть вычислены в явном виде. К примеру, нормированный второй момент интенсивности флуктуаций выражается в виде

$$\frac{\langle I^2 \rangle}{\langle I \rangle^2} = 2 \frac{\langle N(N-1) \rangle}{\langle N \rangle^2} + \frac{\langle a^4 \rangle}{\langle N \rangle \langle a^2 \rangle^2}. \quad (12)$$

Если число рассеивателей N распределено по Пуассону и амплитуды $\{a_n\}$ постоянны, как это имеет место для сферических частиц, хаотично распределенных в объеме, уравнение (12) сводится к

$$\frac{\langle I^2 \rangle}{\langle I \rangle^2} = 2 + \frac{1}{\langle N \rangle}. \quad (13)$$

Эта формула, которая была проверена в оптических экспериментах с суспензиями невзаимодействующих частиц, ясно показывает превышение уровня флуктуаций по сравнению с гауссовским в виде слагаемого, обратно пропорционального величине рассеивающего объема.

Простейшая модель поверхностного рассеивателя, имеющая какое-нибудь практическое значение, основана на фасеточной модели, в которой предполагается, что фронт рассеянной волны состоит из N фасеток одинакового размера, наклоны которых распределены случайно и независимо. Для круглых фасеток радиуса ζ , уравнение (12) сводится к

$$\frac{\langle I^2 \rangle}{\langle I \rangle^2} = 2(1 - N^{-1}) + [k^2 \zeta^2 / 4\pi P(\theta)] N^{-1}, \quad (14)$$

где $P(\theta)$ - вероятность ориентации фасетки нормально по отношению к детектору излучения. Уравнение (14) может быть выражено в форме, подходящей для отражательного рассеяния. Заметим, что негауссовский второй член в уравнении (14) превышает соответствующее слагаемое по сравнению с уравнением (13) за счет того, что не все фасетки одновременно ориентированы нормально к детектору и тем самым вносят вклад в наблюдаемое поле. На практике это означает, что эффективное число индивидуальных рассеивателей мало по сравнению с их общим числом. Множитель $k^2 \zeta^2$ в уравнении (14) учитывает конечную ширину главного дифракционного максимума каждой фасетки и для фасеток круговой формы может быть строго вычислен методами теории дифракции. Этот подход может быть использован для вычисления статистических моментов распределения интенсивности высшего порядка и пространственной функции когерентности

$$\frac{\langle I(\vec{r}, t) I(\vec{r}', t) \rangle}{\langle I(\vec{r}, t) \rangle \langle I(\vec{r}', t) \rangle} = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \left[1 + \frac{|E^*(\vec{r}, t) E(\vec{r}', t)|^2}{\langle I(\vec{r}, t) \rangle \langle I(\vec{r}', t) \rangle}\right] + \frac{1}{N} \left[\frac{|a^2(\vec{r}, t) a^2(\vec{r}', t)|^2}{\langle a^2(\vec{r}, t) \rangle \langle a^2(\vec{r}', t) \rangle}\right], \quad (15)$$

которые, очевидно, не удовлетворяют теореме факторизации (5). Поскольку длина пространственной когерентности для последнего слагаемого определяется структурой рассеивателя в освещенной области, она обычно больше характерного масштаба спеклов, определяемого слагаемым, содержащим корреляции поля. Таким образом, модель случайных блужданий предсказывает, что негауссовское распределение интенсивности окажется коррелированным по ансамблю многих спеклов. Отсюда следует, что пространственное усреднение не приведет к эффективно ослаблению шума. Результат, подобный формуле (15), может быть получен и для временной функции корреляции интенсивности, причем в случае движущейся поверхности слагаемое с корреляционными функциями поля будет характеризоваться меньшими временными масштабами корреляции, соответствующими относительным движениям в пределах рассеивающей области, нежели чем "негауссовское" слагаемое, отражающее медленные флуктуации отдельных рассеивающих центров. Таким образом, усреднение по полосе частот оказывается малоэффективным способом ослабления шума, и значительные флуктуации интенсивности присутствуют даже в широкополосном излучении.

В случае медленно меняющихся, очень шероховатых поверхностей, точки зеркального отражения могут рассматриваться как отдельные рассеивающие центры. При распространении рассеянного излучения образуются каустики, уширенные в результате дифракции, и неравномерность распределения интенсивности в каустиках должна быть учтена в статистическом распределении амплитуд $\{a_n\}$. До сих пор таких попыток не предпринималось, хотя известны некоторые попытки исследования влияния кривизны фасеток. Напротив, последние работы привели к прогрессу в моделировании многомасштабных рассеивающих систем. Численные расчеты, основанные на гауссовской теории, показывают, что точки зеркального отражения на гладкой одномасштабной поверхности имеют тенденцию к антигруппировке и, вообще говоря, флуктуации оказываются слабее, чем для пуассоновского распределения. Таким образом, для очень малых размеров освещенной области первый член в уравнении (12) обращается в нуль ($N=0$ или 1), в то время как для освещенных площадей большего размера N можно считать постоянным, как при выводе уравнений (14) и (15). Когда размер освещенной зоны лежит в промежутке между наименьшим и наибольшим характерными масштабами многомасштабной поверхности, однако, разумно ожидать, что точки зеркального отражения будут группироваться. Такая группировка может вызываться модуляцией мелкомасштабной шероховатости какими-то вариациями профиля на более длинном масштабе, или наоборот, местными вариациями поверхностной шероховатости или текстуры.

Исследования в этом направлении привели к разработке нескольких моделей

случайных сред, основывающихся на подобной группировке индивидуальных рассеивателей. Все эти модели приводят к новым функциям распределения интенсивности флуктуаций, отличных от гауссовской. В некоторых случаях их удается выразить в замкнутом виде через хорошо изученные специальные функции. Несколько таких моделей, представляющих особый интерес, обсуждаются в последующих разделах.

2 К-распределение.

Во второй половине двадцатого столетия было обнаружено, что класс так называемых К-распределений [9, 17]

$$p(A) = \frac{2b}{\Gamma(\alpha)} \frac{(bA)^\alpha}{2} K_{\alpha-1}(bA), \quad \alpha > 0 \quad (16)$$

представляет собой удобную модель для описания статистики амплитуды рассеянного излучения в самых различных экспериментах, в частности связанных с рассеянием волн в турбулентной среде. В связи с этим высказывались предположения, что это может быть обусловлено характером предельных распределений в задачах о случайных блужданиях определенного типа. Хорошо известно, что если число шагов в случайном блуждании бесконечно велико, тогда компоненты результирующего вектора распределены в соответствии с нормальным (гауссовским) распределением (центральная предельная теорема). Менее известен тот факт, что если это число шагов, в свою очередь, также является случайной величиной, центральная предельная теорема несправедлива. Хотя центральной предельной теореме посвящено громадное количество литературы, в которой обсуждаются различные условия сходимости к предельному (нормальному) распределению, не так много внимания уделялось возможности существования негауссовских предельных распределений при определенных распределениях числа шагов как случайной величины. Уравнение (16) определяет один из таких классов распределений, порожденный флуктуациями числа шагов в соответствии с так называемым отрицательным биномиальным распределением. Отрицательные биномиальные распределения

$$P_N = \binom{N + \alpha + 1}{N} \frac{(\bar{N}/\alpha)^N}{(1 + \bar{N}/\alpha)^{N+\alpha}}, \quad \alpha > 0 \quad (17)$$

образуют класс распределений с двумя параметрами, каждое из которых характеризуется средним \bar{N} и нормированной дисперсией $\alpha^{-1} + \bar{N}^{-1}$. Наиболее широко

известным распределением этого класса является так называемое геометрическое распределение ($\alpha = 1$), которое, например, описывает статистику фотонов теплового (некогерентного) светового излучения. Параметр α , фигурирующий в (17), в действительности можно рассматривать как количественную меру степени группировки событий, если интерпретировать N как число событий, наступивших в течение фиксированного малого промежутка времени. Эти распределения часто используются как модели пуассоновских случайных процессов с переменным средним. Такие процессы играют большую роль в теории очередей, и в частности, в демографической статистике, где они возникают как равновесные распределения в процессах рождаемости-смертности-миграции.

2.1 Флуктуации численности рассеивателей и отрицательное биномиальное распределение.

Теория отрицательных биномиальных распределений может быть выведена, например, на основе уравнений баланса в модели смертности-рождаемости-миграции, используемой в задачах демографической статистики.

Переходы между соседними уровнями численности населения в системе с вероятностью рождения λ , смерти μ и иммиграционным притоком населения ν показаны схематически на рис. 1. Иммиграция в такой модели является неким аналогом спонтанной эмиссии квантов, поскольку не зависит от уровня численности населения в данный момент, и более правильно было бы называть эту величину вероятностью "спонтанного появления". Далее везде будет предполагаться, что рождение, смерть и внезапное появление являются некоррелированными случайными событиями. Уравнение баланса для процесса может быть записано следующим образом:

$$\frac{dP_N}{dt} = \mu(N + 1)P_{N+1} - [(\lambda + \mu)N + \nu]P_N + [\lambda(N - 1) + \nu]P_{N-1}, \quad (18)$$

где $P_N(t)$ - вероятность того, что численность населения в момент времени t равна N . Дифференциальное уравнение в частных производных для производящей функции

$$Q(z, t) = \langle (1 - z)^N \rangle = \sum_{N=0}^{\infty} P_N(t)(1 - z)^N \quad (19)$$

нетрудно получить из уравнения (18):

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = z[-\mu + \lambda(1 - z)]\frac{\partial Q}{\partial z} - \nu zQ. \quad (20)$$

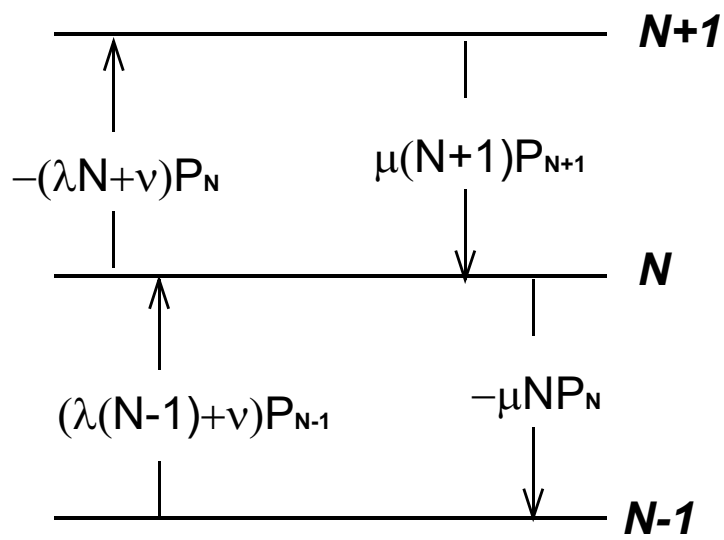


Рис. 1: Модель статистики отрицательного биномиального распределения.

Если считать, что в начальный момент времени $t = 0$ $N = M$, то уравнение (20) требуется решать с граничными и начальными условиями

$$Q(0, t) = 1, \quad Q(z, 0) = (1 - z)^M. \quad (21)$$

Первое из этих условий следует из единичной нормировки вероятностей P_N , в то время как второе следует из начального условия $P_N(0) = \delta_{NM}$. Нестационарное решение для распределения численности населения известно

$$Q(z, t) = \left(\frac{\lambda - \mu}{\lambda - \mu + \lambda(\theta - 1)z} \right)^{\nu/\lambda} \left(\frac{\lambda - \mu + (\mu\theta - \lambda)z}{\lambda - \mu + \lambda(\theta - 1)z} \right)^M, \quad (22)$$

где

$$\theta(t) = \exp[(\lambda - \mu)t]. \quad (23)$$

На больших временах устанавливается равновесное распределение, если смертность μ превышает рождаемость λ . Полагая $\theta = 0$ в уравнении (22), получим

$$Q(z, \infty) = (1 + \bar{N}z/\alpha)^{-\alpha}, \quad (24)$$

где

$$\bar{N} = \nu/(\mu - \lambda), \alpha = \nu/\lambda. \quad (25)$$

Это - производящая функция класса отрицательных биномиальных распределений, определенных в уравнении (17)¹. Нормированные моменты высших порядков могут быть получены из уравнения (24) дифференцированием по z :

$$\frac{\langle N(N-1)\dots(N-r+1) \rangle}{\bar{N}^r} = \prod_{n=0}^{r-1} \left(1 + \frac{n}{\alpha} \right). \quad (26)$$

В равновесном режиме все корреляционные функции и моменты любых порядков могут быть в принципе вычислены с помощью уравнения (18) и его решения (22). Например, совместное распределение $P_{MN}(t)$, то есть вероятность присутствия в системе ровно M и N единиц в моменты времени 0 и t соответственно, выражается в виде

$$P_{MN}(0, t) = P_M P_{(M)N}(t), \quad (27)$$

¹В пределе $\bar{N} \rightarrow \infty$ бесконечная система уравнений (18) превращается в одномерное уравнение Фоккера-Планка[12]. Соответствующее стационарное распределение (17) при этом асимптотически стремится к гамма-распределению [15]

где P_M - равновесная вероятность, определенная уравнениями (17) и (24), и $P_{(M)N}(t)$ - соответствующая условная вероятность. Совместная производящая функция

$$Q(z, 0, z', t) = \langle (1 - z)^M (1 - z')^N \rangle = \sum_{M=0}^{\infty} \sum_{N=0}^{\infty} (1 - z)^M (1 - z')^N P_M P_{(M)N}(t) \quad (28)$$

может быть вычислена аналитически и выражена в терминах θ , \bar{N} и α (уравнения (22) и (24)) как

$$Q(z, 0; z, t') = [(1 + \bar{N}z/\alpha)(1 + \bar{N}z'/\alpha) - zz'\theta(1 + \bar{N}/\alpha)\bar{N}/\alpha]^{-\alpha}, \quad (29)$$

и отсюда немедленно следует выражение для второго момента (корреляции) флуктуаций числа N

$$\frac{\langle N(0)N(t) \rangle}{\bar{N}^2} = 1 + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\bar{N}} \right) \theta(t). \quad (30)$$

2.2 Предельные распределения.

2.2.1 Статистика одной переменной

Результаты предыдущего раздела можно применить к вычислению предельных распределений, порожденных случайными блужданиями с переменным числом шагов в пределе большого числа шагов в среднем.

Рассмотрим двумерное случайное блуждание, состоящее из N последовательных шагов.

$$E(t) = \sum_{j=1}^N a_j(t) \exp(i\phi_j(t)) = A(t) \exp(i\Phi(t)), \quad (31)$$

где $\{a_j(t)\}$ и $\{\phi_j(t)\}$ - статистически независимые наборы случайных величин, соответствующих длине и направлению шагов в зависимости от времени. Будем считать, что различные случайные величины обоих наборов независимы, но статистически эквивалентны, и $\{\phi_j(t)\}$ равномерно распределены в промежутке 2π радиан. Фаза $\Phi(t)$ результирующего вектора \vec{u} будет распределена также равномерно, и предварительно считая N фиксированным, характеристическая функция \vec{u} будет выражаться с помощью функции Бесселя нулевого порядка

$$C_N(\vec{u}) = \langle \exp[i(u_1 E_1 + u_2 E_2)] \rangle = \langle J_0(ua) \rangle^N = \langle J_0(uA) \rangle, \quad (32)$$

где нижние индексы 1 и 2 указывают на действительную и мнимую часть и $u = |\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$. Для вывода асимптотики распределения при больших N

удобно нормировать длину шага a на \sqrt{N} и исследовать предел выражения $\langle J_0(ua/\sqrt{N}) \rangle^N$ в пределе $N \rightarrow \infty$. Нетрудно показать, что при любом распределении величины элементарных шагов $\{a_j(t)\}$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} C_N(u) = \exp\left(-\frac{u^2 \langle a^2 \rangle}{4}\right), \quad (33)$$

что соответствует распределению Рэлея

$$p(A) = 2 \left(\frac{A}{\langle A^2 \rangle} \exp\left(-\frac{A^2}{\langle A^2 \rangle}\right) \right). \quad (34)$$

Определяя интенсивность как

$$I = A^2, \quad (35)$$

уравнение (34) легко привести к соответствующему виду распределения вероятности флуктуаций интенсивности

$$p(I) = \frac{1}{\langle I \rangle} \exp\left(-\frac{I}{\langle I \rangle}\right) \quad (36)$$

с нормированными моментами интенсивности

$$n^{[r]} = \frac{\langle I^r \rangle}{\langle I \rangle^r} = r!. \quad (37)$$

Этот результат выражает тот факт, что в пределе больших N действительная и мнимая части вектора E распределены нормально (по Гауссу) с нулевым средним в соответствии с центральной предельной теоремой. Следствием этого результата является то, что если величины элементарных шагов $\{a_j(t)\}$ в случайном блуждании (31) распределены по Рэлею, амплитуда результирующего вектора A также распределена по Рэлею, причем $\langle A^2 \rangle = N \langle a^2 \rangle$ при любом фиксированном N . Распределение (34), таким образом, устойчиво по отношению к свертке (32).

Теперь предположим, что само N является случайной величиной, независимой от $\{a_j\}$ и $\{\phi_j\}$ и имеющей распределение (17). Усреднение (32) по N с соответствующей нормировкой длины шага на \sqrt{N} приводит к результату

$$C_{\bar{N}} = [1 + (\bar{N}/\alpha)(1 - \langle J_0(ua/\sqrt{N}) \rangle)]^{-\alpha}. \quad (38)$$

Нетрудно найти предел характеристической функции при больших \bar{N} :

$$\lim_{\bar{N} \rightarrow \infty} C_{\bar{N}}(u) = [1 + u^2 \langle a^2 \rangle / 4\alpha]^{-\alpha}, \quad (39)$$

соответствующий так называемому **К-распределению** [17]:

$$p(A) = \frac{2b}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{bA}{2}\right)^\alpha K_{\alpha-1}(bA), \quad (40)$$

где $b = 2(\alpha / \langle A \rangle^2)^{1/2}$ и нормированный момент интенсивности (см. (37))

$$n^{[r]} = \frac{r! \Gamma(r + \alpha)}{\alpha^r \Gamma(\alpha)}. \quad (41)$$

2

Подобно уравнению (34), результат (40) справедлив независимо от статистических свойств элементарных шагов. Интересно, что если длины шагов, фигурирующих в уравнении (31), распределены по К-распределению, так же распределена и результирующая амплитуда при любом фиксированном значении N . Класс (40) на самом деле является бесконечно делимым относительно свертки (32). Это полезное аналитическое свойство, которое частично следует из бесконечной делимости отрицательного биномиального распределения. В отличие от распределения Рэлея, однако, К-распределения неустойчивы, потому что с увеличением числа К-распределенных шагов в случайном блуждании (33) увеличивается индекс, т.е. порядок распределения (40) результирующей амплитуды, одновременно с её средним квадратом [9]. Асимптотика поведения (40) и (41) при больших α должна быть эквивалентна асимптотике обычной задачи о случайных блужданиях при

²Более общий результат получен в работе [13], где показано, что среднее геометрическое двух случайных величин, распределенных по закону гамма-распределения

$$p(x) = \frac{\lambda^\eta}{\Gamma(\eta)x^{\eta-1} \exp(-\lambda x)}, \quad x \geq 0, \lambda, \eta > 0,$$

в свою очередь, имеет функцию плотности вероятности К-распределения (40). В самом деле, выполняя преобразование Меллина, получим

$$M(S) = \int_0^\infty x^{S-1} p(x) dx = \frac{\Gamma[S + (\eta - 1)]}{\Gamma(\eta)\lambda^{S-1}}.$$

Функции распределения произведения двух случайных величин соответствует произведение меллиновских образов их функций распределения. Тем самым преобразование Меллина от функции распределения двух случайных величин x_1 и x_2 , распределенных по закону гамма-распределения с параметрами λ_1, η_1 и λ_2, η_2 соответственно, имеет вид

$$M(S) = M_1(S)M_2(S) = \frac{\Gamma[S + (\eta_1 - 1)]\Gamma[S + (\eta_2 - 1)]}{\Gamma(\eta_1)\Gamma(\eta_2)(\lambda_1\lambda_2)^{S-1}}.$$

Выполняя обратное преобразование Меллина, получим искомую плотность вероятности

$$p(x) = \frac{1}{\Gamma(\eta_1)\Gamma(\eta_2)} (\lambda_1\lambda_2)^{\frac{\eta_1+\eta_2}{2}} x^{\frac{\eta_1+\eta_2-2}{2}} K_{\eta_1+\eta_2} \left(2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}x\right),$$

где $x = x_1x_2$.

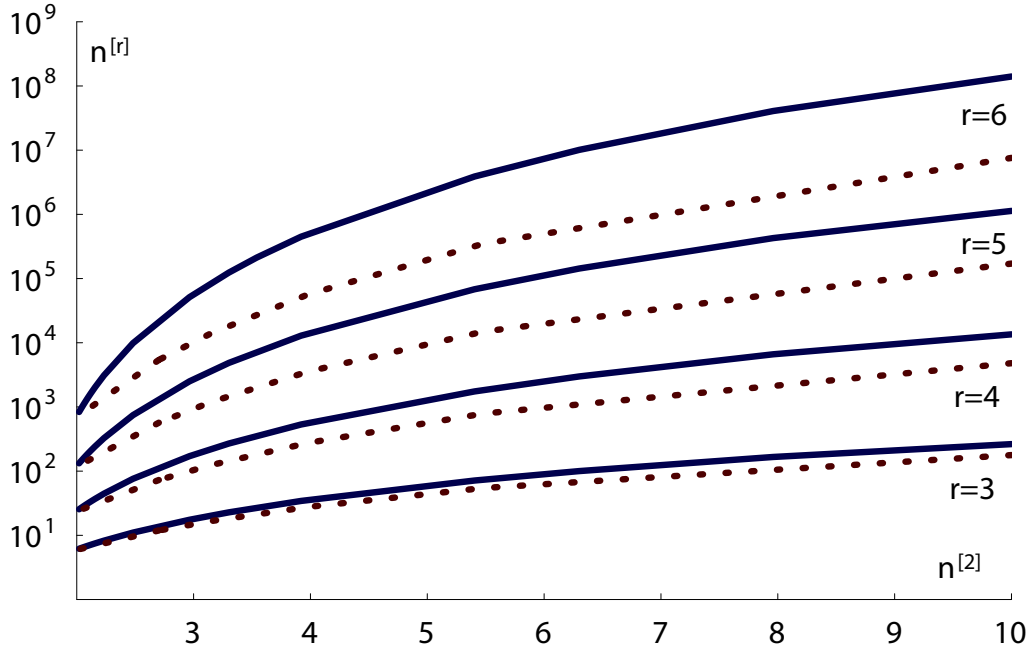


Рис. 2: Нормированные статистические моменты интенсивности. Сплошная кривая - К-распределение, пунктирная кривая - Γ -распределение.

больших N . Это в действительности имеет место, при $\alpha \rightarrow \infty$ эти две формулы асимптотически переходят в уравнения (34) и (37) в соответствии с центральной предельной теоремой.

Функции (40) редко встречались в литературе в качестве распределений вероятности [5, 11], но часто использовались как модельные структурные (корреляционные) функции, как это было впервые предложено Татарским [4]. Кроме того, подобные функции распределения возникают в задачах статистики потоков энергии в случайных волновых полях [14]. Нормированные моменты (41) удобны для сравнения теории с экспериментальными данными, поскольку они являются функцией единственного параметра α . Второй момент

$$n^{[2]} = 2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \quad (42)$$

представляет собой удобную количественную характеристику отклонения статистики от Гауссовского распределения. На рисунке 2 показана зависимость высших моментов распределения интенсивности $n^{[r]}$ от второго момента $n^{[2]}$ для различных негауссовских распределений вероятности. Можно показать, что нормированные моменты К-распределений всегда находятся в пределах между Рэлеевским и логарифмически нормальным распределением с теми же значениями $n^{[1]}$ и $n^{[2]}$ [8].

Очевидно, распределение Вейбулла с двумя параметрами b и β

$$p(A) = 2\beta b A (bA^2)^{\beta-1} \exp(-b^\beta A^{2\beta}) \quad (43)$$

с $b = \Gamma(1 + \beta^{-1}) / \langle A^2 \rangle$ и нормированными моментами интенсивности

$$n^{[r]} = \Gamma(1 + r/\beta) / \Gamma'(1 + \beta^{-1}) \quad (44)$$

близки к К-распределениям в широком диапазоне значений второго момента интенсивности. На самом деле, они равны при $n^{[2]} = 2$ ($\alpha \rightarrow \infty, \beta = 1$) и $n^{[2]} = 6$ ($\alpha = \beta = 1/2$). Однако, аналитические свойства распределения Вейбулла (43) менее привлекательны для исследователя, чем свойства К-распределений (в частности, они не являются бесконечно делимыми). Кроме того, возможные пути построения теории совместных распределений многих величин типа Вейбулла пока не ясны. С другой стороны, для К-распределений это можно сделать на основе уравнения баланса (18).

2.2.2 Корреляционные свойства.

Рассмотрим корреляционную функцию $\langle E(t)E(t') \rangle$, где $t' = t + \tau$ и $\tau > 0$. Из N шагов, присутствующих в результате случайного блуждания в момент времени t , N_s сохранится к моменту времени $t' = t + \tau$, $N - N_s$ исчезнет, и $N' - N_s$ новых шагов вновь появится, где N' - число шагов в момент времени t' . Корреляционная функция комплексной амплитуды, таким образом, может быть записана в форме

$$\langle E(t)E^*(t') \rangle = \left\langle \left(\sum_s a_s e^{i\phi_s} + \sum_d a_d e^{-i\phi_d} \right) \times \left(\sum_s a'_s e^{i\phi'_s} + \sum_n e^{-i\phi'_n} \right) \right\rangle, \quad (45)$$

где s означает шаги, сохранившиеся от времени t к моменту t' , d - исчезнувшие за это время шаги и n - вновь возникшие в течение периода времени τ . Поскольку множества $\{\phi_s\}$, $\{\phi_d\}$ и $\{\phi_n\}$ статистически независимы друг от друга и $\{\phi_j\}$ распределены равномерно, (45) немедленно сводится к

$$\langle E(t)E^*(t') \rangle = \langle N_s \rangle \langle a(t)a(t') \rangle \langle \exp[i(\phi(t) - \phi(t'))] \rangle \quad (46)$$

и нормированная корреляционная функция первого порядка может быть записана в виде

$$g^{(1)}(\tau) = \exp(-\mu\tau) \langle \exp[i(\phi(0) - \phi(\tau))] \rangle = \frac{\langle a(0)a(\tau) \rangle}{\langle a^2 \rangle}. \quad (47)$$

Функция корреляции интенсивности второго порядка $\langle I(t)I(t') \rangle$ может быть получена аналогично. Непосредственное вычисление приводит к результату

$$g^{(2)}(\tau) = 1 + \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) |g^{(1)}(\tau)|^2 + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\bar{N}}\right) \theta(\tau) + \frac{1}{\bar{N}} \left(\frac{\langle a^2(0)a^2(\tau) \rangle}{\langle a^2 \rangle^2} - 1 \right) \exp(-\mu\tau), \quad (48)$$

где $g^{(1)}(\tau)$ и $\theta(t)$ определены уравнениями (47) и (23) соответственно. Формулы (47) и (48) являются прямыми следствиями негативного биномиального распределения. Для определения корреляционных свойств, связанных с распределениями (40) (т.е. с К-распределенным шумом), \bar{N} необходимо устремить к бесконечности, так же как при выводе уравнения (39) из уравнения (38). Корреляционная функция первого порядка от этой процедуры не изменится, поскольку от \bar{N} она не зависит, а функция корреляции интенсивности приобретает вид

$$g^{(2)}(\tau) = 1 + \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) |g^{(1)}(\tau)|^2 + \frac{1}{\alpha} \theta(\tau). \quad (49)$$

Если здесь положить $\tau = 0$, получим выражение (42) для второго момента интенсивности. Соотношение (49) соответствует известной теореме факторизации Зигерта для комплексного гауссовского поля (5) и переходит в него в пределе больших α . Формула (47) учитывает как время жизни отдельных шагов в случайном блуждании (т.е. элементарных вкладов в рассеянное поле), так и флуктуации их амплитуды, но временные корреляционные свойства интенсивности чаще определяются флуктуациями их фазы. В выражении для корреляционной функции интенсивности второго порядка (49) можно выделить вклады двух типов: флуктуации числа рассеивателей $\theta(\tau)$ и "интерференционный" член, пропорциональный $|g^{(1)}(\tau)|^2$. Зависимость этих двух вкладов от времени, как правило, совершенно различна.

Действуя по схеме вычислений, использованной для вывода уравнения (45), можно также определить свойства совместных распределений вероятности высших порядков. Характеристическая функция совместного распределения двух величин может быть записана следующим образом

$$C_{\bar{N}}(\vec{u}, \vec{v}) = \langle \exp(iu_1 E_1 + iu_2 E_2 + iv_1 E'_1 + iv_2 E'_2) \rangle = \langle A^{N_s} B^{N-N_s} D^{N'-N_s} \rangle, \quad (50)$$

где

$$A = \langle \exp(iau_1 \cos \phi + iau_2 \sin \phi + a'v_1 \cos \phi' + a'v_2 \sin \phi') \rangle, \quad (51)$$

$$B = \langle \exp(iau_1 \cos \phi + iau_2 \sin \phi) \rangle, \quad (52)$$

$$D = \langle \exp(ia'v_1 \cos \phi' + ia'v_2 \sin \phi') \rangle. \quad (53)$$

В уравнениях (50-53), так же как и ранее, усреднение производится по амплитудам и фазам элементарных вкладов, индексы 1 и 2 означают действительную и мнимую часть, а штрихованные и нештрихованные параметры относятся к последующим и предыдущим моментам. Вычисление выражения (50) оказывается затруднительным, за исключением определенных предельных случаев, и является предметом отдельного исследования.

2.2.3 Другие подобные законы распределения

В качестве первого примера, рассмотрим некогерентные случайные блуждания, соответствующие уравнению (31):

$$I(t) = \sum_{j=1}^N a_j^2(t). \quad (54)$$

Применяя к этому закону распределения преобразование Лапласа, получим

$$Q_N(s) = \langle \exp(-sI) \rangle = \langle \exp(-sa^2) \rangle^N, \quad (55)$$

и соответствующее предельное распределение можно получить обычным способом, поделив a на $\sqrt{\bar{N}}$ (так что $\langle I \rangle = \langle a^2 \rangle$) и устремляя N к бесконечности:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Q_N(s) = \exp(-s \langle a^2 \rangle), \quad p(I) = \delta(I - \langle I \rangle). \quad (56)$$

Интенсивность (54) в таком пределе оказывается постоянной. С другой стороны, если N - случайная величина, распределенная в соответствии с (17), тогда усреднение уравнения (55) с указанной выше перенормировкой приводит к

$$Q_{\bar{N}}(s) = \left[1 + \frac{\bar{N}}{\alpha} \left(1 - \langle \exp(-\frac{sa^2}{\bar{N}}) \rangle \right) \right]^{-\alpha}, \quad (57)$$

и для соответствующего предельного распределения имеем

$$\lim_{\bar{N} \rightarrow \infty} Q_{\bar{N}}(s) = \left(1 + \frac{s \langle I \rangle}{\alpha} \right)^{-\alpha}. \quad (58)$$

Обращая преобразование Лапласа, приходим к известной формуле плотности вероятности гамма-распределения

$$P(I) = \frac{\alpha}{\langle I \rangle \Gamma(\alpha)} \left(\frac{\alpha I}{\langle I \rangle} \right)^{\alpha-1} \exp \left(-\frac{\alpha I}{\langle I \rangle} \right), \quad (59)$$

которое представляет собой непрерывный аналог дискретного распределения (17). Эти распределения имеют большое практическое значение. В частности, при $\alpha = n/2$ и $\langle I \rangle = 2\alpha$ распределение интенсивности (59) совпадает с χ^2 -распределением с n степенями свободы. Класс распределений (59) часто рассматривался в качестве модели негауссовской статистики и также использовался в теоретических исследованиях свойств распределений [7]. При $n \geq 1$ распределение (59) совпадает с m -распределением Накагами. Нормированные моменты распределения (59) соответственно равны

$$n^{[r]} = \frac{\langle I^r \rangle}{\langle I \rangle^r} = \frac{\Gamma(r + \alpha)}{\alpha^r \Gamma(r)}, \quad (60)$$

что в $r!$ раз меньше соответствующих моментов для К-распределения (рис. 2). На самом деле, можно показать что К-распределение есть распределение произведения двух независимых случайных величин, каждая из которых распределена в соответствии с гамма-распределением [11]. Однако, такую простую факторизацию не удастся распространить на корреляционные функции К-распределенных шумов, полученные при помощи уравнения баланса (18).

Совместные распределения гамма-распределенных величин можно получить из (54) с использованием уравнения баланса (18) и процедуры, примененной в предыдущем разделе. В качестве примера, совместное преобразование Лапласа такого распределения $Q(s, s') = \langle \exp(-sI(t) - s'I(t')) \rangle$ и соответствующая функция распределения имеют вид

$$Q(s, s') = \left[\left(1 + \frac{s \langle I \rangle}{\alpha} \right) \left(1 + \frac{s' \langle I \rangle}{\alpha} \right) - \frac{ss' \langle I \rangle^2 \theta(\tau)}{\alpha^2} \right]^{-\alpha} \quad (61)$$

и

$$P(I, I') = \frac{\alpha^2}{\langle I \rangle^2 \Gamma(\alpha)(1 - \theta)} \left(\frac{\alpha}{\langle I \rangle} \sqrt{\frac{II'}{\theta}} \right)^{-1} \exp \left(-\frac{\alpha(I + I')}{\langle I \rangle (1 - \theta)} \right) I_{\alpha-1} \left(\frac{2\alpha \sqrt{II'\theta}}{\langle I \rangle (1 - \theta)} \right), \quad (62)$$

где $I_{\alpha-1}(\cdot)$ - модифицированная функция Бесселя первого рода порядка $\alpha - 1$. Нормированная функция корреляции интенсивности первого порядка равна

$$\frac{\langle II' \rangle}{\langle I \rangle^2} = 1 + \frac{\theta(\tau)}{\alpha}, \quad (63)$$

которую можно получить непосредственно из формулы (49), если в ней пренебречь "интерференционным" членом, пропорциональным $|g^{(1)}(\tau)|^2$.

В качестве второго примера распределений, относящихся к классу (16), вкратце рассмотрим статистику распределения суммы К-распределенного шума и вектора постоянной величины. В случае когерентного сложения К-распределенного

шума с сигналом случайной фазы, но постоянной амплитуды a_0 , характеристическая функция предельного распределения из уравнения (39) равна

$$\lim_{\bar{N} \rightarrow \infty} C_{\bar{N}} = \frac{J_0(ua_0)}{(1 + u^2 \langle a^2 \rangle / 4\alpha)^\alpha}. \quad (64)$$

Обратное преобразование Лапласа в (64) затруднительно, но моменты интенсивности можно вычислить в виде конечных сумм:

$$n^{[r]} = \frac{(r!)^2}{(1+x)^r} \sum_{n=0}^r \binom{n+\alpha+1}{n} \frac{(x/\alpha)^n}{[(r-n)!]^2}, \quad (65)$$

где

$$x = \frac{\langle a^2 \rangle}{a_0^2} \quad (66)$$

представляет собой отношение средней интенсивности К-распределенного шума к интенсивности сигнала постоянной амплитуды. В частности,

$$\langle A^2 \rangle = a_0^2(1+x), \quad (67)$$

$$n^{(2)} = \frac{1+4x+2x^2(1+\alpha^{-1})}{(1+x)^2}. \quad (68)$$

3 Обобщенное К-распределение: статистическая модель для слабого рассеяния.

С тех пор как было впервые предложено К-распределение [17], оно было с успехом применено для описания негауссовых статистических свойств излучения, рассеянного самыми различными объектами, в том числе земной и морской поверхностью, а также локализованными областями турбулентности. Было обнаружено, что когерентное освещение коррелированных групп рассеивающих объектов приводит к отражениям с негауссовским распределением вероятности интенсивности отражения. Более точно, если число рассеивателей, участвующих в рассеянии, подчиняется отрицательному биномиальному распределению, то в пределе большого среднего числа рассеивателей \bar{N} интенсивность рассеянного излучения действительно распределена в соответствии с К-распределением. Поскольку комплексное рассеянное электрическое поле можно представить в виде двухкомпонентного вектора, его можно считать результатом двумерных случайных блужданий в плоскости с количеством шагов, распределенных в соответствии с негативным биномиальным

распределением. В попытках обобщить модель в область более слабого рассеяния, Баракатом [16] была предложена модель подобного типа с неравномерным распределением фазы элементарных рассеивателей ϕ , отражающим частичную когерентность рассеянного поля. Удобной моделью является распределение фазы в форме фон Мизеса

$$P(\phi) = \frac{\exp(v \cos \phi)}{2\pi I_0(v)}, \quad (69)$$

где $I_0(\cdot)$ - модифицированная функция Бесселя первого рода, и v - параметр распределения. В зависимости от значения параметра распределение приближается к равномерному $P(\phi) = 1/2\pi$ ($v = 0$) или к дельта функции $P(\phi) = \delta(\phi)$ ($v \rightarrow \infty$). Следуя процедуре, полностью аналогичной той, которая использовалась при выводе К-распределения, при таком предположении получается другой класс распределений - обобщенные К-распределения.

3.1 Случайные блуждания в n измерениях: К-распределение и распределение Райса.

Прежде чем перейти к выводу обобщенных К-распределений, основанном на модели n -мерных случайных блужданий со смещением со случайным распределением числа шагов, покажем, что обычная модель случайных блужданий с равномерным распределением фазы в n измерениях также приводит к стандартному К-распределению. Также в качестве вспомогательной задачи рассмотрим статистику суммы постоянного n -вектора и n -мерного действительного гауссовского случайного процесса. Решением этой задачи является так называемое обобщенное распределение Райса [18], также играющее важную роль в задачах рассеяния.

После N шагов в n -мерном случайном блуждании, результирующее отклонение от начальной точки равно

$$\vec{A} = \sum_{j=1}^N \vec{a}_j, \quad (70)$$

где \vec{A} и \vec{a}_j - n -мерные векторы. Для исследования статистических свойств \vec{A} , мы определим характеристическую функцию $C_N(\vec{u})$, где \vec{u} - также n -мерный вектор:

$$= \int \exp(-i\vec{u}\vec{A}) P(A) d^n A = \langle \exp(i\vec{u}\vec{A}) \rangle. \quad (71)$$

Если все шаги \vec{a}_j статистически независимы, эта характеристическая функция разлагается в произведение N множителей. Если все \vec{a}_j одинаково распределены, тогда все эти множители также одинаковы и характеристическая функция

записывается в виде

$$C_N(\vec{u}) = \langle \exp(i\vec{u}\vec{A}) \rangle^N . \quad (72)$$

Для случайных блужданий без смещения, направление всех \vec{a}_j равномерно распределено на n -мерной единичной (гипер)сфере Ω_n . Учитывая, что

$$\int d\Omega_n(\vec{a}) \exp(i\vec{u}\vec{a}) = \frac{(2\pi a)^{n/2}}{u^{(n/2)-1}} J_{(n/2)-1}(au) , \quad (73)$$

где $d\Omega_n(\vec{a})$ - элемент поверхности гиперсферы радиуса a в n измерениях, $u = |\vec{u}|$ и $J_\nu(\cdot)$ - функция Бесселя порядка ν , мы находим, что для блужданий без смещения

$$C(\vec{u}) = \frac{(2\pi)^{nN/2}}{u^{[(n/2)-1]N}} \left(\overline{a^{(n/2)} J_{(n/2)-1}(au)} \right)^N , \quad (74)$$

где черта сверху означает усреднение по длине шага a , которое может быть выбрано произвольно. Если мы теперь допустим, что число шагов блужданий случайно распределено в соответствии с отрицательным биномиальным распределением [15], тогда после усреднения по этому распределению мы получим

$$C_N(\vec{u}) = \sum_{N=0} P(N) C_N(\vec{u}) \quad (75)$$

$$= \left[1 + \frac{\bar{N}}{\alpha} \left(1 - \frac{(2\pi)^{(n/2)}}{u^{(n/2)-1}} \overline{a^{(n/2)-1} J_{n/2}(ua)} \right) \right]^{-\alpha} , \quad (76)$$

где P_N - вероятность распределения числа шагов блужданий (17)

$$P_N = \binom{N + \alpha - 1}{N} \frac{(\bar{N}/\alpha)^N}{(1 + \bar{N}/\alpha)^{N+\alpha}} , \quad \alpha > 0 , \quad (77)$$

где $\binom{a}{b}$ - обыкновенный биномиальный коэффициент, α - параметр, характеризующий степень группировки объектов (рассеивателей), неявно учитываемую негативным биномиальным распределением. Если мы сейчас произведем соответствующую нормировку $a \rightarrow a/(\bar{N})^{1/2}$ и устремим \bar{N} к бесконечности, мы для характеристической функции получим

$$C(\vec{u}) = \lim_{\bar{N} \rightarrow \infty} C_N(\vec{u}) = \left(1 + \frac{u^2 \overline{a^2}}{2n\alpha} \right)^{-\alpha} . \quad (78)$$

Предельное распределение \vec{A} получается обращением преобразования Фурье

$$P(\vec{A}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{-i\vec{u}\vec{A}} C(\vec{u}) d^n u = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} A^{(n/2)-1}} \int_0^\infty du \left(1 + \frac{u^2 \bar{a}^2}{2n\alpha}\right)^{-\alpha} u^{n/2} J_{(n/2)-1}(uA) \quad (79)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{A^{\alpha-(n/2)} b^{(n/2)+\alpha}}{2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha)} K_{\alpha-(n/2)}(bA),$$

где $b = \sqrt{2n\alpha/\bar{a}^2}$. Соответствующее распределение амплитуды вектора \vec{A} равно

$$P(A) = \int d\Omega_n(\vec{A}) P(\vec{A}) = \frac{A^{\alpha+(n/2)-1} b^{(n/2)+\alpha} K_{\alpha-(n/2)}(bA)}{2^{\alpha-2+(n/2)} \Gamma(\alpha) \Gamma(n/2)}, \quad (80)$$

которое, как можно видеть, при $n = 2$ совпадает с К-распределением для модели двумерных блужданий. Полагая в уравнении (78) α бесконечным, получим

$$C(u) = \exp\left(-\frac{u^2 \bar{a}^2}{2n}\right), \quad (81)$$

и соответствующее предельное распределение для амплитуды результирующего вектора A оказывается равным

$$P(A) = 2 \left(\frac{n}{2\bar{a}^2}\right)^{n/2} \frac{A^{n-1}}{\Gamma(n/2)} \exp\left(-\frac{nA^2}{2\bar{a}^2}\right). \quad (82)$$

Таким образом, К-распределение, обобщенное на случай n измерений, в пределе $\alpha \rightarrow \infty$ приближается к рэлеевскому. Наконец, приведем выражение для четных моментов распределения (80), которые можно рассматривать как моменты интенсивности $I = A^2$:

$$\langle I^r \rangle = \langle A^{2r} \rangle = \left(\frac{2\bar{a}^2}{n\alpha}\right)^r \frac{\Gamma(r+\alpha) \Gamma(r+(n/2))}{\Gamma(\alpha) \Gamma(n/2)}, \quad (83)$$

где $\Gamma(\cdot)$ - стандартная гамма-функция.

Теперь рассмотрим статистические свойства суммы постоянного вектора $\vec{\epsilon}_0$ и действительного n -мерного вектора \vec{s} , изотропно распределенного по Гауссу. Так же, как и в предыдущем случае, рассмотрим характеристическую функцию. Положим

$$\vec{\epsilon} = \vec{\epsilon}_0 + \vec{s}$$

и запишем

$$C(\vec{u}) = \langle e^{i\vec{u}\vec{\epsilon}} \rangle = e^{i\vec{u}\vec{\epsilon}_0} \langle e^{i\vec{u}\vec{s}} \rangle = e^{i\vec{u}\vec{\epsilon}_0} \exp(-u^2\sigma^2/2). \quad (84)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} P(|\epsilon|) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int d\Omega_n(\epsilon) \int d^n u \exp[i\vec{u} \cdot (\epsilon_0 - \epsilon)] \exp(-u^2\sigma^2/2) \\ &= \frac{\epsilon^{n/2}}{\epsilon_0^{(n/2)-1}} \int_0^\infty du u e^{-u^2\sigma^2/2} J_{(n/2)-1}(\epsilon_0 u) J_{(n/2)-1}(\epsilon u) = \frac{\epsilon^{n/2}}{\epsilon_0^{(n/2)-1} \sigma^2} I_{(n/2)-1} \left(\frac{\epsilon\epsilon_0}{\sigma^2} \right) \exp \left(-\frac{\epsilon_0^2 + \epsilon^2}{2\sigma^2} \right) \end{aligned} \quad (85)$$

Это распределение является обобщением распределения Райса на случай n -мерной случайной величины. Четные моменты этого распределения (моменты интенсивности) соответственно равны

$$\begin{aligned} \langle \epsilon^{2r} \rangle &= \frac{1}{\sigma^2 \epsilon_0^{(n/2)-1}} \exp \left(-\frac{\epsilon_0^2}{2\sigma^2} \right) \int_0^\infty d\epsilon \epsilon^{(n/2)+2r} I_{(n/2)-1} \left(\frac{\epsilon\epsilon_0}{\sigma^2} \right) \exp \left(-\frac{\epsilon^2}{2\sigma^2} \right) \\ &= \frac{\Gamma((n/2) + r)}{\Gamma(n/2)} (2\sigma^2)^r \exp \left(-\frac{\epsilon_0^2}{2\sigma^2} \right) {}_1F_1 \left(\frac{n}{2} + r; \frac{n}{2}; \frac{\epsilon_0^2}{2\sigma^2} \right) = r! (2\sigma^2)^r L_r^{[(n/2)-1]} \left(\frac{-\epsilon_0^2}{2\sigma^2} \right). \end{aligned} \quad (86)$$

При выводе этого результата использовался табличный интеграл и первое преобразование Куммера конфлюэнтной гипергеометрической функции ${}_1F_1(\cdot)$ [20]. Уравнение (86) также является обобщением известного результата для распределения Райса и сводится к нему в частном случае $n = 2$. Результаты (82) и (85) обсуждались ещё в работах Накагами [10].

3.2 Случайные блуждания в n -мерном пространстве со смещением: обобщенное К-распределение

Теперь мы рассмотрим статистические свойства результирующего вектора случайных блужданий со смещением в n -мерном пространстве при случайном числе шагов, распределенных в соответствии с негативным биномиальным распределением. Покажем, что обобщенное К-распределение получается с помощью процедуры предельного перехода, которая не зависит от конкретного вида смещения в случайных блужданиях. Как оказывается, этот результат не является следствием специального вида модели распределения фазы (фон Мизеса) и легко обобщается на случай произвольной размерности пространства случайных блужданий. На

самом деле, анализ общего случая не представляет сложностей по сравнению с исследованием частного случая $n=2$.

Результирующая сумма N шагов случайных блужданий также выражается соотношением (70). Вид характеристической функции (75) показывает, что направление шага \vec{a} уже не является изотропно распределенным, хотя его направление и длина все еще могут считаться статистически независимыми. Таким образом, можно ввести распределение вероятности $f(\hat{a})$ направления шага \vec{a} (\hat{a} - единичный вектор, указывающий направление шага \vec{a}) и записать $C_N(\vec{u})$ как

$$C_N(\vec{u}) = \left[\int_0^\infty da p(a) \int d\Omega_n(\vec{a} e^{i\vec{a}\vec{u}} f(\hat{a})) \right]^N. \quad (87)$$

Выкладки, аналогичные примененным в разделе 3.1, приводят к

$$C_{\bar{N}} = \left\{ 1 + \frac{\bar{N}}{\alpha} \left[1 - \int_0^\infty da p(a) \int d\Omega_n(\vec{a}_e^{i\vec{a}\vec{u}} f(\hat{u})) \right] \right\}^{-\alpha}. \quad (88)$$

Теперь перейдем к пределу больших чисел \bar{N} , с соответствующей нормировкой длины шага, учитывая, что площадь поверхности единичной n -мерной гиперсферы равна [28]

$$\Omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}. \quad (89)$$

³ Таким образом, мы полагаем $a \rightarrow a/(\bar{N})^{1/2}$ и выделяем отклонение распределения $f(\hat{a})$ от изотропного в отдельное слагаемое $f_1(\hat{a})$ в соответствии с формулой

$$f(\hat{a}) = \frac{1 + f_1(\hat{a})/\bar{N}^{1/2}}{\Omega_n + 1/\bar{N}^{1/2} \int d\Omega_n(\hat{a}) f_1(\hat{a})}, \quad (90)$$

³Площадь поверхности сферы в n -мерном пространстве нетрудно вычислить следующим образом [29]. Рассмотрим интеграл

$$\int \exp(-x_1^2 - \dots - x_n^2) dx^n$$

по всему пространству n переменных. Разделяя переменные в этом интеграле, с одной стороны, и переходя к n -мерным сферическим координатам, с другой, замечаем, что

$$\Omega_n \int_0^\infty \exp(-r^2) r^{n-1} dr = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2) dx \right]^n.$$

Вычисляя определенные интегралы в правой и левой частях, получим выражение (89) для площади n -мерной гиперсферы.

которое будем считать произвольным, при условии, что $f(\hat{a})$ остается положительным и интегрируемым.

Разлагая характеристическую функцию в ряд Тейлора по \bar{N}^{-1} и ограничиваясь первым членом разложения, мы получим

$$C_N(\vec{u}) \sim \left(1 - \frac{u^2 \bar{a}^2}{2n\bar{N}} + \frac{i\vec{u} \cdot \vec{\delta}}{\bar{N}} \right)^{\bar{N}}, \quad (91)$$

где δ - вектор моментов $f_1(\vec{a})$, т.е.

$$\delta = \int_0^\infty da p(a) \int d\Omega_n(\vec{a}) \vec{a} f_1(\hat{a}). \quad (92)$$

Окончательно, переходя в (91) к пределу $\bar{N} \rightarrow \infty$, получим

$$\lim_{\bar{N} \rightarrow \infty} C_N(\vec{u}) = \left(1 + \frac{u^2 \bar{a}^2}{2n\alpha} - \frac{i\vec{u} \cdot \vec{\delta}}{\alpha} \right)^{-\alpha}. \quad (93)$$

Распределение вероятности для суммарного вектора \vec{A} получается обратным преобразованием Фурье:

$$\begin{aligned} P(\vec{A}) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n u \exp(-i\vec{A} \cdot \vec{u}) \left(1 + \frac{u^2 \bar{a}^2}{2n\bar{N}} - \frac{i\vec{u} \cdot \vec{\delta}}{\bar{N}} \right)^{-\alpha} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n \omega \exp(-i\vec{A} \cdot (\vec{\omega} + in\delta/\bar{a}^2)) \left(1 + \frac{n\delta^2}{2\alpha\bar{a}^2} + \frac{\bar{a}^2\omega^2}{2n\alpha} \right)^{-\alpha}, \end{aligned} \quad (94)$$

где произведена замена переменных $\vec{\omega} = \vec{u} - in\delta/\bar{a}^2$. Распределение амплитуды вектора $|\vec{A}|$ находится как

$$\begin{aligned} P(A) &= \int d\Omega_n(\vec{A}) P(\vec{A}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int d\Omega_n(\vec{A}) \int_0^\infty d\omega d\Omega_n(\omega) \exp(-i\vec{A} \cdot (\vec{\omega} + in\delta/\bar{a}^2)) \left(1 + \frac{n\delta^2}{2\alpha\bar{a}^2} + \frac{\bar{a}^2\omega^2}{2n\alpha} \right)^{-\alpha}. \end{aligned} \quad (95)$$

Из уравнения (73) и определения модифицированной функции Бесселя $I_\nu(z)$

$$I_\nu u(z) = \exp(-i\pi\nu/2) J_\nu(e^{i\pi/2} z)$$

МЫ ВИДИМ, ЧТО

$$\begin{aligned}
P(A) &= \frac{A}{(2\pi A)^{n/2}} \int \Omega_n(\vec{A}) e^{(-i\vec{A} \cdot (in\vec{\delta}/\bar{a}^2))} \int_0^\infty d\omega \omega^{n/2} J_{(n/2)-1}(A\omega) \left(1 + \frac{n\delta^2}{2\alpha\bar{a}^2} + \frac{\bar{a}^2\omega^2}{2n\alpha}\right)^{-\alpha} \\
&= A^\alpha I_{(n/2)-1} \left(\frac{n\delta A}{\bar{a}^2}\right) K_{(n/2)-\alpha}(Ab) \left(\frac{2n\alpha}{\bar{a}^2}\right)^\alpha \frac{b^{(n/2)-\alpha}}{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\bar{a}^2}{n\delta}\right)^{(n/2)-1},
\end{aligned} \tag{96}$$

где

$$b^2 = \frac{2n\alpha}{\bar{a}^2} + \frac{n^2\delta^2}{(\bar{a}^2)^2}.$$

На этом процедура вывода обобщённого К-распределения завершается. Легко видеть, что при $\delta \rightarrow 0$ оно переходит в обычное К-распределение (80). Это немедленно следует из известных свойств модифицированной функции Бесселя $I_{(n/2)-1}(z)$ при малых аргументах

$$I_{(n/2)-1}(z) \sim \frac{(z/2)^{(n/2)-1}}{\Gamma(n/2)}. \tag{97}$$

С другой стороны, при очень большом смещении $\delta/\bar{a}^2 \rightarrow \infty$ с помощью асимптотики модифицированных функций Бесселя при больших аргументах можно показать, что формула (96) сводится к обычному гамма-распределению

$$p(A) = \frac{\alpha(\alpha A)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \exp(-\alpha A). \tag{98}$$

Наконец, в пределе $\alpha \rightarrow \infty$ обобщенное К-распределение с точностью до переобозначения параметров приближается к обобщенному распределению Райса (83). Это может быть наиболее просто показано с помощью характеристической функции (93); переходя к пределу $\alpha \rightarrow \infty$, мы получаем

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{u^2\bar{a}^2}{2n\alpha} - \frac{i\vec{u} \cdot \vec{\delta}}{\alpha}\right)^{-\alpha} = \exp\left(-\frac{u^2\bar{a}^2}{2n} + i\vec{u} \cdot \vec{\delta}\right). \tag{99}$$

Сравнение с выводом формулы (85) показывает, что распределение вероятности $P(A)$ сходится к

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} P(A) = \frac{A^{n/2}}{\delta^{(n/2)-1}} \frac{n}{\bar{a}^2} I_{(n/2)-1} \left(\frac{n\delta A}{\bar{a}^2}\right) \exp\left(-\frac{n(\delta^2 + A^2)}{2\bar{a}^2}\right). \tag{100}$$

Четные моменты распределения (96) могут быть выражены в замкнутой аналитической форме в виде

$$\begin{aligned} \langle A^{2r} \rangle &= \left(\frac{2n\alpha}{\bar{a}^2} \right)^\alpha \frac{b^{(n/2-\alpha)}}{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\bar{a}^2}{n\delta} \right)^{(n/2)-1} \int_0^\infty dA A^{\alpha+2r} I_{(n/2)-1} \left(\frac{n\delta A}{\bar{a}^2} \right) K_{(n/2)-\alpha}(bA) \\ &= (4/b^2)^r \left(1 + \frac{n\delta^2}{2\alpha\bar{a}^2} \right)^{-\alpha} \frac{\Gamma((n/2)+r)\Gamma(r+\alpha)}{\Gamma(n/2)\Gamma(\alpha)} {}_2F_1 \left(r + \frac{n}{2}, r + \alpha; \frac{n}{2}; \xi \right), \end{aligned} \quad (101)$$

где

$$\xi = \frac{n^2\delta^2}{(\bar{a}^2)^2} \left(\frac{2n\alpha}{\bar{a}^2} + \frac{n^2\delta^2}{(\bar{a}^2)^2} \right)^{-1}. \quad (102)$$

После небольших преобразований с использованием известных свойств гипергеометрических функций, эти моменты можно выразить с помощью полиномов Якоби

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = 2^{-n} \sum_{m=0}^n \binom{n+\alpha}{m} \binom{n+\beta}{n-m} (x-1)^{n-m} (x+1)^m, \quad (103)$$

в виде формулы

$$\langle A^{2r} \rangle = \left(\frac{2\bar{a}^2}{n\alpha} \right)^r \frac{r!\Gamma(r+\alpha)}{\Gamma(\alpha)} P_r^{(n,2)-1,\alpha-(n/2)} \left(1 + \frac{n\delta^2}{\alpha\bar{a}^2} \right), \quad (104)$$

по которой можно вычислять моменты не очень высокого порядка. Заметим, что при $\alpha \rightarrow \infty$ имеет место слияние особенностей гипергеометрической функции. Это приводит к результату

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \langle A^{2r} \rangle = \exp \left(-\frac{n\delta^2}{2(\bar{a}^2)^2} \right) \left(\frac{2\bar{a}^2}{n} \right)^r \frac{\Gamma((n/2)+r)}{\Gamma(n/2)} \alpha^r {}_1F_1 \left(r + \frac{n}{2}; \frac{n}{2}; \frac{n\delta^2}{2(\bar{a}^2)^2} \right). \quad (105)$$

Сравнение с формулой (86) показывает, что этот результат согласуется с поведением распределения (96) в том же самом пределе $\alpha \rightarrow \infty$.

3.3 Комбинированные представления.

Установление того факта, что рэлеевский случайный процесс, второй момент которого распределен по закону гамма-распределения, подчиняется К-распределению, привел к значительному углублению понимания физических процессов, лежащих в основе явлений рассеяния с негауссовской статистикой. Это заключение было

сделано как путем формальной процедуры математического вывода, так и в результате анализа данных экспериментов по негауссовскому рассеянию микроволнового излучения морской поверхностью. Далее, это так называемое комбинированное представление К-распределения как распределение случайной величины, параметры распределения которой сами являются случайными величинами, было положено в основу множества моделей рассеяния волн морской и земной поверхностью, и на более формальном уровне, явилось серьезной поддержкой теоретических представлений о динамике К-распределенных процессов, базирующихся на уравнениях баланса, стохастических дифференциальных уравнениях, уравнении Фоккера-Планка и т.д. В случае n -мерного обобщения К-распределения, а также обобщенного К-распределения, такое комбинированное представление может быть получено непосредственно из характеристической функции (78).

Таким образом, из уравнения (78) можно получить, что

$$P(\vec{A}) = \frac{A}{(2\pi A)^{n/2}} \int_0^\infty du u^{n/2} J_{(n/2)-1}(uA) \left(1 + \frac{u^2 \bar{a}^2}{2n\alpha}\right)^{-\alpha}. \quad (106)$$

Хотя интеграл можно непосредственно вычислить, что приведет к формуле (79), преобразуем его с помощью интегрального представления характеристической функции

$$\left(1 + \frac{u^2 \bar{a}^2}{2n\alpha}\right)^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty dx x^{\alpha-1} \exp\left[-x \left(1 + \frac{u^2 \bar{a}^2}{2n\alpha}\right)\right]. \quad (107)$$

После изменения порядка интегрирования формула (106) принимает вид

$$\begin{aligned} P(\vec{A}) &= \frac{A}{(2\pi A)^{n/2} \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty dx x^{\alpha-1} e^{-x} \int_0^\infty du u^{n/2} J_{(n/2)-1}(uA) \exp\left(-\frac{u^2 \bar{a}^2 x}{2n\alpha}\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \Gamma(\alpha)} \left(\frac{n\alpha}{\bar{a}^2}\right)^{n/2} \int_0^\infty dx x^{\alpha-1-(n/2)} \exp\left(-x - \frac{n\alpha A^2}{2\bar{a}^2 x}\right). \end{aligned} \quad (108)$$

Интегрирование по всевозможным ориентациям \vec{A} даёт

$$P(A) = \int P_{RA}(A|x) P_\gamma(x) dx, \quad (109)$$

где

$$P_{RA}(A|x) = \frac{1}{\Gamma(n/2)} \left(A \sqrt{\frac{n\alpha}{a^2 x}} \right)^{n-1} \sqrt{\frac{a^2 x}{n\alpha}} \exp\left(-\frac{n\alpha A^2}{2a^2 x}\right) \quad (110)$$

представляет собой Рэлеевское распределение, обобщенное на n -мерный случай, со средним квадратом, пропорциональным x , и

$$P_\gamma(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-x) \quad (111)$$

есть гамма распределение, которому подчинены флуктуации этого среднеквадратичного значения. Формулы (108) и (109) фактически являются математической формулировкой утверждения, сделанного в начале этого раздела.

Действуя подобным образом, получим формальный вывод уравнения (93). Подставляя интегральное представление

$$C(u) = \left(1 + \frac{u^2 \bar{a}^2}{2n\alpha} - \frac{i\vec{u} \cdot \vec{\delta}}{\alpha} \right)^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty dx x^{\alpha-1} \exp\left[-x \left(1 + \frac{u^2 \bar{a}^2}{2n\alpha} - \frac{i\vec{u} \cdot \vec{\delta}}{\alpha} \right)\right] \quad (112)$$

в уравнение (94), получим

$$P(\vec{A}) = \frac{(2\pi)^{-n/2}}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{n\alpha}{\bar{a}^2} \right)^{n/2} \exp\left(\frac{n}{a^2} \vec{\delta} \cdot \vec{A}\right) \int_0^\infty dx x^{\alpha-1-(n/2)} \exp\left[-x \left(1 + \frac{n\delta^2}{2a^2} \right) - \frac{n\alpha A^2}{2a^2 x}\right]. \quad (113)$$

Усреднение по всевозможным ориентациям \vec{A} теперь даст

$$P(A) = \int_0^\infty P_{RI}(A|x) P_\gamma(x) dx, \quad (114)$$

где P_γ - гамма-распределение (111) и

$$P_{RI}(A|x) = \left(\frac{\alpha A}{\delta x} \right)^{n/2} \left(\frac{n\delta}{a^2} \right) I_{(n/2)-1} \left(\frac{An\delta}{a^2} \right) \exp\left(-\frac{n^2 x^2}{2\alpha a^2} - \frac{A^2 n\alpha}{2a^2 x}\right) \quad (115)$$

есть распределение Райса, обобщенное на n -мерный случай (см. формулу (85)), в котором

$$\sigma^2 = \frac{a^2 x}{n\alpha} \quad (116)$$

и

$$\epsilon_0 = \frac{\delta x}{\alpha}. \quad (117)$$

Таким образом, в то время как К-распределение (80) можно рассматривать как распределение Рэлея со средним квадратом, распределенным по закону гамма-распределения, обобщенное К-распределение, в свою очередь, можно рассматривать как распределение Райса, в котором средний квадрат случайной компоненты (шума) (116) и амплитуда когерентной составляющей (117) также распределены по закону гамма-распределения с неким коэффициентом корреляции.

Интересно сравнить предыдущие результаты с распределением суммы векторных величин, одна из которых распределена по закону К-распределения, а другая постоянна [17]. Это также можно сделать с помощью процедуры, предложенной в разделе 3.1. Добавим вектор постоянного модуля со случайным распределением фазы \vec{a}_0 к правой части уравнения (70). Это приведет к появлению дополнительного множителя $\exp(\vec{u} \cdot \vec{a})$ в правой части уравнения (72), и после усреднения по углу с помощью соотношения (73) мы вместо (80) получим

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{A^{n/2}}{a_0^{(n/2)-1}} \int_0^\infty du u J_{(n/2)-1}(ua_0) J_{(n/2)-1}(uA) \left(1 + \frac{u^2 \bar{a}^2}{2n\alpha}\right)^{-\alpha} = \quad (118) \\ &\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{A}{a_0}\right)^{(n-1)/2} \sqrt{\frac{2n\alpha}{\pi a^2}} \sum_{m=0}^\infty \binom{\frac{n}{2} - 1, m}{} \times \left(\frac{\bar{a}^2}{n\alpha a_0 A}\right)^m \left(\frac{n\alpha}{2a^2}\right)^{[\alpha+m-(1/2)]/2} \times \\ &\times \left[(-1)^m |a_0 - A|^{\alpha+m-(1/2)} K_{\alpha+m-(1/2)} \left(\sqrt{\frac{2n\alpha}{a^2}} |a_0 - A|\right) \right. \\ &\left. + \cos \frac{\pi}{2} (n-1) |a_0 + A|^{\alpha+m-(1/2)} K_{\alpha+m-(1/2)} \left(\sqrt{\frac{2n\alpha}{a^2}} |a_0 + A|\right) \right], \end{aligned}$$

где

$$(\nu, m) = \frac{\Gamma(1/2 + \nu + m)}{m! \Gamma(1/2 + \nu - m)} \quad (119)$$

- символ Ганкеля. В случае нечетных значений размерности n суммы в (118) оказываются конечными, в частности,

$$P(A) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sqrt{\frac{2\alpha}{\pi a^2}} \left(\frac{\alpha}{2a^2}\right)^{[\alpha-(1/2)]/2} \quad (120)$$

$$\left[|a_0 - A|^{\alpha-(1/2)} K_{\alpha-(1/2)} \left(\sqrt{\frac{2\alpha}{a^2}} |a_0 - A|\right) + |a_0 + A|^{\alpha-(1/2)} K_{\alpha-(1/2)} \left(\sqrt{\frac{2\alpha}{a^2}} |a_0 + A|\right) \right]$$

при $n = 1$ и

$$P(A) = \frac{A}{a_0 \Gamma(\alpha)} \sqrt{\frac{6\alpha}{\pi a^2}} \left(\frac{3\alpha}{2a^2} \right)^{[\alpha - (1/2)]/2} \quad (121)$$

$$\left[|a_0 - A|^{\alpha - (1/2)} K_{\alpha - (1/2)} \left(\sqrt{\frac{6\alpha}{a^2}} |a_0 - A| \right) + |a_0 + A|^{\alpha - (1/2)} K_{\alpha - (1/2)} \left(\sqrt{\frac{6\alpha}{a^2}} |a_0 + A| \right) \right]$$

при $n = 3$. В случае $\alpha = 1$ получается так называемое I - K распределение [21]

$$P(A) = a_0 \left(\frac{A}{a_0} \right)^{n/2} \beta^\alpha \times \begin{cases} I_{(n/2)-1}(A\beta^{1/2}) K_{(n/2)-1}(a_0\beta^{1/2}), & 0 < A < a_0 \\ I_{(n/2)-1}(a_0\beta^{1/2}) K_{(n/2)-1}(A\beta^{1/2}), & a_0 < A < \infty \end{cases} \quad (122)$$

где

$$\beta = \frac{2n\alpha}{a^2}. \quad (123)$$

Выражения для более общего случая $\alpha = m$ можно получить из (122) дифференцированием, учитывая, что

$$(1+x)^{-m} = \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dy^{m-1}} \frac{1}{y+x} \Big|_{y=1}. \quad (124)$$

Четные моменты распределения (118) для любых значений n и α можно выразить в виде многочленов:

$$\langle A^{2r} \rangle = \frac{r! \Gamma((n/2) + r)}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{2a^2}{n\alpha} \right)^r \times \sum_{p=0}^r \frac{\Gamma(r-p+\alpha)}{p!(r-p)! \Gamma((n/2) + p)} \left(\frac{a_0^2 n \alpha}{2a^2} \right)^p. \quad (125)$$

Правую часть формулы (118) с помощью тождества (107) также можно выразить в комбинированном виде

$$P(A) = \int_0^\infty P'_{RI}(A|x) P_\gamma(x) dx, \quad (126)$$

где P_γ - плотность вероятности гамма-распределения (111) и

$$P'_{RI}(A|x) = \left(\frac{A}{a_0} \right)^{n/2} \left(\frac{a_0 n \alpha}{a^2} \right) I_{(n/2)-1} \left(\frac{n \alpha a_0 A}{a^2 x} \right) \exp \left(-\frac{n \alpha}{2a^2 x} (a_0^2 + A^2) \right) \quad (127)$$

- распределение Райса, обобщенное на n -мерный случай с параметрами

$$\sigma^2 = \frac{\overline{a^2 x}}{n\alpha} \quad (128)$$

и

$$\epsilon_0 = a_0. \quad (129)$$

Таким образом, как и следовало ожидать, смещённое К-распределение (118) можно рассматривать как распределение Райса со средним квадратом шумовой компоненты, распределенной согласно гамма-распределению, но с постоянной амплитудой смещения (129). Различие между обобщенными К-распределениями (96) и смещенными К-распределениями (118) - (122), выявленное с помощью комбинированного представления, заключается в различии параметров (117) и (129) и будет обсуждаться в разделе 3.4.

3.4 Приложения: модели статистики рассеянных волн.

Хотя результаты раздела (3.3) являются весьма общими и могут применяться к решению задач, возникающих в самых различных прикладных областях, задачи исследования статистики рассеяния волн случайными рассеивателями приводят главным образом к модели двумерных случайных блужданий и соответствующим распределениям при $n = 2$. Модель двумерных случайных блужданий, безусловно, дает точное описание некоторых простых рассеивателей, и в рамках этой модели ряд практически важных объектов исследован более или менее детально [22]. Кроме того, эта модель также часто применяется для приближенного описания рассеяния протяженными объектами и непрерывными средами, к числу которых относятся шероховатые поверхности, турбулентные жидкости и многое другое [5]. В таком применении эта модель также позволяет сделать некоторые феноменологические выводы о природе наблюдаемых эффектов рассеяния, строгое математическое описание которых абсолютно нереально. В этом разделе будут обсуждаться возможности применения обсуждаемых нами распределений к анализу статистики амплитуды рассеяния волн в непрерывных средах. Как оказывается, корреляционные свойства рассеянного излучения определяются в основном моделью случайных блужданий, лежащей в основе рассмотрения процесса.

В случае рассеяния в непрерывной протяженной среде, параметры случайных блужданий (70) обычно определяются следующим образом. Длина шага блужданий $\{a_j\}$ отождествляется с сечением рассеяния (форм-факторами) неоднородностей коэффициента преломления, вместе с соответствующими фазовыми сдвигами

$\{\phi_j\}$. Предположение о статистической независимости блужданий, неявно принятое при выводе уравнения (72), можно сделать только при наличии внешнего масштаба корреляции флуктуаций в среде, за пределами которого флуктуации могут считаться некоррелированными. N интерпретируется как число корреляционных объемов (или зон, в случае рассеяния двумерным объектом типа поверхности), вклады которых в рассеянное поле могут считаться независимыми. В дальней зоне число N определяется размером области рассеяния, в то время как в зоне Френеля, где существенны эффекты, связанные с кривизной волнового фронта, оно может определяться геометрооптическими или дифракционными эффектами, ограничивающими поле зрения. N обычно считается фиксированным числом. Если далее принять, что фазовые сдвиги $\{\phi_j\}$ распределены равномерно, как это было бы в том случае, когда вносимые неоднородностями среды флуктуации фазы волны составляют много периодов длин волн, тогда в пределе асимптотически больших N из центральной предельной теоремы следует нормальное распределение компонент комплексной амплитуды поля с нулевым средним. Амплитуда и интенсивность рассеянного поля при этом подчиняются Рэлеевскому и экспоненциальному распределению, соответственно. Как хорошо известно, в этом случае интервальная статистика не зависит от свойств $\{a_j\}$, и все корреляционные функции высших порядков могут быть выведены из параметров первой функции когерентности. Таким образом, при рассеянии в гауссовском режиме рассеянное поле несет в себе минимально возможное количество информации о свойствах рассеивающей среды. В дистанционном зондировании это часто является неизбежным, и обработка данных требует какой-либо процедуры редукции. Тем не менее, в случае рассеяния в непрерывной среде случаются многие ситуации, когда полностью развитые спеклы не предсказываются теорией и не наблюдаются в эксперименте. К числу конкретных примеров таких ситуаций относятся не очень сильно шероховатые поверхности, фазы отражения от которых $\{\phi_j\}$ распределены неравномерно, а также экспериментальные конфигурации с высоким разрешением, когда N мало.

В задачах с частично развитыми спеклами, в частности, при отражении от слабо шероховатых поверхностей [5], при больших N обычно привлекают к доказательству центральную предельную теорему без каких-либо уточнений. Однако, в этом случае действительная и мнимая части поля, вообще говоря, коррелируют между собой с ненулевыми средними, в соответствии с выбором свойств $\{\phi_j\}$. Полученную статистическая модель, вероятнее всего, наилучшим образом следует определять как эллиптический коррелированный комплексный гауссовский процесс со смещением. В определенных геометриях рассеяния, систематические приращения фазы могут приводить к некоррелированным компонентам поля с

равными дисперсиями, и к распределению Райса для амплитуды рассеянного поля [23, 24]. Хотя это технически возможно, такая модель в некоторой степени сомнительна. Вычисления Гудмена [25] и других [24, 26] показали, что если параметры модели (т.е. средние и дисперсии) вычисляются для рассеивателя с единственным характерным масштабом, и используются затем для оценки относительной вариации флуктуаций интенсивности, тогда выражение для общего (эллиптического) случая зависит от N , т.е. отношения числа корреляционных зон к единицам разрешения прибора. Следовательно, можно обосновать, что для правильного описания необходимы поправки высшего порядка к центральной предельной теореме. Эти трудности, несомненно, возникают вследствие отсутствия подходящей дискретной модели случайных блужданий, обеспечивающей адекватное представление флуктуаций непрерывной среды в виде дискретных рассеивающих центров. Интересно, что Райсовская статистика флуктуаций, в тех случаях, когда она предсказывается теорией, оказывается независимой от N , что свидетельствует о её асимптотической природе [23, 24].

Хотя N обычно считается асимптотически большим фиксированным числом, очевидно, что эти предположения не могут быть оправданными даже тогда, когда среда характеризуется единственным пространственным масштабом, как, например, в случае Гауссовского спектра флуктуаций коэффициента преломления. Число N может быть небольшим, и безусловно, подвержено флуктуациям. Если придерживаться философии, согласно которой любая новая статистическая модель, заслуживающая внимания, должна обладать некоторой степенью универсальности, тогда мы должны отказаться от вариантов с малым N для одномасштабной модели среды, поскольку в таком случае модель будет зависеть от детальных свойств $\{a_j\}$ и, следовательно, не будет широко применима. В случае многомасштабной среды, однако, согласно нашей изначальной интерпретации, N отождествляется с числом корреляционных ячеек с размером, характеризующихся наибольшим присутствующим в среде характерным масштабом, поскольку только они будут вносить независимые вклады в рассеянное поле. В пределах этих больших ячеек многие мелкие ячейки будут вносить в рассеянное поле свои отдельные вклады, но эти вклады будут коррелированы между собой. Здесь можно говорить о модуляции мелкомасштабных неоднородностей более крупными структурами, что приводит к эффектам кластеризации. Такие вариации текстуры часто наблюдаются в реальных рассеивающих системах типа морской поверхности. Такие эффекты могут учитываться в модели случайных блужданий (70) различными способами, но простейшими из них являются введение флуктуаций числа N или корреляций между $\{a_j\}$, где N теперь интерпретируется как число мелкомасштабных неоднородностей и считается большим или имеющим большое сред-

нее значение. Здесь мы придерживаемся первого способа, восходящего к ранней работе Джейкмена [17]. Оливер [27] показал возможности применения второго подхода, и указал на близкую взаимосвязь между этими двумя методами.

Эффекты флуктуаций среднего в моделях случайных блужданий интенсивно исследовались в связи с задачами рассеяния на частицах и в непрерывных средах, хотя в основном в пределе сильного рассеяния, когда фазы в (70) распределены равномерно. Как было показано, выбор простой пуассоновской модели для распределения N не приводит к новым результатам в пределе большого среднего числа случайных блужданий. Выбор негативного биномиального распределения N , как указывалось в предыдущих разделах, ведет к K -распределениям интенсивности (вне зависимости от $\{a_j\}$), а не Гауссовским, как предсказывает центральная предельная теорема в случае фиксированного числа шагов. Выбор модели популяции с негативным биномиальным распределением, аналогичной непрерывному случайному процессу с гамма-распределением в комбинированном представлении, обсуждаемом в разделе (3.3), был сделан на основе эмпирических соображений. Это подкрепляется успешным применением модели K -распределений на практике, хорошим согласием с данными экспериментов, а также удобными аналитическими свойствами этих распределений, на основе которых может быть построена исчерпывающая теория негауссовских шумов. Следует подчеркнуть, однако, что многие авторы связывают гамма-распределенные случайные процессы с иерархическими или фрактальными свойствами определенных простых рассеивающих систем. Широкое распространение фрактальных структур в природе, как на микроскопическом, так и на макроскопическом уровне, может частично служить объяснением хорошего согласия модели K -распределений с большим числом разнообразных данных экспериментов по рассеянию.

До работы Бараката [16], вопросам слабого рассеяния в присутствии флуктуаций числа рассеивателей уделялось относительно небольшое внимание. Джейкмен [17] предложил модель K -распределения со смещением (118) для описания статистики лазерного излучения, рассеянного локализованной областью температурной турбулентности. При сравнении данных с этой моделью было получено хорошее согласие теории с опытом во всех точках трассы распространения. Эта ситуация похожа на проблему распространения волн на короткие расстояния в протяженной среде, и имеет много общего с слабо шероховатыми поверхностями и поверхностями при скользких углах падения волны. Следовательно, полезно сравнить модели обобщенного K -распределения и K -распределения со смещением, как эмпирические модели слабого рассеяния света с феноменологической интерпретацией, изложенной в предыдущих разделах.

В терминах случайных блужданий, разница между этими двумя моделями

обнаруживается в выражениях для средней интенсивности. Перед усреднением по числу флуктуаций и масштабированием, для К-распределения со смещением мы получаем, что

$$\langle I_N \rangle = N \langle a^2 \rangle + a_0^2, \quad (130)$$

в то время как для обобщенной К модели мы имеем

$$\langle I_N \rangle = N \langle a^2 \rangle + N(N - 1) \langle a \rangle^2 (\langle \cos \phi \rangle^2 + \langle \sin \phi \rangle^2). \quad (131)$$

Различный характер зависимости когерентной, или нерассеянной, компоненты поля от N , как можно видеть из правых частей уравнений (130) и (131), является ключевым фактором различия этих двух моделей. Это подтверждается и сравнением эквивалентных комбинированных представлений (114) и (126). Важное следствие этого различия проявляется в сравнении вторых моментов интенсивности при равных параметрах кластеризации α . Как это следует из уравнения (98), даже когда рассеянное поле полностью когерентно, в обобщенной модели флуктуации сохраняются за счет остаточных вариаций, соответствующих второму слагаемому в уравнении (131). В то же время, К-распределение со смещением сводится к дельта-функции, отражающей постоянную амплитуду, как следует из уравнения (130) в том случае, когда доминирует второе слагаемое. Таким образом, даже в предельном случае бесконечно слабых рассеивающих центров модель, приводящая к обобщенному К-распределению, предсказывает флуктуации амплитуды рассеянного поля за счет изменения числа элементарных вкладов рассеяния. Это самая неприятная особенность модели, во всем остальном весьма привлекательной, поскольку из феноменологических соображений следовало бы ожидать, что с ослаблением рассеивающих неоднородностей (с увеличением длины волны или с уменьшением длины трассы распространения в случае протяженной среды), флуктуации интенсивности должны полностью исчезать.

Если геометрия рассеяния такова, что область рассеяния больше, чем наибольшая из присутствующих в среде неоднородных структур (в случае многомасштабной системы), тогда эффекты кластеризации будут подавлены усреднением по этой области в результате независимого сложения некоррелированных вкладов отдельных подобластей. Этот эффект можно учесть в обобщенной К-модели, умножая уравнение (93) для единственной области размера порядка характерного внешнего масштаба на идентичные характеристические функции для оставшихся подобластей, составляющих всю область рассеяния (площадь или объём). В результате значение параметра α увеличится, и распределение будет приближаться к статистике Райса. Увеличение параметра кластеризации в модели К-распределения со смещением может использоваться в тех же целях и в пределе приводит к тому же самому асимптотическому распределению, для больших α ,

как следует из разделов 3.1 и 3.3. Заметьте, что этот эффект, вызванный подавлением низких частот в спектре, не имеет отношения к силе отдельных рассеивающих центров, и к обсуждаемому выше пределу слабых элементарных рассеивателей.

Наконец, мы вкратце рассмотрим статистические свойства действительной и мнимой части комплексной амплитуды A_x и A_y , следующие из различных моделей К-распределений. Подход, приводящий к обобщенным К-распределениям из уравнения (70), приводит к следующим результатам:

$$Var A_x = N \langle a^2 \rangle \langle \cos^2 \phi \rangle - N \langle a \rangle^2 \langle \cos \phi \rangle^2, \quad (132)$$

$$Var A_x = \bar{N} \langle a^2 \rangle \langle \cos^2 \phi \rangle, \quad (133)$$

$$Var A_x = \bar{N} \langle a^2 \rangle \langle \cos^2 \phi \rangle + \alpha^{-1} \bar{N}^2 \langle a \rangle^2 \langle \cos \phi \rangle^2, \quad (134)$$

для N фиксированного, распределенного по Пуассону и по закону отрицательного биномиального распределения соответственно. Вариации мнимой части выражаются теми же формулами с заменой $\cos \phi$ на $\sin \phi$. Очевидно, что эффект флуктуаций числа шагов в пределе слабых рассеивателей ($\langle \cos \phi \rangle, \langle \sin \phi \rangle \neq 0$) приведет к усилению флуктуаций той компоненты результирующего вектора, которая лежит вдоль направления смещения. Более того, преобразование масштаба, введенное для распределения фазы в разделе 3.2 для получения нетривиального результата, не зависящего от числа шагов в пределе большого среднего числа рассеивателей, подразумевает, что $\langle \sin^2 \phi \rangle = \langle \cos^2 \phi \rangle \rightarrow 1/2$, при этом $\langle \sin \phi \rangle \sim \langle \cos \phi \rangle \sim 1/(\bar{N})^{1/2}$. Отсюда следует, что среднеквадратичные вариации действительной и мнимой частей комплексной амплитуды поля для фиксированного N и пуассоновского распределения N равны. Предельное распределение, таким образом, является райсовским и соответствует пределу больших α в обобщенном К-распределении, в то время как действительная и мнимая части комплексной амплитуды A не коррелированы между собой. С другой стороны, при отрицательном биномиальном распределении (134), A_x и A_y коррелируют друг с другом, и среднеквадратичные вариации их различны.

Можно сделать вывод, что хотя модель обобщенного К-распределения обладает рядом привлекательных свойств, которые могут найти применение в самых различных областях науки, лежащая в её основе модель случайных блужданий не является корректной при описании эффектов, возникающих в слабо рассеивающих средах. Модель К-распределения со смещением, хотя она является более реалистичной с феноменологической точки зрения и находится в удовлетворительном согласии с частью экспериментальных данных, менее привлекательна с

математической точки зрения и содержит в себе меньше возможностей для обобщения и развития.

Впоследствии, в работе [21] была предложена более сложная модель флуктуаций интенсивности излучения, распространяющегося в протяженной прозрачной турбулентной среде. Волновое поле моделируется как сумма когерентной (детерминированной) компоненты и случайной компоненты, интенсивность которой предполагается подчиняющейся распределению Накагами. Далее, мы примем, что статистика процесса является нестационарной в результате флуктуаций средней интенсивности стохастической компоненты поля. В результате было получено так называемое I-K распределение интенсивности флуктуаций. Это распределение фактически которое является обобщением K-распределения. Как показало сравнение с экспериментом, оно удовлетворительно описывает результаты опыта для всех ситуаций атмосферной турбулентности, для которых имеются экспериментальные данные. В особенности важным является правомерность модели в случае слабой турбулентности атмосферы, для которой ранее предложенное K-распределение теоретически неприменимо.

4 I-K распределение как универсальная модель распространения лазерных пучков в турбулентной атмосфере.

Одной из главных целей в исследовании рассеяния электромагнитной волны в протяженной прозрачной турбулентной среде остается удовлетворительное объяснение так называемого режима насыщения, при котором существенны эффекты многократного рассеяния. В то время как безусловно желателен строгий математический подход, основанный на глубоком понимании физических механизмов процессов насыщения, точные эвристические модели, основанные на разумных физических предположениях, могут позволить немедленно сделать некоторые выводы относительно этого интересного явления.

Так, на протяжении многих лет предлагались различные теоретические модели для описания флуктуаций интенсивности лазерного пучка, распространяющегося в турбулентной атмосфере [4]. Большинство этих моделей оказались неадекватными в плане описания наблюдаемых в эксперименте данных. Наиболее полезными до сих пор оказывались те из них, которые основывались на эвристически полученных функциях распределения вероятности, связанных с флуктуациями интенсивности (сцинтилляциями) лазерного пучка. Однако, даже эти эмпирические модели обычно применимы лишь в ограниченной области режимов атмо-

сферной турбулентности. Только модель, предложенная в работе [31] находится в согласии с экспериментальными данными на всех режимах турбулентности, но в силу математической громоздкости, присущей этой модели, она имеет ограниченное применение для определенных вычислений, в особенности связанных с оценками вероятности обнаружения. Таким образом, все еще сохраняется необходимость в более удобной универсальной модели, обладающей широкой областью применимости. В работе [21] предложена соответствующая модель, основанная на более сложной модели, предложенной ранее [31].

В основе большинства теоретических моделей, предложенных для описания флуктуаций интенсивности, лежат предположения об однородности, изотропности и стационарности среды. Однако, в отношении атмосферы Татарским [4] было показано, что в турбулентности всегда присутствуют крупномасштабные составляющие, обычно нарушающие однородность и изотропность метеорологических полей, что приводит к их нестационарности. Это в особенности относится к полям скорости ветра, поскольку средняя скорость ветра может очень быстро меняться в течение короткого времени. Чтобы избежать трудностей, связанных с нестационарными статистиками, часто работают со структурными функциями, для которых предположения о локальной изотропности и однородности остаются в силе. Распространение таких предположений на флуктуации интенсивности оптического пучка может быть правомерным только для коротких расстояний и/или промежутков времени.

На нестационарную природу атмосферной турбулентности вновь указали Гочелашвили и Шишов [32], которые рассмотрели модель оптических сцинтилляций, как условный случайный процесс. Накагами [10] рассматривал эффекты флуктуаций параметров в связи с предложенным им m -распределением, а позднее Левинский [33] исследовал нестационарные модели рассеяния в связи с рассеянием радарных сигналов. Эвристические модели, обсуждаемые в следующих разделах, вслед за указанными работами основываются на нестационарной статистике. Если среднюю интенсивность поля рассматривать как случайную величину, для флуктуаций интенсивности можно вывести условную плотность распределения вероятности. Усредняя эту условную вероятность по всевозможным значениям средней интенсивности поля, можно найти безусловное распределение вероятности для интенсивности поля. Эти вычисления приводят к обобщению K -распределения, называемого I - K распределением, поскольку в полученном решении фигурируют эти цилиндрические функции. В отличие от K -распределения, I - K распределение применимо ко всевозможным режимам атмосферной турбулентности и обеспечивает удовлетворительное согласие с экспериментальными данными.

4.1 Модели атмосферной турбулентности.

Атмосферная турбулентность образуется почти целиком в результате вариаций температуры атмосферного воздуха и флуктуаций скорости ветра, которые приводят к локальной неустойчивости воздушных масс, в дальнейшем распадающихся на турбулентные вихри всевозможных размеров в широком диапазоне от макро- до микромасштабов. Таким образом, формируется континуум вихревых масштабов. Крупномасштабные вихри модулируют собой мелкомасштабные вихревые структуры, но не все масштабы одинаково эффективно вносят вклад в мерцания волнового пучка. Размер наиболее сильно рассеивающих структур определяется такими параметрами, как длина волны оптического излучения λ , длина трассы распространения пучка L , и пространственная когерентность пучка. Максимальный размер вихрей, участвующих в формировании мерцаний, определяет эффективный внешний масштаб турбулентности, который в случае приземного распространения пучка приблизительно сравним с высотой пучка над земной поверхностью. Однако, как только поперечный масштаб когерентности оптического пучка оказывается меньше высоты пучка над поверхностью Земли, она становится доминирующим фактором в определении эффективного внешнего масштаба [35]. Подобным образом, эффективный внутренний масштаб турбулентности определяется размером наименьших вихрей, участвующих в рассеянии. При не очень сильной турбулентности, наиболее сильно рассеивающими оптическое излучение являются вихри масштаба порядка размера первой зоны Френеля $\sqrt{\lambda L}$, который обычно находится в пределах между эффективными внешним и внутренним масштабом турбулентности.

В начале пути распространения лазерного пучка в атмосфере, волна отличается высокой пространственной когерентностью, и размер зоны Френеля мал. Отсюда следовало бы, что в режиме слабого рассеяния в рассеянии участвуют вихревые структуры весьма широкого диапазона масштабов. При дальнейшем распространении электромагнитной волны, её пространственная когерентность ухудшается, а размер зоны Френеля – растёт. Таким образом, диапазон масштабов рассеивающих структур сокращается до тех пор, пока он не будет сведен к единственному масштабу, эффективно участвующему в образовании мерцаний. Длина пространственной когерентности продолжает уменьшаться до тех пор, пока не окажется меньше размера зоны Френеля. Когда она станет меньше масштаба, наиболее эффективно рассеивающего в пределе слабого рассеяния, принято говорить о наступлении насыщения флуктуаций. Когда длина когерентности будет меньше или одного порядка величины с внутренним масштабом, тогда определяющий вклад в формирование мерцаний начинают вносить структуры с размером порядка внутреннего масштаба турбулентности или меньше [35].

4.2 Теоретические модели для условной функции распределения флуктуаций интенсивности.

Исходя из эвристических моделей атмосферы, разумно предположить, что в результате рассеяния волны на большом числе неоднородностей среды, в точке наблюдения будут суммироваться многие рассеянные волны, приходящие в неё по путям различной длины. В этом случае, поле электромагнитной волны можно представить в виде

$$U(t) = e^{i\omega t} \sum_{k=1}^N v_k(t) \exp[i\psi_k(t)], \quad (135)$$

где ω - несущая частота электромагнитной волны. Мы далее полагаем, что каждая из этих рассеянных волн в свою очередь состоит из когерентной и случайной компонент, которые мы запишем в виде

$$v_k(t) \exp[i\psi_k(t)] = a_k(t) \exp[i\theta_k(t)] + r_k(t) \exp[i\phi_k(t)]. \quad (136)$$

Первое слагаемое в (136) соответствует когерентной части рассеянной компоненты, для которой амплитуда $a_k(t)$ и фаза $\theta_k(t)$ являются детерминированными величинами, а второе слагаемой является случайной компонентой со случайными амплитудой и фазой.

Накагами [10] показал, что вне зависимости от статистических свойств отдельных рассеивателей, амплитуда суммарного поля, состоящего из случайной суперпозиции случайных векторных величин и постоянной когерентной составляющей, при некоторых дополнительных разумных предположениях подчиняется обобщенному n -распределению. В терминах интенсивности $I(t) = |U(t)|^2$ электромагнитного поля (135), n -распределение выражается в виде

$$p_I(I) = \frac{N}{b} \left(\frac{\sqrt{I}}{A} \right)^{N-1} \exp \left(\frac{-N(A^2 + I)}{b} \right) I_{N-1} \left(\frac{2NA}{b} \sqrt{I} \right), \quad I > 0, \quad (137)$$

где

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_N^2, \quad b = \langle r_1^2 \rangle + \langle r_2^2 \rangle + \dots + \langle r_N^2 \rangle, \quad (138)$$

и $I(\cdot)$ - модифицированная функция Бесселя первого рода. Эта функция плотности распределения вероятности также связана с распределением хи-квадрат, и записана в форме, полученной Маркумом и Сверлинггом [36] для выходного сигнала квадратичного перемножителя с фильтром на выходе.

Хотя мы представили уравнение (135) в виде суммы дискретного числа рассеивателей, в целях моделирования мы заменим число N непрерывным положительным параметром α , который можно рассматривать как эффективное число рассеивателей, вносящих вклад в поле, наблюдаемое в данной точке пространства. Далее, в силу нестационарной природы метеопараметров, мы полагаем, что суммарная средняя интенсивность случайных компонент b является также случайной величиной. Если мы предположим, что отдельные слагаемые в b являются комплексными гауссовскими случайными величинами, тогда средняя интенсивность b оказывается распределенной по экспоненциальному закону. Можно записать, что

$$p_2(b) = \frac{1}{b_0} \exp(-b/b_0), \quad b > 0, \quad (139)$$

где b_0 означает среднее значение b . Тогда можно выразить распределение (137) в виде условной плотности распределения вероятности, и заменяя в нём N на α , мы получим

$$p_I(I|b) = \frac{\alpha}{b} \left(\frac{\sqrt{I}}{A} \right)^{\alpha-1} \exp\left(\frac{-\alpha(A^2 + I)}{b} \right) I_{\alpha-1} \left(\frac{2\alpha A}{b} \sqrt{I} \right), \quad I > 0. \quad (140)$$

4.3 I-K распределение.

Для заданного условного распределения вероятности (140) безусловное распределение вероятности для флуктуаций интенсивности определяется как

$$p(I) = \int_0^{\infty} p_1(I|b) p_2(b) db, \quad (141)$$

где $p_2(b)$ задано формулой (139). Подставляя (139) и (140) в (141), получаем окончательный результат:

$$p(I) = \frac{2\alpha}{b_0} \left(\frac{\sqrt{I}}{A} \right)^{\alpha-1} K_{\alpha-1} \left(2A\sqrt{\frac{\alpha}{b_0}} \right) I_{\alpha-1} \left(2\sqrt{\frac{\alpha I}{b_0}} \right), \quad I < A^2, \quad (142)$$

$$p(I) = \frac{2\alpha}{b_0} \left(\frac{\sqrt{I}}{A} \right)^{\alpha-1} I_{\alpha-1} \left(2A\sqrt{\frac{\alpha}{b_0}} \right) K_{\alpha-1} \left(2\sqrt{\frac{\alpha I}{b_0}} \right), \quad I > A^2, \quad (143)$$

где $K_n(\cdot)$ - модифицированная функция Бесселя второго рода. Функция распределения вероятностей интенсивности дается формулами (142) и (143) для тех

случаев, когда интенсивность соответственно меньше или больше квадрата амплитуды когерентной компоненты суммарного поля. Из-за симметрии функциональной записи формул (142) и (143), в которых встречаются модифицированные функции Бесселя первого и второго рода $I_n(\cdot)$ и $K_n(\cdot)$, оно получило название $I - K$ -распределения [21]. Это распределение можно считать обобщением известного K -распределения [17], поскольку при $A = 0$ (при отсутствии когерентной компоненты) оно вырождается в обыкновенное K -распределение.

Статистические моменты, связанные с уравнениями (142) и (143), проще всего вычислить с помощью соотношения

$$\langle I^n \rangle = \int_0^{+\infty} I^n \int_0^{+\infty} p_1(I|b) p_2(b) db dI = \int_0^{+\infty} p_2(b) \int_0^{+\infty} I^n p_1(I|b) db dI \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (144)$$

при указанной смене порядка интегрирования. Внутренний интеграл в формуле (144) равен

$$\int_0^{\infty} I^n p_1(I|b) dI = \left(\frac{b}{\alpha}\right)^n n! L_n^{(\alpha-1)}\left(-\frac{\alpha A^2}{b}\right), \quad (145)$$

где $L_n^{(\alpha-1)}(\cdot)$ - обобщенные полиномы Лягерра [20, 19]. Почленно интегрируя слагаемые многочленов Лягерра в (144), получим искомое выражение для моментов интенсивности ($n = 1, 2, 3, \dots$)

$$\langle I^n \rangle = \left(\frac{b_0}{\alpha}\right)^n n! \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha + k)} \frac{(\alpha\rho)^k}{k!}, \quad (146)$$

где

$$\rho = \frac{A^2}{b_0} \quad (147)$$

есть отношение средних интенсивностей когерентной и случайной компонент суммарного поля. Соответствующие нормированные моменты интенсивности равны

$$\frac{\langle I^n \rangle}{\langle I \rangle^n} = \frac{n!}{\alpha^n (1 + \rho)^n} \sum_{k=0}^n \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha + k)} \frac{(\alpha\rho)^k}{k!}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (148)$$

Теоретически предсказанные нормированные моменты интенсивности (148) оказываются в хорошем согласии с данными ряда экспериментов [34]. Таким образом,

I-K распределение представляет собой модель для описания флуктуаций интенсивности лазерного пучка в протяженной турбулентной среде, равномерно пригодную для всех режимов турбулентности, для которых имеются экспериментальные данные. Более того, I-K распределение весьма удобно для аналитических расчетов, поскольку выражается в замкнутой форме с помощью модифицированных функций Бесселя, которые хорошо исследованы и табулированы.

Для оценки вероятностей ложной тревоги, обнаружения и т.д. важно знать кумулятивную функцию распределения. После перехода к безразмерной нормированной интенсивности $y = I / \langle I \rangle$, функция распределения плотности вероятности I-K распределения принимает вид

$$p(y) = 2\alpha(1 + \rho) \left[\frac{(1 + \rho)y}{\rho} \right]^{\frac{\alpha-1}{2}} K_{\alpha-1}(2\sqrt{\alpha\rho}) I_{\alpha-1}(2\sqrt{\alpha(1 + \rho)y}), \quad y < \frac{\rho}{1 + \rho}, \quad (149)$$

$$p(y) = 2\alpha(1 + \rho) \left[\frac{(1 + \rho)y}{\rho} \right]^{\frac{\alpha-1}{2}} I_{\alpha-1}(2\sqrt{\alpha\rho}) K_{\alpha-1}(2\sqrt{\alpha(1 + \rho)y}), \quad y > \frac{\rho}{1 + \rho}. \quad (150)$$

Кумулятивная функция распределения определяется как

$$F(x) = \int_0^x p(y) dy, \quad (151)$$

откуда для функции плотности распределения вероятности (149,150) следует

$$F(x) = 2\sqrt{\alpha\rho} \left[\frac{(1 + \rho)x}{\rho} \right]^{\frac{\alpha}{2}} K_{\alpha-1}(2\sqrt{\alpha\rho}) I_{\alpha}(2\sqrt{\alpha(1 + \rho)x}), \quad x < \frac{\rho}{1 + \rho}, \quad (152)$$

$$F(x) = 1 - 2\sqrt{\alpha\rho} \left[\frac{(1 + \rho)x}{\rho} \right]^{\frac{\alpha}{2}} I_{\alpha-1}(2\sqrt{\alpha\rho}) K_{\alpha}(2\sqrt{\alpha(1 + \rho)x}), \quad x > \frac{\rho}{1 + \rho}. \quad (153)$$

4.4 Обсуждение.

Нормированная функция плотности вероятности I-K распределения (149,150) зависит от двух эмпирических параметров, ρ и α , значения которых можно оценить из эксперимента, исходя из наилучшего соответствия первых трех нормированных моментов этого распределения с экспериментальными данными. Параметр ρ представляет собой отношение средних интенсивностей когерентной и случайной

компонент суммарного поля. При очень слабом рассеянии, параметр ρ относительно велик, поскольку в суммарном поле преобладает нерассеянная (когерентная) компонента. Отношение мощностей монотонно спадает по мере усиления турбулентности и фактически должно стремиться к нулю в режиме сверхнасыщения флуктуаций.

При оценке значений величины параметров α и ρ по принципу наилучшего соответствия экспериментальным данным, оказывается, что параметр α принимает большие значения в предельных случаях слабого и сильного рассеяния. С помощью выражения (148) легко показать, что в пределе слабого рассеяния

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow \infty \\ \rho \rightarrow \infty}} \frac{\langle I^n \rangle}{\langle I \rangle^n} = 1, \quad (154)$$

в то время как при очень сильном рассеянии

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow \infty \\ \rho \rightarrow 0}} \frac{\langle I^n \rangle}{\langle I \rangle^n} = n!. \quad (155)$$

Уравнения (154) и (155) устанавливают пределы теоретически возможных значений нормированных моментов интенсивности. На самом деле, уравнение (155) определяет нормированные моменты показательного распределения, которое часто принимается как предельное для распределения флуктуаций в режиме насыщения [30, 32, 34, 37, 38].

В предельном случае $\rho \rightarrow 0$ I-K распределение вырождается в обычное K-распределение. Однако, при малых значениях параметра ρ и больших значениях α из уравнения (148) получается асимптотическое соотношение

$$\frac{\langle I^n \rangle}{\langle I \rangle^n} \sim \frac{n! \Gamma(\alpha + n)}{\alpha^n \Gamma(\alpha)} (1 + \rho + \dots), \quad (156)$$

которое показывает, что нормированные моменты интенсивности I-K распределения всегда превосходят соответствующие моменты K-распределения

$$\frac{\langle I^n \rangle}{\langle I \rangle^n} \sim \frac{n! \Gamma(\alpha + n)}{\alpha^n \Gamma(\alpha)}. \quad (157)$$

Ранее было указано, что нормированные моменты K-распределения не стремятся асимптотически к $n!$, а экспериментальные оценки соответствующих моментов оказываются выше этих значений [34]. С другой стороны, оказывается, что моменты I-K распределения находятся в удовлетворительном соответствии с экспериментальными данными.

Как было отмечено выше, эффективное число рассеивателей в режиме слабого рассеяния оказывается весьма большим вследствие того, что между внешним и внутренним масштабами турбулентности лежит широкий диапазон пространственных масштабов неоднородностей показателя преломления, участвующих в рассеянии. Это могло бы являться аргументом в пользу больших значений параметра α в режиме слабого рассеяния, поскольку этот параметр отождествляется с эффективным (средним) числом рассеивателей, вносящих вклад в наблюдаемое поле. По мере усиления турбулентности оказывается, что α непрерывно убывает до тех пор, пока нормированные моменты интенсивности не достигнут своих максимальных значений. Этот момент приблизительно соответствует значениям $\langle I^2 \rangle / \langle I \rangle^2 \sim 5.5$ и $\alpha \sim 1/2$. При дальнейшем усилении турбулентности параметр α растет. Чтобы объяснить этот факт, заметим, что несмотря на то, что в режиме насыщения в рассеянное поле вносят вклад флуктуации среды лишь одного пространственного масштаба, их эффективное среднее число все же может быть достаточно велико за счет эффектов многократного рассеяния. Это значит, что волна, рассеянная на небольшом расстоянии от источника, будет снова рассеиваться при дальнейшем распространении, и часть многократно рассеянной волны достигнет удаленной точки наблюдения. Этим объясняются большие значения α , которые модель I-K распределения предсказывает в пределе сверхнасыщения флуктуаций.

I-K распределение получено в предположении, что средняя интенсивность волнового поля является случайной величиной. Быстрые флуктуации скорости движения среды с характерными временами, сравнимыми с временем усреднения наблюдаемых данных, являются наиболее вероятной причиной нестационарности процесса. Если скорость среды в течение указанного периода времени остается постоянной, тогда средняя интенсивность b случайной компоненты поля также постоянна, и плотность вероятности $p_2(b)$, определяемая формулой (139), является дельта-функцией. В этом случае, формула (140) описывает модель интенсивности для стационарной статистики. При сравнении нормированных моментов (140) с экспериментальными данными [34] получается разумное согласие в режиме слабого рассеяния, причем нормированные вариации интенсивности не превышают значения $1/2$. В условиях сильной турбулентности нормированные моменты (140) дают заниженные значения по сравнению с данными эксперимента. Это говорит о том, что в условиях умеренной и сильной турбулентности среды нельзя пренебрегать нестационарностью статистики.

4.5 Заключительные замечания.

I-K распределение представляет собой удобную математическую модель, эвристически выведенную для флуктуаций интенсивности электромагнитной волны, распространяющейся в турбулентной среде. Эта модель обладает более широкой областью применимости по сравнению с ранее предложенной моделью K-распределения. Сравнение теоретических значений нормированных моментов интенсивности, предсказываемых моделью I-K распределения, с экспериментальными данными, показывает хорошую степень согласия в режимах как сильной, так и умеренной и слабой турбулентности. Функция плотности вероятности I-K распределения выражается через известные специальные функции, что обеспечивает удобство аналитических вычислений и оценок с использованием модели I-K распределения. Кроме того, I-K распределение включает в себя K-распределение как частный случай при специальных значениях параметров. Тем самым, модель I-K распределения оказывается пригодной для описания, с одной стороны, широкого класса процессов рассеяния, удовлетворительно подчиняющихся законам простого K-распределения. С другой стороны, модель I-K распределения также применима в большом числе ситуаций, когда обычное K-распределение не обеспечивает разумного согласия теоретических предсказаний с экспериментальными данными.

Список литературы

- [1] Рытов, С.М., Кравцов, Ю.А., Татарский, В.И. Введение в статистическую радиофизику. М.:Наука, 1978.
- [2] Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. М.:Мир, 1981.
- [3] Чернов Л. А., Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, М., 1958
- [4] Татарский В.И. Распространение волн в турбулентной атмосфере. М.:Наука, 1967.
- [5] Beckmann, P. Probability in Communication Engineering. N.Y.:Harcourt, Brace and World, 1967
- [6] Ogilvy, J.A., 1991. Theory of Wave Scattering from Random Rough Surfaces. Adam Hilger, Bristol.

- [7] Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н. Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. - М.-Л.: ГТТИ, 1949.
- [8] Jakeman E., Pusey P.N. A model for non-Rayleigh sea echo. IEEE Trans. Antenna and Propagation. V.AP-24. PP.806-814. 1976.
- [9] Jakeman E., Pusey P.N. Significance of K-distributions in scattering experiments. Phys. Rev. Lett. V.40. PP.546-550. 1978.
- [10] Nakagami M. The m-distribution – a general formula of intensity distribution of rapid fading. In: Statistical methods of radio wave propagation. Pergamon, Oxford, 1960.
- [11] Nakagami, M. and Ota, M. Rep. Radio Wave Propag. Res. Committee, Japan. 1957.
- [12] Miyazawa T. Theory of the one-variable Fokker-Planck equation. Phys. Rev. A. 1989. V.39. N.3. PP.1447-1468.
- [13] Милютин Е.Р., Никитин В.Н. Об использовании модели бимультимпликативного канала с К-распределением для описания замираний на трассах прямой видимости. Радиотехника. 1985. N.5. С.83-85.
- [14] K. J. Ebeling, Statistical Properties of Random Wave Fields in Physical Acoustics: Principles and Methods. Academic Press, New York, 1984.
- [15] Jakeman E., Tough R.J.A. Non-Gaussian noise processes. Adv. Phys. V.37. N.5. P.471-529. 1988.
- [16] Barakat R. Weak scatterer generalization of the K-density function with application to laser scattering in atmospheric turbulence. J. Opt. Soc. Am. A. V.3. PP.401-409. 1986.
- [17] Jakeman E. On the statistics of K-distributed noise. J.Phys. A. V.13. PP.31-48. 1980.
- [18] Rice S.O. Mathematical analysis of random noise. Selected papers on Noise and Stochastic Processes. N.Y.:Dover, 1954.
- [19] Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*. М.:Физматгиз, 1963, 1100 с.

- [20] Абрамовиц, М. и И. Стиган. *Справочник по специальным функциям*. М.:Наука, 1979, 830 с.
- [21] Andrews, L.C. and Phillips R.L. I-K distributions as a universal propagation model of laser beams in an atmospheric turbulence. J. Opt. Soc. Am. A. V.2 PP.160-163. 1985.
- [22] Pusey P.N. Statistical properties of scattered radiation. In: Photon Correlation Spectroscopy and Velocimetry. NY:Plenum, 1977.
- [23] Mercier R.P. Diffraction by a screen causing large random phase fluctuations. Proc. Cambridge Philos. Soc. V. A58. PP.382-400. 1962.
- [24] Jakeman E., Welford W.T. Speckle statistics in imaging systems. Opt. Commun. V.21. PP.72-79. 1977.
- [25] J.W.Goodman Dependence of image speckle contrast on surface roughness. Opt. Commun. V.14. PP.324-327. 1975.
- [26] Pederson H.M. Object Roughness dependence of image speckle contrast on surface roughness. Opt. Commun. V.16. PP.63-67. 1976.
- [27] Oliver C.J. A model for non-Rayleigh scattering statistics. Opt. Acta. v.31. PP.701-722. 1984.
- [28] Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. *Обобщенные функции и действия над ними*. М.:ГИФМЛ, 1958.
- [29] Hochstadt, H. *The Functions of Mathematical Physics* WILEY, NY, 1971.
- [30] Miller P.F. The probability distribution of a wave at a very large depth within an extended region. J.Phys.A., V.11, PP.403-422, 1978.
- [31] Phillips R.L., Andrews L.C. Universal statistical model for irradiance fluctuations in a turbulent medium. J. Opt. Soc. Am. V.72. PP.864-870, 1982.
- [32] Гочелашвили К.С., Шишов В.И. Насыщенные флуктуации лазерного излучения в турбулентной среде. // ЖЭТФ. 1974, Т.66, С. 1237-1247.
- [33] Lewinski D.J. Nonstationary probabilistic target and clutter scattering models. IEEE Trans. Antennas Propag. 1983. V.AP-31. PP. 490-498.

- [34] R.L.Phillips, L.C.Andrews. Measured statistics of laser-light scattering in atmospheric turbulence. J. Opt. Soc. Am. 1981. V.71. PP.1440-1445.
- [35] Hill R.J., Clifford S.F. Theory of saturation of optical scintillation by strong turbulence for arbitrary refractive index spectra. J. Opt. Soc. Am. V.71. PP.675-686. 1981.
- [36] Marcum J.I., Swerling P. Studies of target detection by pulsed radar. IRE Trans. Inform. Theory V.IT-6. PP.59-308. 1960.
- [37] Yakushkin I.G. Moments of field propagating in randomly inhomogeneous medium in the limit of saturated fluctuations. Izv. Vuzov - Radiofizika. V.21. PP.1194-1201. 1978.
- [38] Dashen R. Distribution of intensity in a multiply scattering medium. Opt. Lett. V.10. PP.110-112. 1984.