Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

Юрова Екатерина Владимировна

ИЗМЕРИМЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ И ПОЛИЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических
наук, профессор В.И. Богачев

Москва, 2020

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы.

Тематика диссертации находится на стыке общего функционального анализа, теории меры и теории вероятностей. В работе рассматриваются измеримые линейные и полилинейные отображения бесконечномерных пространств с мерами, гауссовские меры, а также порождаемые ими при измеримых линейных отображениях условные меры. Среди основополагающих работ по этой тематике можно назвать статьи А. Н. Колмогорова [29], Н. Винера [35], Р. Камерона, В. Мартина [24]; она изучалась в последние десятилетия многими другими исследователями, в том числе А. М. Вершиком, И. И. Гихманом, А. В. Скороходом, О. Г. Смоляновым, В. Н. Судаковым, М. Кантером, И. Оказаки (см. [8], [11], [16], [9], [28] и [31]). Недавние обзоры более широких областей представлены в монографиях [2], [22]. Исследование измеримых полилинейных форм и порождаемых ими многочленов может быть полезно в самых различных вопросах бесконечномерного анализа, в том числе рассматриваемых в работах [4], [10], [14], [17], [26].

Важнейшей особенностью измеримых линейных и полилинейных отображений бесконечномерных пространств является то, что их естественные области определения меньше всего пространства, причем на этих областях определения такие отображения в типичных случаях разрывны. Конечно, по классической теореме Лузина измеримые отображения обладают непрерывными сужениями на компакты с мерой, сколь угодно близкой к мере всего пространства. Однако это весьма общее свойство никак не учитывает линейность или полилинейность. Имеется здесь и объективная трудность: по известной теореме Банаха разрывная линейная функция на банаховом пространстве не может быть измеримой по Борелю. Поэтому чисто алгебраические версии заведомо разрывных линейных операторов, линейные на всем пространстве, не могут быть борелевскими. Тем самым невозможно и их конструктивное задание на всем пространстве. Например, ряд из функций $n^{-2}x_n$ на пространстве всех вещественных последовательностей, наделенном счетной степенью стандартной гауссовской меры на прямой, сходится почти всюду, причем его область сходимости есть борелевское линейное подпространство. На все пространство последовательностей полученный предел можно продолжить чисто алгебраически многими способами, но все эти способы не будут конструктивными и потребуют использования аксиомы выбора или ее следствий. Аналогично обстоит дело для стохастического интеграла Винера от непрерывной функции неограниченной вариации на отрезке по винеровскому процессу. Этот интеграл можно рассматривать как измеримый линейный функционал на пространстве непрерывных функций с мерой Винера, но борелевских линейных версий у него нет. В случае гауссовской меры (например винеровской) давно было понято, что такие измеримые функционалы могут быть непрерывными на меньших линейных подпространствах единичной меры при наделении их более сильными нормами. Например, указанный выше ряд из функций $n^{-2}x_n$ представляет собой непрерывный линейный функционал на весовом гильбертовом пространстве последовательностей с квадратом нормы $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}x_n$, которое имеет меру 1 относительно указанной гауссовской меры на пространстве всех последовательностей. Однако уже для ряда из функций $n^{-1}x_n$ не столь просто найти непрерывно вложенное гильбертово пространство полной меры (т.е. с дополнением меры нуль), на котором сумма непрерывна, хотя таковое существует. Поэтому вполне естественно возникает вопрос о нахождении банаховых пространств, непрерывно вложенных в исходное пространство, сужения на которые заданных измеримых линейных отображений непрерывны. Аналогичный вопрос можно поставить и для полилинейных или полиномиальных отображений. Исследование этих двух вопросов составляет основное содержание диссертации и занимает первые две главы.

Третья глава посвящена исследованию условных мер, порожденных гауссовскими мерами на произведении пространств. Основной результат дает широкие условия измеримой зависимости таких условных мер от параметра, от которого измеримо зависят исходные гауссовские меры. Эта задача также тесно связана с измеримыми линейными операторами.

Само понятие измеримого линейного или полилинейного отображения допускает различные неравносильные варианты формулировки. Естественная, хотя и довольно прямолинейная трактовка такова: считать такими те линейные в обычном алгебраическом смысле функции, которые измеримы. Одним из столь же естественных конкурирующих определений является рассмотрение предела сходящихся (почти всюду, по мере или в среднем какого-то порядка) последовательностей непрерывных линейных операторов (в случае определения измеримого линейного оператора и аналогично для полилинейных отображений). Впрочем, для гауссовских мер это дает равносильное определение, однако в общем случае равносильности нет. Возможны и другие подходы.

Цель работы.

• Получить описание измеримых линейных операторов на банаховых пространствах с мерами, обладающих непрерывными сужениями на непрерывно вложенные банаховы пространства полной меры.

• Для измеримых полилинейных отображений банаховых пространств с мерами исследовать существование непрерывно вложенных банаховых пространств полной меры, сужения на которые данных отображений непрерывны.

• Для условных мер, порожденных зависящими от параметра гауссовскими мерами на произведении пространств, получить широкие достаточные условия измеримой зависимости условных мер от данного параметра.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем.

1. Пусть $A_n\colon X \to Y$ – последовательность непрерывных линейных операторов между сепарабельными пространствами Фреше X и Y, причем $A_n x \to Ax$ почти всюду относительно борелевской вероятностной меры μ на X. Тогда найдутся компактно вложенное в X рефлексивное

сепарабельное банахово пространство $(E, \|\cdot\|_E)$ меры 1 и непрерывный линейный оператор $\widetilde{A}\colon\ (E, \|\cdot\|_E) \to Y$, равный A почти всюду.

2. Пусть X – сепарабельное пространство с центрированной гауссовской мерой γ, а произведение X^n наделено степенью γ^n меры γ. Если E – рефлексивное сепарабельное банахово пространство меры 1, которое компактно вложено в X^n, то найдется такое рефлексивное сепарабельное банахово пространство L меры 1, компактно вложенное в X, что $L^n \subset E$ и вложение компактно.

3. Пусть $\{\mu_\alpha\}$ – семейство центрированных радоновских гауссовских мер на произведении $X \times Y$, где X и Y – суслинские локально выпуклые пространства, измеримо зависящих от параметра α из измеримого пространства $(\mathfrak{A}, \mathcal{A})$. Тогда условные меры μ_α^y на X можно выбрать так, что они будут $\mathcal{B}(Y) \otimes \mathcal{A}$-измеримо зависеть от (y, α).

Положения, выносимые на защиту.

1. Существование компактно вложенного в X рефлексивного сепарабельного банахова пространства $(E, \|\cdot\|_E)$ меры 1 и непрерывного линейного оператора $\widetilde{A}\colon\ (E, \|\cdot\|_E) \to Y$, равного почти всюду оператору A, который задан как предел почти всюду сходящейся последовательности $A_n\colon\ X \to Y$ непрерывных линейных операторов между сепарабельными пространствами Фреше.

2. Существование такого рефлексивного сепарабельного банахова пространства L меры 1, компактно вложенного в сепарабельное банахово пространство X с центрированной гауссовской мерой γ, что $L^n \subset E$ и вложение компактно, если E — рефлексивное сепарабельное банахово пространство меры 1, компактно вложенное в X^n с степенью меры γ.

3. Для семейства центрированных радоновских гауссовских мер, которые заданы на произведении двух суслинских локально выпуклых пространств и измеримо зависят от параметра, существование условных мер на первом сомножителе, которые измеримо зависят от этого параметра.

Методы исследования. Методы, используемые в настоящей работе, относятся к общему функциональному анализу, теории меры на локально выпуклых пространствах и стохастическому анализу. Кроме того, автором были предложены некоторые оригинальные конструкции.

Теоретическая и практическая ценность. Результаты диссертации имеют теоретический характер и могут быть востребованы в различных вопросах теории меры, бесконечномерного анализа, стохастического анализа и теории вероятностей. Ее результаты и методы будут полезны в исследованиях, проводимых в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова, Математическом институте имени В. А. Стеклова РАН, Национальном исследовательском университете «Высшая школа экономики», Институте проблем передачи информации имени А. А. Харкевича РАН, Санкт-Петербургском государственном университете, Новосибирском государственном университете и Институте динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова Сибирского отделения РАН.

Апробация диссертации.

Результаты диссертации докладывались автором на следующих научных конференциях.

1. Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (Москва, МГУ, 2012 г., 2016 г.),

2. Международная конференция «Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования», Российский университет дружбы народов, Москва, 2014 г.,

3. Международная конференция «2nd Russian-Indian Joint Conference in Statistics and Probability», Euler International Mathematical Institute, С.-Петербург, 2016 г.,

4. Международная конференция «Analysis, probability, and geometry», Москва, МГУ, 2016 г.

По теме диссертации были сделаны доклады на следующих научно-исследовательских семинарах.

1. Научно-исследовательский семинар «Бесконечномерный анализ и стохастика» под руководством В. И. Богачева, Н. А. Толмачева, С. В. Ша-

пошникова (МГУ, многократно, 2011–2019 г.).

2. Научно-исследовательский семинар «Бесконечномерный анализ и математическая физика» под руководством О. Г. Смолянова, Е. Т. Шавгулидзе, Н. Н. Шамарова (МГУ, 2019 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 3 работах автора (см. [36], [37], [38], последняя из которых в соавторстве) в рецензируемых научных журналах из списка ВАК, входящих в базы данных SCOPUS и Web of Science, а также представлены в тезисах 4 международных конференций (см. [39]–[42]).

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 42 наименований. Общий объем диссертации составляет 58 страниц.

В диссертацию вошли результаты, полученные при работе над проектами 14-11-00196 и 17-11-01058 Российского научного фонда (выполняемыми при МГУ им. М.В. Ломоносова).

Краткое содержание диссертации.

Нумерация приводимых здесь результатов соответствует нумерации в основном тексте диссертации.

В первой главе исследуется связь между различными определениями линейных измеримых операторов между сепарабельными пространствами Фреше X и Y, при этом на X задана радоновская мера μ. Здесь показано, что для измеримого линейного оператора в широком смысле найдутся сепарабельный рефлексивный банахов носитель меры и линейная версия оператора, непрерывная на нем. В случае, когда Y – пространство с базисом Шаудера, наличие носителя меры с указанными свойствами равносильно тому, что оператор является измеримым в обычном смысле.

Напомним, что меры на борелевских σ-алгебрах топологических пространств называются борелевскими. Борелевская вероятностная мера μ называется радоновской, если для каждого борелевского множества B и каждого $\varepsilon > 0$ можно найти такое компактное подмножество $K \subset B$, что выполнено неравенство $\mu(B \backslash K) < \varepsilon$.

Борелевская вероятностная мера μ на локально выпуклом пространстве X называется центрированной гауссовской, если всякий непрерывный линейный функционал l на X есть центрированная гауссовская случайная величина относительно μ, т.е. индуцированная мера $\mu \circ l^{-1}$ либо сосредоточена в нуле, либо имеет плотность распределения вида

$$(2\pi\sigma)^{-1/2} \exp(-t^2/(2\sigma)).$$

Если $\sigma = 1$, то мера с такой плотностью называется стандартной гауссовской мерой на прямой. Важнейшим примером центрированной гауссовской меры служит счетная степень стандартной гауссовской меры на прямой, заданная на пространстве $\mathbb{R}^\infty$ всех вещественных последовательностей и называемая стандартной гауссовской мерой на $\mathbb{R}^\infty$. Общие сведения о радоновских и гауссовских мерах можно найти в [2], [19], [21].

Пространство полной меры – пространство меры 1 в случае вероятностной меры, а в общем случае имеющее дополнение меры нуль.

Полное метризуемое локально выпуклое пространство называют пространством Фреше.

Говорят, что банахово пространство E компактно вложено в локально выпуклое пространство X, если E — линейное подпространство в X, а единичный шар из E имеет компактное замыкание в X. Если пространство E рефлексивно, то его замкнутый единичный шар компактен в X, ибо он слабо компактен.

Хорошо известно, что каждая радоновская мера на пространстве Фреше сосредоточена на компактно вложенном рефлексивном сепарабельном банаховом пространстве (см. [6], [3] и гл. 7 в [2]). С другой стороны, для широких классов измеримых линейных операторов известно существование непрерывно вложенных пространств, сужения на которые непрерывны (см., например, §3.11 в [19]). Естественно возникает вопрос о возможности выбора подпространства, сужение на которое измеримого линейного оператора непрерывно, с такими же свойствами, как и носитель меры.

Основной результат первой главы дает положительный ответ на этот вопрос. Кроме того, получена новая характеризация измеримых линейных операторов со значениями в пространствах с базисами Шаудера. В литературе используется несколько различных естественных определений измеримого линейного оператора на локально выпуклом пространстве X с радоновской вероятностной мерой μ, принимающего значения в локально выпуклом пространстве Y (о мерах на локально выпуклых пространствах см. [2], [20], [7]).

Определение 1.2.1. *Измеримым линейным оператором будем называть отображение A, которое почти всюду по мере μ является пределом последовательности непрерывных линейных операторов $A_n\colon\ X \to\ Y$.*

Всюду ниже X и Y будут сепарабельными пространствами Фреше, поэтому все борелевские меры на X автоматически радоновы, а всякий измеримый линейный оператор из X в Y автоматически оказывается μ-измеримым, т.е. для всякого $B \in \mathcal{B}(Y)$ множество $A^{-1}(B)$ измеримо относительно μ (входит в лебеговское пополнение $\mathcal{B}(X)$). Другое естественное определение таково.

Определение 1.2.2. *Измеримым линейным оператором в широком смысле называют такое μ-измеримое отображение $A\colon X \to Y$, что найдутся измеримое линейное подпространство $X_0 \subset X$ полной меры и линейное в обычном смысле отображение $A_0\colon\ X_0 \to Y$, почти всюду равное A. Такое отображение A_0 называют собственно линейной версией A.*

Измеримый линейный оператор между сепарабельными пространствами Фреше является измеримым линейным оператором в широком смысле, ибо множество всех точек $x \in X$, где последовательность $\{A_n(x)\}$ сходится, является борелевским линейным подпространством. Некоторое время считалось, что оба понятия равносильны (см., например, теорему 2 на с. 618 в [11]), но затем выяснилось, что в общем случае это не так (см. [28], [15]). Правда, для некоторых важных классов мер, например гауссовских, равносильность имеет место (см. гл. 3 в [19] и пример ниже). Рассмотрим следующее свойство отображения A:

(RB) *есть рефлексивное сепарабельное банахово пространство* $(E, \|\cdot\|_E)$ *меры* 1*, компактно вложенное в* X*, причем* A *имеет версию, являющуюся непрерывным линейным оператором из* $(E, \|\cdot\|_E)$ *в* Y*.*

Далее доказано, что измеримые линейные операторы обладают свойством (RB), а если Y — банахово пространство с базисом Шаудера, то верно и обратное. Тем самым для банахова пространства Y с базисом Шаудера свойство (RB) равносильно определению 1.2.1.

Теорема 1.2.3. *Пусть* $A_n\colon X \to Y$ *– последовательность непрерывных линейных операторов между сепарабельными пространствами Фреше* X *и* Y*, причем* $A_n x \to Ax$ *почти всюду относительно борелевской вероятностной меры* μ *на* X*. Тогда найдутся компактно вложенное в* X *сепарабельное рефлексивное банахово пространство* $(E, \|\cdot\|_E)$ *полной меры и непрерывный линейный оператор* $\widetilde{A}\colon (E, \|\cdot\|_E) \to Y$*, равный оператору* A *почти всюду.*

Следствие 1.2.4. *Вместо сепарабельности обоих пространств* X *и* Y *можно потребовать лишь радоновость меры* μ *на* X*.*

Следствие 1.2.5. *Если* Y *– банахово пространство, то упомянутое в теореме пространство* E *можно взять так, что некоторая подпоследовательность* $\{A_{n_k}\}$ *будет сходиться на* E *по операторной норме.*

Сформулируем вторую теорему.

Теорема 1.2.7. *Пусть* $(E, \|\cdot\|_E)$ *– сепарабельное рефлексивное банахово пространство, компактно вложенное в* X*,* A *– непрерывный линейный оператор из* $(E, \|\cdot\|_E)$ *в банахово пространство* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *с базисом Шаудера. Тогда существует последовательность непрерывных конечномерных линейных операторов* $A_n\colon X \to (Y, \|\cdot\|_Y)$*, поточечно сходящихся к* A *на* E*.*

Следствие 1.2.8. *Если* Y *– банахово пространство с базисом Шаудера, то определение* 1.2.1 *равносильно свойству* (RB).

Следствие 1.2.9. *Если X и Y гильбертовы, то пространство E в теореме* 1.2.3 *тоже можно взять гильбертовым. Оба утверждения остаются в силе и для пространства Фреше Y с базисом.*

Пример. Рассмотрим случай, когда γ – центрированная гауссовская радоновская мера на локально выпуклом пространстве X и A – измеримый линейный оператор на X со значениями в сепарабельном пространстве Фреше Y. Тогда по теореме Цирельсона (см. §1.4 в [20] или гл. 3 в [19]) существуют ортонормированный базис $\{e_n\}$ в пространстве Камерона–Мартина $H(\gamma)$ меры γ и последовательность $\{\xi_n\} \subset X^*$, ортонормированная в $L^2(\gamma)$, такие, что векторы

$$A_n x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k(x) A e_k$$

сходятся к Ax почти всюду (например, здесь применима теорема 3.7.6 из [19], в которой речь идет об операторах из X в X, но общий случай легко сводится к этому путем перехода к пространству $X \times Y$). Линейные операторы A_n непрерывны. Если X – тоже пространство Фреше, то по теореме 1.2.3 найдутся компактно вложенное в X сепарабельное рефлексивное банахово пространство $(E, \|\cdot\|_E)$ полной меры и непрерывный линейный оператор $\widetilde{A}\colon E \to Y$, равный A почти всюду. Из этого следует хорошо известный факт, что для радоновской гауссовской меры на пространстве Фреше X пространство измеримых линейных функционалов (совпадающее с совокупностью всех измеримых линейных в широком смысле функционалов) совпадает с множеством линейных функций, обладающих непрерывными сужениями на компактно вложенные рефлексивные сепарабельные банаховы пространства полной меры.

Во второй главе исследуются измеримые полилинейные функции на пространствах Фреше и аналоги двух свойств для них, которые равносильны для измеримого линейного функционала относительно гауссовской меры. Доказано, что наличие последовательности непрерывных линейных функций, почти всюду сходящейся к данному функционалу, равносильно наличию компактно вложенного банахова пространства полной меры, на котором данный функционал непрерывен. Показано, что для полилинейных функций эти свойства не равносильны, однако второе свойство равносильно формально более сильному условию, что компактно вложенное подпространство есть степень подпространства, вложенного в исходное пространство Фреше.

Как известно, для измеримых линейных функционалов A на сепарабельном пространстве Фреше X с центрированной гауссовской мерой γ справедливы такие утверждения (см. [19]):

(i) почти всюду функционал A равен пределу последовательности непрерывных линейных функционалов,

(ii) найдутся сепарабельное рефлексивное банахово пространство E полной меры, которое компактно вложено в X, и непрерывный линейный функционал $\widetilde{A}\colon\ E \to \mathbb{R}$, равный A почти всюду.

На самом деле свойство (ii) влечет (i) для всех борелевских мер (см. [5], теорема 8.6.26 или [32], лемма 2), ибо для любого банахова пространства E, компактно вложенного в X, всякий непрерывный линейный функционал на E есть поточечный предел последовательности сужений на E непрерывных функционалов на X.

Возникает естественный вопрос о том, когда эти свойства или их аналоги выполняются для измеримых полилинейных функций. Можно рассматривать этот вопрос для более сильного условия (ii) или для более слабого условия (i).

Есть даже два естественных обобщения первой задачи (т.е. относящейся к свойству (ii)) для полилинейных форм

$$B(x_1, \ldots, x_n)\colon\ X \times X \times \ldots \times X \to \mathbb{R},$$

где X^n наделено степенью меры γ:

(a) найдутся рефлексивное сепарабельное банахово пространство L полной меры, компактно вложенное в X, и такая непрерывная полилинейная форма $\widetilde{B}(x_1, \ldots, x_n)\colon\ L \times \ldots \times L \to \mathbb{R}$, что

$$\widetilde{B}(x_1, \ldots, x_n) = B(x_1, \ldots, x_n)$$

для почти всех $(x_1, \ldots, x_n) \in L \times \ldots \times L$;

(b) найдутся рефлексивное сепарабельное банахово пространство E полной меры, компактно вложенное в $X \times \ldots \times X$, и такая непрерывная полилинейная форма $\widetilde{B}(x_1, \ldots, x_n) \colon E \to \mathbb{R}$, что

$$\widetilde{B}(x_1, \ldots, x_n) = B(x_1, \ldots, x_n)$$

для почти всех $(x_1, \ldots, x_n) \in E$.

Основной результат этой главы состоит в том, что для всех $n > 1$ свойства (a) и (b) равносильны, но даже для случая $n = 2$ они не равносильны естественному аналогу свойства (i), т.е. они не равносильны существованию последовательности непрерывных форм, сходящихся к B почти всюду относительно степени меры.

Теорема 2.1.1 на самом деле есть результат о банаховых пространствах, компактно вложенных в X^n; наш основной результат – его прямое следствие для измеримых форм. Эта теорема верна для случая, когда B – полилинейный оператор из X^n в банахово пространство Y.

Основные результаты этой главы заключаются в следующих двух теоремах.

Теорема 2.1.1. *Если E – рефлексивное сепарабельное банахово пространство полной меры, которое компактно вложено в X^n, то найдется такое рефлексивное сепарабельное банахово пространство* L *полной меры, компактно вложенное в X, что $L^n \subset E$ и вложение компактно.*

Поэтому свойства (a) и (b) равносильны.

Теорема 2.2.1. *Существует билинейная форма на $X \times X$, которая почти всюду равна поточечному пределу последовательности непрерывных билинейных форм, но при этом для нее нет рефлексивного сепарабельного банахова пространства* L *полной меры, компактно вложенного в X, и непрерывной билинейной формы $\widetilde{B}(x, y) \colon L \times L \to \mathbb{R}$ такой, что $\widetilde{B}(x, y) = B(x, y)$ для почти всех $(x, y) \in L \times L$.*

В **третьей главе** исследуются свойства условных мер. Показано, что если семейство гауссовских мер $\{\mu_\alpha\}$ на произведении двух суслинских локально выпуклых пространств X и Y зависит измеримо от параметра α, то можно найти такие условные меры μ_α^y на X, что они зависят от (y,α) измеримо.

Пусть даны локально выпуклые пространства X и Y с радоновской вероятностной мерой μ на $\big(X\times Y,\ \mathcal{B}(X\times Y)\big)$. Говорят, что заданы условные меры μ^y, если имеется семейство радоновских вероятностных мер на $\big(X,\ \mathcal{B}(X)\big)$, удовлетворяющее следующим условиям:

1. для всякого борелевского подмножества B пространства $X\times Y$ функция $\mu^y(B^y)$ борелевски измерима, где B^y – проекция на X сечения B по уровню y, т.е.
$$B^y = \{x \in X\colon (x,y)\in B\};$$
2. для всякой ограниченной борелевской функции f на $X\times Y$ интеграл от f по мере μ равен
$$\int_Y \int_X f(x,y)\,\mu^y(dx)\,\nu(dy),$$
где ν – проекция меры μ на Y.

Пусть теперь дано семейство радоновских мер $\{\mu_\alpha\}$ на пространстве $\big(X\times Y, \mathcal{B}(X\times Y)\big)$, измеримо зависящее от параметра α из некоторого измеримого пространства $(\mathfrak{A},\mathcal{A})$. Под этим здесь и далее понимается измеримость относительно слабой топологии на пространстве мер, равносильная $\mathcal{A}$-измеримой зависимости от параметра α интегралов от ограниченных борелевских функций. Естественно возникает вопрос о возможности выбора условных мер μ_α^y так, чтобы они зависели от (α,y) измеримо. В работе [12] был получен следующий важный положительный результат в этот направлении: если X, Y и $\mathfrak{A}$ – вполне регулярные суслинские пространства (непрерывные образы полных сепарабельных метрических пространств), причем $\mathcal{A}=\mathcal{B}(\mathfrak{A})$ – борелевская σ-алгебра, то существует версия условных мер μ_α^y, зависящая от (α,y) измеримо относительно σ-алгебры $\mathcal{S}(Y\times\mathfrak{A})$ на $Y\times\mathfrak{A}$, порожденной суслинскими множествами. Таким образом, речь идет не о борелевской измеримости, а об измеримости относительно более широкой σ-алгебры, причем есть основания полагать, что в общем случае борелевскую измеримость получить нельзя. В данной главе доказано, что для центрированных радоновских гауссовских мер такой борелевский измеримый выбор условных мер осуществим. В случае гауссовских мер условные меры строятся более конструктивно, см. [19], [21], [30], [33].

Сформулируем основной результат главы.

Напомним (см. гл. 8 в [2]), что слабая топология на пространстве борелевских мер на вполне регулярном пространстве X порождается полунормами
$$m \mapsto \left| \int_X f(x)\, m(dx) \right|, \quad f \in C_b(X),$$
где $C_b(X)$ – пространство ограниченных непрерывных функций на X. Если X – суслинское пространство, то пространство мер на нем со слабой топологией также суслинское (см.гл. 8 в [2]). Борелевская σ-алгебра на этом пространстве мер порождается интегралами от ограниченных непрерывных функций на X, а интегралы от ограниченных борелевских функций представляют собой борелевские функции на пространстве мер.

Согласно известной теореме Цирельсона (см. [19]), всякая центрированная радоновская гауссовская мера μ сосредоточена на суслинском подпространстве и является образом стандартной гауссовской меры на $\mathbb{R}^\infty$ при некотором линейном измеримом отображении. Более того, если мера μ не сосредоточена на конечномерном подпространстве, то упомянутое линейное отображение является изоморфизмом борелевских линейных подпространств меры 1. Это сводит обсуждаемый нами вопрос к случаю пространств $X = Y = \mathbb{R}^\infty$, который далее и рассматривается.

Точки пространства $\mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty$ будут обозначаться через (x, y), где компоненты векторов x и y имеют координаты x_i и y_i.

В теореме 5.14 из [21] (см. также п. 3.10 в [19]) для центрированной гауссовской меры μ на $X \times Y$ (далее мы считаем, что $X = Y = \mathbb{R}^\infty$) построена центрированная гауссовская мера σ на X, по которой можно построить условные меры следующим образом:

$$\mu^y = \sigma(\,\cdot - Ay), \qquad \text{где } A = \mathbb{E}(x \mid y),$$

где $\mathbb{E}(x \mid y)$ – условное математическое ожидание первой компоненты относительно σ-алгебры, порожденной второй компонентой. Иначе говоря, $A\colon Y \to X$, $Ay = (\xi_1(y), \xi_2(y), \ldots)$, ξ_k – условное математическое ожидание координаты x_k относительно σ-алгебры, порожденной всеми координатами y_i. Это условное математическое ожидание есть проекция в $L^2(\mu)$ координатной функции x_k на замкнутое линейное подпространство, порожденное координатными функциями y_i. Если $\{\eta_i\}$ – результат ортогонализации в $L^2(\mu)$ функций $\{y_i\}$, то

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{\infty} (x_k, \eta_i)_{L^2(\mu)} \eta_i,$$

где ряд сходится почти всюду и в $L^2(\mu)$.

Мера σ совпадает с образом меры μ при измеримом линейном отображении $(x, y) \mapsto x - Ay$. Значит, интеграл ограниченной борелевской функции f по мере σ вычисляется по формуле

$$\int_X f(x)\,\sigma(dx) = \int_{X\times Y} f(x - Az)\,\mu(dx\,dz),$$

а интеграл по мере μ^y дается формулой

$$\int_X f(x)\,\mu^y(dx) = \int_{X\times Y} f(x - Az + Ay)\,\mu(dx\,dz).$$

Таким образом, для доказательства теоремы надо показать, что соответствующие условные меры $\sigma_\alpha(\,\cdot - A_\alpha y)$ зависят измеримо от (y, α), что приводит к рассмотрению интегралов

$$\int_{X\times Y} f(x - A_\alpha z + A_\alpha y)\,\mu_\alpha(dx\,dz).$$

Теорема 3.2.1. *Пусть дано семейство центрированных гауссовских мер $\{\mu_\alpha\}$ на произведении $X \times Y$ двух суслинских локально выпуклых пространств, при этом семейство мер зависит измеримо от параметра α,* *который принимает значение в измеримом пространстве* $(\mathfrak{A}, \mathcal{A})$. *Тогда найдутся гауссовские условные меры* μ_α^y, *которые зависят* $\mathcal{B}(Y) \otimes \mathcal{A}$-*измеримо от* (y, α).

Автор благодарит своего научного руководителя В. И. Богачева за предложенные задачи и поддержку в работе.

Глава 1

НЕПРЕРЫВНЫЕ СУЖЕНИЯ ИЗМЕРИМЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

1.1 ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБОЗНАЧЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Напомним основные определения и обозначения, которые мы будем использовать в настоящей главе.

Пусть X – локально выпуклое пространство. Как и выше, $\mathcal{B}(X)$ – борелевская σ-алгебра пространства X, X^* – пространство всех непрерывных линейных функционалов на X.

Алгебраическим ядром множества A в линейном пространстве X называется множество всех таких точек $x \in A$, что для каждого $v \in A$ найдется число $\varepsilon = \varepsilon(v) > 0$, для которого $x + tv \in A$ при $|t| < \varepsilon$. Если X – нормированное пространство, то всякая внутренняя точка A входит в алгебраическое ядро.

Множество V в линейном пространстве называется выпуклым, если для всяких двух элементов $x, y \in V$ и всякого числа $\lambda \in [0, 1]$ имеем $\lambda x + (1 - \lambda)y \in V$. Множество V называется уравновешенным, если $\lambda v \in V$ для всех $v \in V$ и всех скаляров λ с $|\lambda| \leq 1$.

Пусть V – выпуклое множество в линейном пространстве X. Предположим, что алгебраическое ядро V содержит точку 0. Функционал Минковского множества V есть функция

$$p_V(x) := \inf\{t > 0 \colon t^{-1}x \in V\}.$$

Далее считается, что X – локально выпуклое пространство, в ряде результатов речь идет о пространствах Фреше.

Напомним также определение гауссовской меры (уже данное во введении). Вначале рассмотрим случай прямой: вероятностная мера γ на прямой называется гауссовской, если она либо является дираковской мерой δ_a в точке a, либо имеет плотность

$$p(\cdot, a, \sigma) \colon \ t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp(-\frac{(t-a)^2}{2\sigma})$$

относительно меры Лебега. В последнем случае говорят, что мера невырождена, a называют средним меры, а σ – ее дисперсией. Гауссовская мера с нулевым средним и с дисперсией, равной единице, называется стандартной гауссовской мерой.

Вероятностная мера γ на $\mathbb{R}^n$ называется гауссовской, если для каждого линейного функционала l на $\mathbb{R}^n$ индуцированная мера $\gamma \circ l^{-1}$ на прямой является гауссовской.

Для определения гауссовской меры в бесконечномерном случае нам потребуется еще ряд определений и обозначений. Обозначим через $\epsilon(X)$ наименьшую σ-алгебру, относительно которой измеримы все линейные функционалы на X. Для сепарабельных пространств Фреше эта σ-алгебра совпадает с борелевской.

Вероятностная мера γ, заданная на σ-алгебре $\epsilon(X)$, называется гауссовской, если для каждого $f \in X^*$ индуцированная мера $\gamma \circ f^{-1}$ на прямой оказывается гауссовской. Мера γ называется центрированной (или симметричной), если центрированы все меры $\gamma \circ f^{-1}$, где $f \in X^*$.

Пусть γ – гауссовская мера на локально выпуклом пространстве X. Обозначим через X^*_γ замыкание множества

$$\{f - a_\gamma(f), f \in X^*\},$$

вложенного в $L^2(\gamma)$, по норме из $L^2(\gamma)$. Элемент a_γ в алгебраическом сопряженном $(X^*)'$ к X^*, определенный формулой

$$a_\gamma(f) = \int_X f(x)\gamma(dx),$$

называется средним γ. Полученное пространство, наделенное скалярным произведением из $L^2(\gamma)$, называют воспроизводящим гильбертовым пространством меры γ. Далее, оператор $R_\gamma\colon X^* \to (X^*)'$, заданный формулой

$$R_\gamma(f)(g) := \int_X \big(f(x) - a_\gamma(f)\big)\big(g(x) - a_\gamma(g)\big)\gamma(dx),$$

называется ковариационным оператором γ. Положим

$$|h|_{H(\gamma)} = \sup\big\{l(h) : l \in X^*,\ R_\gamma(l)(l) \le 1\big\},$$

$$H(\gamma) = \{h \in X\colon \quad |h|_{H(\gamma)} < \infty\},\ \ U_H = \{h\colon \quad |h|_{H(\gamma)} \le 1\}.$$

Пространство $H(\gamma)$ называется пространством Камерона–Мартина. По лемме 2.3.1 из [19] вектор h из X входит в пространство Камерона–Мартина $H(\gamma)$ в точности тогда, когда существует $g \in X^*_\gamma$ с $h = R_\gamma(g)$. При этом $|h|_{H(\gamma)} = \|g\|_{L^2(\gamma)}$.

1.2 Основные результаты

Хорошо известен факт, что всякая радоновская мера на пространстве Фреше сосредоточена на компактно вложенном рефлексивном сепарабельном банаховом пространстве (см. [6], [3] и гл. 7 в книге [2]). Более точно, в указанной книге доказана следующая теорема 7.12.4, которая будет использоваться нами в дальнейшем, поэтому приведем здесь ее полную формулировку. Пусть μ – вероятностная мера Радона на пространстве Фреше X. Тогда найдется такое линейное подпространство $E \subset X$, что $\mu(E) = 1$ и E с некоторой нормой $\|\cdot\|_E$ является рефлексивным сепарабельным банаховым пространством, замкнутые шары которого компактны в X.

Многие банаховы пространства обладают топологическими базисами. Последовательность $\{h_n\} \subset X$ называется базисом Шаудера, или топологическим базисом сепарабельного банахова пространства X, если для каждого $x \in X$ есть единственная числовая последовательность $\{c_n(x)\}$ такая, что $x = \Sigma_{n=1}^{\infty} c_n(x) h_n$, где ряд сходится по норме.

В литературе используется несколько различных естественных определений измеримого линейного оператора на локально выпуклом пространстве X с радоновской вероятностной мерой μ, принимающего значения в локально выпуклом пространстве Y (о мерах на локально выпуклых пространствах см. [2], [20], [7]). Приведем следующее определение.

Определение 1.2.1. *Измеримым линейным оператором будем называть отображение A, которое почти всюду по мере μ является пределом последовательности непрерывных линейных операторов $A_n\colon\ X \to\ Y$.*

Пусть X, Y – сепарабельные пространства Фреше, тогда все борелевские меры на X автоматически радоновы, а всякий измеримый линейный оператор из X в Y в смысле определения 1.2.1 оказывается μ-измеримым отображением, т.е. для всякого множества $M \in \mathcal{B}(Y)$ множество $A^{-1}(M)$ измеримо относительно μ (входит в лебеговское пополнение $\mathcal{B}(X)$). Рассмотрим еще одно естественное определение.

Определение 1.2.2. *Измеримым линейным оператором в широком смысле называется μ-измеримое отображение $A\colon X \to Y$ такое, что существуют измеримое линейное подпространство $X_0 \subset X$ полной меры и линейное в обычном смысле отображение $A_0 : X \to Y$ такое, что $A = A_0$ почти всюду по мере μ. Такое отображение называется собственно линейной версией A.*

Заметим, что измеримый линейный оператор в смысле определения 1.2.1 между сепарабельными пространствами Фреше является измеримым линейным оператором в широком смысле. В самом деле, пусть

$$Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x$$

почти всюду по μ. Тогда множество точек x таких, что последовательность $A_n x$ сходится, является борелевским линейным подпространством. Какое-то время считалось, что оба понятия равносильны (см., например, [11, теорема 2, с. 618]), но затем выяснилось, что в общем случае это не так (см. [28], [15]). Однако для некоторых важных классов мер, например гауссовских, равносильность имеет место (см. гл. 3 в [19] и пример ниже).

С другой стороны, для широких классов измеримых линейных операторов известно существование непрерывно вложенных пространств, сужения на которые непрерывны (см., например, §3.11 в [19]). Естественно возникает вопрос о том, возможно ли выбрать подпространство, сужение на которое измеримого линейного оператора непрерывно, причем это подпространство обладает такими же свойствами, как и носитель меры. Один из основных результатов данной диссертационной работы дает положительный ответ на этот вопрос. Кроме того, нами была получена новая характеризация измеримых линейных операторов со значениями в пространствах с базисами Шаудера.

Рассмотрим следующее свойство отображения A (немного изменим то, что требуется от него во втором определении):

Свойство (RB) Существует рефлексивное сепарабельное банахово пространство $(E, \|\cdot\|_E)$ полной меры, компактно вложенное в X, такое, что A имеет версию, являющуюся линейным непрерывным оператором из $(E, \|\cdot\|_E)$ в Y.

Докажем, что всякий измеримый линейный оператор обладает свойством (RB), а если Y – банахово пространство с базисом Шаудера, то свойство (RB) равносильно определению 1.2.1.

Теорема 1.2.3. *Пусть $A_n\colon\ X \to Y$ – последовательность непрерывных линейных операторов между сепарабельными пространствами Фреше X и Y, причем $A_n x \to Ax$ почти всюду относительно борелевской вероятностной меры μ на X. Тогда найдутся компактно вложенное в X*

рефлексивное сепарабельное банахово пространство $(E, \|\cdot\|_E)$ *полной меры и непрерывный линейный оператор* $\widetilde{A}\colon (E, \|\cdot\|_E) \to Y$*, равный* A *почти всюду.*

Доказательство. Как уже говорилось, по теореме 7.12.4 из [2] существует компактно вложенное в X рефлексивное сепарабельное банахово пространство $(E_0, \|\cdot\|_{E_0})$ полной меры. Очевидно, что на $(E_0, \|\cdot\|_{E_0})$ операторы A_n непрерывны и $A_n x \to Ax$ почти всюду на E_0. В силу этой теоремы нам достаточно установить наличие банахова пространства $E \subset E_0$ со всеми нужными свойствами, кроме рефлексивности (ибо в нем можно будет найти меньшее рефлексивное пространство по той же теореме 7.12.4 из [2]). Сначала предположим, что Y банахово. Покажем, что найдется подпоследовательность индексов $\{n_k\}$ такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \|A_{n_{k+1}}x - A_{n_k}x\|_Y^2 < \infty \tag{1}$$

почти всюду. Заметим, что для этого достаточно, чтобы почти всюду выполнялось неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \|A_{n_{k+1}}x - Ax\|_Y^2 < \infty.$$

Докажем существование $\{n_k\}$. Из поточечной сходимости $A_n \to A$ следует сходимость по мере, следовательно, для всякого k существует n_k такое, что $\mu(\Omega_k) < 2^{-k}$, где

$$\Omega_k = \{x\colon\ \|A_{n_k}x - Ax\|_Y^2 > 2^{-2k}\}.$$

Положим

$$\Lambda = \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{k=N}^{\infty} \Omega_k.$$

Поскольку $\mu(\bigcup\limits_{k=N}^{\infty} \Omega_k) \leqslant 2^{1-N}$, то $\mu(\Lambda) = 0$. Если $x \in X \backslash \Lambda$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \|A_{n_{k+1}}x - A_{n_k}x\|_Y^2 < \infty,$$

что и требовалось доказать. Рассмотрим пространство $E \subset E_0$ всех таких векторов x, что выполнено (1). Это линейное подпространство полной меры; определим на нем следующую норму:

$$\|x\|_E = \|x\|_{E_0} + \Big(\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \|A_{n_{k+1}}x - A_{n_k}x\|_Y^2\Big)^{1/2}.$$

Пространство $(E, \|\cdot\|_E)$ полно, что нетрудно проверить непосредственно. В самом деле, пусть $\{x_n\}$ – фундаментальная последовательность в E. Тогда она, как следует из вида нормы на E, фундаментальна в E_0. Так как E_0 полно, то у нее есть некоторый предел x в E_0. Проверим, что

$$\|x_n - x\|_E \to 0.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда при некотором N для всех $m, n > N$ имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \|(A_{n_{k+1}} - A_{n_k})(x_n - x_m)\|_Y^2 < \varepsilon.$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$ и учитывая непрерывность операторов A_k, получаем оценку

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \|(A_{n_{k+1}} - A_{n_k})(x_n - x)\|_Y^2 \leqslant \varepsilon.$$

Значит, $x \in E_0$ и $\|x_n - x\|_E \to 0$. Таким образом, $(E, \|\cdot\|_E)$ – банахово пространство, непрерывно вложенное в $(E_0, \|\cdot\|_{E_0})$ и компактно вложенное в X. Из (1) следует, что $\mu(E) = 1$. Рассмотрим пространство

$$Z = E_0 \bigoplus \bigoplus_{l_2} Y_k,$$

где $Y_k = (Y, 2^k\|\cdot\|_Y)$, а l_2-сумма пространств Y_k есть пространство последовательностей $z = (z_k)_{k=1}^{\infty}$, где $z_k \in Y_k$, с конечной нормой $\Big(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|z_k\|_{Y_k}^2\Big)^{1/2}$. Хорошо известно, что оно сепарабельно, так как E_0 и Y сепарабельны. Отображение

$$T\colon\ E \to Z,$$

$$Tx = (x, (A_{n_2} - A_{n_1})x, (A_{n_3} - A_{n_2})x, (A_{n_4} - A_{n_3})x, \dots)$$

устанавливает линейную изометрию между пространством E и подпространством сепарабельного пространства Z, следовательно, само E сепарабельно. Для всякого $x \in E$ последовательность $\{A_{n_k}x\}$ очевидным образом фундаментальна в Y и потому сходится в Y. Далее рассматриваем версию A, равную пределу $\{A_{n_k}\}$ на E. Для этой версии имеем

$$\|Ax\|_Y = \lim_{k\to\infty} \|A_{n_k}x\|_Y,$$

откуда с учетом равенства

$$A_{n_k}x = (A_{n_k}x - A_{n_{k-1}}x) + \cdots + (A_{n_2}x - A_{n_1}x) + A_{n_1}x$$

получаем

$$\begin{aligned}
\|Ax\|_Y &\leqslant \|A_{n_1}x\|_Y + \sum_{k=1}^{\infty} \|A_{n_{k+1}}x - A_{n_k}x\|_Y \leqslant \\
&\leqslant \|A_{n_1}x\|_Y + \Big(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\Big)^{1/2}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \|A_{n_{k+1}}x - Ax\|_Y^2\Big)^{1/2} \leqslant \\
&\leqslant \|A_{n_1}x\|_Y + \|x\|_E.
\end{aligned}$$

Следовательно, оператор A непрерывен из $(E, \|\cdot\|_E)$ в $(Y, \|\cdot\|_Y)$.

Обратимся к общему пространству Фреше Y и укажем необходимые изменения в рассуждениях. Можно считать, что топология Y задана последовательностью полунорм p_n, причем $p_n \leqslant p_{n+1}$. Теперь вместо (1) можно добиться выполнения почти всюду соотношения

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k p_k^2(A_{n_{k+1}}x - A_{n_k}x) < \infty. \tag{2}$$

Норму на E зададим формулой

$$\|x\|_E = \|x\|_{E_0} + \Big(\sum_{k=1}^{\infty} 2^k p_k^2(A_{n_{k+1}}x - A_{n_k}x)\Big)^{1/2}.$$

Как и выше, с этой нормой E полно и сепарабельно. Непрерывность оператора $A\colon\ E \to Y$, заданного, как и выше, равенством $Ax = \lim\limits_{k\to\infty} A_{n_k}x$, вытекает из того, что при фиксированном m и всех $k > m$ верны оценки

$$
\begin{aligned}
&p_m(A_{n_{k+1}}x)\\
&\leqslant p_m(A_{n_{k+1}}x - A_{n_k}x) + \dots + p_m(A_{n_{m+1}}x - A_{n_m}x) + p_m(A_{n_m}x) \leqslant\\
&\leqslant p_k(A_{n_{k+1}}x - A_{n_k}x) + \dots + p_m(A_{n_{m+1}}x - A_{n_m}x) + p_m(A_{n_m}x) \leqslant\\
&\leqslant \|x\|_E + p_m(A_{n_m}x).
\end{aligned}
$$

Теорема доказана.

Следствие 1.2.4. *Вместо сепарабельности обоих пространств X и Y можно потребовать лишь радоновость меры μ на X.*

Доказательство. В этом случае мера μ сосредоточена на некотором сепарабельном замкнутом подпространстве X_0, а замыкание линейной оболочки сепарабельных множеств $A_n(X_0)$ оказывается сепарабельным пространством Фреше.

Из определения нормы в E очевиден такой факт.

Следствие 1.2.5. *Если Y – банахово пространство, то упомянутое в теореме пространство E можно взять так, что некоторая подпоследовательность $\{A_{n_k}\}$ будет сходиться на E по операторной норме.*

Замечание 1.2.6. Как следует из [13], пространство E можно взять (еще уменьшив его) в виде факторпространства l_2-суммы конечномерных банаховых пространств (класс таких пространств еще у́же класса рефлексивных пространств).

Перейдем к следующей теореме.

Теорема 1.2.7. *Пусть $(E, \|\cdot\|)$ – рефлексивное сепарабельное банахово пространство, компактно вложенное в X, A – непрерывный линейный оператор из $(E, \|\cdot\|)$ в банахово пространство $(Y, \|\cdot\|_Y)$ с базисом Шаудера. Тогда существует последовательность непрерывных конечномерных линейных операторов $A_n\colon\ X \to (Y, \|\cdot\|_Y)$, поточечно сходящаяся к A на E.*

Доказательство.. Сначала рассмотрим случай $Y = \mathbb{R}$. Пусть V – замкнутый единичный шар в $(E, \|\cdot\|)$, B^* – замкнутый единичный шар в сопряженном пространстве E^*; тогда $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} nV$. Так как E рефлексивно и компактно вложено в X, то V – компакт в X. Очевидно, что норма на E совпадает с функционалом Минковского p_V множества V. Применим теорему 8.6.26 из [5], в которой говорится, что если V – компактное выпуклое уравновешенное множество в локально выпуклом пространстве E и B^* – единичный шар в сопряженном к банахову пространству E_V, то множество всех функционалов в B^*, непрерывных относительно топологии, индуцированной из E, плотно в B^* в топологии равномерной сходимости на компактах из E_V. Тогда мы получаем, что множество всех функционалов из B^*, непрерывных относительно топологии, индуцированной из X, плотно в B^* относительно топологии поточечной сходимости на V. Так как E сепарабельно, то топология поточечной сходимости на V метризуема. Следовательно, элемент замыкания является пределом некоторой последовательности. В нашем случае, если $f \in E^*$, то $f/\|f\| \in B^*$, поэтому существует последовательность $g_n \in B^*$, сходящаяся к $f/\|f\|$ поточечно и состоящая из функционалов, непрерывных на E в топологии, индуцированной из X. Ясно, что тогда $\|f\|g_n \to f$. Функционалы $\|f\|g_n$ можно по непрерывности продолжить на все X. Случай $Y = \mathbb{R}^k$ легко выводится из доказанного, что дает случай, когда Y конечномерно. Пусть теперь Y – пространство с базисом Шаудера $\{e_n\}$. Пусть P_k – проекции Y на линейную оболочку Y_k векторов $e_1, \ldots, e_k$. Это непрерывные операторы, поэтому для каждого из конечномерных непрерывных операторов P_kA существует последовательность непрерывных конечномерных операторов $A_{k,n}\colon X \to Y$, поточечно сходящаяся к P_kA на E. Остается заметить, что можно выбрать подпоследовательность $\{A_{k,n_k}\}$, поточечно на E сходящуюся к A. Например, можно воспользоваться метризуемостью поточечной сходимости на V. Теорема доказана.

Следствие 1.2.8. *Если Y – рефлексивное банахово пространство с базисом Шаудера, то определение* 1.2.1 *равносильно свойству (RB).*

Следствие 1.2.9. *Если X и Y гильбертовы, то пространство E в теореме* 1.2.3 *тоже можно взять гильбертовым. Для этого надо сначала взять гильбертово пространство E_0. Нетрудно видеть, что утверждение остается в силе и для пространства Фреше Y с базисом.*

Отметим, что в работе [31] было введено понятие стохастического базиса в пространстве Фреше. Хотя такие базисы имеются для гауссовских мер в общих пространствах (см. [19]), в общем случае стохастический базис существует не всегда (см. [25]).

Пример. Рассмотрим случай, когда γ – центрированная гауссовская радоновская мера на локально выпуклом пространстве X и A – измеримый линейный оператор на X со значениями в сепарабельном пространстве Фреше Y. Дадим формулировку теоремы Цирельсона, см. §1.4 в [20] или гл. 3 в [19]: пусть γ – центрированная радоновская гауссовская мера на локально выпуклом пространстве X, $\{e_n\}$ – ортонормированный базис в пространстве Камерона–Мартина $H(\gamma)$ и $\{\xi_n\}$ – независимые стандартные гауссовские случайные величины. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(\omega)e_n$ сходится в X для почти всех ω, причем распределение его суммы есть γ. Следовательно, по теореме Цирельсона существуют ортонормированный базис $\{e_n\}$ в пространстве Камерона–Мартина $H(\gamma)$ меры γ и последовательность $\{\xi_n\} \subset X^*$, ортонормированная в $L^2(\gamma)$, такие, что векторы

$$A_n x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k(x) A e_k$$

сходятся к Ax почти всюду (например, здесь применима теорема 3.7.6 из [19], которая формулируется так. Пусть γ – центрированная радоновская гауссовская мера на локально выпуклом пространстве X. Наделим пространство Камерона–Мартина $H = H(\gamma)$ его обычной гильбертовой нормой $|\cdot|_H = |\cdot|_{H(\gamma)}$. Тогда всякий оператор $A \in \mathcal{L}(H)$ продолжается до измеримого линейного отображения $\widehat{A}$: $(X, \mathcal{B}(X)_\gamma) \to (X, \mathcal{B}(X))$. Любые два таких продолжения совпадают почти всюду по мере γ. Кроме того, образ γ относительно этого продолжения является мерой Радона. В этой теореме речь идет об операторах из X в X, но общий случай сводится к этому переходом к пространству $X \times Y$).

Линейные операторы A_n непрерывны. Если X – тоже пространство Фреше, то по теореме 1.2.3 найдутся компактно вложенное в X рефлексивное сепарабельное банахово пространство $(E, \|\cdot\|_E)$ полной меры и непрерывный линейный оператор $\widetilde{A}\colon\ E \to Y$, почти всюду совпадающий с A. В частности, из этого следует хорошо известный факт, что для радоновской гауссовской меры на пространстве Фреше X пространство измеримых линейных функционалов (совпадающее с совокупностью всех измеримых линейных в широком смысле функционалов) совпадает с множеством линейных функций, обладающих непрерывными сужениями на компактно вложенные рефлексивные сепарабельные банаховы пространства полной меры.

Глава 2

НЕПРЕРЫВНЫЕ СУЖЕНИЯ ИЗМЕРИМЫХ ПОЛИЛИНЕЙНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

2.1 ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ РАЗЛИЧНЫХ СВОЙСТВ ИЗМЕРИМОСТИ ПОЛИЛИНЕЙНЫХ ФОРМ

Как уже известно из предыдущей главы, для измеримого линейного функционала A на сепарабельном пространстве Фреше X с борелевской мерой справедливы следующие утверждения:

(i) функционал A почти всюду равен поточечному пределу последовательности непрерывных линейных функционалов;

(ii) найдутся рефлексивное сепарабельное банахово пространство E полной меры, компактно вложенное в X, и непрерывный линейный функционал $\widetilde{A}\colon\ E \to \mathbb{R}$, равный A почти всюду.

Напомним, что банахово пространство E компактно вложено в локально выпуклое пространство X, если E – линейное подпространство в X, причем единичный шар E имеет компактное замыкание в X. Если пространство E рефлексивно, то его замкнутый единичный шар компактен в X, ибо он слабо компактен.

Тот факт, что свойство (ii) влечет свойство (i) на самом деле не связан с мерами, а верен в силу того, что для любого банахова пространства E, которое компактно вложено в X, всякий непрерывный линейный функционал на E есть поточечный предел последовательности сужений на E непрерывных функционалов на X (см. [5, теорема 8.6.26]).

Возникает естественный вопрос о том, когда эти свойства или их аналоги выполняются для измеримых полилинейных функций. Можно рассматривать этот вопрос для условия (ii) или для условия (i), которые могут не быть равносильными для более общих отображений (что и случается уже для билинейных форм, как показано ниже).

Есть даже два естественных обобщения первой задачи (т.е. относящейся к свойству (ii)) для полилинейных форм

$$B(x_1, \ldots, x_n)\colon\ X \times X \times \cdots \times X \to \mathbb{R},$$

где X^n наделяется степенью меры γ:

(a) найдутся рефлексивное сепарабельное банахово пространство L полной меры, компактно вложенное в X, и такая непрерывная полилинейная форма

$$\widetilde{B}(x_1, \ldots, x_n)\colon\ L \times \cdots \times L \to \mathbb{R},$$

что выполнено равенство $\widetilde{B}(x_1, \ldots, x_n) = B(x_1, \ldots, x_n)$ для почти всех $(x_1, \ldots, x_n) \in L \times \cdots \times L$;

(b) найдутся рефлексивное сепарабельное банахово пространство E полной меры, компактно вложенное в $X \times \cdots \times X$, и непрерывная полилинейная форма

$$\widetilde{B}(x_1, \ldots, x_n)\colon E \to \mathbb{R}$$

такая, что $\widetilde{B}(x_1, \ldots, x_n) = B(x_1, \ldots, x_n)$ для почти всех $(x_1, \ldots, x_n) \in E$.

Цель настоящей главы – показать, что для всех $n > 1$ свойства (a) и (b) равносильны, но даже для случая $n = 2$ они не равносильны естественному аналогу свойства (i), т.е. они не равносильны существованию последовательности непрерывных форм, сходящейся к B почти всюду относительно степени меры.

Следующая теорема в действительности является результатом о банаховых пространствах полной меры, компактно вложенных в X^n. Наш основной результат – его прямое следствие для измеримых форм. Эта теорема верна для случая, когда B — полилинейный оператор из X^n в банахово пространство Y.

Теорема 2.1.1. *Если E – рефлексивное сепарабельное банахово пространство полной меры, компактно вложенное в X^n, то найдется такое рефлексивное сепарабельное банахово пространство L полной меры, компактно вложенное в X, что $L^n \subset E$ и вложение компактно.*

Следовательно, свойства (a) и (b) равносильны.

Доказательство. Сначала докажем, что (a) $\Rightarrow$ (b). Ясно, что в качестве E можно брать $L \times \cdots \times L$ с нормой

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \max\{\|x_1\|_L, \ldots, \|x_n\|_L\}.$$

Разумеется, форма $\widetilde{B}$ из условия (a) непрерывна на E.

Докажем, что (b) $\Rightarrow$ (a). Нам нужно найти рефлексивное сепарабельное банахово пространство L полной меры, компактно вложенное в X, и полилинейную форму, непрерывную на $L \times \cdots \times L$, почти всюду равную исходной. Если мы найдем L, непрерывно вложенное в X, а $L \times \cdots \times L \subset E$, то это вложение будет также непрерывно по теореме о замкнутом графике, а функция $\widetilde{B}$, непрерывная на E, будет также непрерывна на $L \times \cdots \times L$. Таким образом, остается только доказать первое утверждение теоремы, которое не привлекает форм.

Остановимся подробнее на доказательстве непрерывности вложения $L \times \ldots \times L$ в $X \times \ldots \times X$. Для этого вспомним необходимое определение и формулировку теоремы о замкнутом графике. Графиком отображения $T\colon\ X \to Y$ называют множнство в $X \times Y$, состоящее из точек вида

$$\Gamma(T)\colon = \{(x, Tx)\colon\ x \in X\}.$$

Если при этом X и Y – банаховы пространства, то произведение $X \times Y$ наделяется естественной структурой линейного пространства и естественной нормой $\|(x, y)\|\colon = \|x\| + \|y\|$. Ясно, что $X \times Y$ полно относительно этой нормы.

Приведем теперь теорему о замкнутом графике. Линейный оператор $T\colon X \to Y$ между банаховыми пространствами непрерывно в точности тогда, когда его график замкнут в $X \times Y$, иначе говоря, в точности тогда когда для любой последовательности x_n элементов множества X, такой что x_n сходится к x и Tx_n сходится к y, выполняется $y = Tx$.

Итак, пусть мы нашли пространство L, которое непрерывно вложено в X так, что $L \times \ldots \times L \subset E$; обозначим это вложение через T. В нашем случае для графика T имеем

$$\Gamma(T) = \{((x_1, \ldots, x_n), (x_1, \ldots, x_n))\colon (x_1, \ldots, x_n) \in L \times \ldots \times L\}$$
$$\subset L \times \ldots \times L \times E.$$

Надо доказать, что это множество замкнуто в $L \times \ldots \times L \times E$, т.е. что из сходимости точек $(x_1^j, \ldots, x_n^j)$ к $(x_1, \ldots, x_n)$ в $L \times \ldots \times L$ при $j \to \infty$ и из сходимости точек $(x_1^j, \ldots, x_n^j)$ к $(y_1, \ldots, y_n)$ в E следует равенство

$$(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n).$$

Если элементы $(x_1^j, \ldots, x_n^j)$ сходятся к $(x_1, \ldots, x_n)$ в $L \times \ldots \times L$, то $(x_1^j, \ldots, x_n^j)$ сходятся к $(x_1, \ldots, x_n)$ в $X \times \ldots \times X$ (так как L непрерывно вложено в X, значит, $L \times \ldots \times L$ непрерывно вложено в $X \times \ldots \times X$). Далее, если $(x_1^j, \ldots, x_n^j)$ сходятся к $(y_1, \ldots, y_n)$ в E и E компактно вложено в $X \times \ldots \times X$, то $(x_1^j, \ldots, x_n^j)$ сходится к $(y_1, \ldots, y_n)$ в $X \times \ldots \times X$. Таким образом, $(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n)$.

Заметим, что о компактности вложения $L \subset X$ можно не беспокоиться, так как она также будет следовать автоматически из того, что $L \times \cdots \times L$ непрерывно вложено в E, а последнее компактно вложено.

Сначала докажем наше утверждение в случае, когда E — сепарабельное банахово пространство полной меры, компактно вложенное в произведение $X \times \cdots \times X$ и обладающее свойством, что оно и его норма симметричны относительно перестановки координат в $X \times \cdots \times X$. Рассмотрим множества

$$E_{x_2^0, \ldots, x_n^0} = \{x \in X\colon (x, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in E\},\ (x_2^0, \ldots, x_n^0) \in X^{n-1}.$$

Каждое из них — аффинное подпространство полной меры для γ^{n-1}-почти всех фиксированных векторов $(x_2^0, \ldots, x_n^0) \in X^{n-1}$. Возьмем такой вектор. Множество

$$L = E_{x_2^0, \ldots, x_n^0}$$

есть линейное подпространство в X, потому что оно содержит нуль. В самом деле, иначе аффинное пространство $-L$ было бы дизъюнктно с L, что невозможно, так как $-L$ является подпространством полной меры ввиду симметричности меры γ.

Кроме того, $L \times \cdots \times L \in E$. Действительно, пусть $u_1, \ldots, u_n \in L$. Нужно показать, что $(u_1, \ldots, u_n) \in E$. Так как L – линейное подпространство, то $0 \in L$; значит,

$$(0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in E,\ (u_j, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in E,\ j = 1, \ldots, n.$$

Следовательно, $(u_j, 0, \ldots, 0) \in E$ для всякого $j = 1, \ldots, n$. Так как E симметрично относительно любых перестановок координат, то

$$(0, \ldots, 0, u_j, 0, \ldots, 0) \in E,$$

где u_j стоит на j-м месте. Таким образом, $(u_1, \ldots, u_n) \in E$, что и требовалось.

Теперь введем такую норму на L:

$$\|y\|_L = \|(y, 0, \ldots, 0)\|_E,\ y \in L = E_{x_2^0, \ldots, x_n^0}.$$

Заметим, что в силу указанного выше свойства $(y, 0, \ldots, 0) \in E$.

Докажем, что пространство L полно. Пусть $\{y_m\}$ — фундаментальная последовательность в L. Тогда из определения нормы на L следует, что последовательность $\{(y_m, 0, \ldots, 0)\}$ фундаментальна в E; так как E полно, то у нее есть предел $(a_1, \ldots, a_n)$ в E. Далее, так как E непрерывно вложено в X^n, то $a_2 = \ldots = a_n = 0$, тогда $(a_1, 0, \ldots, 0) \in E$. Поскольку $(0, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in E$, то $(a_1, x_2^0, \ldots, x_n^0) \in E$, значит, $a_1 \in L$ и это предел последовательности $\{y_m\}$, при этом он лежит в L. Таким образом, L полно.

Далее, пространство $L \times \cdots \times L$ с нормой

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \max\{\|x_k\|_L\colon\ k = 1, \ldots, n\}$$

непрерывно вложено в E. В самом деле, если $\|(x_1,\ldots,x_n)\| \le 1$, то $\|x_k\| \le 1$ для всех $k \le n$, тогда $\|(x_k,0,\ldots,0)\|_E \le 1$. Тогда из симметрии пространства E и его нормы относительно перестановок координат следует, что

$$\|(0,\ldots,x_k,0,\ldots,0)\|_E \le 1,$$

где x_k стоит на k-м месте. Значит, $\|(x_1,\ldots,x_n)\|_E \le n$. Таким образом, мы доказали непрерывность вложения $L\times\cdots\times L$ в E, откуда следует, что вложение $L\times\cdots\times L$ в $X\times\cdots\times X$ компактно. Следовательно, вложение L в X компактно.

Как мы знаем, существует рефлексивное сепарабельное банахово пространство $\widetilde{L}$ полной меры, компактно вложенное в L. Тогда $\widetilde{L}\times\cdots\times\widetilde{L}$ компактно вложено в $L\times\cdots\times L$, а $L\times\cdots\times L$ непрерывно вложено в E, значит, $\widetilde{L}\times\cdots\times\widetilde{L}$ компактно вложено в E. Значит, $\widetilde{L}\subset X$ — компактное вложение, а в качестве искомого пространства L мы можем взять $\widetilde{L}$.

Таким образом, осталось доказать, что можно взять E симметричным с симметричной нормой. Симметрия меры γ^n относительно всех перестановок координат здесь существенна. Для всякой перестановки координат $\sigma\colon\ \{1,\ldots,n\}\to\{1,\ldots,n\}$ множество

$$E_\sigma = \bigl\{(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)})\in X\times\cdots\times X\colon (x_1,\ldots,x_n)\in E\bigr\}$$

является линейным пространством полной γ^n-меры в $X\times\cdots\times X$. Поэтому множество

$$\widetilde{E} = \bigcap_\sigma E_\sigma,$$

где пересечение берется по всем перестановкам координат σ, также является линейным подпространством полной меры в $X\times\cdots\times X$. Введем теперь следующую норму:

$$|||(x_1,\ldots,x_n)||| = \sum_\sigma \|(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)})\|_E,$$

где суммирование ведется по всем перестановкам координат $\{1,\ldots,n\}$. Нетрудно проверить, что пространство $\widetilde{E}$ с указанной нормой банахово.

Пространство $\widetilde{E}$ и норма $|||\cdot|||$ симметричны относительно всех перестановок координат. Теорема доказана.

Замечание 2.1.2. Доказанная теорема с тем же самым доказательством остается в силе для всякой радоновской меры на X, которая инвариантна относительно замены $x \mapsto -x$ (такие меры называются симметричными).

2.2 ПРИМЕР БИЛИНЕЙНОЙ ФОРМЫ

Оказывается, что свойства (i) и (ii), равносильные в случае $n = 1$, не равносильны при $n \geq 2$. В качестве γ возьмем счетную степень стандартной гауссовской меры на прямой $\mathbb{R}$ и будем рассматривать эту меру на пространстве X всех последовательностей или на гильбертовом подпространстве последовательностей с конечной весовой нормой

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} x_n^2\Big)^{1/2}.$$

Пример, приведенный ниже, очень прост, однако мы не смогли придумать элементарного доказательства (приводимое ниже доказательство коротко, но оно использует весьма нетривиальный факт из недавней работы [1], где была решена долгое время остававшаяся открытой проблема о существовании алгебраически полиномиальных версий измеримых полиномов).

Теорема 2.2.1. *Найдется билинейная форма на $X \times X$, которая почти всюду равна поточечному пределу последовательности непрерывных билинейных форм, но при этом для нее нет рефлексивного сепарабельного банахова пространства L полной меры, компактно вложенного в X, и непрерывной билинейной формы $\widetilde{B}(x, y)\colon L \times L \to \mathbb{R}$, таких, что $\widetilde{B}(x, y) = B(x, y)$ для почти всех $(x, y) \in L \times L$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$B(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x_n y_n,$$

заданную этим выражением там, где ряд сходится. Это пока еще не билинейная форма (ибо ее область определения не является линейным пространством). Заметим, что указанный ряд сходится для γ^2-почти всех (x, y). В самом деле, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} x_n^2$ сходится для γ-почти всех x по теореме о монотонной сходимости, потому что интеграл от x_n^2 равен 1. Далее, по следствию из теоремы Колмогорова, для каждого фиксированного x с указанным свойством имеет место сходимость

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x_n y_n$$

по y для γ-п.в. всех элементов y. Согласно [1], функция B может быть доопределена с ее естественной области определения до билинейной формы на всем пространстве $X \times X$ (в обычном алгебраическом смысле). Этот факт, верный для измеримых форм общего вида, отнюдь не является тривиальным даже в этом частном случае. Докажем наше утверждение рассуждением от противного: пусть найдутся пространство $L \subset X$ с нужными свойствами и такая непрерывная билинейная форма $\widetilde{B}$ на $L \times L$, что

$$\widetilde{B}(x, y) = B(x, y)$$

для γ^2-почти всех пар (x, y). Тогда мы получаем, что совпадение имеет место на пространстве l^2 (которое есть пространство Камерона–Мартина для нашей меры γ), что видно из такого свойства γ-измеримых линейных в обычном алгебраическом смысле функций: две такие функции равны почти всюду, если и только если они равны на пространстве Камерона–Мартина меры γ (см. [19]). Таким образом, для почти всякого фиксированного элемента x имеет место равенство

$$\widetilde{B}(x, y) = B(x, y) \text{ для почти всех } y.$$

Следовательно,

$$\widetilde{B}(x, y) = B(x, y) \ \ \forall y \in l^2.$$

Значит,

$$\widetilde{B}(x, y) = B(x, y) \ \ \forall x \in l^2, \ y \in l^2.$$

Рассмотрим линейные отображения

$$P_n x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots),\ x = (x_1, x_2, \ldots).$$

Так как $P_n x \in l_2$, то

$$\widetilde{B}(P_n x, P_n y) = B(P_n x, P_n y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i y_i}{i}.$$

Последовательность векторов $\{P_n x\}$ сходится в L почти всюду в силу известной теоремы Ито–Нисио (или более общей теоремы Цирельсона, см. [19]), причем ее покоординатный предел есть именно x. Поэтому почти всюду она сходится к x по норме пространства L. Поскольку функция $\widetilde{B}$ непрерывна, для почти всех элементов x имеем

$$\widetilde{B}(P_n x, P_n x) \to \widetilde{B}(x, x),$$

откуда получаем

$$\widetilde{B}(x, x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{i}$$

для почти всех x. Однако такое невозможно, поскольку данный ряд расходится почти всюду в X ввиду расходимости рядов из интегралов его элементов (для обоснования можно использовать как теорему Колмогорова о трех рядах для независимых случайных величин x_i^2/i, так и хорошо известный результат, говорящий, что если ряд из многочленов фиксированной степени сходится γ-почти всюду, то он сходится в пространстве $L^2(\gamma)$).

Таким образом, естественные обобщения свойств (i) и (ii) не равносильны даже для билинейных функций и гауссовских мер. Отметим, что рассматриваемая в примере форма относится к классу измеримых билинейных функций, введенных в [16] (там требуется, чтобы форма была измеримым линейным функционалом одного арнумента при почти всяком фиксированном значении другого).

Замечание 2.2.2. Пусть γ — центрированная гауссовская мера на сепарабельном банаховом пространстве X и $L \subset X$ — выпуклое множество положительной меры (скажем, линейное подпространство полной меры). Долгое время остается нерешенной проблема, существует ли выпуклое компактное множество $K \subset L$ положительной меры. Некоторые достаточные условия для этого приведены в работе [18]. Однако для негауссовских мер существует контрпример, построенный Вайцзеккером [34], см. также упражнение 7.14.140 в [2]. Такие выпуклые компактные множества могут быть полезны для построения непрерывных версий линейных измеримых операторов. Например, в гауссовском случае, если A — такое измеримое отображение из X со значениями в сепарабельном банаховом пространстве Y, что A линейно на линейном подпространстве L полной меры, то это гипотетическое свойство обеспечивало бы существование уравновешенного компактного множества K, на котором A ограничено. Тогда A непрерывно на линейной оболочке K относительно нормы, заданной функционалом Минковского множества K. Впрочем, доказательство, приведенное автором в [36] и воспроизведенное в первой главе, основано на другой идее.

Замечание 2.2.3. Упомянем одно наблюдение, сделанное А.Н. Пличко в частном сообщении в связи со статьей автора [36]. Пусть E — такое сепарабельное рефлексивное банахово пространство, что единичный оператор в E не является поточечным пределом последовательности компактных операторов (известно, что такие пространства существуют). Существует компактный инъективный оператор $j\colon E \to l^2$, поэтому мы можем считать, что E — линейное подпространство в l^2, наделенное более сильной нормой. Рассмотрим единичный оператор $A\colon E \to E$. Тогда не существуют непрерывные операторы $A_n\colon l^2 \to E$, поточечно сходящиеся к A на E. В самом деле, операторы $A_n|_E$ компактны, так как вложение $E \to l^2$ компактно. Следовательно, вышеупомянутый факт о поточечном приближении линейных функционалов не распространяется на операторы. Однако мы не знаем, изменится ли положение, если разрешить брать меньшее компактно вложенное банахово пространство полной меры для заданной меры.

Глава 3

ГАУССОВСКИЕ УСЛОВНЫЕ МЕРЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

3.1 ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Множество в хаусдорфовом пространстве называется суслинским, если оно равно образу некоторого полного сепарабельного метрического пространства при непрерывном отображении. Суслинским пространством называется хаусдорфово пространство, которое является суслинским множеством. Всякое борелевское подмножество суслинского пространства является суслинским пространством (см. [2]).

Пусть $f \in L^1(\mu)$. Условным математическим ожиданием f относительно σ-алгебры $\mathcal{B}$ и меры μ называется такая $\mathcal{B}$–измеримая μ–интегрируемая функция $\mathbb{E}_\mu^{\mathcal{B}} f$, что

$$\int_\Omega g\, f\, d\mu = \int_\Omega g\, \mathbb{E}_\mu^{\mathcal{B}} f\, d\mu$$

для всякой ограниченной $\mathcal{B}$–измеримой функции g, см. [2].

Заметим, что в случае, когда пространство X суслинское, все борелевские меры на нем радоновы (см. [2, теорема 7.4.3]).

Через $\mathcal{M}(X)$ обозначим пространство всех борелевских мер (возможно знакопеременных) на вполне регулярном пространстве X. Напомним, что слабая топология на этом пространстве задается полунормами

$$m \mapsto \left| \int_X f(x)\, m(dx) \right|, \ f \in C_b(X),$$

где $C_b(X)$ – пространство ограниченных непрерывных функций на X. Если пространство X суслинское, то пространство $\mathcal{M}(X)$ со слабой топологией тоже оказывается суслинским (см. [2, гл. 8]), а его борелевская σ-алгебра порождена интегралами от ограниченных непрерывных функций на X, причем интегралы от ограниченных борелевских функций – борелевские функции на нем. Поэтому в таком случае обсуждаемая измеримость на пространстве мер есть в точности борелевская измеримость относительно борелевской σ-алгебры, порожденной слабой топологией.

Подпространство вероятностных мер обозначим через $\mathcal{P}(X)$.

По теореме Цирельсона, которую мы уже приводили в первой главе, каждая центрированная радоновская гауссова мера μ сосредоточена на суслинском подпространстве и является образом стандартной гауссовской меры на $\mathbb{R}^\infty$ при линейном измеримом отображении (а именно при борелевском измеримом линейном отображении, определенном на борелевском линейном подпространстве полной меры). Более того, если μ не сосредоточена на конечномерном подпространстве, то это отображение может быть взято как изоморфизм борелевских линейных подпространств меры 1. Поэтому мы предположим, что пространства X и Y суслинские, хотя в нашем случае это не следует из теоремы Цирельсона, так как подпространство может зависеть от параметра.

Итак, пусть пространства X и Y – суслинские локально выпуклые пространства. Рассмотрим борелевскую структуру $\mathcal{P}(X \times Y)$. Можно отобразить суслинское локально выпуклое пространство в $\mathbb{R}^\infty$ с помощью непрерывного инъективного линейного оператора. Благодаря этому, в дополнение к обычной топологии мы получаем топологию, индуцированную из $\mathbb{R}^\infty$. Так как координатные функции непрерывны в обеих топологиях и разделяют точки, то указанные топологии задают ту же борелевскую структуру, см. [2, теорема 6.8.9] (эта теорема говорит, что если $\{f_n\}$ – последовательность борелевских функций на суслинском пространстве X, разделяющая точки, то эта последовательность порождает борелевскую σ-алгебру X). Кроме того, те же соображения верны для пространства вероятностных мер с соответствующей слабой топологией (в этом случае можно найти счетное семейство ограниченных непрерывных функций, разделяющее меры). Это сводит общий случай, когда пространства X и Y суслинские, к случаю, когда они совпадают с $\mathbb{R}^\infty$. По этим причинам мы далее рассматриваем именно этот случай.

Точки пространства $\mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty$ будем обозначать через (x, y), а их компоненты обозначим через x_i и y_i.

Далее, пусть X и Y – локально выпуклые пространства, причем на их произведении $X \times Y$ задана радоновская вероятностная мера μ. Системой условных мер для μ будем называть семейство радоновских вероятностных мер μ^y на X, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) для каждого борелевского подмножества B пространства $X \times \ Y$ функция $\mu^y(B^y)$ является борелевски измеримой, где B^y – проекция на X сечения B на уровне y, т.е. множество вида

$$B^y = \{x \in X\colon\ (x, y) \in B\};$$

(2) для каждой ограниченной борелевской функции f на $X \ \times \ Y$ интеграл от f по мере μ равен

$$\int_Y \int_X f(x, y)\, \mu^y(dx)\, \nu(dy),$$

где мера ν – проекция меры μ на пространство Y.

Известно, что условные меры существуют в некоторых случаях, например в случае суслинских пространств.

Теперь предположим, что есть семейство $\{\mu_\alpha\}$ радоновских мер на произведении $X \times Y$, измеримо зависящих от параметра α, который принимает значение в измеримом пространстве $(\mathfrak{A}, \mathcal{A})$. Измеримость мер здесь связана со слабой топологией и под ней понимается $\mathcal{A}$-измеримость по α интегралов от ограниченных непрерывных функций. Естественно возникает вопрос, можно ли выбрать условные меры так, чтобы они измеримо зависели от (α, y). В работе И.И. Малофеева [12] было показано, что если X, Y и $\mathfrak{A}$ – вполне регулярные суслинские пространства (т.е. непрерывные образы полных сепарабельных метрических пространств) и $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathfrak{A})$ – борелевская σ-алгебра, то найдется такая версия условных мер μ_α^y, что они зависят измеримо от (α, y) относительно σ-алгебры $\mathcal{S}(Y \times \mathfrak{A})$, порожденной суслинскими множествами (см. замечание 3.3.2 и его следствие). Эта σ-алгебра больше, чем борелевская σ-алгебра, поэтому соответствующая измеримость слабее. Вероятно, в общем результате И.И. Малофеева невозможно всегда гарантировать борелевскую измеримость.

В этой главе диссертации доказано, что можно выбрать условные меры борелевски измеримыми в случае центрированных радоновских гауссовских мер. В случае гауссовских мер условные меры могут быть построены конструктивно (см. [19], [21], [30] и [33]).

3.2 ИЗМЕРИМАЯ ЗАВИСИМОСТЬ МЕР ОТ ПАРАМЕТРА

Сформулируем основной результат настоящей главы.

Теорема 3.2.1. *Пусть дано семейство центрированных гауссовских мер μ_α на произведении $X \times Y$ суслинских локально выпуклых пространств, которое зависит измеримо от параметра α со значениями в измеримом пространстве $(\mathfrak{A}, \mathcal{A})$. Тогда найдутся гауссовские условные меры μ_α^y, которые зависят $\mathcal{B}(Y) \otimes \mathcal{A}$-измеримо от (y, α).*

Перед доказательством этой теоремы приведем следующие рассуждения.

Известно (см. [21, теорема 5.14] или [19, §3.10]), что для центрированной гауссовской меры μ на произведении $X \times Y$ существует центрированная гауссовская мера σ на X такая, что условные меры для μ могут быть найдены в форме

$$\mu^y = \sigma(\cdot - Ay), \quad A = \mathbb{E}(x \,|\, y),$$

где $\mathbb{E}(x|y)$ – это условное математическое ожидание первой компоненты относительно σ-алгебры, порожденной второй компонентой. Иначе говоря,

$$A\colon\, Y \to X, \;\; Ay = (\xi_1(y), \xi_2(y), \ldots),$$

где ξ_k – условное математическое ожидание x_k относительно σ-алгебры $\mathcal{B}(Y)$, порожденной координатными функциями y_i. Это условное математическое ожидание является проекцией в $L^2(\mu)$ координатных функций x_k на замкнутое линейное подпространство, порожденное координатными функциями y_i. Если $\{\eta_i\}$ – результат ортогонализации $\{y_i\}$ в $L^2(\mu)$, то

$$\xi_k = \sum_{i=1}^{\infty} (x_k, \eta_i)_{L^2(\mu)}\, \eta_i,$$

где ряд сходится почти всюду в $L^2(\mu)$.

Мера σ совпадает с образом меры μ при измеримом линейном отображении

$$T\colon\, (x, y) \mapsto x - Ay.$$

В самом деле, покажем, что мера μ совпадает с мерой

$$\gamma = \int_Y \mu \circ T^{-1}(\cdot - Ay)\, \nu(dy).$$

Мера, которая задается правой частью этого равенства, может быть записана как свертка двух центрированных гауссовских мер $\mu \circ T^{-1}$ и $\nu \circ A^{-1}$, поэтому она также является центрированной гауссовской мерой. Следовательно, достаточно убедиться, что у μ и γ одинаковые ковариации, т.е. одинаковые интегралы для каждого непрерывного линейного функционала на $X \times Y$. Такой функционал может быть записан в виде

$$(x, y) \to f(x) + g(y),$$

где f, g – непрерывные линейные функционалы на X и Y соответственно (в нашем случае это линейные комбинации координатных функций). Легко видеть, что $f \circ A$ – условное математическое ожидание f относительно σ-алгебры $\mathcal{B}(Y)$. Поэтому функция $f(x) - f(Ay)$ ортогональна всем y_j в $L^2(\mu)$ и поэтому не зависит от σ-алгебры $\mathcal{B}(Y)$. Из-за ортогональности $f(x) - f(Ay)$ и $f(Ay)$ в $L^2(\mu)$ мы получаем

$$\int_{X\times Y} |f(x) + g(y)|^2 \; \mu(dx\,dy) =$$

$$= \int_{X\times Y} |f(x) - f(Ay)|^2 \; \mu(dx\,dy) + \int_{X\times Y} |f(Ay) + g(y)|^2 \; \mu(dx\,dy).$$

С другой стороны,

$$\int_{X\times Y} |f(x) + g(y)|^2 \; \gamma(dx\,dy) =$$

$$= \int_Y \int_{X\times Y} |f(x - Az + Ay) + g(y)|^2 \; \mu(dx\,dz)\,\nu(dy) =$$

$$= \int_Y \int_{X\times Y} \big(|f(x - Az)|^2 + |f(Ay) + g(y)|^2\big) \; \mu(dx\,dz)\,\nu(dy),$$

что совпадает с предыдущим выражением, так как ν – проекция μ на Y. Следовательно, интеграл от ограниченной борелевской функции f по мере σ вычисляется по формуле

$$\int_X f(x)\,\sigma(dx) = \int_{X\times Y} f(x - Az)\,\mu(dx\,dz),$$

а интеграл относительно меры μ^y задается формулой

$$\int_X f(x)\,\mu^y(dx) = \int_{X\times Y} f(x - Az + Ay)\,\mu(dx\,dz).$$

Таким образом, для доказательства теоремы достаточно показать, что гауссовские меры $\sigma_\alpha(\cdot - A_\alpha y)$ зависят измеримо от (y, α), что сводит все к рассмотрению интегралов

$$\int_{X\times Y} f(x - A_\alpha z + A_\alpha y)\,\mu_\alpha(dx\,dz).$$

Лемма 3.2.2. *Для всякого сепарабельного метризуемого топологического векторного пространства X отображение*

$$S\colon\ X \times \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X), \quad (h, m) \mapsto m_h,$$

где $m_h(B) = m(B - h)$, является непрерывным.

Доказательство. Слабая топология вероятностных мер на $X = \mathbb{R}^\infty$ порождается нормой Канторовича–Рубинштейна

$$\|m\|_{KR} = \sup\left\{\int f\,dm\colon\ f \in Lip_1,\ \sup_{x\in X}|f(x)| \le 1\right\},$$

где Lip_1 – класс 1-липшицевых функций относительно фиксированной метрики ϱ на X, инвариантной относительно сдвигов и порождающей топологию (такая метрика существует всегда, см. [22]).

Пусть $x, y \in X$ и $\mu, \nu \in \mathcal{P}(X)$. Пусть f – 1-липшицева функция такая, что $|f| \leqslant 1$. Интеграл от нее по мере $\mu(\cdot - x) - \nu(\cdot - y)$ равен

$$\int_X f(z+x)\,\mu(dz) - \int_X f(z+y)\,\nu(dz),$$

что оценивается через

$$\int_X |f(z+x) - f(z+y)|\ \mu(dz)\ + \left|\int_X f(z+y)\ (\mu-\nu)(dz)\right| \leqslant$$
$$\le\ \varrho(x,y) + \|\mu - \nu\|_{KR}.$$

Таким образом, отображение S липшицево.

Заметим, что это утверждение верно для общего случая топологических векторных пространств. Мы потребовали выполнения некоторых дополнительных предположений исключительно для простоты изложения.

3.3 ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Используя факты, упомянутые в предыдущем разделе, мы построим совместно измеримое математическое ожидание, зависящее от α, а затем предъявим явные выражения для измеримых версий условных мер.

Доказательство теоремы 3.2.1. Условное математическое ожидание, порожденное мерой μ_α, обозначим через $\mathbb{E}_\alpha$. Как было объяснено выше,

$$\mathbb{E}_\alpha(x\,|\,y) = \Bigl(\mathbb{E}_\alpha(x_1\,|\,y),\, \mathbb{E}_\alpha(x_2\,|\,y), \ldots\Bigr),$$

где условное математическое ожидание $\mathbb{E}_\alpha(x_i|y)$ совпадает с проекцией координатной функции x_i на замыкание линейной оболочки координатных функций y_i в $L^2(\mu_\alpha)$. Конечно, для всякого фиксированного α у нас есть много версий условного математического ожидания. Сейчас мы покажем, что можем выбрать $\mathbb{E}_\alpha(x_i|y)$ как предел непрерывных функций от y, измеримо зависящих от α.

Пусть L_n – линейная оболочка $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Покажем, что для всяких фиксированных i и n для каждого α можно выбрать элемент $l^n_{i,\alpha} \in L_n$ таким образом, что это будет ближайший элемент в L_n к функции x_i относительно нормы $L^2(\mu_\alpha)$, а отображение $\alpha \mapsto l^n_{i,\alpha}$ измеримо в том смысле, что

$$l^n_{i,\alpha} = \sum_{j=1}^{n} c_{i,n,j}(\alpha) y_j,$$

где функции $\alpha \mapsto c_{i,n,j}(\alpha)$ являются $\mathcal{A}$-измеримыми.

Далее, мы обозначаем элемент $l^n_{i,\alpha}$ и соответствующие коэффициенты $c_{i,n,j}(\alpha)$ без индексов n и i, т.е. как l_α и $c_j(\alpha)$ соответственно. Если матрица

$$G(\alpha) = \Bigl((y_i,\, y_j)_{L^2(\mu_\alpha)}\Bigr)_{i,j\le n}$$

является положительно определенной, то коэффициенты $c_j(\alpha)$ определяются единственным образом из линейной системы, которая получается, если взять скалярное произведение l_α и $y_1, y_2, \ldots, y_n$, и выражаются при помощи явной формулы, из которой измеримость относительно α очевидна. Множество значений α, при которых определитель $G(\alpha)$ положителен, содержится в $\mathcal{A}$. Остальные значения α принадлежат конечному набору непересекающихся подмножеств $\mathcal{A}$ таких, что на каждом подмножестве ранг $G(\alpha)$ равняется некоторому $k < n$ и k координатных функций из $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно независимы в $L^2(\mu_\alpha)$. Для множества, где $G(\alpha) = 0$, положим $l_\alpha = 0$. Для множества, где $y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_n}$ линейно независимы в $L^2(\mu_\alpha)$, мы повторяем ту же процедуру с n независимыми координатами.

В итоге мы получаем элементы $l^n_{i,\alpha}$, которые являются условными математическими ожиданиями координатных функций x_i относительно меры μ_α и σ-алгебры, порожденной $y_1, y_2, \ldots, y_n$, и обладают тем свойством, что их коэффициенты $c_{i,j,n}(\alpha)$ измеримы относительно α. Положим

$$A^n_\alpha y = \left(\sum_{j=1}^n c_{1,j,n}(\alpha) y_j \, , \, \sum_{j=1}^n c_{2,j,n}(\alpha) y_j \, , \, \ldots \right).$$

Известно (см. [2, гл. 10]), что функции

$$\sum_{j=1}^n c_{i,j,n}(\alpha) y_j$$

сходятся μ_α-почти всюду в $L^2(\mu_\alpha)$ к функциям $\mathbb{E}_\alpha(x_i|y)$ при $n \to \infty$. Чтобы получить желаемую версию $\mathbb{E}_\alpha(x_i|y)$, мы берем поточечный предел там, где он существует, и 0 там, где предела нет. Эта версия совместно измерима по (y, α) относительно σ-алгебры $\mathcal{B}(Y) \otimes \mathcal{A}$.

По лемме 3.2.2 для того, чтобы убедиться в измеримости μ^y_α относительно (y, α), достаточно установить измеримость по α функции

$$\int_{X \times Y} f(x - A_\alpha z) \, \mu_\alpha(dx \, dz)$$

для каждой ограниченной непрерывной функции f на X. Кроме того, из теоремы о монотонных классах (см. [2, с. 146]) легко видеть, что достаточно сделать это для непрерывных функций конечного числа переменных. Более того, достаточно рассматривать функции, которые являются линейными комбинациями экспонент $\exp(i(v, x))$. Следовательно, мы можем считать, что

$$f(x) = f(x_1, \ldots, x_N)$$

как функция на $\mathbb{R}^N$ берется в форме $f(x) = \exp(i(v, x))$. По теореме Лебега о мажорированной сходимости рассматриваемые нами интегралы равны пределу интегралов

$$\int_{X \times Y} f(x - A^n_\alpha y) \, \mu_\alpha(dx \, dy).$$

Следовательно, утверждение сводится к конечномерному случаю, когда оно становится очевидным, так как мы имеем дело с ситуацией, где

$$f(x) = \exp(i(T_\alpha v, x))$$

с оператором T_α, который зависит от α измеримо, и ковариация $Q_\alpha(x, x)$ меры μ_α также зависит от α измеримо, поэтому наш интеграл равняется

$$\exp(-Q_\alpha(T_\alpha v, T_\alpha v)).$$

Следует отметить, что мы используем конечномерные приближения потому, что измеримый линейный оператор $A_\alpha y$ не является непрерывным по y, поэтому необходимо обеспечить совместную измеримость его версии (в том случае, когда оператор непрерывен по y, для того, чтобы убедиться в измеримости, достаточно иметь $\mathcal{A}$-измеримость для каждого y).

Замечание 3.3.1. Так как мера σ играет основную роль в определении условных мер, получим ее ковариацию в виде

$$\int_X l(x)^2\,\sigma(dx) = \inf_{c_1,\,\ldots,\,c_n} \int_{X\times Y} |l(x - c_1y_1 - \;\ldots\; - c_ny_n)|^2\;\mu(dx\,dy),$$

где $l(x) = k_1x_1 + \ldots + k_nx_n, n \in \mathbb{N}$. В общем случае локально выпуклых пространств имеет место аналогичная формула:

$$\int_X l(x)^2\,\sigma(dx) = \inf_{g\in Y^*} \int_{X\times Y} |l(x) - g(y)|^2\;\mu(dx\,dy),$$

где $l \in X^*$. Это выражение может быть использовано для доказательства того, что мера σ измерима относительно параметра. Для мер на $\mathbb{R}^n$ (или на гильбертовом пространстве) эта формула может быть записана в более явном виде (см. [27]).

Замечание 3.3.2. Напомним точную формулировку результата И.И. Малофеева из [12]. Предположим, что дано борелевское отображение

$$f\colon\ (x, z) \mapsto f_z(x),\quad X \times Z \to Y,$$

где X, Y, Z – суслинские пространства. Также предположим, что для каждого $z \in Z$ дана борелевская вероятностная мера μ_z на X такая, что отображение

$$z \mapsto \mu_z, \;\; Z \to \mathcal{P}(X)$$

борелевски измеримо, если пространство $\mathcal{P}(X)$ наделено слабой топологией. Тогда существуют условные борелевские вероятностные меры $\{\mu_z^y\}_{y\in Y}$ для всех пар (μ_z, f_z), такие, что

(i) $\mu_z^y(f_z^{-1}(y)) = 1$ для всех $y \in f_z(X)$ для всех z (такие условные меры называются собственными),

(ii) Для каждого борелевского множества B в X функция

$$(y, z) \mapsto \mu_z^y(B)$$

на $Y\times Z$ измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{S}(Y\times Z)$, порожденной всеми суслинскими множествами на $Y \times Z$, или, что эквивалентно, отображение

$$(y, z) \mapsto \mu_z^y, \;\; Y \times Z \to \mathcal{P}(X)$$

измеримо, когда $Y \times Z$ снабжено σ-алгеброй $\mathcal{S}(Y \times Z)$ и $\mathcal{P}(X)$ снабжено борелевской σ-алгеброй.

В ходе доказательства в [12] автор показывает, что если f не зависит от z и является борелевской сюръекцией, обладающей борелевской правой инверсией отображения g (что верно не всегда в общем случае), то существует борелевски совместно измеримая версия условных мер μ_z^y. Действительно, исходя из этого доказательства, если $f_z = f$, то могут быть только два препятствия для борелевской измеримости: либо у f нет борелевской правой инверсии, либо ее образ $f(X)$ не является борелевским в Y. Следовательно, если X – произведение двух суслинских пространств X_1 и X_2, $f_z = f$ – стандартная проекция на X_2 и отображение $z \to \mu^z$ борелевски измеримо, то по причинам, изложенным в [12], обеспечивается существование совместно измеримых условных борелевских мер μ_z^y, так как проекция очевидно сюръективна, а если брать произвольный элемент $x_0 \in X_1$, то мы получаем для него борелевскую правую инверсию $y \mapsto (x_0, y)$.

Мы же, напротив, рассматриваем пространство $\mathfrak{A}$ как общее измеримое пространство, и условные измеримые меры описываются конструктивно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации исследованы свойства измеримости линейных и полилинейных отображений бесконечномерных пространств с мерами. Доказано, что для оператора A между сепарабельными пространствами Фреше, почти всюду по вероятностной мере равного пределу последовательности непрерывных линейных операторов, найдутся компактно вложенный рефлексивный сепарабельный банахов носитель меры и линейная версия оператора A, непрерывная на нем. Если область значений A имеет базис Шаудера, верно и обратное. Если E — рефлексивное сепарабельное банахово пространство полной меры, компактно вложенное в X^n (где X — сепарабельное пространство Фреше с борелевской мерой), то есть такое рефлексивное сепарабельное банахово пространство L полной меры, компактно вложенное в X, что $L^n \subset E$ и вложение компактно. Поэтому для полилинейных форм $B\colon X^n \to \mathbb{R}$ равносильны такие свойства:

(a) найдутся рефлексивное сепарабельное банахово пространство L полной меры, которое компактно вложено в X, и непрерывная полилинейная форма $\widetilde{B}\colon L^n \to \mathbb{R}$, почти всюду равная B;

(b) найдутся рефлексивное сепарабельное банахово пространство E полной меры, которое компактно вложено в X^n, и непрерывная полилинейная форма $\widetilde{B}\colon E \to \mathbb{R}$, почти всюду равная B.

Для семейства центрированных радоновских гауссовских мер $\{\mu_\alpha\}$ на $X \times Y$, измеримо зависящих от параметра α из измеримого пространства $(\mathfrak{A}, \mathcal{A})$, показано, что можно выбрать условные меры μ_α^y на X так, что они будут $\mathcal{B}(Y) \otimes \mathcal{A}$-измеримо зависеть от (y, α).

Дальнейшее исследование по теме диссертации может проводиться в следующих направлениях.

1. Исследование классов измеримых линейных и измеримых линейных в широком смысле функционалов для выпуклых мер.

2. Рассмотрение более общего случая линейных условных математических ожиданий, порожденных измеримым линейным отображением, также зависящим от параметра.

Литература

[1] Арутюнян Л.М., Ярославцев И.С. Об измеримых многочленах на бесконечномерных пространствах // Доклады Академии наук. – 2013. – Т.449. - №6. – С.627–631.

[2] Богачев В.И. Основы теории меры. Т.1,2, 2-е изд. М. – Ижевск: РХД, 2006.

[3] Богачев В.И. Локально выпуклые пространства со свойством ЦПТ и носители мер // Вестн. МГУ. Математика, механика. – 1986. – №6. – С. 16–20.

[4] Богачев В.И., Колесников А.В. Задача Монжа–Канторовича: достижения, связи и перспективы. Успехи матем. наук. – 2012. – Т. 67. – №5. – С. 3–110.

[5] Богачев В.И., Смолянов О.Г. Действительный и функциональный анализ: университетский курс. 2-е изд. М. – Ижевск: РХД. Институт компьютерных исследований, 2011.

[6] Булдыгин В.В. Носители вероятностных мер в сепарабельных банаховых пространствах // Теория вероятн. и ее применения. – 1984. – Т.29. – №3. – С. 528–532.

[7] Вахания Н.Н., Тариеладзе В.И., Чобанян С.А. Вероятностные распределения в банаховых пространствах. М.: Наука, 1984.

[8] Вершик А.М. Общая теория гауссовских мер в линейных пространствах // Успехи мат. наук. – 1964. – Т.19. – №1. – С. 210–212.

[9] Вершик А.М., Судаков В.Н. Вероятностные меры в бесконечномерных пространствах // Зап. научн. сем. ЛОМИ. – 1969. – Т. 12. – С. 7–67.

[10] Гётце Ф., Прохоров Ю.В., Ульянов В.В. О гладком поведении вероятностных распределений при полиномиальных отображениях // Теория вероятн. и ее примен. – 1997. – Т. 42. – N 1. – С. 51–62.

[11] Гихман И.И., Скороход А.В. Теория случайных процессов. Т. 1. М.: Наука, 1971.

[12] Малофеев И.И. Измеримая зависимость условных мер от параметра // Доклады Академии наук. – 2016. – Т. 470. – №1. – С. 13–17.

[13] Мацак И.К., Пличко А.Н. О носителе меры в банаховом пространстве и финитной представимости // Теория вероятн. и ее применения. – 1991. – Т.36. – №2. – С. 363–367.

[14] Орлов Ю.Н., Сакбаев В.Ж., Смолянов О.Г. Неограниченные случайные операторы и формулы Фейнмана // Изв. РАН. Сер. матем. – 2016. – Т. 80 – №6. – С. 141–172.

[15] Скороход А.В. Линейные и почти линейные функционалы на измеримом гильбертовом пространстве // Теория вероятн. и ее применения. – 1978. – Т.23. – №2. – С. 397–402.

[16] Смолянов О.Г. Измеримые полилинейные и степенные функционалы в некоторых линейных пространствах с мерой // Доклады Академии наук СССР. – 1966. – Т. 170. – №3. – С. 526–529.

[17] Смолянов О.Г., Шавгулидзе Е.Т. Континуальные интегралы. 2-е изд. М.: УРСС, 2015.

[18] Arutyunyan L.M., Kosov E.D., Yaroslavtsev I.S. On convex compact sets of positive measure in linear spaces // Math. Notes. – 2014. – Vol.96. – №3. – P. 448—450.

[19] Bogachev V.I. Gaussian measures. Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc., 1998.

[20] Bogachev V.I. Differentiable measures and the Malliavin calculus. Rhode Island: Amer. Math. Soc., 2010.

[21] Bogachev V.I., Gaussian measures on infinite-dimensional spaces // Real and Stochastic Analysis. Current trends. (ed. M.M. Rao), P. 1–83. Singapore: World Sci., 2014.

[22] Bogachev V.I., Smolyanov O.G. Topological vector spaces and their applications. New York: Springer, 2017.

[23] Borell C. Convex measures on locally convex spaces // Ark. Math. – 1974. – Vol.12. – №2. – P. 239–252.

[24] Cameron R.H., Martin W.T. The orthogonal development of non linear functionals in series of Fourier-Hermite polynomials // Ann. Math. – 1947. – Vol.48. – P. 385–392.

[25] Fonf V.P., Johnson W.B., Pisier G., Preiss D. Stochastic approximation properties in Banach spaces // Stud. Math. – 2003. – Vol. 159. – №1. – P. 103–119.

[26] Götze F., Tikhomirov A. Asymptotic distribution of quadratic forms and applications. J. Theoret. Probab. – 2002. – Vol. 15. – №2. – P. 423–475.

[27] Hairer M., Stuart A.M., Voss J., Wiberg P. Analysis of SPDEs arising in path sampling. I. The Gaussian case // Commun. Math. Sci. – 2005. – Vol.3. – №4. – P. 587–603.

[28] Kanter M. Random linear functionals and why we study them // Lecture Notes Math. – 1978. – Vol. 645. – P. 114–123.

[29] Kolmogoroff A.N. Über die Summen durch den Zufall bestimmter unabhängiger Grössen // Math. Ann. – 1928. – Bd. 99. – S. 309–319.

Kolmogoroff A.N. Bemerkungen zu meiner Arbeit "Über die Summen durch den Zufall bestimmter unabhängiger Grössen"// Math. Ann. – 1929. – Bd. 102. – S. 484–488. (О суммах независимых случайных величин, см. Колмогоров А.Н. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Наука, 1986.)

[30] LaGatta T. Continuous disintegrations of Gaussian processes // Theory Probab. Appl. – 2013. – Vol. 57. – №1. – P. 151–162.

[31] Okazaki Y. Stochastic basis in Fréchet space // Math. Ann. – 1986. – Vol. 274. – P. 379–383.

[32] Schaefer H.H. Topological Vector Spaces. Berlin – New York: Springer-Verlag, 1971.

[33] Tarieladze V., Vakhania N. Disintegration of Gaussian measures and average-case optimal algorithms // J. Complexity. – 2007. – Vol. 23. – №№ 4-6. – P. 851–866.

[34] von Weizsäcker H. A note on infinite dimensional convex sets // Math. Scand. – 1976. – Vol. 38. – №2. – P. 321–324.

[35] Wiener N. The homogeneous chaos // Amer. J. Math. -– 1938. -– Vol. 60. -– P. 879-–936.

Работы автора по теме диссертации:

Статьи в научных журналах Web of Science, SCOPUS, RSCI

[36] Юрова Е.В. О непрерывных сужениях измеримых линейных операторов// Доклады Академии наук. – 2012. – Т. 443. – №3. – С. 300–303. IF 0.625

Yurova E.V. On continuous restrictions of measurable linear operators// Dokl. Math. – 2012. – Vol. 85. – №2. – P. 229–232 .

[37] Юрова Е.В. О непрерывных сужениях измеримых полилинейных отображений// Матем. заметки. – 2015. – Т. 98. – №6. – С. 930–936. IF 0.612

Yurova E.V. On continuous restrictions of measurable multilinear mappings// Math. Notes. – 2015. – Vol. 98. – №5-6. – P. 977–981.

[38] Alekseev G.A., Yurova E.V. On Gaussian conditional measures depending on a parameter// Theory Stochastic Processes. – 2017. – Vol. 22(38). – №2. – P. 1–7. IF 0.12

Тезисы докладов на научных конференциях

[39] Юрова Е.В. Непрерывные сужения измеримых линейных операторов. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2012», МГУ, М., 2012.

[40] Юрова Е.В. Измеримые линейные и полилинейные операторы в бесконечномерных пространствах. «Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования» (тезисы и тексты докладов международной конференции 15-18 декабря 2014 года). РУДН, М., 2014. С. 60–61.

[41] Юрова Е.В. Непрерывные сужения измеримых полилинейных отображений. Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов-2016», МГУ, М., 2016.

[42] Yurova E.V. Measurable linear and multilinear mappings. 2nd Russian–Indian Joint Conference in Statistics and Probability, Euler International Mathematical Institute, Saint-Petersburg, Russia, 30 May – 3 June 2016, Book of abstracts, p. 43.