
РОССИЙСКОЕ ГРАВИТАЦИОННОЕ ОБЩЕСТВО
РОССИЙСКИЙ ФОНД ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ и МЕХАНИКИ им. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

РОССИЙСКАЯ ЛЕТНЯЯ ШКОЛА
«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ И ЯВЛЕНИЙ В
СИСТЕМАХ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ»

МЕЖДУНАРОДНЫЙ СЕМИНАР
«НЕЛИНЕЙНЫЕ ПОЛЯ В ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ И
КОСМОЛОГИИ»

21 - 26 ОКТЯБРЯ 2013, Казань — Казанский университет

ТРУДЫ СЕМИНАРА и ШКОЛЫ



Казанский университет
2013

УДК 530.12+531.51+517.944+519.713+514.774

ББК 22.632

Т78

Печатается по рекомендации Ученого Совета Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Под общей редакцией заслуженного деятеля науки РТ, доктора физ.-мат. наук,
проф. Ю.Г. Игнатьева

Труды Российской летней школы «Математическое моделирование фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики» (ММ СКМ-4) и Российского семинара «Нелинейные поля и релятивистская статистика в теории гравитации и космологии» 21 - 26 октября 2013, Казань. / Под общей редакцией заслуженного деятеля науки РТ, доктора физ.-мат. наук, проф. Ю.Г. Игнатьева — Казань: Казанский университет, 2013. - 248 с.

В сборник вошли труды Российской летней школы и международного семинара, посвященные математическому моделированию фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики (СКМ) и современным теоретическим проблемам нелинейной физики, в частности, релятивистской теории гравитации и космологии. Материалы, содержащиеся в сборнике, представляют оригинальные статьи и обзоры специалистов из различных научных центров России и Зарубежья, а также работы начинающих исследователей. Первый Российский семинар по математическому моделированию в СКМ проходил в Казани, в 2007 году на базе ТГГПУ. Вторая и третья школа-семинар по математическому моделированию в СКМ проходили в Казани в 2010 г. (ТГГПУ) и в 2012 г. (КФУ).

Материалы сборника трудов предназначены для научных работников и аспирантов, специализирующихся в области математического и компьютерного моделирования, релятивистской теории гравитации, квантовой теории поля и космологии, а также для студентов старших курсов физико-математических отделений университетов. Международный семинар продолжает традицию казанских семинаров «Gracos» по гравитации и космологии (2007, 2009, 2010, 2012).

*Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований:
гранты РФФИ 13-02-06076 Г и 13-01-06817 мол_г.*

ISBN 978-5-905787-61-4

УДК 530.12+531.51+517.944+519.713+514.774
ББК 22.632

©Казанский университет, 2013

©Лаборатория информационных технологий в физико-математическом образовании Института математики и механики КФУ, 2013

Оглавление

ЧАСТЬ 1. ТРУДЫ СЕМИНАРА.	8
Р.Р. Аббязов. О возмущениях в темной энергии в модели σ CDM	8
Р.А. Абзалов, С.В. Сушков . Космологическая модель с неминимальной кинетической связью	9
Е.В. Асадуллина, А.А. Попов. Эффект самодействия в длинной горловине	9
О.В. Бабурова, В.А. Луговкин. Модель эволюции Вселенной со спин-дилатационной темной материей	17
А.Б. Балакин, Н.Н. Долбилова. Эффекты электро - и магнитострикции в космологических моделях с темной энергией	18
А.М. Баранов. Обобщение одной модели внутреннего источника Райснера-Нордстрема	19
К.Е. Белоушко, В.В. Карбановский. Недиагональные космологические модели Фридмана-Робертсона-Уокера в ОТО	24
К.Е. Белоушко, В.В. Карбановский. О роли «калибровочных функций» для тензора энергии-импульса	25
С.В. Болехов. О возможных обобщениях принципа Фоккера-Фейнмана-Уилера	26
Е.С. Бородина, А.А. Попов. Заряженные антидилатонные, анти-Максвелловские кротовые норы	27
К.А. Bronnikov, M.V. Skvortsova. Variations of the fine structure constant and the gravitational constant from nonlinear multidimensional gravity	36
К.А. Бронников, В.Н. Мельников, С.Г. Рубин и И.В. Сवादковский. Вариация постоянной тонкой структуры из дополнительных измерений	37
И.А. Вернигора, Ю.Г. Рудой. Об одной теоретической возможности преодоления предела Грейзена - Зацепина - Кузьмина для протонной компоненты космических лучей при сверхвысоких энергиях	38
В.Т. Волков. Оценка энерговыделений в системах тесных двойных звезд на основе предельной энергетической теоремы для поточных газовых систем	39
В.Т. Волков. Сверхзвуковые закрученные потоки газа и плазмы как основа моделирования квазигравитационных полей	43
А.С. Гаркун, В.И. Кудин и А.В. Минкевич. К вопросу об устойчивости космологических решений для регулярной ускоренно-расширяющейся Вселенной в пространстве-времени Римана-Картана	48
А.К. Гуц. Оценка энергии, необходимой для свертывания пространства-времени в пружину	49
В.М. Журавлев. Гравитация, электромагнетизм и геометрия физического пространства	52
В.М. Журавлев. Точные решения в теории самогравитирующей среды. Метод гидродинамических подстановок	53
Ф.Ш. Зарипов. О двухфазной стадии эволюции Вселенной в теории индуцированной гравитации	54
М.Я. Иванов, В.К. Мамаев. Модель космологической материи в свете опытных данных современной астрофизики с приложениями к решению проблем внешней и внутренней аэродинамики	58
V.D. Ivashchuk, V.N. Melnikov. Quantum billiards in multidimensional models with branes	59
Ю.Г. Игнатьев, М.Л. Михайлов. Космологическое расширение двухкомпонентной плазмы с межчастичным скалярным притяжением	60

Р.В. Королев, С.В. Сушков. Точные статические сферически-симметричные решения в теории гравитации с неминимальной кинетической связью	61
А.С. Кубасов, С.В. Червон. Методы решения в киральной двухкомпонентной космологической модели. Тестирование несингулярной (Новорожденной) Вселенной	61
В.А. Лукьянов. Уравнения Эйнштейна и Максвелла как составные части уравнений Янга-Миллса	63
В.К. Мамаев, М.Я. Иванов. К вопросу вакуумного рождения и аннигиляции частиц с соблюдением законов сохранения	66
V.N. Melnikov. <i>Multidimensional Gravitation and Main Problems of Modern Physics</i>	67
А.В. Минкевич. Пуанкаре калибровочная теория тяготения, гравитационное взаимодействие и регулярная ускоренно-расширяющаяся Вселенная	69
Ю.Г. Рудой, А.В. Калмыков. Термодинамическая неустойчивость черной дыры Рейсснера-Нордстрема	74
И.В. Танатаров, О.Б. Заславский. Классификация по Петрову вблизи горизонтов вращающихся грязных черных дыр	75
Б.Н. Фролов, Е.В. Фебрес. Получение сферически симметричного решения конформной теории гравитации со скалярным полем Дезера-Дирака аналитическими и компьютерными символьными методами	76
A.V. Yaparova, A.V. Yurov. <i>Spectral index and Srödinger equation</i>	77
ЧАСТЬ 2. ТРУДЫ ШКОЛЫ.	80
К.О. Агафонова, А.А. Агафонов, С.В. Сушков Компьютерная математическая лаборатория: визуализация математического бильярда	80
Д.Ю. Ахметов, А.М. Елизаров, Е.К. Липачёв Модель сервисов электронного математического журнала и ее облачная реализация на платформе Open Journal System	86
Аян Месут. Создание управляемых динамических моделей основных механических явлений: движение тела, брошенного горизонтально	93
В.А. Бушкова. Исследование и построение анимационных моделей геодезических трубок в локально евклидовых и псевдоевклидовых римановых пространствах	97
Р.Ш. Гайнанова, О.А. Широкова. Компьютерное моделирование при решении геометрических задач средствами объектно-ориентированного программирования	97
Т.Ю. Гайнутдинова, О.А. Широкова. Особенности проведения практикума решения проблемно-ориентированных задач	101
А.М. Гатауллин, Ф.Ш. Зарипов. Внедрение принципа междисциплинарных связей в школьный образовательный процесс(на примере темы "Построение фигур вращения")	104
А.И. Гибадуллина. Использование системы Maple в среднем математическом образовании: опыт школы № 57 города Казани. Сборник методических материалов	111
А.И.Гибадуллина, К.С. Ускова. Обработка спортивных результатов с применением системы Maple	112
Д.П. Голоскоков, Д.А. Кардаков, И.А. Ивачева Математическая модель тепловых процессов в ротовой полости	113
V.A. Dedkov. <i>Algorithms for collective behavior of robots</i>	116
Н.В. Зайцева. Динамическая визуализация задач математической физики для уравнений гиперболического типа	124
Л.Ф. Зарипова, Э.В. Чеботарева. Реализация метода Дюамеля в системе компьютерной математики Maple	125
Ю.Г. Игнатьев, О.А. Сачкова. Программные процедуры автоматизированного решения обыкновенных линейных и нелинейных дифференциальных уравнений и оснащенной динамической визуализации их решений	131
М.Н. Кирсанов, С.А. Ларичев. Маплет для расчета прогиба плоской статически неопределимой фермы	133
И.А. Кох. Алгебра и логика в пакете Maple	137
Е.К. Липачёв. Моделирование рассеяния электромагнитных волн неровной поверхностью на основе метода вейвлетов	138

Р.М. Мавлявиев, И.Б. Гарипов. Фундаментальное решение одного линейного B – эллиптического уравнения второго порядка с младшими членами	142
П.П. Миронов, В.М. Журавлев. Метод максимальной энтропии и модели солнечного ветра с учетом турбулентных флуктуаций плазмы	145
Д.А. Мусаева, В. Гежа, А.А. Синявин, В.К. Ильин. Выбор модели турбулентности для моделирования движения расплава под действием импульсного магнитного поля	146
А.М. Нигмедзянова. Оснащенная динамическая визуализация построений сечений многогранников	151
O.S Ryzhkov, N.I. Smirnov. Calculation of the automatic control system (an iterative and numerical methods)	157
А.Р. Самигуллина. Компакт-диск с обучающими материалами по курсу высшей математики с применением СКМ Maple	161
Э.Д. Хусаинова. Решение одной сингулярной задачи дифракции с условиями сопряжения на m концентрических полуокружностях	165
ЧАСТЬ 3. ТРУДЫ СЕМИНАРА: ЛЕКЦИИ И ОБЗОРЫ.	168
В. Дьяконов. Свободные системы компьютерной математики в фундаментальных расчетах и моделировании	168
Ю.Г. Игнатьев. Термодинамическое равновесие в ускоренной Вселенной не достижимо?	201
А.С. Кубасов, С.В. Червон. Методы конструирования точных решений в двухкомпонентной киральной космологической модели	224
ЧАСТЬ 4. РАЗНОЕ / В ПОРЯДКЕ ОБСУЖДЕНИЯ.	240
В.Д. Андреев. Время \rightarrow гравитация \rightarrow масса в модели инверсно–сопряженных пространств . .	240
Б.С. Кочкарев. Доказательство гипотезы Эдмондса и решение проблемы Кука	241
ЧАСТЬ 5. МЕМОРИАЛ.	244
Ю.Г. Игнатьев. Сергей Викторович Червон	244

МАПЛЕТ ДЛЯ РАСЧЕТА ПРОГИБА ПЛОСКОЙ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ ФЕРМЫ

М.Н. Кирсанов¹, С.А. Ларичев²

¹НИУ МЭИ, Москва, ²НИУ МЭИ, Москва

¹E-mail: mpei2004@ya.ru, ²E-mail: s.a.larichev@gmail.com

Аннотация. Разработана программа для расчета прогиба плоской статически неопределимых балочных ферм. В программе находится прогиб в любой точке фермы от произвольной нагрузки. Есть возможность выбора формы верхнего пояса фермы, длин панелей и положения опор. Жесткости стержней принимаются одинаковыми.

В [1] описан маплет для определения усилий в произвольной (не обязательно балочной) плоской статически определимой ферме. Практика применения этого маплета показала его один недостаток — ввод данных. Для описания схемы фермы необходимо было вводить координаты всех шарниров и ориентированный граф стержней фермы с указанием номеров концов стержней. При вводе длинных списков трудно избежать ошибок. Если же ограничиться балочными фермами, то ввод можно выполнить по простой схеме, задав длины панелей и их высоты. Нижний пояс предполагается прямолинейным, верхний — криволинейным с произвольным очертанием. Более того, аналитические возможности системы Maple [2] позволяют рассчитать и статически неопределимую ферму с крестообразной решеткой, определив ее прогиб в произвольной точке.

Интерфейс программы (maplet), разработанный в системе аналитических вычислений Maple[1, 2], состоит из полей ввода размеров фермы и нагрузок (рис. 1).

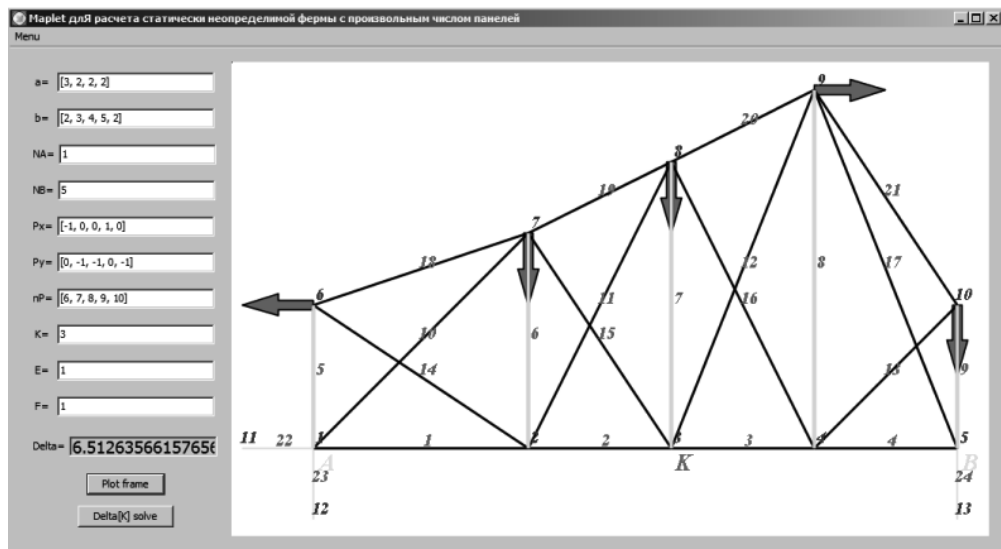


Fig 1. Маплет фермы произвольного очертания верхнего пояса

Опоры моделируем стержнями, подвижную опору — одним стержнем, неподвижную — двумя стержнями. Все стержни фермы (включая опорные) условно представляем векторами, направление которых выбираем произвольно. Эти векторы не связаны с усилиями в стержнях, и решение не зависит от выбора их направления. В программу вводятся концы стержней в виде векторов-строк N_{beg} , N_{end} . В программе используется метод вырезания узлов. Опорные стержни-векторы должны быть направлены от фермы к неподвижным узлам. Кроме того, опорные шарниры нумеруются последними. Последние условия существенные и невыполнение их часто является причиной ошибок ввода. Связано это с условным оператором, работающем в цикле по числу стержней. Усилия во всех стержнях, кроме опорных, входят в систему дважды — в уравнение равновесия узла-начала и в уравнение узла-конца стержня. Соответствующие направляющие косинусы имеют противоположные знаки. Разрешающая матрица размером $N \times N$ системы содержит направляющие косинусы стержней.

Вводится вектор свободных членов системы B . В него заносится информация о нагрузках. Горизонтальные и вертикальные нагрузки образуют отдельные списки F_x и F_y . Даже тогда, когда нагрузка единственная, как в данном случае, ее значение оформляется в виде двух списков длиной 1. Длина списка (число векторов сил) вычисляется оператором `nops`. Списки F_x и F_y должны иметь одинаковую длину.

Решение системы получается с помощью оператора `LinearSolve` пакета `LinearAlgebra`. Но этот способ решения системы линейных уравнений в Maple не единственный. Можно, например, найти обратную матрицу G^{-1} , а затем умножить ее на вектор свободных членов: $S := -G^{-1} \cdot B$. Здесь точка — знак умножения матрицы на матрицу или матрицы на вектор. При этом не требуется загружать пакет `LinearSolve`. Обратная матрица в Maple может быть также найдена с помощью простого деления: $1/G$.

Программа оформлена в виде маплета. Общая структура программы следующая:

```
FermaModule:=module()
  Frm:=proc()
    end proc;

  runFerma:=proc()
    end proc;
end module:
FermaModule:-runFerma():
```

В целом программа записана в модуль `FermaModule` с двумя процедурами `Frm` и `runFerma`. В первой производятся вычисления, во второй организован интерфейс программы. Программа запускается вызовом процедуры `runFerma` из модуля `FermaModule`.

Опишем структуру каждой процедуры. Схема процедуры вычислений `Frm` имеет вид

```
Frm:=proc() use Maplets[Tools] in
  • ввод данных оператором Get;
  • изображение фермы Ris, состоящее из стержней  $R[i]$ ,  $i=1..N$ , нагрузок  $iF$ , составленное из стрелок arrow, шарниров Шарнир[i],  $i=1..M$ ;
  • заполнение матрицы направляющих косинусов G;
  • заполнение вектора правых частей B (нечетные строки B — горизонтальная нагрузка, четные — вертикальная);
  • получение решения S системы оператором LinearSolve;
  • занесение решения в таблицу оператором Set;

end use:
Ris:
end proc;
```

Последним в процедуре вызван рисунок `Ris`, поэтому при обращении `display(Frm())` в процедуре интерфейса на дисплее появится изображение фермы.

Структура процедуры `runFerma`, задающей интерфейс программы, следующая:

```
runFerma:=proc()
  переменные; константы;
  use Maplets:-Elements in
  обозначения элементов интерфейса;
  mplt:= Maplet(Evaluate(),Window());
  Maplets:-Display(mplt);
end use;
end proc;
```

Для раскрытия статической неопределимости использован метод сил [3]. В качестве основной системы выбирается ферма без стержней нижнего пояса. Усилия в отброшенных стержнях принимается за неизвестные метода сил. Таким образом, ферма с n панелями в полупролете имеет степень статической неопределимости $2n$.

Коэффициенты канонических уравнений по формулам Максвелла-Мора [3]

$$\sum_{j=1}^{2n} \delta_{ij} X_j + \Delta_{iP}, i = 1, \dots, 2n;$$

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^N \frac{s_{k,i} s_{k,j} l_k}{E_k F_k}, \quad \Delta_{iP} = \sum_{k=1}^N \frac{s_{k,i} S_{k,P} l_k}{E_k F_k},$$

где N — число стержней, $s_{k,i}$ — усилие в стержне k от действия единичной силы по направлению i -й неизвестной, $S_{k,P}$ — усилие в стержне k от действия нагрузки. Жесткости стержней приняты одинаковыми $E_k F_k = EF$, кроме жесткостей стоек, для которых $E_v F_v \rightarrow \infty$, v — номера стоек.

Для сделанного предположения о жесткости стоек система уравнений разделяется. Матрица принимает диагональную форму $\delta_{ij} = 0, i \neq j$.

Усилия в стержнях статически неопределимой фермы S_k находим по формуле

$$S_i = S_{i,P} + \sum_{k=1}^{2n} s_{k,i} X_k, i = 1, \dots, N.$$

Прогиб определяем по формуле Максвелла-Мора

$$\Delta = \sum_{k=1}^N \frac{S_k S_k^{(1)} l_k}{E_k F_k}.$$

где $S_k^{(1)}$ — усилия в статически определимой ферме от действия единичной вертикальной силы, приложенной в заданном узле (его номер K можно задать в окне маплета)

Сделанное предположение о жесткости стоек позволяет решить задачу аналитически для произвольного числа панелей n в полупролете. Получена аналитическая формула для нахождения прогиба центральной точки нижнего яруса фермы с четным количеством панелей ($2n$), одинаковыми длинами панелей (a) и высотами стоек (b), рисунок 2.

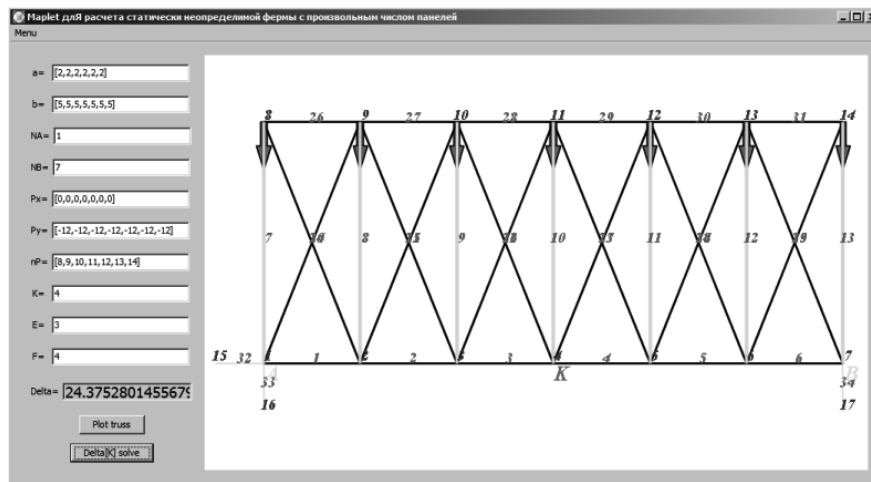


Fig 2. Маплет балочной фермы для контроля аналитической формулы

С использованием индуктивных методов, развитых в системе Maple [1], получена точная формула

$$\Delta = \frac{PL^3}{96nEFb^2} \left(5n^2 - 2 + 3 \left(1 + \left(\frac{2nb}{L} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right),$$

где вертикальная нагрузка P равномерно распределена по верхнему ярусу фермы, $L = 2na$ — пролет фермы, b — высота стоек фермы, E модуль Юнга, F площадь сечения стержней. Найдена оптимальное соотношение высоты и длины фермы. При

$$b/L = \frac{\sqrt[3]{90n^2 - 36}}{6n}$$

прогиб фермы минимальный. Точность последней формулы возрастает с числом панелей n . С разумной точностью формула справедлива при $n > 3$. С увеличением n оптимальное соотношение b/L уменьшается.

Литература

- [1] *Кирсанов М.Н.*, Maple и Maple. Решения задач механики: Учебное пособие/ СПб.: Издательство "Лань" 2012.
- [2] *Дьяконов В.П.*, Maple 10/11/12/13/14 в математических расчетах. - М.: ДМК-Пресс, 2011
- [3] *Потапов В. Д., Александров А. В., Косицын С. Б., Долотказин Д. Б.* Строительная механика: Учебник для вузов. Кн. 1. Статика упругих систем / Под ред. В. Д. Потапова. — М.: Высш. шк., 2007.

Труды Российской летней школы
«Математическое моделирование фундаментальных объектов
и явлений в системах компьютерной математики»
и Международного семинара
«Нелинейные поля в теории гравитации и космологии»

Набор сборника осуществлен в издательском пакете LaTeX2 ϵ в
научно-исследовательской лаборатории «Информационных технологий в
физико-математическом образовании» Института математики и механики им.
Н.И. Лобачевского Казанского университета.

Разработка авторского LaTeX-стиля оформления - Ю.Г. Игнатьев

Техническая редакция, набор и верстка: Ю.Г. Игнатьев, А.Р. Самигуллина.

Оформление обложки - А.А. Агафонов

В сборнике трудов опубликованы **63** статьи, посвященные современным
проблемам теории гравитации и космологии, а также математическому и
компьютерному моделированию.

Отпечатано с готового оригинал-макета
в типографии Казанского университета

Подписано в печать 15.08.13. Формат 60×84/8
Печать офсетная. Бумага офсетная. Печ. л. 22. Тираж 125 экз.

Казанский университет
420008, г. Казань, ул. Профессора Нухина, 1/37
