УДК 658.51.012

С.Н. Новак, *канд. техн. наук, доц.,*
Украинская академия банковского дела НБУ,
О.М. Пигнастый, *канд. техн. наук, НПФ "Технология", г. Харьков*

О ВАРИАЦИОННОМ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ ПРИНЦИПАХ ПОСТРОЕНИЯ ФУНКЦИИ ЛАГРАНЖА ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ

Постановка проблемы. Описание функционирования современного производства может быть представлено в виде процесса, в ходе которого производственная система переходит из одного своего состояния в другое. Состояние системы можно определить как состояние общего числа N базовых продуктов производственной системы [1, с. 178]. Под базовым продуктом (или условным изделием [2, с. 183]) понимается элемент производственной системы, на который происходит перенос стоимости живого труда, сырья, материалов и орудий труда в ходе его движения по операционной цепочке технологических карт. В ходе такого движения происходит целенаправленное превращение исходного сырья и материалов (межоперационной заготовки) в готовый продукт путем целенаправленного воздействия общественно-полезного труда. Состояние базового продукта может быть описано микроскопическими величинами (S_j, μ_j) [3], где S_j (грн.) и $\mu_j = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S_j}{\Delta t}$ (грн./час) соответственно сумма общих затрат и затрат в единицу времени, перенесенные производственной системой на j-й базовый продукт, $0 < j \le N$. Рассматриваемую производственную систему будем характеризовать функцией $J_П(t, S_j, \mu_j)$. Если известно все о состоянии каждого базового продукта, то разумно полагать, что все известно о состоянии производственной системы. Базовый продукт переходит из своего начального состояния (начальной заготовки) в конечное состояние (готовое изделие) в соответствие с определенным технологическим процессом. Изменение во времени свойств базового продукта производственной системы может быть представлено в виде движения базового продукта в пространстве наблюдаемых производственно-технологических параметров, а закон движения получен с помощью методов вариационного исчисления. Пусть в моменты времени $t = t_1$ и $t = t_2$ система, состоящая из базовых продуктов, описывается наблюдаемыми параметрами $S_j(t_1)$ и $S_j(t_2)$. Тогда между этими положениями система движется таким образом, чтобы целевой функционал

$$I = \int_{t_1}^{t_2} J(t, S_j(t), \mu_j(t)) \cdot dt, \qquad (1)$$

определяемый конкретным технологическим процессом, наличием оборудования с заданными характеристиками и т.д., имел минимум. Такой подход в построении законов движения механических систем называется принципом наименьшего действия, широко используется в экономике при решении оптимизационных задач [4]. Согласно данному принципу экономическая система характеризуется функцией Лагранжа

$$J = J(t, S_j(t), \mu_j(t)) \qquad (2)$$

и целевым функционалом (1). Так как функция Лагранжа имеет вид (2), то для вычисления целевого функционала (1) необходимо задать функцию возрастания стоимости базового продукта при его движении вдоль технологической цепочки (ФВСБП)

$$S_j = S_j(t) \qquad (3)$$

в интервале времени $t_1 \le t \le t_2$. Другими словами, целевой функционал (1) есть функционал, зависящий от движения системы в заданном технологическом поле производственного процесса. Если произвольно задать функции ФВСБП (3), то получим некоторое возможное (т.е. допускаемое связями) движение. Будем рассматривать всевозможные кривые ФВСБП (3), проходящие через две заданные точки пространства с координатами $(t_1, S_j(t_1))$ и $(t_2, S_j(t_2))$, то есть все возможные движения, переводящие производственную систему из заданного начального положения $(t_1, S_j(t_1))$ в заданное конечное положение $(t_2, S_j(t_2))$, которое она стала занимать в момент времени t_2.

Вариационный принцип построения функции Лагранжа производственной системы. Пусть производственный процесс вдоль технологической цепочки изготовления базового продукта определяется функцией возрастания стоимости базового продукта при его движении вдоль технологической цепочки (3). Данная функция строится на основании операционных карт технологического процесса, определяет последовательность операций производства базового продукта и требуемые производственные ресурсы, необходимые для выполнения операции (сырье, трудовые ресурсы, электроэнергия и т.д.) [4]. Функция ФВСБП (3) соответствует оптимальному построению производственного процесса изготовления базового продукта. Целевой функционал (1) имеет для такого "планового" производственного процесса экстремальное (точнее стационарное) значение по сравнению с другими вариантами технологий изготовления базового продукта, представляющими собой семейство технологий изготовления базового продукта (ТИБП)

$$S_j = S_j(t,\alpha),\ t_1 \le t \le t_2,\ -\eta \le \alpha \le \eta\,. \tag{4}$$

Семейство ТИБП (4) содержит в себе при $\alpha = 0$ «плановый» производственный процесс. Все семейство ТИБП производственной системы имеет общее начало $(t_1, S_j(t_1))$ и общий конец и $(t_2, S_j(t_2))$.

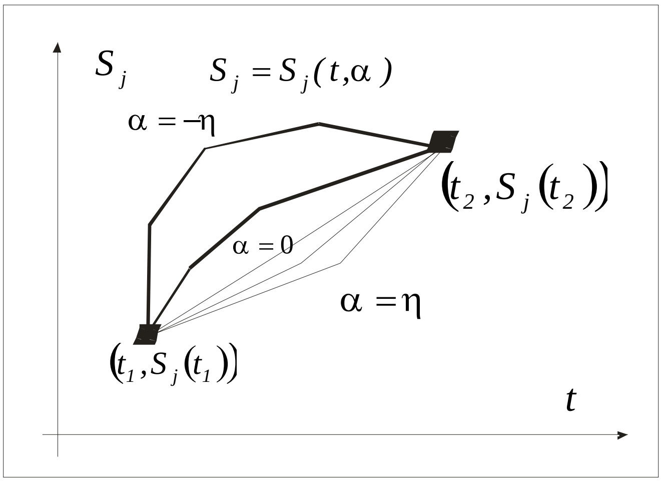

Рис. 1. Семейство ТИБП производственной системы

Целевой функционал (1), вычисленный вдоль конкретной ТИБП, принадлежащей этому семейству, представляет собою функцию параметра α:

$$I(\alpha) = \int_{t_1}^{t_2} J(t, S_j(t,\alpha), \mu_j(t,\alpha)) \cdot dt\,. \tag{5}$$

Вычислим вариацию функционала (1), т.е. дифференциал по α:

$$\delta I = \int_{t_1}^{t_2} \delta J \cdot dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial J}{\partial S_j} \cdot \delta S_j + \frac{\partial J}{\partial \mu_j} \cdot \delta \mu_j \right) \cdot dt =$$

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial J}{\partial \mu_j} \cdot \delta S_j \Bigg|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{\partial J}{\partial S_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial J}{\partial \mu_j} \right) \cdot \delta S_j \cdot dt = \tag{6}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial J}{\partial S_j}-\frac{d}{dt}\frac{\partial J}{\partial \mu_j}\right)\cdot \delta S_j \cdot dt\,.$$

Интеграл преобразовали при помощи интегрирования по частям, используя для этого перестановочность операций варьирования δ и дифференцирования по времени $\frac{d}{dt}$:

$$\begin{aligned}\delta\mu_j &= \delta\frac{d}{dt}S_j(t,\alpha)=\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{d}{dt}S_j(t,\alpha)\cdot\delta\alpha = \\ &= \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\alpha}S_j(t,\alpha)\cdot\delta\alpha=\frac{d}{dt}\delta S_j\end{aligned} \qquad (7)$$

Все пути базовых продуктов производственной системы имеют общее начало $(t_1, S_j(t_1))$ и общий конец и $(t_2, S_j(t_2))$, поэтому при $t = t_1$ и при $t = t_2$ вариации $\delta S_j = 0$ и проинтегрированная часть обращается в ноль.

Для "планового" производственного процесса вариация целевого функционала (6) должна быть равна нулю:

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\partial J}{\partial S_j}-\frac{d}{dt}\frac{\partial J}{\partial \mu_j}\right)\cdot \delta S_j \cdot dt = 0 \qquad (8)$$

и заданные функции (ФВСБП) (3) для "плановой технологии" удовлетворяют уравнения Эйлера:

$$\frac{\partial J}{\partial S_j}-\frac{d}{dt}\frac{\partial J}{\partial \mu_j}=0\,. \qquad (9)$$

Из зависимостей функций возрастания стоимости базового продукта при его движении вдоль технологической цепочки (3) может быть найден вид функции Лагранжа (2), описывающей динамику движения базовых продуктов по операционному маршруту в заданном технологическом поле производственного процесса.

Достаточно обширное семейство технологических процессов может быть описано функцией ФВСБП вида

$$S_j(t)= f(S)\cdot\frac{t^2}{2}+ f_1(S)\cdot t + f_0(S), \qquad (10)$$

в которой слагаемое $f(S)\cdot\frac{t^2}{2}$ определяет технологический процесс изготовления базового продукта, а слагаемые $f_1(S)\cdot t + f_0(S)$ – порядок разнесения постоянных затрат производственного процесса. К такому семейству относятся производственные системы, функции ФВСБП которых построены на основании сетевого графика производственного процесса. Полагается, что технологический процесс (сетевой график производственного процесса) со временем меняется медленно, и можно считать функции f, f_1, f_0 зависящими только от места в технологической цепочке. Уравнения Эйлера для функции ФВСБП вида (10) может быть записано в форме

$$\dot{\mu}_{\mathrm{j}}(t) = f(S_{\mathrm{j}}), \dot{S}_{\mathrm{j}}(t) = \mu_{\mathrm{j}}, \tag{11}$$

с соответственно вытекающей из уравнений (11) функцией Лагранжа производственной системы

$$\begin{gathered} J(t,S_j(t),\mu_j(t)) = \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{\mu_j^{\,2}}{2} - F(S_j)\right), \\ f(S) = -\frac{\partial F(S)}{\partial S}. \end{gathered} \tag{12}$$

Функции (ФВСБП) (3) для “плановой технологии” наряду с вариационным принципом могут быть охарактеризованы и при помощи дифференциальных уравнений движения базовых продуктов производственной системы. Однако между дифференциальными уравнениями и вариационными принципами имеется одно принципиальное различие: дифференциальные уравнения выражают некоторую зависимость, связывающую между собой момент времени t, положение базовых продуктов вдоль технологической цепочки производственной системы, скорости переноса затрат и ускорения переноса затрат на базовый продукт в этот момент времени. Если эта зависимость выполняется в каждой точке некоторого движения вдоль технологической цепочки, значит это движение отвечает “плановому технологическому процессу”. Вариационный же принцип характеризует весь прямой путь в целом. Он формулирует стационарное свойство целевого функционала, выделяющее “плановый технологический процесс” среди других возможных вариантов изготовления базового продукта. Вариационный принцип имеет более обозримую и компактную форму и часто используется в качестве фундамента для построения новых методов описания систем.

Дифференциальный принцип построения функции Лагранжа производственной системы. Дифференциальные уравнения Эйлера для базовых продуктов производственной системы (9) представляют собой необходимые и достаточные условия равенства нулю вариации (6). Получим уравнения Эйлера (9) из общего уравнения динамики:

$$\sum_{j=1}^{N}\left(f(S_j)-\ddot{S}_j(t)\right)\cdot\delta S_j=0$$

$$\dot{\mu}_j(t)=f(S_j)\,,\ \dot{S}_j(t)=\mu_j \qquad (13)$$

где функция ФВСБП записана в форме (10) или (11).

Используя перестановочность операций варьирования δ и дифференцирования по времени $\frac{d}{dt}$ (7), получим:

$$\sum_{j=1}^{N}\ddot{S}_j(t)\cdot\delta S_j=\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{N}\dot{S}_j(t)\cdot\delta S_j-\sum_{j=1}^{N}\dot{S}_j(t)\cdot\frac{d}{dt}\delta S_j=$$

$$=\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{N}\dot{S}_j(t)\cdot\delta S_j-\sum_{j=1}^{N}\dot{S}_j(t)\cdot\delta\dot{S}_j=$$

$$\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{N}\dot{S}_j(t)\cdot\delta S_j-\delta\sum_{j=1}^{N}\frac{\dot{S}_j^2(t)}{2}= \qquad (14)$$

$$=\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{N}\dot{S}_j(t)\cdot\delta S_j-\delta\sum_{j=1}^{N}\frac{\mu_j^2(t)}{2}$$

где $\frac{d}{dt}\delta S_j=\delta\mu_j=\delta\frac{dS_j}{dt}$.

Обозначим работу технологических сил через потенциал технологического поля производственной системы $F(S_j)$:

$$\sum_{j=1}^{N}f(S_j)\cdot\delta S_j=-\delta\sum_{j=1}^{N}F(S_j), \qquad (15)$$

запишем уравнение динамики базового продукта (13) в виде:

$$\delta\sum_{j=1}^{N}\frac{\mu_j^2(t)}{2}-\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{N}\dot{S}_j(t)\cdot\delta S_j-\delta\sum_{j=1}^{N}F(S_j)=0 \qquad (16)$$

Проинтегрируем обе части этого уравнения по времени в пределах $t=t_1$ и $t=t_2$:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\delta\sum_{j=1}^{N}\frac{\mu_j^2(t)}{2}-\delta\sum_{j=1}^{N}F(S_j)\right)\cdot dt-\left(\sum_{j=1}^{N}\dot{S}_j(t)\cdot\delta S_j\right)_{t=t_1}^{t=t_2}=0\,. \quad (17)$$

Так как δS_j =0 при $t=t_1$ и $t=t_2$, следовательно,

$\left(\sum_{j=1}^{N}\dot{S}_j(t)\cdot\delta S_j\right)_{t=t_1}^{t=t_2}$ =0, и равенство (17) принимает вид

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\delta\sum_{j=1}^{N}\frac{\mu_j^2(t)}{2}-\delta\sum_{j=1}^{N}F(S_j)\right)\cdot dt=0\,. \quad (18)$$

Равенство (18) может быть преобразовано

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\delta\sum_{j=1}^{N}\frac{\mu_j^2(t)}{2}-\delta\sum_{j=1}^{N}F(S_j)\right)dt$$

$$=\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{\mu_j^2(t)}{2}-\sum_{j=1}^{N}F(S_j)\right)dt= \quad (19)$$

$$=\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(J(t,S_j(t),\mu_j(t))\right)dt=0$$

где функция Лагранжа производственной системы оказалась представлена в ранее рассмотренной форме (12).

Таким образом, основное уравнение динамики (13) привело нас к вариационному принципу $\delta\int_{t_1}^{t_2}\left(J(t,S_j,\mu_j)\right)\cdot dt=0$, а отсюда, как было указано выше, к уравнениям Эйлера (9).

Первые интегралы в модели микроскопического описания производственной системы. При движении базовых продуктов производственной системы вдоль технологической цепочки в фазовом пространстве (S,μ) существуют такие функции экономических величин S_j,μ_j, которые сохраняют при движении системы постоянные значения, зависящие только от начальных условий. Такие функции являются первыми интегралами (или интегралами движения) производственной системы и имеют немаловажное значение в исследовании экономических систем.

Если функции Лагранжа для описания производственной системы не зависит явно от времени, то полная производная от нее может быть записана в виде:

$$\frac{dJ_{\Pi}}{dt}=\sum_{j=1}^{N_1}\left[\frac{\partial J_{\Pi}}{\partial S_j}\cdot\frac{dS_j}{dt}\right]+\sum_{j=1}^{N_1}\left[\frac{\partial J_{\Pi}}{\partial \mu_j}\cdot\frac{d\mu_j}{dt}\right]. \tag{20}$$

В силу уравнений Эйлера (9) заменяем производные $\frac{\partial J_{\Pi}}{\partial S}$ на их значения $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial J_{\Pi}}{\partial \mu_j}\right)$, получаем

$$\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{N_2}\left[\left(\frac{\partial J_{\Pi}}{\partial \mu_j}\right)\cdot\frac{dS_j}{dt}-J_{\Pi}\right]=0. \tag{21}$$

Откуда величина

$$\sum_{j=1}^{N_2}\left[\left(\frac{\partial J_{\Pi}}{\partial \mu_j}\right)\cdot\frac{dS_j}{dt}-J_{\Pi}\right]=const \tag{22}$$

является постоянной в ходе функционирования производственной системы, есть интеграл движения системы. К подобным экономическим системам относятся системы, имеющий полный замкнутый технологический цикл.

Если представить функцию Лагранжа производственной системы в виде разности членов, зависящих только от фазовых скоростей и от фазовых координат, то интеграл движения примет вид

$$\sum_{j=1}^{N_1}\left[\left(\frac{\partial J_{\Pi}}{\partial \mu_j}\right)\cdot\frac{dS_j}{dt}\right]-J_{\Pi}=const$$

или $\sum_{j=1}^{N_1}\frac{\alpha_0\cdot\mu_j^2}{2}+\beta\cdot F\left(t,S_j\right)=const.$ (23)

Системы, имеющие интеграл указанного вида, называются консервативными.

Следующий интеграл движения производственной системы $J_{\Pi}\left(t,S_j,\mu_j\right)$ возникает вследствие однородности фазового пространства (функция Лагранжа производственной системы не зависит явно от фазовой координаты):

$$\frac{\partial J_{П}}{\partial S} = 0. \tag{24}$$

Как следствие однородности фазового пространства потребуем, чтобы функция Лагранжа $J_{П}\left(t, S_j, \mu_j\right)$ замкнутой системы осталась неизменна при переносе системы как целого на отрезок δS. Изменение функции Лагранжа $J_{П}\left(t, S_j, \mu_j\right)$ вследствие малого перемещения по фазовой координате:

$$\delta J_{П}\left(t, S_j \mu_j\right) = \sum_{j=1}^{N_1}\left[\frac{\partial J_{П}}{\partial S_j}\cdot \delta S\right] = \delta S \cdot \sum_{j=1}^{N_1}\frac{\partial J_{П}}{\partial S_j}. \tag{25}$$

Так как выбор δS произволен, потребуем $\delta J_{П}\left(t, S_j \mu_j\right) = 0$, что эквивалентно

$$\sum_{j=1}^{N_1}\frac{\partial J_{П}}{\partial S_j} = 0. \tag{26}$$

В силу уравнений Эйлера (9) получаем

$$\sum_{j=1}^{N_1}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial J_{П}}{\partial \mu_j}\right) = 0. \tag{27}$$

Поменяем в (26) операции суммирования и дифференцирования местами, запишем

$$\mathrm{P}_S = \sum_{j=1}^{N_1}\left(\frac{\partial J_{П}}{\partial \mu_j}\right) = const. \tag{28}$$

Постоянные величины есть интегралы движения системы. Исходное равенство (26) в силу определения величины воздействия производственной системы на j-й базовый продукт дает равенство

$$\sum_{j=1}^{N_1}\frac{\partial J_{П}}{\partial S_j} = 0, \tag{29}$$

означающее, что сумма всех воздействий на базовые продукты производственной системы равна нулю.

Следующий интеграл движения производственной системы $J_{П}\left(t, S_j, \mu_j\right)$ возникает вследствие однородности фазового пространства по фазовой скорости и уравнение Эйлера принимает вид:

$$\frac{\partial J_{П}}{\partial \mu} = 0 . \tag{30}$$

Это условие совпадает по форме с необходимым условием экстремума в классической задаче математического программирования при отсутствии ограничений.

Свойства функции Лагранжа производственной системы. Из равнений Эйлера (9) видны свойства функции Лагранжа. Если производственная система состоит из двух невзаимодействующих частей (производственных участков, цехов, площадок), то справедливо равенство:

$$J_{П}(t,S_j,\mu_j) = J_{П_1}(t,S_{j_1},\mu_{j_1}) + J_{П_2}(t,S_{j_2},\mu_{j_2}). \tag{31}$$

Умножение функции Лагранжа производственной $J_{П}(t,S_j,\mu_j)$ на произвольную постоянную не отражается на уравнениях движения базовых продуктов. Умножение функции Лагранжа производственной системы на произвольную постоянную приводит только к выбору определенной системы единиц, с использованием которых происходит построение модели.

Функция Лагранжа производственной системы определяется только с точностью до полной производной от любой функции координат $S_j(t)$ по времени t: $\theta(t,S_j)$. Последнее связано с тем, что вариация от функции $\theta_{П}(t,S_j)$ есть тождественный ноль:

$$\delta\theta_{П}(t,S_j)\cdot dt = \int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial\theta_{П}}{\partial S_j}\cdot\delta S_j\right]\cdot dt = \delta S_j\cdot\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial\theta_{П}}{\partial S_j}\cdot dt = 0 \tag{32}$$

Выводы. С использованием вариационного и дифференциального принципов записана функция Лагранжа для базового продукта производственной системы. Определены слагаемые функции Лагранжа, характеризующие технологическое поле оборудования и собственные свойства базового продукта. Записаны первые интегралы при движении базового продукта вдоль технологической цепочки. Показаны свойства функции Лагранжа для базовых продуктов производственной системы.

Материалы работы рассмотрены и проработаны в рамках совместных семинаров кафедры экономической кибернетики и прикладной экономики, кафедры теоретической ядерной физики ХНУ им. В.Н. Каразина и производственного отдела НПФ “Технология” ООО (г. Харьков).

Список литературы

1. Демуцкий В.П., Пигнастая В.С., Пигнастый О.М. Стохастическое описание экономико-производственных систем с массовым выпуском продукции: Доповіді Національної академії наук України, 2005. – № 7. – С. 66-71.
2. Летенко В.А., Родионов Б.Н. Организация, планирование и управление машиностроительным предприятием. Часть 2: Внутризаводское планирование. – М.: Высшая школа, 1979. – 232 с.
3. Прыткин Б.В. Технико-экономический анализ производства. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000. – 399 с.
4. Шананин А.А.. Обобщенная модель чистой отрасли производства // Математическое моделирование, 1997. Том 9. – № 9. – С. 117-127.

Получено 01.07.2006

УДК 339.73

***Ф.І. Шпиг**, канд. екон. наук, ЗАО “Престиж-груп”*

ІНТЕРНАЦІОНАЛІЗАЦІЯ БАНКІВСЬКИХ СИСТЕМ: МОТИВИ І ПРИНЦИПИ ЕКСПАНСІЇ ІНОЗЕМНОГО КАПІТАЛУ

Постановка проблеми. Процес проникнення іноземних банків на вітчизняні фінансові ринки пов’язаний з інтернаціоналізацією (придбання міжнародного характеру) у банківський діяльності, яка почалася в XIX ст., коли англійські банки відкривали свої представництва за кордоном з метою налагодження торгівлі зі своїми колоніями. Слідом за ними це почали робити бельгійські, французькі, німецькі, а також японські банки. За оцінками Світового банку, лібералізація в галузі фінансових послуг для ринків, що розвиваються, може принести дивіденди більші у чотири рази, ніж вигоди від лібералізації торгівлі товарами. Зараз ці процеси стосуються банківських систем практично кожної країни світу, але відбувається вона за різними мотивами і у їх основі лежать різні принципи.

Метою статті є дослідження основних мотивів та принципів, які лежать у основі інтернаціоналізації банківських систем.

Виклад основного матеріалу. Про інтернаціоналізацію банківської системи можна говорити в різних аспектах, тому важко точно і однозначно представити її зміст. В літературі пропонується багато визначень цього поняття.

Так, під інтернаціоналізацією банківської системи може розумітися процес виходу її учасників поза рамки вітчизняного ринку, а також входження капіталу закордонних інвесторів до вітчизняних бан-