РОССИЙСКОЕ ГРАВИТАЦИОННОЕ ОБЩЕСТВО
РОССИЙСКИЙ ФОНД ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ и МЕХАНИКИ им. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

РОССИЙСКАЯ ЛЕТНЯЯ ШКОЛА

«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ И ЯВЛЕНИЙ В СИСТЕМАХ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ»

МЕЖДУНАРОДНЫЙ СЕМИНАР

«НЕЛИНЕЙНЫЕ ПОЛЯ В ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ И КОСМОЛОГИИ»

21 - 26 ОКТЯБРЯ 2013, Казань — Казанский университет

ТРУДЫ СЕМИНАРА и ШКОЛЫ

Казанский университет
2013

УДК 530.12+531.51+517.944+519.713+514.774
ББК 22.632
Т78

Печатается по рекомендации Ученого Совета Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Под общей редакцией заслуженного деятеля науки РТ, доктора физ.-мат. наук, *проф. Ю.Г. Игнатьева*

Т78 **Труды Российской летней школы** «Математическое моделирование фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики» (ММ СКМ-4) и **Российского семинара** «Нелинейные поля и релятивистская статистика в теории гравитации и космологии» 21 - 26 октября 2013, Казань. / Под общей редакцией заслуженного деятеля науки РТ, доктора физ.-мат. наук, проф. Ю.Г. Игнатьева — Казань: Казанский университет, 2013. - 248 с.

В сборник вошли труды Российской летней школы и международного семинара, посвященные математическому моделированию фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики (СКМ) и современным теоретическим проблемам нелинейной физики, в частности, релятивистской теории гравитации и космологии. Материалы, содержащиеся в сборнике, представляют оригинальные статьи и обзоры специалистов из различных научных центров России и Зарубежья, а также работы начинающих исследователей. Первый Российский семинар по математическому моделированию в СКМ проходил в Казани, в 2007 году на базе ТГГПУ. Вторая и третья школа-семинар по математическому моделированию в СКМ проходили в Казани в 2010 г. (ТГГПУ) и в 2012 г. (КФУ).

Материалы сборника трудов предназначены для научных работников и аспирантов, специализирующихся в области математического и компьютерного моделирования, релятивистской теории гравитации, квантовой теории поля и космологии, а также для студентов старших курсов физико - математических отделений университетов. Международный семинар продолжает традицию казанских семинаров «Gracos» по гравитации и космологии (2007, 2009, 2010, 2012).

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований: гранты РФФИ 13-02-06076 Г и 13-01-06817 мол_ г.

ISBN 978-5-905787-61-4

УДК 530.12+531.51+517.944+519.713+514.774
ББК 22.632

©Казанский университет, 2013
©Лаборатория информационных технологий в физико-математическом образовании Института математики и механики КФУ, 2013

Оглавление

МАПЛЕТ ДЛЯ РАСЧЕТА ПРОГИБА ПЛОСКОЙ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМОЙ ФЕРМЫ

М.Н. Кирсанов[1], *С.А. Ларичев*[2]

[1]*НИУ МЭИ, Москва*, [2]*НИУ МЭИ, Москва*

[1]`E-mail: mpei2004@ya.ru`, [2]`E-mail: s.a.larichev@gmail.com`

Аннотация. *Разработана программа для расчета прогиба плоской статически неопределимых балочных ферм. В программе находится прогиб в любой точке фермы от произвольной нагрузки. Есть возможность выбора формы верхнего пояса фермы, длин панелей и положения опор. Жесткости стержней принимаются одинаковыми.*

В [1] описан маплет для определения усилий в произвольной (не обязательно балочной) плоской статически определимой ферме. Практика применения этого маплета показала его один недостаток — ввод данных. Для описания схемы фермы необходимо было вводить координаты всех шарниров и ориентированный граф стержней фермы с указанием номеров концов стержней. При вводе длинных списков трудно избежать ошибок. Если же ограничиться балочными фермами, то ввод можно выполнить по простой схеме, задав длины панелей и их высоты. Нижний пояс предполагается прямолинейным, верхний — криволинейным с произвольным очертанием. Более того, аналитические возможности системы Maple [2] позволяют рассчитать и статически неопределимую ферму с крестообразной решеткой, определив ее прогиб в произвольной точке.

Интерфейс программы (maplet), разработанный в системе аналитических вычислений Maple[1, 2], состоит из полей ввода размеров фермы и нагрузок (рис. 1).

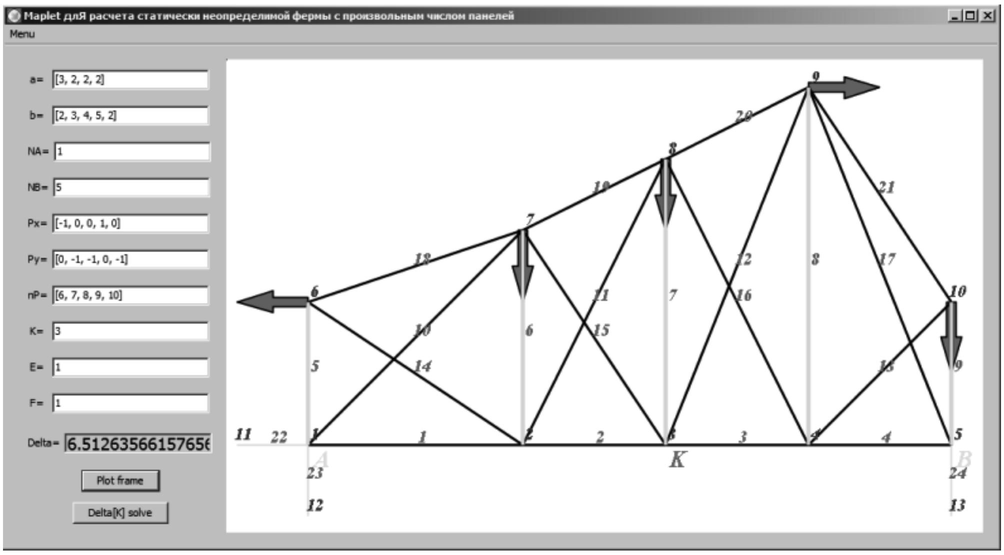

Fig 1. Маплет фермы произвольного очертания верхнего пояса

Опоры моделируем стержнями, подвижную опору — одним стержнем, неподвижную — двумя стержнями. Все стержни фермы (включая опорные) условно представляем векторами, направление которых выбираем произвольно. Эти векторы не связаны с усилиями в стержнях, и решение не зависит от выбора их направления. В программу вводятся концы стержней в виде векторов-строк `Nbeg`, `Nend`. В программе используется метод вырезания узлов Опорные стержни-векторы должны быть направлены от фермы к неподвижным узлам. Кроме того, опорные шарниры нумеруются последними. Последние условия существенные и невыполнение их часто является причиной ошибок ввода. Связано это с условным оператором, работающем в цикле по числу стержней. Усилия во всех стержнях, кроме опорных, входят в систему дважды — в уравнение равновесия узла-начала и в уравнение узла-конца стержня. Соответствующие направляющие косинусы имеют противоположные знаки. Разрешающая матрица размером $N \times N$ системы содержит направляющие косинусы стержней.

Вводится вектор свободных членов системы `B`. В него заносится информация о нагрузках. Горизонтальные и вертикальные нагрузки образуют отдельные списки `Fx` и `Fy`. Даже тогда, когда нагрузка единственная, как в данном случае, ее значение оформляется в виде двух списков длиной 1. Длина списка (число векторов сил) вычисляется оператором `nops`. Списки `Fx` и `Fy` должны иметь одинаковую длину.

Решение системы получается с помощью оператора `LinearSolve` пакета `LinearAlgebra`. Но этот способ решения системы линейных уравнений в Maple не единственный. Можно, например, найти обратную матрицу `G^(-1)`, а затем умножить ее на вектор свободных членов: `S := -G^(-1).B`. Здесь точка — знак умножения матрицы на матрицу или матрицы на вектор. При этом не требуется загружать пакет `LinearSolve`. Обратная матрица в Maple может быть также найдена с помощью простого деления: `1/G`.

Программа оформлена в виде маплета. Общая структура программы следующая:

```
FermaModule:=module()
 Frm:=proc()
      end proc;

 runFerma:=proc()
         end proc;
 end module:
FermaModule:-runFerma():
```

В целом программа записана в модуль `FermaModule` с двумя процедурами `Frm` и `runFerma`. В первой производятся вычисления, во второй организован интерфейс программы. Программа запускается вызовом процедуры `runFerma` из модуля `FermaModule`.

Опишем структуру каждой процедуры. Схема процедуры вычислений `Frm` имеет вид

`Frm:=proc() use Maplets[Tools] in`

- *ввод данных оператором* `Get`*;*
- *изображение фермы* `Ris`*, состоящее из стержней* `R[i], i=1...N`*, нагрузок* `iF`*, составленное из стрелок* `arrow`*, шарниров* `Шарнир[i], i=1...M`;
- *заполнение матрицы направляющих косинусов* `G`*;*
- *заполнение вектора правых частей* `B` *(нечетные строки* `B` *— горизонтальная нагрузка, четные — вертикальная);*
- *получение решения* `S` *системы оператором* `LinearSolve`*;*
- *занесение решения в таблицу оператором* `Set`;

```
  end use:
  Ris:
 end proc;
```

Последним в процедуре вызван рисунок `Ris`, поэтому при обращении `display(Frm())` в процедуре интерфейса на дисплее появится изображение фермы.

Структура процедуры `runFerma`, задающей интерфейс программы, следующая:

```
runFerma:=proc()
  переменные; константы;
  use Maplets:-Elements in
  обозначения элементов интерфейса;
  mplt:= Maplet(Evaluate(),Window()):
  Maplets:-Display(mplt):
  end use;
end proc;
```

Для раскрытия статической неопределимости использован метод сил [3]. В качестве основной системы выбирается ферма без стержней нижнего пояса. Усилия в отброшенных стержнях принимается за неизвестные метода сил. Таким образом, ферма с n панелями в полупролете имеет степень статической неопределимости $2n$.

Коэффициенты канонических уравнений по формулам Максвелла-Мора [3]

$$\sum_{j=1}^{2n} \delta_{ij} X_j + \Delta_{iP}, i = 1, ..., 2n;$$

$$\delta_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \frac{s_{k,i} s_{k,j} l_k}{E_k F_k}, \quad \Delta_{iP} = \sum_{k=1}^{N} \frac{s_{k,i} S_{k,P} l_k}{E_k F_k},$$

где N — число стержней, $s_{k,i}$ — усилие в стержне k от действия единичной силы по направлению i-й неизвестной, $S_{k,P}$ — усилие в стержне k от действия нагрузки. Жесткости стержней приняты одинаковыми $E_k F_k = EF$, кроме жесткостей стоек, для которых $E_v F_v \to \infty$, v — номера стоек.

Для сделанного предположения о жесткости стоек система уравнений разделяется. Матрица принимает диагональную форму $\delta_{ij} = 0, \ i \neq j$.

Усилия в стержнях статически неопределимой фермы S_k находим по формуле

$$S_i = S_{i,P} + \sum_{k=1}^{2n} s_{k,i} X_k, \ i = 1, ..., N.$$

Прогиб определяем по формуле Максвелла-Мора

$$\Delta = \sum_{k=1}^{N} \frac{S_k S_k^{(1)} l_k}{E_k F_k}.$$

где $S_k^{(1)}$ — усилия в статически определимой ферме от действия единичной вертикальной силы, приложенной в заданном узле (его номер K можно задать в окне маплета)

Сделанное предположение о жесткости стоек позволяет решить задачу аналитически для произвольного числа панелей n в полупролете. Получена аналитическая формула для нахождения прогиба центральной точки нижнего яруса фермы с четным количеством панелей ($2n$), одинаковыми длинами панелей (a) и высотами стоек (b), рисунок 2.

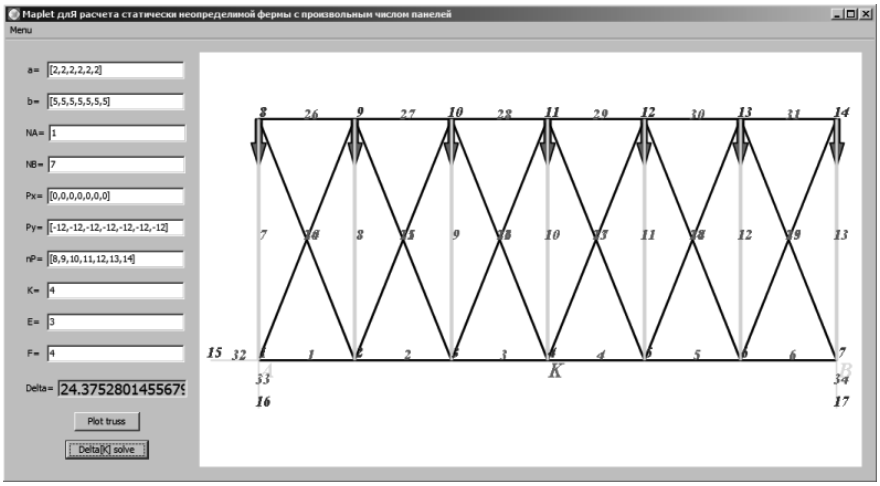

Fig 2. Маплет балочной фермы для контроля аналитической формулы

С использованием индуктивных методов, развитых в системе Maple [1], получена точная формула

$$\Delta = \frac{PL^3}{96nEFb^2} \Big(5n^2 - 2 + 3 \Big(1 + \Big(\frac{2nb}{L} \Big)^2 \Big)^{\frac{3}{2}} \Big),$$

где вертикальная нагрузка P равномерно распределена по верхнему ярусу фермы, $L = 2na$ — пролет фермы, b — высота стоек фермы, E модуль Юнга, F площадь сечения стержней. Найдена оптимальное соотношение высоты и длины фермы. При

$$b/L = \frac{\sqrt[3]{90n^2 - 36}}{6n}$$

прогиб фермы минимальный. Точность последней формулы возрастает с числом панелей n. С разумной точностью формула справедлива при $n > 3$. С увеличением n оптимальное соотношение b/L уменьшается.

Литература

[1] *Кирсанов М.Н.*, Maple и Maplet. Решения задач механики: Учебное пособие/ СПб.: Издательство "Лань 2012.

[2] *Дьяконов В.П.*, Maple 10/11/12/13/14 в математических расчетах. - М.: ДМК-Пресс, 2011

[3] *Потапов В. Д., Александров А. В., Косицын С. Б., Долотказин Д. Б.* Строительная механика: Учебник для вузов. Кн. 1. Статика упругих систем / Под ред. В. Д. Потапова. — М.: Высш. шк., 2007.

Труды Российской летней школы «Математическое моделирование фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики» и Международного семинара «Нелинейные поля в теории гравитации и космологии»

Набор сборника осуществлен в издательском пакете LaTeX2ε в научно-исследовательской лаборатории «Информационных технологий в физико-математическом образовании» Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского Казанского университета.

Разработка авторского LaTeX-стиля оформления - Ю.Г. Игнатьев

Техническая редакция, набор и верстка: Ю.Г. Игнатьев, А.Р. Самигуллина.

Оформление обложки - А.А. Агафонов

В сборнике трудов опубликованы **63** статьи, посвященные современным проблемам теории гравитации и космологии, а также математическому и компьютерному моделированию.

Отпечатано с готового оригинал-макета
в типографии Казанского университета

Подписано в печать 15.08.13. Формат 60×84/8
Печать офсетная. Бумага офсетная. Печ. л. 22. Тираж 125 экз.

Казанский университет
420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, 1/37