

Принцип Бабине в теории дифракции: экспериментальные исследования

И.В. Митин

119899, г.Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова, физический факультет,
кафедра общей физики.

E-mail: mitin@genphys.phys.msu.su

В статье сообщается о неожиданных дифракционных явлениях, наблюдаемых в экспериментах, объяснение которых может быть дано из принципа Бабине.

Изучение дифракционных явлений занимает основополагающее место в разделе «Оптика» в курсе общей физики. Несмотря на это, принцип (или теорема) Бабине, неразрывно связанный с теорией дифракции, не находит своего отражения даже в классических учебниках по оптике [1-4]. Лишь в фундаментальной работе Борна и Вольфа [5, с.416] и в пособии Сивухина [6, с.280] этому принципу уделено по одной странице. Между тем, этот принцип, являясь несложным для понимания, позволяет довольно просто по виду хорошо известных дифракционных картин от одних объектов предугадывать вид дифракционной картины от других (дополнительных) объектов. Настоящая статья посвящена описанию ряда экспериментально наблюдаемых дифракционных явлений, объяснение которых может быть дано из принципа Бабине. Все эксперименты выполнялись на учебных установках общего практикума по оптике на физическом факультете МГУ.

Теория принципа Бабине. Принцип Бабине позволяет связать между собой дифракционные картины, наблюдаемые при освещении так называемых дополнительных объектов (или экранов), «у которых отверстия одного точно совпадают с непрозрачными частями другого и наоборот» [5, с.416]. Для строгого математического определения дополнительных объектов необходимо ввести понятие комплексной функции пропускания объекта $\alpha(x,y)$, равной отношению комплексной амплитуды поля в точках, расположенных непосредственно за объектом, к комплексной амплитуде поля в тех же точках, расположенных перед объектом (толщина объекта считается пренебрежимо малой, сам объект будем считать плоским). Тогда два объекта называются дополнительными, если для каждой пары точек (x,y) объектов справедливо соотношение:

$$\alpha_1(x,y) + \alpha_2(x,y) = 1.$$

Таким образом, дополнительными могут быть и полупрозрачные объекты, и фазовые (хотя последнее, скорее всего, трудно реализовать).

Используя определение функции пропускания, дифракционный интеграл Френеля-Кирхгофа, позволяющий найти комплексную амплитуду поля $U(P)$ в точке наблюдения P путем интегрирования по вторичным источникам, можно представить в виде:

$$U(P) = -\frac{iA}{2\lambda} \iint_{(x,y)} \alpha(x,y) \cdot K(\alpha) \cdot \frac{\exp(-ikr)}{r} \cdot \frac{\exp(-iks)}{s} \cdot dS,$$

где интегрирование ведется по всей поверхности (x,y) объекта, а не только по его прозрачной области. Нетрудно заметить, что если записать дифракционные интегралы для двух

дополнительных объектов А и В, то сумма комплексных амплитуд полей $U_A(P)$ и $U_B(P)$ в точке наблюдения Р будет равна комплексной амплитуде поля $U_0(P)$ в точке Р

$$U_0(P) = U_A(P) + U_B(P) = -\frac{iA}{2\lambda} \iint_{(x,y)} K(\alpha) \cdot \frac{\exp(-ikr)}{r} \cdot \frac{\exp(-iks)}{s} \cdot dS,$$

которая получилась бы в случае отсутствия препятствия. Таким образом,

$$U_A(P) + U_B(P) = U_0(P),$$

что и является математической формулировкой принципа Бабиня.

Рассмотрим подробнее применение принципа Бабиня при описании дифракционных явлений на щели и проволоке одинакового размера, являющихся дополнительными объектами. Если источник излучения дает плоскую монохроматическую волну, а изображение фиксируется в фокальной плоскости собирающей линзы (схема, в которой принято рассматривать дифракцию Фраунгофера), то при отсутствии препятствия поле $U_0(P)$ будет равно нулю во всех точках, кроме фокуса. Отсюда следует, что в этих точках

$$U_1(P) = -U_2(P),$$

а так как приемники излучения регистрируют не амплитуду, а интенсивность поля, пропорциональную квадрату амплитуды, то

$$I_1(P) = I_2(P),$$

т.е. дифракционные картины от дополнительных объектов, наблюдаемые в фокальной плоскости линзы, совпадают во всех точках, кроме центра картины. Обычно этим выводом и ограничиваются в литературе при рассмотрении принципа Бабиня.

Однако на практике при наблюдении дифракции Фраунгофера обычно не устанавливают собирающую линзу, а наблюдают дифракционную картину на экране, находящемся на довольно большом расстоянии от объекта. Из теории хорошо известно, что приближение Фраунгофера справедливо при условии, что характерный размер объекта много меньше радиуса первой зоны Френеля. Для видимого диапазона это условие выполнено при размерах объектов порядка 50-100 микрометров и расстояниях от объекта до экрана порядка одного метра, что легко реализуемо на учебных установках практикума.

Экспериментальная установка. На физическом факультете МГУ созданы автоматизированные учебные установки для наблюдения дифракционных явлений, управление работой которых осуществляется от компьютера. На этих установках все студенты второго курса выполняют задачи общего физического практикума по дифракции света [7, 8]. В качестве источника света используются He-Ne ($\lambda=0.6328$ мкм) или полупроводниковый ($\lambda=0.65-0.70$ мкм) лазеры. За экраном для наблюдения дифракционной картины установлен фотоприемник (фотодиод), для которого в экране сделана щель шириной около 0.1мм. Программа автоматического управления установкой позволяет перемещать фотоприемник с шагом до 0.025мм, в результате дифракционная картина может быть зафиксирована с высоким пространственным разрешением.

Схема наблюдения дифракционных явлений традиционна: прямое излучение лазера попадает на препятствие, а на экране, расположенном на расстоянии 0.6-0.8 метра от препятствия, наблюдается дифракционная картина (Фраунгофера), которая регистрируется фотоприемником. Для исследования дифракции Френеля между лазером и препятствием устанавливается линза, формирующая «точечный источник света». Между препятствием и

экраном располагается собирающая линза, причем расстояние от этой линзы до экрана существенно превышает ее фокусное расстояние. Это позволяет получить на экране увеличенную дифракционную картину, как бы «наблюдаемую» в сопряженной плоскости линзы. Перемещая линзу, можно легко изменять расстояние от объекта до плоскости «наблюдения», хотя при этом расстояние от объекта до экрана остается неизменным.

Созданная для управления работой установки компьютерная программа позволяет также промоделировать дифракционные явления путем непосредственного численного расчета.

Принцип Бабиня и дифракция Фраунгофера (эксперимент). На рис.1 приведены графики зависимости интенсивности от координаты приемника при дифракции Фраунгофера на щели $I_{щ}(P)$, проволоке того же размера $I_{пр}(P)$ и при отсутствии препятствия $I_0(P)$. Так как интенсивность прямого излучения лазера велика, то на центральном участке дифракционной картины на проволоке и при отсутствии препятствия фотоприемник «зашкаливает» (горизонтальный участок на графиках).

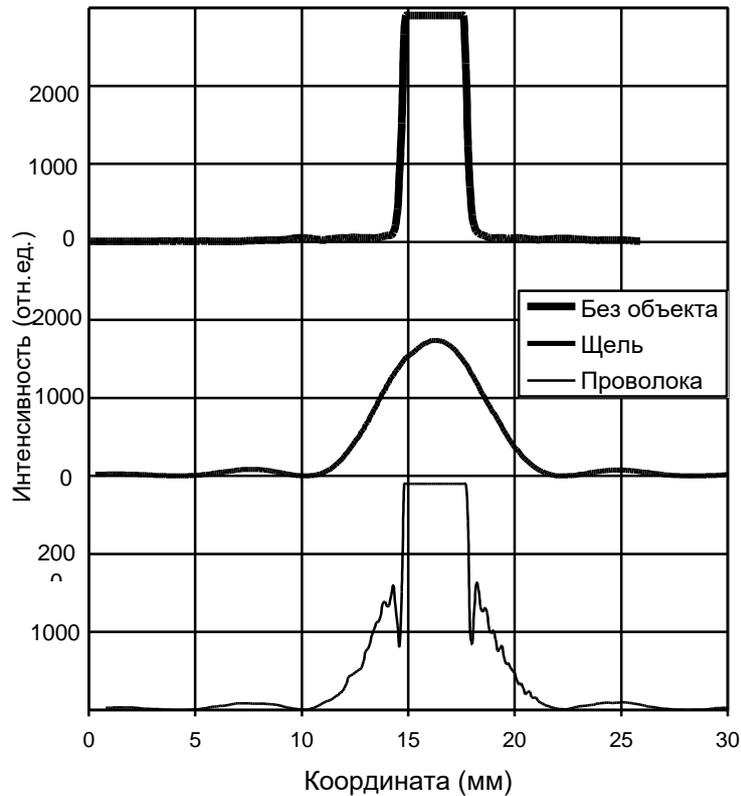


Рисунок 1. Зависимость интенсивности дифракционной картины на проволоке (тонкая линия), на щели (полужирная линия) и при отсутствии препятствия (жирная линия) от координаты для дифракции Фраунгофера.

Из приведенных графиков видно, что ширина первого дифракционного максимума для щели больше ширины исходного лазерного луча. Как следствие, так как вне пределов лазерного луча $U_0(P)$ равно нулю, то в этой области дифракционные картины от щели и проволоки должны выглядеть идентично, что и наблюдается в эксперименте (совпадают как положения максимумов и минимумов, так и значения интенсивностей). В центральной части дифракционной картины интенсивность прямого лазерного излучения существенно превышает интенсивность сигнала при дифракции на щели, т.е. $I_0(P) \gg I_{щ}(P)$ и $U_0(P) \gg U_{щ}(P)$. Тогда из принципа Бабиня следует, что в этой области интенсивности сигнала при отсутствии

препятствия и от проволоки примерно равны друг другу, т.е. $U_0(P) \approx U_{пр}(P)$ и $I_0(P) \approx I_{пр}(P)$. На рис.1 видно, что в этой области эти кривые действительно полностью совпадают (горизонтальный участок в области «зашкаливания»).

Наибольший интерес представляют участки графика дифракции на проволоке $U_{пр}(P)$ в области границ прямого лазерного излучения. В этих местах наблюдаются глубокие узкие минимумы, появление которых можно объяснить из принципа Бабинне. Действительно, как уже отмечалось выше, в центре картины $U_0(P) \gg U_{щ}(P)$, а вне лазерного луча $U_0(P) \approx 0$, т.е. $U_0(P) < U_{щ}(P)$. Следовательно, должны существовать такие точки, в которых $U_0(P) = U_{щ}(P)$. Тогда из принципа Бабинне следует, что в этих точках интенсивность сигнала при дифракции на проволоке должна быть равна нулю, т.е. $I_{пр}(P) \approx 0$. Это и наблюдается в эксперименте, хотя, как видно из рис.1, интенсивность в этих точках и не уменьшается до нуля. Это объясняется тем, что ширина «провалов» очень мала – она определяется быстротой спада интенсивности на границе прямого лазерного излучения - и разрешения фотоприемника недостаточно для определения глубины «провалов». Указанные минимумы видны и непосредственно на экране при внимательном рассмотрении дифракционной картины от проволоки.

Принцип Бабинне и дифракция Френеля (теория). Рассмотрим теперь проявление принципа Бабинне при дифракции Френеля на тех же объектах. Прежде всего, напомним, что обычно для наглядного описания дифракции Френеля на щели и на проволоке строится спираль Корню, задаваемая в параметрическом виде с помощью интегралов Френеля:

$$C(\omega) = \int_0^{\omega} \cos\left(\frac{\pi}{2} \tau^2\right) d\tau,$$

$$S(\omega) = \int_0^{\omega} \sin\left(\frac{\pi}{2} \tau^2\right) d\tau,$$

где ω - параметр спирали Корню. В [5] показано, что безразмерный параметр ω связан с числом n открытых зон Френеля, укладываемых на ширине щели, соотношением

$$\omega(n) = \sqrt{2n}.$$

Таким образом, если ширина щели, выраженная значением параметра ω , будет удовлетворять условию $\omega < \sqrt{2}$, то вычисления распределения интенсивности на экране с помощью интегралов Френеля должны описывать дифракционные картины, характерные для дифракции Фраунгофера (открыто менее одной зоны Френеля).

Компьютерная программа, созданная для управления установкой, позволяет также промоделировать дифракционные явления путем непосредственного численного расчета интегралов Френеля. Задавая произвольное значение параметра ω , можно рассчитать зависимость интенсивности дифракционной картины на щели и на проволоке от координаты фотоприемника. Программа содержит также элементы анимации, когда на спирали Корню изображается комплексный вектор (или два вектора для дифракции на проволоке), отвечающий комплексной амплитуде поля в точке наблюдения. Такое анимационное представление позволяет лучше понять суть наблюдаемых явлений.

Напомним кратко правила построения комплексного вектора для дифракции на щели, ширина которой равна ω . Чтобы найти поле в центре дифракционной картины, необходимо на спирали Корню построить вектор, идущий из точки с координатой $(-\omega/2)$ в точку с координатой $(+\omega/2)$, тогда длина этого вектора будет задавать амплитуду поля. При смещении точки наблюдения из центра картины концы вектора будут перемещаться по спирали с одинаковой «скоростью» так, чтобы длина участка спирали, заключенного между концами вектора, все время оставалась постоянной по величине и равной ω . При этом длина самого вектора и его фаза будут изменяться. Такое наглядное представление позволяет рассчитать зависимость интенсивности от координаты точки наблюдения.

На рис.2 представлены результаты численных расчетов дифракционных картин на щели и проволоке при $\omega=0.6$ (для наглядности масштаб по вертикальной оси для дифракции на щели увеличен в 5 раз). Действительно, картина, рассчитанная для щели, аналогична картине, получаемой в приближении Фраунгофера. Однако для проволоки получается нечто, на первый взгляд, удивительное. Возникают биения, причем их амплитуда равна нулю в точках, соответствующих дифракционным минимумам для щели, и максимальна в точках, соответствующих всем дифракционным максимумам, кроме нулевого. Такой результат, казалось бы, противоречит описанному выше случаю дифракции Фраунгофера на проволоке. Однако никакого противоречия нет, и объяснение возникновения биений может быть получено из принципа Бабиня (здесь на помощь приходит анализ результатов анимационного представления дифракционных явлений).

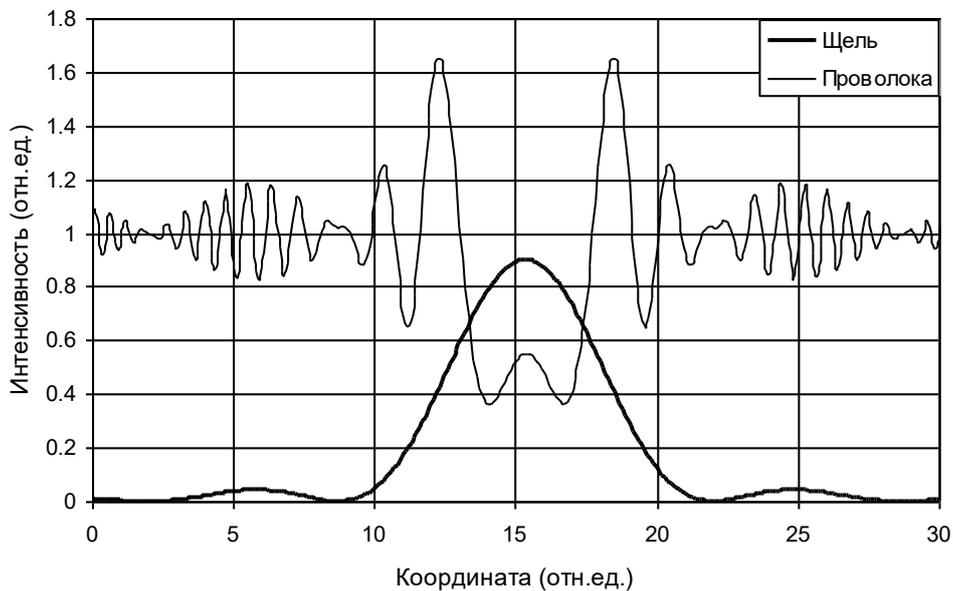


Рисунок 2. Зависимость интенсивности дифракционной картины на проволоке (тонкая линия) и на щели (полужирная линия), от координаты для дифракции Френеля, рассчитанная с помощью интегралов Френеля и спирали Корню для размера препятствия $\omega=0.6$ (масштаб по вертикальной оси для дифракции на щели увеличен в 5 раз).

Во-первых, для дифракции Френеля в случае отсутствия препятствия на экране должна наблюдаться равномерная засветка, т.е. $U_0(P) = \text{const}$, что соответствует на спирали Корню комплексному вектору, проведенному от одного фокуса спирали к другому. Во-вторых, для

малых значений параметра ω анимация позволяет заметить, что при дифракции на щели по мере удаления точки наблюдения P от центра картины длина комплексного вектора на спирали Корню (а это есть $|U_{щ}(P)|$) действительно изменяется так, как это характерно для дифракции Фраунгофера в стандартной схеме наблюдения. Поэтому дифракционная картина для щели в схеме наблюдения дифракции Френеля получается идентичной. Однако при этом фаза комплексного вектора $U_{щ}(P)$ изменяется очень существенно: при переходе от одного дифракционного минимума к другому комплексный вектор совершает несколько оборотов (число оборотов зависит от величины ω). А так как в соответствии с принципом Бабиня

$$U_{пр}(P) = U_0(P) - U_{щ}(P),$$

то при вычитании из неизменного комплексного вектора $U_0(P)$ быстро изменяющегося по фазе комплексного вектора $U_{щ}(P)$ (при этом $|U_0(P)| > |U_{щ}(P)|$ для $\omega < \sqrt{2}$) длина комплексного вектора $U_{пр}(P)$ осциллирует, в результате и возникают биения в дифракционной картине от проволоки. Анимационное представление, наблюдаемое на экране компьютера, позволяет очень четко проследить за механизмом появления биений, что, к сожалению, очень трудно описать в тексте данной статьи (как говорится, «лучше один раз увидеть, чем сто раз прочитать»).

Отметим еще одну особенность дифракционной картины на проволоке: в центре картины наблюдается локальный максимум. Казалось бы, так как для дифракции Френеля $U_0(P) = const$, а для поля от щели $U_{щ}(P)$ в центре максимум, то для проволоки в этой точке должен быть минимум. Однако анимационное представление и здесь позволяет легко объяснить получающийся результат. Для проволоки комплексная амплитуда поля в точке наблюдения задается суммой двух комплексных векторов на спирали Корню, один из которых начинается в одном из фокусов спирали, а второй заканчивается в ее другом фокусе. Для точки наблюдения, расположенной в центре экрана, эти два вектора будут одинаковыми как по длине, так и по направлению. При смещении точки наблюдения на небольшую величину в любом направлении эти векторы, практически не изменяя своей длины, поворачиваются в разные стороны. Сумма векторов становится меньше, и, следовательно, интенсивность уменьшается. Таким образом, в центре дифракционной картины при дифракции на проволоке всегда будет светлая полоса (здесь можно провести аналогию со знаменитым пятном Пуассона).

Принцип Бабиня и дифракция Френеля (эксперимент). Для наблюдения биений при дифракции Френеля на учебной установке, описанной выше, был проведен эксперимент, результаты которого представлены на рис.3, где приведены зависимости интенсивности дифракционной картины на проволоке, на щели и при отсутствии препятствия от координаты. Отметим, что из-за конечности размеров лазерного пучка при отсутствии препятствия засветка на экране не является равномерной, т.е. $I_0(P) \neq const$. Однако это не мешает заметить биения для дифракции на проволоке.

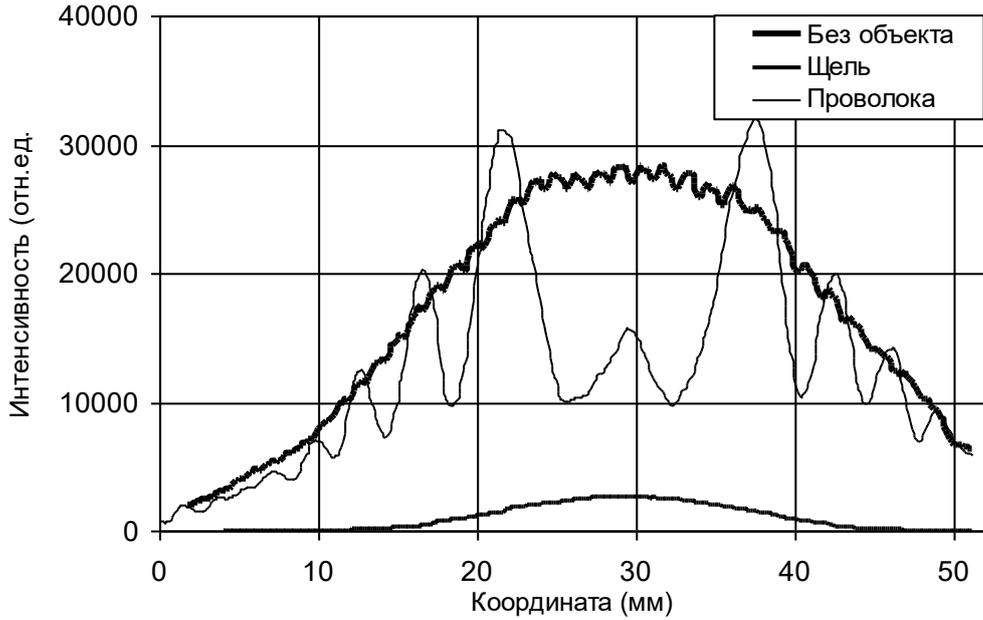


Рисунок 3. Зависимость интенсивности дифракционной картины на проволоке (тонкая линия), на щели (полужирная линия) и при отсутствии препятствия (жирная линия), от координаты для дифракции Френеля, полученная в эксперименте.

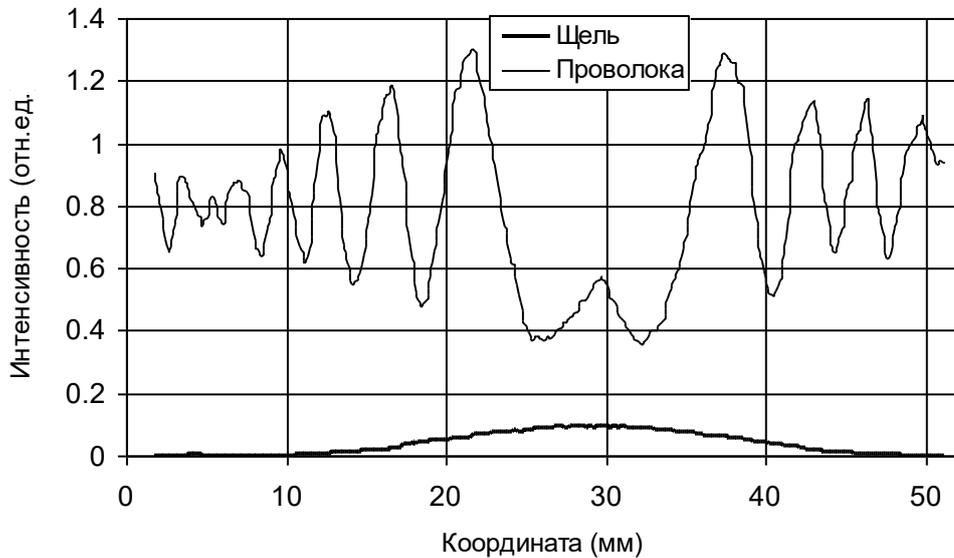


Рисунок 4. Зависимость нормированной интенсивности дифракционной картины на проволоке (тонкая линия) и на щели (полужирная линия) от координаты для дифракции Френеля.

Для сравнения с теоретической зависимостью графики, приведенные на рис.3, были отнормированы на интенсивность прямого лазерного излучения $I_0(P)$. На рис.4 приведены нормированные экспериментальные графики зависимости интенсивности дифракции Френеля на проволоке $I_{пр}(P)/I_0(P)$ и щели $I_{щ}(P)/I_0(P)$. На этом рисунке биения для дифракции на проволоке видны отчетливо. Сравнение с теоретическим расчетом показало, что проведенный эксперимент соответствует размеру объекта $\omega=0.5$.

Выводы. Проведенные экспериментальные исследования показали, что при дифракции на проволоке наблюдаются такие любопытные явления, как «провалы» (для дифракции Фраунгофера) и «биения» (для дифракции Френеля). Объяснение этих результатов может быть дано, исходя из принципа Бабиня. Так как эксперименты проводились на учебной установке практикума, то, несомненно, эти исследования должны вызвать интерес у студентов как к теории дифракции, так и к незаслуженно «забываемому» принципу Бабиня.

Литература.

1. Ландсберг Г.С. Оптика. М.: Наука, 1976.
2. Матвеев А.Н. Оптика. М.: Высшая школа, 1985.
3. Калитеевский Н.И. Волновая оптика. М.: Высшая школа, 1978.
4. Бутиков Е.И. Оптика. М.: Высшая школа, 1986.
5. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Наука, 1970.
6. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Оптика. М.: Наука, 1985.
7. Авакянц Л.П., Китов И.А., Митин И.В., Салецкий А.М. , Червяков А.В. Дифракция Фраунгофера. Лабораторный практикум по физике (оптика). М.: Изд-во физ.факультета МГУ, 1997.
8. Боков П.Ю., Иванцов А.А., Митин И.В., Панчишин И.М., Салецкий А.М. , Червяков А.В. Дифракция Френеля. Лабораторный практикум по физике (оптика). М.: Изд-во физ.факультета МГУ, 2002.

The Babinet principle in diffraction theory: the experimental research

I.V.Mitin

M.V.Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics

The article deals with the experimentally observed unexpected diffraction phenomena, interpreted on the basis of Babinet principle.