

УДК 534.2.517.9

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ АДИАБАТИЧЕСКОЙ МОДОВОЙ ТОМОГРАФИИ ОКЕАНА НА ОСНОВЕ ФУНКЦИОНАЛЬНО-АНАЛИТИЧЕСКОГО АЛГОРИТМА

© 2020 г. О. С. Красулин<sup>1, \*</sup>, А. С. Шуруп<sup>1, 2, 3</sup>

<sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
“Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова”, физический факультет, Москва, Россия

<sup>2</sup>Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт океанологии имени П.П. Ширшова  
Российской академии наук, Москва, Россия

<sup>3</sup>Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт физики Земли  
имени О.Ю. Шмидта Российской академии наук, Москва, Россия

\*E-mail: os.krasulin@gmail.com

Поступила в редакцию 26.08.2019 г.

После доработки 13.09.2019 г.

Принята к публикации 28.10.2019 г.

В работе численно реализована схема решения обратной задачи акустического рассеяния в океаническом волноводе для модового описания акустического поля. В основу решения положен функционально-аналитический алгоритм Новикова–Сантацесариа. Для восстановления трехмерных неоднородностей использован метод разложения по ортогональным эмпирическим функциям Карунена–Лоэва.

DOI: 10.31857/S0367676520020180

### ВВЕДЕНИЕ

На сегодняшний день одним из наиболее перспективных методов мониторинга мирового океана является акустическая томография [1]. Она позволяет получить информацию о пространственных распределениях различных характеристик акваторий с размерами, достигающими сотен и тысяч километров. В настоящей работе рассматривается решение задачи модовой томографии океана на основе функционально-аналитического алгоритма Новикова–Сантацесариа [2], изначально разработанного для задач рассеяния в квантовой механике. Данный подход не требует ни линеаризации модели и построения матриц возмущений, ни итераций и привлечения дополнительных процедур регуляризации, что выгодно отличает его от используемых в настоящее время методов, а также делает перспективным исследование его возможностей в задачах акустической томографии океана. Для исследования возможностей этого алгоритма в акустических приложениях потребовалось решить прямую задачу — найти акустическое поле при заданных параметрах рассеивателя с учетом неадиабатического рассеяния мод.

### РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ ЗАДАЧИ АКУСТИЧЕСКОГО РАССЕЯНИЯ С УЧЕТОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МОД

В качестве фонового волновода рассматривается волновод с абсолютно жестким дном, сво-

бодной верхней границей и однородным в горизонтальной плоскости водным слоем. В случае присутствия неоднородности скорости звука, уравнение Гельмгольца, описывающее распространение акустических волн, имеет вид:

$$\nabla^2 p(\vec{r}) + k_0^2(z)p(\vec{r}) = v(\vec{r})p(\vec{r}), \quad (1)$$

где  $\vec{r} = \{x, y, z\}$  — радиус-вектор в выбранной системе координат;  $v(\vec{r}, \omega_j) = \omega_j^2 \left( \frac{1}{c_0^2(z)} - \frac{1}{c^2(\vec{r})} \right)$  — функция рассеивателя, описывающая отклонение фазовой скорости  $c(\vec{r})$  от ее фонового значения  $c_0(\vec{r}) \equiv c_0(z)$ ; индекс  $j$  подразумевает возможность использования широкополосного режима зондирования (далее частотная зависимость будет опущена для достижения компактности выражений);  $k_0 = \frac{\omega_j}{c_0(z)}$ . Решение уравнения (1) ищем в

виде суммы мод  $p(\vec{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(x, y)\Psi_n(z)$ , где  $\Phi_n(x, y)$  описывает решение уравнения Гельмгольца в горизонтальной плоскости  $(x, y)$ , а  $\Psi_n(z)$  — вертикальный профиль моды номера  $n$  в фоновом волноводе:

$$\begin{cases} \frac{d^2\Psi_n(z)}{dz^2} + [k_0^2(z) - k_{0n}^2]\Psi_n(z) = 0, \\ \frac{d\Psi_n(z)}{dz} \Big|_{z=H} = 0, \quad \Psi_n(z)|_{z=0} = 0, \end{cases}, \quad (2)$$

здесь  $k_{0n}^2$  — горизонтальное волновое число  $n$ -ой моды в невозмущенном волноводе, а  $H$  — глубина волновода.

С учетом условия ортогональности профилей мод  $\int_0^H \Psi_m(z)\Psi_n(z)dz = \delta_{mn}$ , где  $\delta_{mn} = \begin{cases} 1, m = n \\ 0, m \neq n \end{cases}$  — символ Кронекера, уравнение (1) переписывается в виде:

$$\nabla_{x,y}^2 \Phi_m(x, y) + k_{0m}^2 \Phi_m(x, y) = S_{mn}(x, y) \Phi_n(x, y), \quad (3)$$

где оператор  $S_{mn}(x, y) \equiv \int_0^H \Psi_m(z)v(x, y, z)\Psi_n(z)dz$  описывает модовое взаимодействие. Решение прямой задачи основывается на сведениях (3) к уравнению типа Липпмана—Швигнера [3] и последующем его решении с помощью дискретизации задачи. Для этого вводится функция Грина  $G_{0m}(x, y, k_{0m})$  моды номера  $m$  однородной изотропной непоглощающей среды:

$$\nabla^2 G_{0m}(x, y, k_{0m}) + k_{0m}^2 G_{0m}(x, y, k_{0m}) = \delta(x - x', y - y'). \quad (4)$$

Использование  $G_{0m}(x, y, k_{0m})$  позволяет перейти от (3) к связанной системе уравнений типа Липпмана—Швигнера:

$$\Phi_m(x, y) = \Phi_{0m}(x, y) + \int_{\mathfrak{R}} G_{0m}(x - x', y - y', k_{0m}) S_{mn}(x', y') \Phi_n(x', y') dx' dy', \quad (5)$$

где  $\mathfrak{R}$  — область, в которой локализован оператор  $S_{mn}(x, y)$ . Перепишем (5) в матричном виде:

$$\hat{\Phi}_m = [\hat{E} - \hat{G}_{0m} \hat{S}_{mn}]^{-1} \hat{\Phi}_{0m}, \quad (6)$$

где  $\hat{E}$  — единичная матрица. На основе (6), зная функцию рассеивателя и невозмущенные значения поля, рассчитываем поля, рассеянные на заданной неоднородности  $v(x, y, z)$ . Рассматриваемый функционально-аналитический алгоритм [2], а также результаты работы [4] позволяют на основе анализа рассеянных полей  $\Phi_m(x, y)$  оценить значения оператора  $S_{mn}$ .

### ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МОДОВОЙ ТОМОГРАФИИ ОКЕАНА

Исходной, при решении обратной задачи, будет являться система связанных уравнений Гельмгольца (3):

$$\nabla_{x,y}^2 \Phi_m(x, y) + k_{0m}^2 \Phi_m(x, y) = S_{mn}(x, y) \Phi_n(x, y), \quad (7)$$

В адиабатическом приближении, когда передачи энергии между модами разных номеров не

происходит, система (7) распадается на  $n$  независимых двумерных уравнений:

$$\nabla_{x,y}^2 \Phi_n(x, y) + k_{0n}^2 \Phi_n(x, y) = S_{nn}(x, y) \Phi_n(x, y). \quad (8)$$

Ставится вопрос о нахождении значений матричного оператора  $S_{nn}$  для каждой  $n$ -ой моды, т.е. требуется решить набор двумерных обратных задач восстановления  $S_{nn}$  по данным в виде рассеянных полей отдельных мод. В [5] был численно реализован двумерный функционально-аналитический алгоритм Новикова, позволяющий по данным в виде амплитуд рассеяния, описывающих поля квазиточечного источника в дальней зоне, восстановить двумерную функцию рассеивателя. Эти результаты были использованы в настоящей работе для восстановления двумерного оператора  $S_{nn}(x, y)$ , который, в свою очередь, содержит в себе данные о функции рассеивателя  $v(\vec{r})$ . Для этого, на первом шаге требовалось перейти от  $\Phi_n(x, y)$  к обобщенной амплитуде рассеяния.

Как было показано в работе [4], с помощью рассматриваемого функционально-аналитического алгоритма можно, на основе строгих интегральных преобразований, перейти от классической функции Грина  $G^{cl}(x, y; \omega)$  к обобщенной амплитуде рассеяния  $h^\pm(\vec{k}, \vec{l}; \omega)$ , где  $\vec{k}$  и  $\vec{l}$  это волновые векторы падающей и рассеянной волны соответственно. Основной идеей алгоритма является представление волнового вектора в виде комплексной величины  $\vec{k} = \vec{k}_R + i\vec{k}_I$  при выполнении условия монохроматичности:  $\vec{k}^2 = \vec{l}^2 = \left(\frac{\omega}{c_0}\right)^2$ . К волновому вектору добавляется бесконечно малая ортогональная составляющая, а верхний индекс  $\pm$  обобщенной амплитуды рассеяния отвечает двум возможным ориентациям этой добавки в пространстве — правосторонней и левосторонней. В нашей задаче  $\Phi_n(x, y)$  будет являться классической функцией Грина для моды номера  $n$ .

Для учета модового взаимодействия в обратной задаче вводим вспомогательный оператор  $V_{mn}(x, y) = [k_0^2 - k_{0m}^2] \delta_{mn} + S_{mn}(x, y)$ , который приводит систему (7) к следующему виду:

$$\nabla_{x,y}^2 \Phi_m(x, y) + k_0^2 \Phi_m(x, y) = V_{mn}(x, y) \Phi_n(x, y). \quad (9)$$

Решение данной системы уравнений для  $k_0(x, y, z) = k_0 \equiv \text{const}$  реализуется с помощью алгоритма Новикова—Сантацесариа [2]. По-видимому, первые результаты численного моделирования схемы акустической томографии океана, основанной на алгоритме Новикова—Сантацесариа и учитывающей неадиабатические эффекты, были представлены в [6]. Однако в [6] не удалось перейти к восстановлению трехмерных рассеива-

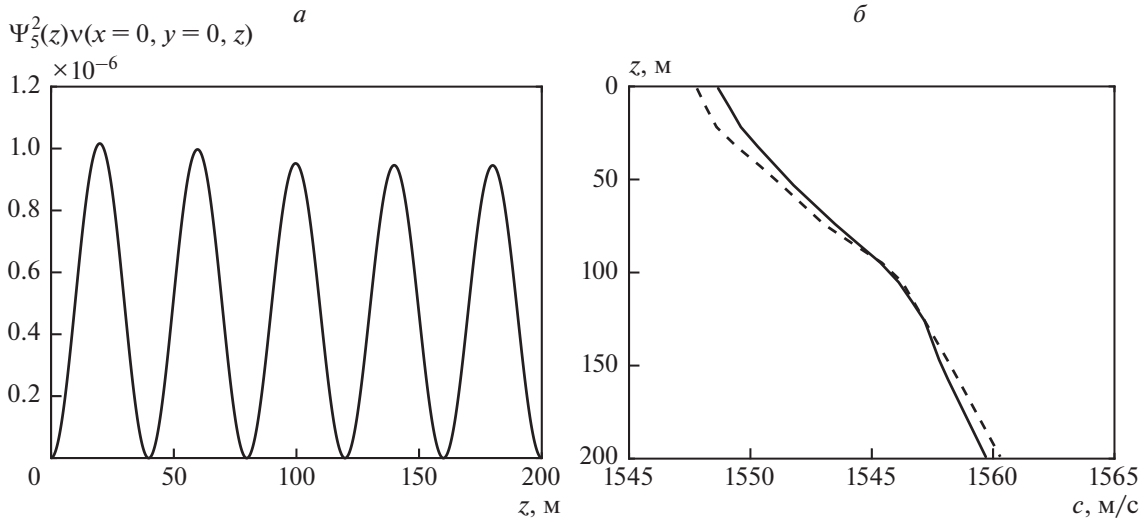


Рис. 1. Подынтегральное выражение (10) для пятой моды (а); исходное (б, сплошная линия) и восстановленное (б, пунктирная линия) с помощью введения условия гладкости амплитудное возмущение фоновой скорости звука.

телей  $v(x, y, z)$  по данным в виде набора двумерных операторов  $S_{mn}(x, y)$ .

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФУНКЦИЙ  
КАРУНЕНА–ЛОЭВА  
ДЛЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ  
ТРЕХМЕРНЫХ РАССЕИВАТЕЛЕЙ

Для восстановления трехмерных рассеивателей  $v(x, y, z)$  в адиабатическом приближении необходимо для каждого узла пространственной сетки  $(x, y)$  решить интегральное уравнение вида:

$$S_{mn}(x, y) = \int_0^H \Psi_n^2(z)v(x, y, z)dz. \quad (10)$$

Пусть число распространяющихся мод  $n = 1, \dots, N$ . Дискретизуя задачу по  $z = \{z_1, z_2, \dots, z_I\}$ ,  $i = 1, \dots, I$ ,  $h \equiv z_i - z_{i-1}$ , интегральное уравнение (10) можно свести к системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ \vdots \\ S_{NN} \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} \Psi_1^2(z_1) & \Psi_1^2(z_2) & \dots & \Psi_1^2(z_I) \\ \Psi_2^2(z_1) & \Psi_2^2(z_2) & \dots & \Psi_2^2(z_I) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi_N^2(z_1) & \Psi_N^2(z_2) & \dots & \Psi_N^2(z_I) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(z_1) \\ v(z_2) \\ \vdots \\ v(z_I) \end{pmatrix}, \quad (11)$$

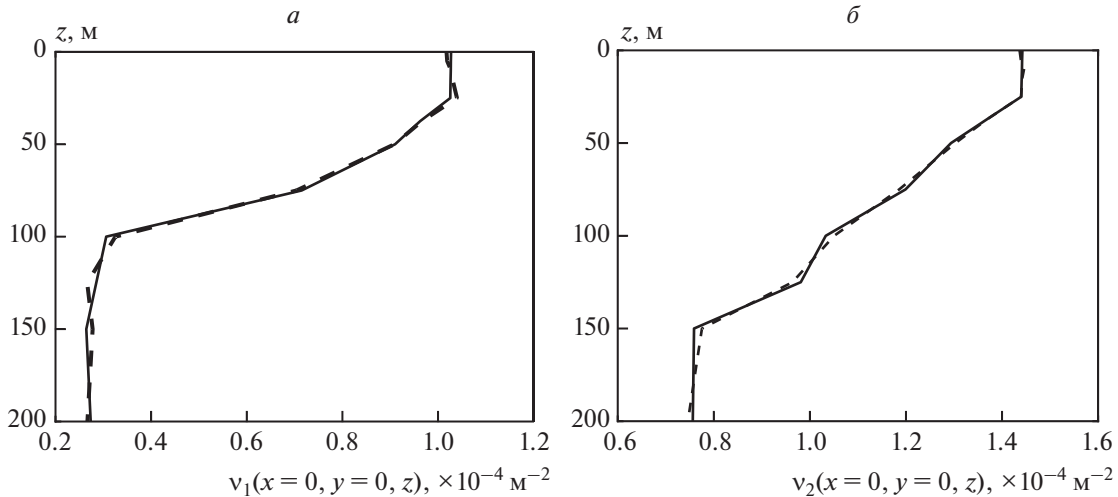
Для хорошей обусловленности матрицы  $\hat{\Psi}_{ni}^2$  необходимо, чтобы число узлов пространственной сетки по оси  $z$  не превышало количества распространяющихся мод:  $I \leq N$ . Так как для характерных реальным распределениям скоростей звука в океане подынтегральная функция  $\Psi_n^2(z)v(z)$  имеет характер осцилляций, частота которых рас-

тет с номером моды (рис. 1а), прямое решение системы (11) не дает удовлетворительной точности решения.

Для повышения точности восстановления на функцию рассеивателя накладывается дополнительное условие гладкости:  $\frac{v(z_{i+1}) - 2v(z_i) + v(z_{i-1}))}{2h} \approx 0$ . Это позволяет, не ухудшая обусловленности матрицы  $\hat{\Psi}_{ni}^2$ , увеличить дискретизацию по оси  $z$ . Выше на рис. 1б представлен результат восстановления амплитудного возмущения фоновой скорости звука.

Альтернативный способ решения уравнения (10), не требующий дополнительных условий гладкости, использует метод разложения функции рассеивателя по эмпирическим ортогональным функциям  $v(x, y, z) = \bar{v}(z) + \sum_{j=1}^J \alpha_j(x, y)\phi_j(z)$ , где количество эмпирических ортогональных функций (функций Карунена–Лоэва)  $J$  существенно меньше количества  $I$  неизвестных  $v(z_i)$ ,  $i = 1, \dots, I$ . Рассмотрим  $v(x, y, z)$  как случайную величину. Если для исследуемой акватории ранее были измерены профили скоростей звука, по которым рассчитаны функции рассеивателя, то можно рассматривать набор  $\{v_b(z_i)\}$ ,  $b = 1, \dots, B$  как реализации данной случайной величины. Тогда, согласно теореме Карунена–Лоэва [7], собственные функции ковариационной матрицы  $K_{kl}$ , будут являться базисом, по которому единственным образом можно разложить искомую функцию рассеивателя:

$$K_{kl}\phi_l(z_i) = \lambda_k\phi_k(z_i), \quad (12)$$



**Рис. 2.** Исходные (сплошная линия) и полученные в результате разложения по четырем функциям Карунена–Лозва (пунктирная линия) значения функций рассеивателя в центре акватории  $v_1(x = 0, y = 0, z)$  (а) и  $v_2(x = 0, y = 0, z)$  (б).

где ковариационная матрица определяется следующим образом:

$$K_{kl} = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B [v_b(z_k) - \bar{v}(z_k)][v_b(z_l) - \bar{v}(z_l)], \tag{13}$$

$$\bar{v}(z_l) = \frac{1}{B} \sum_{b=1}^B v_b(z_l).$$

При этом количество базисных функций в разложении будет минимально возможным для заданной точности такого разложения.

Используя данный подход к описанию функции рассеивателя, исходное интегральное уравнение (10) можно представить в виде:

$$S_{nn}(x, y) = \sum_{i=1}^I \alpha_i \int_0^H \Psi_n^2(z) \varphi_i(z) dz + \int_0^H \Psi_n^2(z) \bar{v}(z) dz. \tag{14}$$

Тогда, введя новые обозначения, получим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{pmatrix} \tilde{S}_{11} \\ \tilde{S}_{22} \\ \vdots \\ \tilde{S}_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{11} & \dots & A_{1J} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nJ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_J \end{pmatrix}, \tag{15}$$

где  $A_{nj} = \int_0^H \Psi_n^2(z) \varphi_j(z) dz$  и  $\tilde{S}_{nn} = S_{nn} - \int_0^H \Psi_n^2(z) \bar{v}(z) dz$ .

Решение системы (15) для каждой точки в плоскости  $(x, y)$ , позволяет оценить коэффициенты разложения  $\hat{\alpha}_j(x, y)$  искомой функции рассеивате-

ля по выбранному базису и, в конечном счете, оценить трехмерную функцию рассеивателя:

$$\hat{v}(x, y, z) = \bar{v}(z) + \sum_{j=1}^J \hat{\alpha}_j(x, y) \varphi_j(z). \tag{16}$$

### ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

На текущем этапе проводимых исследований анализируются возможности восстановления трехмерных рассеивателей в адиабатическом приближении. Так как резкие изменения функции рассеивателя ведут к увеличению неадиабатических эффектов, то при численном моделировании встает вопрос об осуществлении плавного перехода от фонового значения  $c_0(z)$  к возмущенному  $c(z)$ . Использованные при моделировании профили скоростей звука  $c_0(z)$  и  $c(z)$ , представленные на рис. 3б и 3в соответственно, являются характерными для условий мелкого моря. Предполагается, что фоновый и возмущенный профили можно разложить по рассмотренным в предыдущем разделе эмпирическим ортогональным функциям  $\psi_j(z)$ :  $c_0(x, y, z)|_{\sqrt{x^2+y^2} > R_{inh}} = \bar{c}(z) + \sum_{j=1}^J \xi_j(x, y) \psi_j(z)$ ,  $c(x, y, z)|_{\sqrt{x^2+y^2} \leq R_{inh}} = \bar{c}(z) + \sum_{j=1}^J \eta_j(x, y) \psi_j(z)$ , где  $R_{inh}$  – характерный радиус неоднородности, находящейся в центре координат,  $\bar{c}(z)$  – средняя по ансамблю реализаций  $\{c_b(z)\}$ ,  $b = 1, \dots, B$  профилей скорости звука. В этом случае плавный переход между  $c_0(x, y, z)$  и  $c(x, y, z)$  можно задать через переход от коэффициентов разложения  $\xi_j(x, y)$  к  $\eta_j(x, y)$  в виде цилиндра со сглаженными краями  $\gamma_j(x, y)$  (рис. 3а). В этом

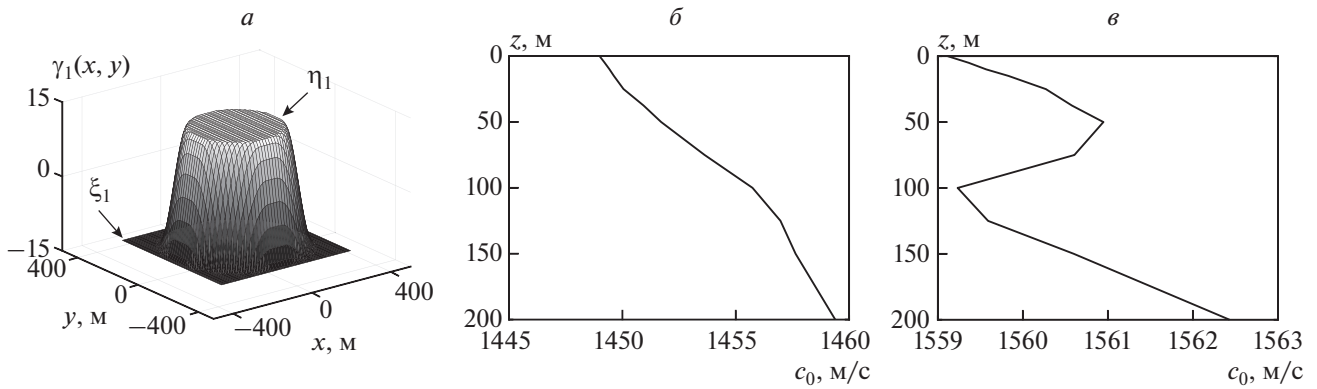


Рис. 3. Коэффициент  $\gamma_1(x, y)$  (а), обеспечивающий гладкий переход от фонового профиля скорости  $c_0(z)$  (б) к возмущенному  $c(z)$  (в).

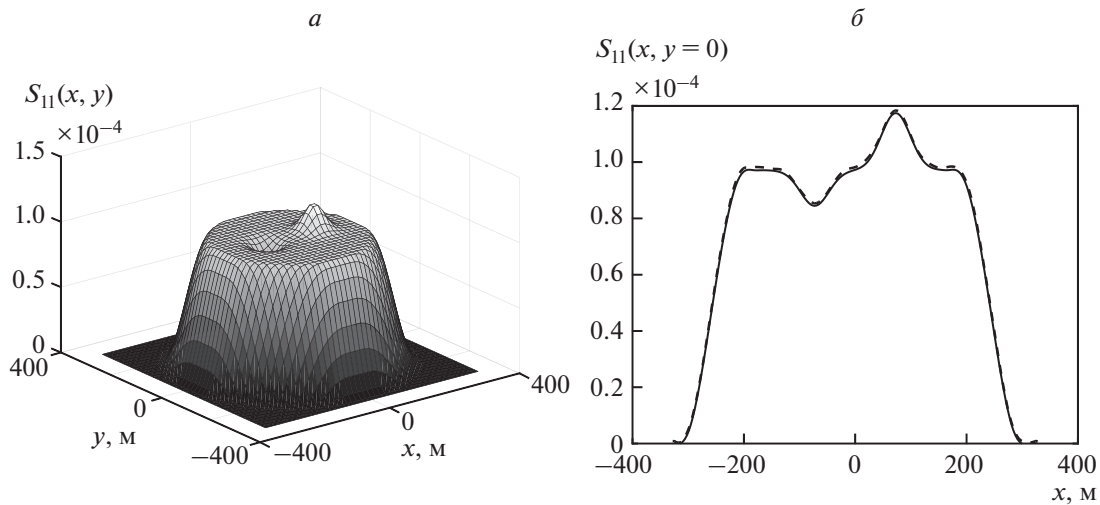


Рис. 4. Двумерная карта исходных значений оператора  $S_{11}(x, y)$  (а); сечения исходных (б, сплошная линия) и восстановленных с помощью функционально-аналитического алгоритма (б, пунктирная линия) значений матричного оператора  $S_{11}(x, y = 0)$ .

случае распределение скорости звука во всех точках акватории будет задаваться в виде  $c(x, y, z) = \Gamma(x, y) \left\{ \bar{c}(z) + \sum_{j=1}^J \gamma_j(x, y) \psi_j(z) \right\}$ , где  $\Gamma(x, y)$  – амплитудный коэффициент, также имеющий вид сглаженного цилиндра, но к которому добавлены экспоненциальные возмущения, с помощью которых можно оценить разрешающую способность алгоритма. Изменение модуля коэффициента  $\Gamma(x, y)$  позволяет варьировать силу рассеивателя.

При численном моделировании были использованы следующие параметры модели:  $f = 20$  Гц – частота излучателей,  $R_{\text{томо}} = 546$  м – радиус области томографирования,  $q = 60$  – количество источников-приемников,  $H = 200$  м – глубина акватории,  $N = 5$  – число рассматриваемых

мод,  $c_{00} = 1457$  м/с – средняя фоновая скорость звука,  $\frac{c_{00}}{5f} = 14.57$  м – шаг пространственной дискретизации в плоскости  $(x, y)$ ,  $R_{\text{inh}} = 256$  м – характерный радиус неоднородности,  $\frac{\max \Gamma(x, y)}{c_{00}} = 6.9\%$  – относительный контраст неоднородности. Набеги фазы первой и пятой моды для исследуемого рассеивателя (рис. 4а) соответственно равны  $\Delta\varphi_{n=1} \approx 0.95\pi$  и  $\Delta\varphi_{n=5} \approx 2.85\pi$ .

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Применение строгих функционально-аналитических методов в акустических приложениях поз-

воляет рассматривать задачи, которые в настоящее время не имеют решения, но представляют бесспорный практический интерес. Примером такого рода задач является неадиабатическая модовая томография неоднородного движущегося океана. В настоящей работе получены результаты, позволяющие продвинуться в решении этой задачи. Предложенная в работе схема акустической томографии океана, основанная на алгоритме Новикова—Сантацесариа, позволяет восстанавливать трехмерные рассеиватели  $v(x, y, z)$  из наборов значений двумерных операторов  $S_{mn}(x, y)$  с привлечением функций Карунена—Лозва. Такой подход обладает новизной, поскольку ранее не рассматривался. При этом, в отличие от [8], для восстановления трехмерных неоднородностей функциональными алгоритмами дополнительных итераций не требуется. Дальнейшая работа в данном направлении представляется весьма перспективной.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантами РФФИ (проект № 17-51-150001 НЦНИ\_а) и Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ № НШ 5545.2018.5.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гончаров В.В., Зайцев В.Ю., Куртенов В.М., и др. Акустическая томография океана. Н. Новгород: ИПФ РАН, 1997.
2. Novikov R.G., Santacesaria M. // Int. Math. Res. Notices. 2013. V. 2013. № 6. P. 1205.
3. Буров В.А., Касаткина Е.Е., Побережская А.Ю. и др. // Акуст. журн. 2011. Т. 57. № 5. С. 665; Burov V.A., Kasatkina E.E., Poberezhskaya A.Yu. et al. // Acoust. Phys. 2011. V. 57. № 5. P. 665.
4. Буров В.А., Шуруп А.С., Зотов Д.И. и др. // Акуст. журн. 2013. Т. 59. № 3. С. 391; Burov V.A., Shurup A.S., Zotov D.I. et al. // Acoust. Phys. 2013. V. 59. № 3. P. 345.
5. Буров В.А., Алексеенко Н.В., Румянцева О.Д. // Акуст. журн. 2009. Т. 55. № 6. С. 784; Burov V.A., Alekseenko N.V., Rumyantseva O.D. // Acoust. Phys. 2009. V. 55. № 6. P. 784.
6. Красулин О.С., Шуруп А.С. // Акустика океана. Докл. XVI шк.-семина. им. акад. Л.М. Бреховских, совм. с XXXI сессией Росс. акуст. общ. (Москва, 2018). С. 213.
7. Солодовщиков А.Ю., Платонов А.К. Исследование метода Карунена—Лозва. М.: ИПМ РАН, 2006.
8. Алексеенко Н.В., Буров В.А., Румянцева О.Д. // Акуст. журн. 2005. Т. 51. № 4. С. 437; Alekseenko N.V., Burov V.A., Rumyantseva O.D. // Acoust. Phys. 2005. V. 51. № 4. P. 437.