ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2016, том 52, № 8, с. 1099–1108

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977

ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ПОРЯДКА И ЕГО СВОЙСТВА

© 2016 г. **В. В. Фомичев, А. В. Краев, А. И. Роговский**

Предлагается обобщение классического понятия относительного порядка для линейных многосвязных динамических систем. Изучаются свойства этого понятия, его связь с нулевой динамикой системы, а также возможность приведения системы к специальному виду.

DOI: 10.1134/S0374064116080124

1. Введение. Рассматривается стандартная линейная стационарная многосвязная система со входом и выходом. В настоящей работе исследуется система, описываемая дифференциальными уравнениями, хотя все основные результаты практически дословно переносятся на системы, описываемые разностными уравнениями.

Указанная система имеет вид

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t), \tag{1}$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times l}$, $C \in \mathbb{R}^{l\times n}$ – известные постоянные матрицы, $x(t)$ – фазовый вектор системы, $y(t)$ – выход, а $u(t)$ – вход. Рассматривается "квадратная" система, т.е. размерности входа и выхода совпадают. Предполагается также, что $\operatorname{rank} B = \operatorname{rank} C = l$.

В теории автоматического управления (особенно при решении задач стабилизации) важную роль играет понятие нулевой динамики, т.е. динамики системы в случае $y(t) \equiv 0$. Это связано с тем, что устойчивость нулевой динамики фактически гарантирует, что в случае стабилизации в нуле выхода система стабилизируется в целом. Для описания нулевой динамики удобно использовать матрицу Розенброка

$$R(s) = \begin{pmatrix} sI - A & -B \\ C & 0 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{C}.$$

Известно (см. [1, с. 67]), что значения s^*, при которых определитель $R(s)$ равен нулю (так называемые инвариантные нули системы), определяют спектр нулевой динамики. Обозначим $\beta(s) = |R(s)|$ (здесь и далее $|A|$ – определитель матрицы A). Полином $\beta(s)$ иногда называют характеристическим полиномом нулевой динамики. Из определения матрицы $R(s)$ следует, что $\deg \beta(s) \le n - l$.

Понятие относительного порядка (ОП) тесно связано с нулевой динамикой системы. Введём это понятие в соответствии с [2, с. 220], учитывая линейность системы.

Определение 1. Вектор $r = (r_1, \ldots, r_l) \in \mathbb{N}^l$ называется вектором ОП системы (1), если

1) $C_iB = 0$, $C_iAB = 0$, $\ldots$, $C_iA^{r_i-2}B = 0$, $C_iA^{r_i-1}B \ne 0$;

2) $|H(r)| \ne 0$,

где C_i – строки матрицы C, $i = \overline{1,l}$,

$$H(r) = \begin{pmatrix} C_1A^{r_1-1}B \\ \ldots \\ C_lA^{r_l-1}B \end{pmatrix}.$$

В условии 1) определения устанавливается, какая производная i-го выхода зависит явно от входов, т.е.

$$y_i(t) = C_ix(t), \quad \frac{dy_i(t)}{dt} = C_iAx(t), \ \ldots, \quad \frac{d^{r_i-1}y_i(t)}{dt^{r_i-1}} = C_iA^{r_i-1}x(t),$$

$$\frac{d^{r_i} y_i(t)}{dt^{r_i}} = C_i A^{r_i} x(t) + C_i A^{r_i - 1} B u(t),$$

а условие 2) означает, что выходы "зависят от всех входов".

В скалярном случае, т.е. при $l = 1$, ОП для системы (1) общего положения (т.е. управляемой и наблюдаемой) определяется однозначно. При этом есть тесная связь между размерностью нулевой динамики и ОП, а именно $\deg\beta(s) = n - r$, где r – ОП при $l = 1$.

В векторном случае ситуация значительно сложнее. В монографии [1, с. 72] и в работах [3–5] показано, что условия 1) и 2) определения 1 могут быть несовместны. При этом невырожденная замена координат не меняет компонент вектора r, а невырожденная замена выходов, вообще говоря, меняет их и в ряде случаев позволяет перейти от тройки $\{A, B, C\}$ к тройке $\{A, B, \tilde{C}\}$, где $\tilde{C} = TC$, $T \in \mathbb{R}^{l\times l}$, $|T| \neq 0$, для которой условия определения 1 будут выполняться. Однако имеются системы (см. [3, 6]), для которых не существует преобразования выходов такого, что условия определения 1 станут совместными.

Выполнение условий определения 1 важно при решении различных задач управления, так как именно в этом (и только в этом) случае система (1) приводится к виду с выделением нулевой динамики (см. [1, с. 91]). Более того, в этом случае размерность нулевой динамики равна $\deg\beta(s) = n - |r|$, где $|r| = r_1 + \ldots + r_l$.

Возникает вопрос, при каких условиях существует преобразование выходов, приводящее систему к виду с совместным определением 1 (далее система с ОП). Исчерпывающий ответ на этот вопрос получен в работе [6], в которой дано обобщение ОП, а именно введены понятия неполного ОП (НОП) и главного НОП (ГНОП). Целью настоящей работы является дальнейшее изучение свойств ГНОП, а также исследование вопроса о приведении системы (1) к специальному виду в случае, когда ГНОП не является ОП.

2. Обобщение понятия ОП. Следуя работе [6], рассмотрим следующее обобщение ОП: так как условия 1), 2) определения 1 могут быть несовместны, то оставим условие 1). Пусть вектор $r = (r_1, \ldots, r_l) \in \mathbb{N}^l$ удовлетворяет условию 1) определения 1. Заметим, что всегда можно перенумеровать выходы так, что компоненты вектора r будут упорядочены по неубыванию. Такой упорядоченный вектор, удовлетворяющий условию 1) определения 1, будем называть НОП.

При этом компоненты вектора r разбиваются на "секции":

$$r = (r_1^{(1)}, r_2^{(1)}, \ldots, r_{n_1}^{(1)}, r_1^{(2)}, \ldots, r_1^{(k)}, \ldots, r_{n_k}^{(k)}),$$

где*) $r_i^{(p)} = r_j^{(p)}$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n_p\}$, $r_i^{(p)} < r_j^{(q)}$ при $p < q$, $i \in \{1, 2, \ldots, n_p\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, n_q\}$. Таким образом, для элементов вектора r вводятся два вида нумерации: обычная (последовательная) и "двойная", при которой каждый элемент определяется номером секции (верхний индекс) и "местом" в ней (нижний индекс). Двойную нумерацию можно применять и к строкам матрицы H (если элемент $r_j^{(i)}$ имеет номер k при обычной нумерации, то $H_j^{(i)} = H_k$), что позволяет говорить о секциях строк этой матрицы. В работе [6] предложен конструктивный алгоритм построения преобразования выходов, обеспечивающего для преобразованной системы линейную независимость строк $\{H_j^{(p)}\}_{j=1}^{n_p}$ при всех $p = \overline{1,k}$ (при этом, конечно, сами значения $r_j^{(p)}$ могут меняться в ходе преобразований). В результате строки каждой секции будут линейно независимы, но все строки матрицы $H(r)$ могут быть линейно зависимы.

Указанный упорядоченный по неубыванию вектор r (при линейной независимости строк матрицы $H(r)$ в каждой p-й секции) будем называть ГНОП. Формально определение ГНОП можно сформулировать, например, следующим образом.

Определение 2. Вектор $r = (r_1, \ldots, r_l) \in \mathbb{N}^l$ называется вектором ГНОП, если выполнены следующие условия:

1) $C_i B = 0$, $C_i AB = 0$, $\ldots$, $C_i A^{r_i-2} B = 0$, $C_i A^{r_i-1} B \neq 0$;

---

*) Здесь и далее (i) в записи $f^{(i)}$ обозначает верхний индекс i; для обозначения i-й производной функции $f(t)$ используется запись $d^i f(t)/dt^i$.

2) $r_i \leq r_{i+1}, \ \ i = \overline{1, l-1}$;

3) для любого набора различных индексов $i_1, \ldots, i_q \in \{1, 2, \ldots, l\}$, таких, что $r_{i_1} = r_{i_2} = \ldots = r_{i_q}$, строки $H_{i_1}, \ldots, H_{i_q}$ линейно независимы.

В работе [6] показано, что данное понятие инвариантно к невырожденным преобразованиям выходов (если под ГНОП понимать вектор ГНОП приведённой системы, т.е. системы, приведённой к виду с выполненными условиями определения 2 с помощью линейных невырожденных преобразований выходов). Кроме того, если для ГНОП все строки матрицы $H(r)$ линейно независимы, то ГНОП является ОП; в противном случае не существует преобразования выходов, приводящего систему к форме с ОП.

Далее исследуем свойства ГНОП, а также возможность приведения системы к специальному виду.

3. Свойства ГНОП. Рассмотрим систему (1). Как отмечено выше, если система имеет вектор относительного порядка r, то размерность нулевой динамики равна $n-|r|$. Результаты, полученные в работе [7], позволяют установить, что данное равенство справедливо только в том случае, когда у системы существует ОП.

Утверждение 1. *Пусть* $\beta(s) \not\equiv 0$, *а* r *– вектор ГНОП системы (1). Тогда вектор* r *является вектором ОП системы (1) в том и только в том случае, когда* $\deg \beta(s) = n - |r|$.

Доказательство. Необходимость доказана в [1, с. 92].

Достаточность. Пусть $\deg \beta(s) = n - |r|$ и r не является вектором ОП в смысле определения 1. Тогда $|H(r)| = 0$. Рассмотрим систему $\tilde{S} = \{A, B, \tilde{C}\}$, где

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} C_1 A^{r_1 - 1} \\ \ldots \\ C_l A^{r_l - 1} \end{pmatrix}.$$

Согласно следствию леммы 4 из работы [7], эта матрица имеет полный ранг, т.е. система $\tilde{S}$ удовлетворяет исходным предположениям (матрицы входов и выходов имеют полные ранги). Заметим, что $\tilde{C}B = H(r) = \tilde{H}(\tilde{r})$, т.е. вектор НОП системы $\tilde{S}$ равен $\tilde{r} = (1, 1, \ldots, 1)$. В то же время, согласно лемме 4 из [7], для характеристического полинома нулевой динамики $\tilde{\beta}(s)$ системы $\tilde{S}$ справедливо равенство $\tilde{\beta}(s) = s^{|r|-l}\beta(s)$.

Так как матрица $\tilde{H}(\tilde{r})$ вырождена и $|\tilde{r}| = l$, то существует невырожденная матрица T такая, что система $\hat{S} = \{A, B, \hat{C} = T\tilde{C}\}$ имеет вектор ГНОП $\hat{r}$, причём $|\hat{r}| > l$. Поскольку $|\hat{r}| > l$, то можно рассмотреть систему $\check{S} = \{A, B, \check{C}\}$ (она будет отличаться от $\tilde{S}$), где

$$\check{C} = \begin{pmatrix} \hat{C}_1 A^{\hat{r}_1 - 1} \\ \ldots \\ \hat{C}_l A^{\hat{r}_l - 1} \end{pmatrix}.$$

Для характеристического полинома нулевой динамики этой системы справедливо равенство

$$\check{\beta}(s) = s^{|\hat{r}|-l}\hat{\beta}(s) = s^{|\hat{r}|-l}|T|\tilde{\beta}(s) = s^{|\hat{r}|-l}|T|s^{|r|-l}\beta(s) = |T|s^{|r|+|\hat{r}|-2l}\beta(s). \tag{2}$$

Полином в правой части равенства (2) имеет степень

$$\deg \beta(s) + |r| - l + |\hat{r}| - l = n - |r| + |r| - l + |\hat{r}| - l = n - l + |\hat{r}| - l > n - l,$$

поскольку $|\hat{r}| > l$. Полученное противоречие доказывает утверждение.

Утверждение 2. *Пусть* $\beta(s) \not\equiv 0$ *и* r *– вектор НОП системы (1). Тогда*

$$\deg \beta(s) \leq n - |r|.$$

Доказательство. Предположим, что $\deg \beta(s) > n - |r|$. Рассмотрим систему

$$\tilde{S} = \{A, B, \tilde{C}\},$$

где

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} C_1 A^{r_1-1} \\ \dots \\ C_l A^{r_l-1} \end{pmatrix}.$$

Тогда $\deg \tilde{\beta}(s) = \deg(s^{|r|-l}\beta(s)) > n - l$. Полученное противоречие доказывает утверждение.

Замечание 1. Из утверждений 1 и 2 следует, что если r – вектор ОП, то $\deg \beta(s) = n - |r|$; если же r – вектор ГНОП, не являющийся вектором ОП, то $\deg \beta(s) < n - |r|$.

Утверждение 3. *Пусть для системы (1) $\beta(s) \not\equiv 0$ и справедливо неравенство*

$$\deg \beta(s) \geq n - l - 1.$$

Тогда существует невырожденная матрица T такая, что система $\{A, B, \tilde{C} = TC\}$ имеет ОП (в смысле определения 1).

Доказательство. Согласно работам [6, 7], в случае $\beta(s) \not\equiv 0$ существует невырожденная матрица T такая, что система $\{A, B, \tilde{C} = TC\}$ имеет вектор ГНОП r. Покажем, что этот вектор является также вектором ОП. По условию $\deg \beta(s) \geq n - l - 1$. В то же время, согласно утверждению 2, $\deg \beta(s) \leq n - |r|$, следовательно, $|r| \leq l + 1$. Если $|r| = l$, то система имеет ОП (в этом случае $r_1 = \ldots = r_l = 1$, следовательно, согласно определению ГНОП, все строки матрицы H линейно независимы). Пусть $|r| = l + 1$ и r не является вектором ОП. Тогда, согласно замечанию 1, $\deg \beta(s) < n - |r| = n - l - 1$, что противоречит условию. Утверждение доказано.

Следствие 1. *Если $\beta(s) \not\equiv 0$ и $l = n - 1$, то существует невырожденная матрица T такая, что система $\{A, B, \tilde{C} = TC\}$ имеет ОП.*

Доказательство. Так как $\beta(s) \not\equiv 0$, то $\deg \beta(s) \geq 0 = n - l - 1 = n - (n-1) - 1$, т.е. условия утверждения 3 выполнены. Следствие доказано.

Таким образом, в случае $\beta(s) \not\equiv 0$ размерность нулевой динамики системы можно оценить, используя вектор ГНОП.

Каноническая форма систем общего вида. Для оценки размерности нулевой динамики в случае, когда для системы (1) $\beta(s) \equiv 0$, необходим другой подход (такие системы существуют, примеры приведены в монографии [1, с. 79] и работах [4, 5]). Покажем, что любая система может быть приведена к виду, который позволяет оценить размерность нулевой динамики.

В данном пункте рассматриваются более слабые ограничения на матрицу выходов C системы (1), а именно предполагается, что $C \neq 0$ (при этом ранг этой матрицы не обязательно равен l). Остальные предположения относительно системы (1) остаются без изменений.

Определение 3. Вектор $\rho = (\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_l) \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^l$, компоненты которого определяются следующим образом:

$$\rho_i = 0, \quad \text{если} \quad C_i A^{q-1} B = 0, \quad q \in \mathbb{N},$$

$$\rho_i = q, \quad \text{если} \quad C_i A^{q-1} B \neq 0 \quad \text{и} \quad C_i A^{j-1} B = 0, \quad \text{для любых} \quad j, \quad j < q, \quad j \in \mathbb{N},$$

назовём вектором вырожденного ОП (ВОП). Здесь, как и ранее, C_i – i-я строка матрицы C.

Ясно, что вектор ВОП определён для любой системы вида (1). Вместе с вектором ВОП аналогично определению 1 рассмотрим следующую матрицу:

$$\mathcal{H}(\rho) = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1 \\ \dots \\ \mathcal{H}_l \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{H}_i = 0$, если $\rho_i = 0$, и $\mathcal{H}_i = C_i A^{\rho_i - 1} B$, если $\rho_i \neq 0$.

Пусть $\rho \neq 0$ (т.е. существует i такое, что $\rho_i \neq 0$) и $\operatorname{rank} \mathcal{H} = d$ (будем предполагать, что $d < l$, так как в случае $d = l$ для системы выполнены условия определения ОП). Покажем, что в этом случае с помощью преобразования фазовых координат (а также, возможно, входов и выходов) система может быть приведена к виду, позволяющему оценить размерность нулевой динамики. Обозначим $\mathbb{I} = \{1, 2, \ldots, l\}$ и рассмотрим следующий функционал, определённый на множестве $\mathbb{I}^d$:

$$\sigma(j_1, j_2, \ldots, j_d) = \sum_{k=1}^{d} \rho_{j_k}, \quad j_k \in \mathbb{I}.$$

Другими словами, $\sigma(j_1, j_2, \ldots, j_d)$ – сумма компонент вектора ВОП с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_d$. Из всех наборов d линейно независимых строк матрицы $\mathcal{H}$ выберем тот, для которого значение функционала σ от индексов этих строк максимально (т.е. максимальна сумма соответствующих компонент вектора ВОП):

$$\max_{\substack{j_1, j_2, \ldots, j_d: \\ \mathcal{H}_{j_1}, \ldots, \mathcal{H}_{j_d} \text{ лин. нез.}}} \sigma(j_1, j_2, \ldots, j_d) = \sigma(\bar{i}_1, \bar{i}_2, \ldots, \bar{i}_d) = \sigma_0. \tag{3}$$

Заметим, что если $j_k = j_q$ в наборе $(j_1, j_2, \ldots, j_d) \in \mathbb{I}^d$, то строки $\{\mathcal{H}_{j_s}\}_{s=1}^d$ заведомо линейно зависимы, так как две из них совпадают. Это означает, что максимум в соотношении (3) достаточно искать лишь на тех наборах из $\mathbb{I}^d$, которые не имеют совпадающих элементов.

Не ограничивая общности, можно считать, что максимум в соотношении (3) достигается на наборе $(1, 2, \ldots, d) \in \mathbb{I}^d$, т.е. строки $\{\mathcal{H}_{\bar{i}_j}\}_{j=1}^d$ из (3) – первые d строк матрицы $\mathcal{H}$ (этого всегда можно добиться, перенумеровав выходы системы). Сделаем замену входов $u(t) = T_1 \tilde{u}(t)$, $T_1 \in \mathbb{R}^{l \times l}$, $|T_1| \neq 0$, где

$$T_1 = (\mathcal{H}^{*^T} (\mathcal{H}^* \mathcal{H}^{*^T})^{-1}; Z).$$

Здесь $\mathcal{H}^* = (\mathcal{H}_1^T, \ldots, \mathcal{H}_d^T)^T$ – матрица, составленная из первых d строк матрицы $\mathcal{H}$ (согласно сказанному выше, она имеет полный ранг), а Z – матрица, столбцы которой образуют базис ядра матрицы $\mathcal{H}^*$. При таком преобразовании матрица B изменяется следующим образом: $\tilde{B} = BT_1$, следовательно, векторы вида $C_i A^p B$ умножаются справа на невырожденную матрицу T_1, т.е. нулевые строки указанного вида переходят в нулевые, а ненулевые – в ненулевые. Это означает, что вектор ВОП системы не изменяется. Матрица $\mathcal{H}$ изменяется следующим образом: $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} T_1$. Учитывая вид матрицы T_1, будем иметь

$$\tilde{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \hdotsfor{7} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \tilde{h}_{d+1,1} & \tilde{h}_{d+1,2} & \ldots & \tilde{h}_{d+1,d} & 0 & \ldots & 0 \\ \hdotsfor{7} \\ \tilde{h}_{l1} & \tilde{h}_{l2} & \ldots & \tilde{h}_{ld} & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Для удобства дальнейшего изложения оставим за преобразованной таким образом системой те же обозначения, что были у исходной (иначе говоря, будем считать, что система $\{A, B, C\}$ имеет матрицу $\mathcal{H}$ вида (4)).

Нетрудно показать, что если строки $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \ldots, \mathcal{H}_d$ линейно независимы, то и строки

$$\begin{gathered} C_1,\ C_1 A,\ \ldots,\ C_1 A^{\rho_1 - 1}, \\ C_2,\ C_2 A,\ \ldots,\ C_2 A^{\rho_2 - 1},\ \ldots, \\ C_d,\ C_d A,\ \ldots,\ C_d A^{\rho_d - 1} \end{gathered} \tag{5}$$

линейно независимы. В самом деле, рассмотрим равную нулю линейную комбинацию указанных строк

$$\sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{\rho_i} \alpha_{ij} C_i A^{j-1} = 0. \tag{6}$$

Умножим это равенство справа на матрицу B, с учётом того, что $C_iA^{j-1}B = 0$ при $j < \rho_i$:

$$\sum_{i=1}^{d} \alpha_{i\rho_i} C_i A^{\rho_i - 1} B = \sum_{i=1}^{d} \alpha_{i\rho_i} \mathcal{H}_i = 0.$$

Отсюда в силу линейной независимости строк $\mathcal{H}_i$ следует, что $\alpha_{i\rho_i} = 0$, $i = \overline{1,d}$. Аналогично, умножая равенство (6) на $AB, A^2B, \ldots, A^{\max\limits_i \rho_i - 1}B$, получаем, что $\alpha_{ij} = 0$, $i = \overline{1,d}$, $j = \overline{1,\rho_i}$. Заметим также, что множество строк (5) содержит ровно σ_0 строк.

Выберем $n - \sigma_0$ строк $V_1, V_2, \ldots, V_{n-\sigma_0}$ так, чтобы система векторов

$$\{\{C_iA^j\}_{j=0}^{\rho_i-1}\}_{i=1}^{d} \cup \{V_k\}_{k=1}^{n-\sigma_0}$$

была линейно независимой и выполнялись равенства

$$V_k B_j = 0, \quad j = \overline{1,d}, \quad k = \overline{1, n-\sigma_0},$$

где B_j – j-й столбец матрицы B. Другими словами, потребуем, чтобы столбцы V_k^T принадлежали ядру матрицы $B^{*T} = (B_1, B_2, \ldots, B_d)^T$. Это возможно, так как среди векторов (5) только $\sigma_0 - d$ принадлежат ядру матрицы B^{*T} (в силу того, что $C_iA^{\rho_i-1}B \neq 0$ и $C_iA^{j-1}B = 0$, $j < \rho_i$, $i = \overline{1,d}$, согласно определению вектора ВОП), а размерность её ядра равна $n - d$ (поскольку это матрица полного ранга согласно исходным предположениям относительно системы (1)).

Рассмотрим следующее преобразование координат:

$$z_j^{(i)}(t) = C_iA^{j-1}x(t), \quad i = \overline{1,d}, \quad j = \overline{1,\rho_i},$$

$$z_j^{(0)}(t) = V_jx(t), \quad j = \overline{1, n-\sigma_0},$$

или $z = Mx$, где

$$M = (C_1^T, \ldots, (C_1A^{\rho_1-1})^T, \ldots, C_d^T, \ldots, (C_dA^{\rho_d-1})^T, V_1^T, \ldots, V_{n-\sigma_0}^T)^T,$$

$$z = (z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, \ldots, z_{\rho_1}^{(1)}, \ldots, z_1^{(d)}, z_2^{(d)}, \ldots, z_{\rho_d}^{(d)}, z_1^{(0)}, z_2^{(0)}, \ldots, z_{n-\sigma_0}^{(0)})^T,$$

при этом

$$\dot z_j^{(i)}(t) = C_iA^{j-1}\dot x(t) = C_iA^jx(t) = z_{j+1}^{(i)}(t), \quad i = \overline{1,d}, \quad j = \overline{1, \rho_i - 1}.$$

Таким образом, преобразованная матрица $\hat A = MAM^{-1}$ примет вид

$$\hat A = \begin{pmatrix} \hat A_{11} & \hat A_{12} & \ldots & \hat A_{1d} & \hat A_1 \\ \hat A_{21} & \hat A_{22} & \ldots & \hat A_{2d} & \hat A_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \hat A_{d1} & \hat A_{d2} & \ldots & \hat A_{dd} & \hat A_d \\ \hat{\hat A}_1 & \hat{\hat A}_2 & \ldots & \hat{\hat A}_d & \hat{\hat A} \end{pmatrix},$$

где

$$\hat A_{ii} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ a_1^{(ii)} & a_2^{(ii)} & a_3^{(ii)} & \ldots & a_{\rho_i}^{(ii)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\rho_i \times \rho_i}, \quad \hat A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 \\ a_1^{(ij)} & \ldots & a_{\rho_j}^{(ij)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\rho_i \times \rho_j} \quad (j \neq i),$$

$$\hat{A}_j = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ 0 & \ldots & 0 \\ a_1^{(j)} & \ldots & a_{n-\sigma_0}^{(j)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\rho_j \times (n-\sigma_0)}, \quad \hat{\hat{A}}_j \in \mathbb{R}^{(n-\sigma_0)\times \rho_j}, \quad \hat{\hat{A}} \in \mathbb{R}^{(n-\sigma_0)\times(n-\sigma_0)}, \quad i,j = \overline{1,l}.$$

Матрица B при рассматриваемой замене переменных примет вид

$$\hat{B} = MB = \begin{pmatrix} C_1 \\ \ldots \\ C_1 A^{\rho_1 - 1} \\ \ldots \\ C_l \\ \ldots \\ C_l A^{\rho_l - 1} \\ V_1 \\ \ldots \\ V_{n-\sigma_0} \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} \hat{B}_{11} & \hat{B}_{12} & \ldots & \hat{B}_{1l} \\ \hat{B}_{21} & \hat{B}_{22} & \ldots & \hat{B}_{2l} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \hat{B}_{d1} & \hat{B}_{d2} & \ldots & \hat{B}_{dl} \\ \hat{\hat{B}}_1 & \hat{\hat{B}}_2 & \ldots & \hat{\hat{B}}_l \end{pmatrix},$$

где

$$\hat{B}_{ii} = (0,0,\ldots,0,1)^T \in \mathbb{R}^{\rho_i}, \quad i = \overline{1,d}, \quad \hat{B}_{ij} = 0 \in \mathbb{R}^{\rho_i}, \quad i \neq j,$$

$$\hat{\hat{B}}_i \in \mathbb{R}^{n-\sigma_0}, \quad \hat{\hat{B}}_i = 0 \quad \text{при} \quad i \leq d,$$

так как $C_i A^{q-1} B = 0$, $q < \rho_i$, $C_i A^{\rho_i - 1} B = \mathcal{H}_i$ и $V_k B_j = 0$, $k = \overline{1, n-\sigma_0}$, $j = \overline{1,d}$. Заметим, что если $d < l$, то $n - \sigma_0 > 0$ (в противном случае последние $l-d$ столбцов матрицы $\hat{B}$ будут нулевыми, что невозможно, поскольку $\operatorname{rank} B = l$). Матрица $\hat{B}^T$ имеет вид (в нём выделена блочная структура):

$$\hat{B}^T = \begin{pmatrix} \boxed{0 \ \ldots \ 0 \ 1} & \ldots & \boxed{0 \ \ldots \ 0 \ 0} & \boxed{0 \ \ldots \ 0} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \boxed{0 \ \ldots \ 0 \ 0} & \ldots & \boxed{0 \ \ldots \ 0 \ 1} & \boxed{0 \ \ldots \ 0} \\ \boxed{0 \ \ldots \ 0 \ 0} & \ldots & \boxed{0 \ \ldots \ 0 \ 0} & \boxed{* \ \ldots \ *} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \boxed{0 \ \ldots \ 0 \ 0} & \ldots & \boxed{0 \ \ldots \ 0 \ 0} & \boxed{* \ \ldots \ *} \end{pmatrix}.$$

Так как выходы исходной системы $y_i(t)$ равны $y_i(t) = C_i x(t)$, то, учитывая равенство $z_1^{(i)}(t) = C_i x(t)$, получаем, что матрица выходов преобразованной системы имеет вид

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} \boxed{1 \ 0 \ \ldots \ 0} & \ldots & \boxed{0 \ 0 \ \ldots \ 0} & \boxed{0 \ \ldots \ 0} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \boxed{0 \ 0 \ \ldots \ 0} & \ldots & \boxed{1 \ 0 \ \ldots \ 0} & \boxed{0 \ \ldots \ 0} \\ \boxed{* \ * \ \ldots \ *} & \ldots & \boxed{* \ * \ \ldots \ *} & \boxed{* \ \ldots \ *} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \boxed{* \ * \ \ldots \ *} & \ldots & \boxed{* \ * \ \ldots \ *} & \boxed{* \ \ldots \ *} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{C}_{11} & \hat{C}_{12} & \ldots & \hat{C}_{1d} & \hat{\hat{C}}_1 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ \hat{C}_{d1} & \hat{C}_{d2} & \ldots & \hat{C}_{dd} & \hat{\hat{C}}_d \\ \hat{C}_{d+1,1} & \hat{C}_{d+1,2} & \ldots & \hat{C}_{d+1,d} & \hat{\hat{C}}_{d+1} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ \hat{C}_{l1} & \hat{C}_{l2} & \ldots & \hat{C}_{ld} & \hat{\hat{C}}_l \end{pmatrix}.$$

Размеры блоков этой матрицы те же, что и в матрице $\hat{B}^T$.

Итак, любая система, имеющая ненулевой вектор ВОП, может быть приведена (с помощью преобразований входов, выходов и фазовых переменных) к виду

$$\begin{gathered}\dot z^{(0)}(t)=\sum_{j=1}^{d}\hat{\hat A}_j z^{(j)}(t)+\hat{\hat A}z^{(0)}(t)+\hat{\hat B}\bar u(t),\\ \dot z_j^{(i)}(t)=z_{j+1}^{(i)}(t),\quad i=\overline{1,d},\quad j=\overline{1,\rho_i-1},\\ \dot z_{\rho_i}^{(i)}(t)=\sum_{j=1}^{d}\sum_{k=1}^{\rho_j}a_k^{(ij)}z_k^{(j)}(t)+\sum_{k=1}^{n-\sigma_0}a_k^{(i)}z_k^{(0)}(t)+\tilde u_i(t),\quad i=\overline{1,d},\\ \tilde y_i(t)=z_1^{(i)}(t),\quad i=\overline{1,d},\quad \bar y(t)=\sum_{j=1}^{d}\hat C^{(j)}z^{(j)}(t)+\hat{\hat C}z^{(0)}(t).\end{gathered}\tag{7}$$

Здесь использованы обозначения

$$\tilde u(t)=(u_1,\ldots,u_d)^T,\quad \bar u(t)=(u_{d+1},\ldots,u_l)^T,\quad \tilde y(t)=(y_1,\ldots,y_d)^T,\quad \bar y(t)=(y_{d+1},\ldots,y_l)^T,$$

$$\hat{\hat C}=\begin{pmatrix}\hat{\hat C}_{d+1}\\ \cdots\\ \hat{\hat C}_l\end{pmatrix},\quad \hat C^{(i)}=\begin{pmatrix}\hat C_{d+1,i}\\ \cdots\\ \hat C_{li}\end{pmatrix},$$

$$z^{(0)}=(z_1^{(0)},\ldots,z_{n-\sigma_0}^{(0)})^T,\quad z^{(i)}=(z_1^{(i)},\ldots,z_{\rho_i}^{(i)}),\quad i=\overline{1,d},\quad \hat{\hat B}=(\hat{\hat B}_{d+1},\hat{\hat B}_{d+2},\ldots,\hat{\hat B}_l).$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Любая система (1), имеющая ненулевой вектор ВОП, с помощью невырожденных преобразований входов, выходов и фазовых координат может быть приведена к виду (7). При этом если* $d=\operatorname{rank}\mathcal H<l$, *то* $n_0>0$, *где* n_0 *– размерность вектора* $z^{(0)}$.

Из системы (7) можно получить оценку размерности нулевой динамики системы. В самом деле, если $\tilde y(t)\equiv 0$, значит, и $z_j^{(i)}(t)\equiv 0$, $i=\overline{1,d}$, $j=\overline{1,\rho_i}$, поскольку $z_j^{(i)}(t)=\dfrac{d^{j-1}\tilde y_i(t)}{dt^{j-1}}$, $j=\overline{1,\rho_i}$. Таким образом, если траектория $z(t)$ принадлежит нулевой динамике, то только компоненты $z^{(0)}(t)$ фазового вектора могут быть отличны от нуля.

Из условия $\bar y(t)\equiv 0$ получим, что $z^{(0)}(t)$ удовлетворяет уравнению $\hat{\hat C}z^{(0)}(t)=0$ для любых t. Таким образом, траектории $z(t)$, принадлежащие нулевой динамике системы (и только они), удовлетворяют системе уравнений

$$z_j^{(i)}(t)=0,\quad i=\overline{1,d},\quad j=\overline{1,\rho_i},\quad \dot z^{(0)}(t)=\hat{\hat A}z^{(0)}(t)+\hat{\hat B}\bar u(t),\quad \hat{\hat C}z^{(0)}(t)=0,\tag{8}$$

из которой следует, что размерность нулевой динамики не превосходит размерности матрицы $\hat{\hat A}$, т.е. $n-\sigma_0$.

Пример 1. Рассмотрим систему $\{A,B,C\}$ со следующими матрицами:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&-2&0&-3\\ 1&1&4&-6&4&-1\\ -1&-1&-3&7&-3&2\\ 0&-1&-3&6&-4&1\\ 1&0&0&1&-2&0\\ 1&1&3&-5&3&-1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\ 0&0&1\\ 1&1&-1\\ 0&1&-1\\ 0&1&0\\ 0&0&1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1&0&1&-1&0&0\\ 0&0&0&1&-1&1\\ 1&0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что для этой системы $\beta(s) \equiv 0$. Найдём её вектор ВОП

$$\begin{gathered} C_1B = 0, \quad C_2B = 0, \quad C_3B = (-1, 0, 0), \\ C_1AB = 0, \quad C_2AB = (0, 1, 0), \quad C_1A^2B = (1, 0, 0), \end{gathered} \tag{9}$$

откуда следует, что $\rho = (3, 2, 1)$. Заметим, что в данном случае вектор ρ также является вектором ГНОП (упорядоченным по убыванию). Ясно, что соответствующая этому вектору матрица $\mathcal{H}(\rho)$ вырождена (это означает, что у системы нет ОП), причём $d = \operatorname{rank} \mathcal{H}(\rho) = 2$.

Из системы (9) следует, что

$$\max_{\substack{j_1, j_2: \\ \mathcal{H}_{j_1}, \mathcal{H}_{j_2} \text{ лин. нез.}}} \sigma(j_1, j_2) = 5,$$

т.е. $\sigma_0 = 5$, причём максимум достигается при $j_1 = 1$, $j_2 = 2$ (в этом случае $\rho_1 = 3$, $\rho_2 = 2$). Таким образом, размерность нулевой динамики системы не превосходит $n - \sigma_0 = 1$.

Рассмотрим строки

$$C_1 = (1, 0, 1, -1, 0, 0), \quad C_2 = (0, 0, 0, 1, -1, 1),$$

$$C_1A = (0, 1, 0, -1, 1, -2), \quad C_2A = (0, 0, 0, 0, 1, 0), \quad C_1A^2 = (0, 0, 1, -1, 0, 0).$$

В соответствии со сказанным выше эти строки линейно независимы. Заметим, что если добавить к данной системе строк строку $V_1 = (0, 0, 0, 0, 0, 1)$, для которой $V_1B_1 = 0$, $V_1B_2 = 0$, то система строк останется линейно независимой.

Применим преобразование координат $z = Mx$, где

$$M = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_1A \\ C_1A^2 \\ C_2 \\ C_2A \\ V_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

После преобразования матрицы системы примут вид (в них выделена блочная структура)

$$\hat{A} = MAM^{-1} \left(\begin{array}{|ccc|cc|c|} \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \right), \quad \hat{B} = MB = \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \right),$$

$$\hat{C} = CM^{-1} = \left(\begin{array}{|ccc|cc|c|} \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \right),$$

т.е.

$$
\begin{gathered}
\dot z_1^{(1)}(t) = z_2^{(1)}(t), \quad \dot z_2^{(1)}(t) = z_3^{(1)}(t),\\
\dot z_3^{(1)}(t) = -z_1^{(1)}(t) + z_3^{(1)}(t) + z_1^{(2)}(t) + 2z_2^{(2)}(t) + \tilde u_1(t),\\
\dot z_1^{(2)}(t) = z_2^{(2)}(t), \quad \dot z_2^{(2)}(t) = z_1^{(1)}(t) - z_3^{(1)}(t) + z_1^{(2)}(t) - z_2^{(2)}(t) - z_1^{(0)}(t) + \tilde u_2(t),\\
\dot z_1^{(0)}(t) = z_1^{(1)}(t) + z_2^{(1)}(t) + 2z_3^{(1)}(t) - z_1^{(2)}(t) + z_2^{(2)}(t) + 2z_1^{(0)}(t) + \bar u_1(t),\\
\tilde y_1(t) = z_1^{(1)}(t), \quad \tilde y_2(t) = z_1^{(2)}(t), \quad \bar y_1(t) = z_1^{(1)}(t) - z_3^{(1)}(t).
\end{gathered} \tag{10}
$$

Если $y(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t)) \equiv 0$, то из системы (10) получаем, что $z_j^{(i)}(t) \equiv 0$, $i = 1, 2$, $j = \overline{1, \rho_i}$. Это означает, что если траектория $z(t)$ принадлежит нулевой динамике, то первые пять компонент вектора $z(t)$ равны нулю для любого t, а последняя удовлетворяет условию

$$z_1^{(0)}(t) = 2z_1^{(0)}(t) + \bar u_1(t).$$

Отсюда следует, что размерность нулевой динамики системы равна единице, что соответствует оценке. При этом нулевая динамика является управляемой через вход $\bar u_1(t)$, т.е. её спектр можно назначить произвольно. Это соответствует тому, что $\beta(s) = 0$, $s \in \mathbb{C}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 15-07-07579, 14-07-00795, 15-07-08198).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильин А.В., Коровин С.К., Фомичев В.В.* Методы робастного обращения динамических систем. М., 2009.
2. *Isidori A.* Nonlinear Control Systems. London, 1995.
3. *Краев А.В.* Об аналоге относительного порядка для линейных динамических MIMO-систем // Докл. РАН. Теория управления. 2014. Т. 454. № 2. С. 152–157.
4. *Ильин А.В., Коровин С.К., Фомичев В.В.* Об уравнениях и свойствах нулевой динамики линейных управляемых статических систем // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42. № 12. С. 1626–1636.
5. *Коровин С.К., Ильин А.В., Фомичев В.В.* Нулевая динамика линейных векторных стационарных систем // Докл. РАН. Теория управления. 2007. Т. 414. № 5. С. 598–604.
6. *Краев А.В., Фомичев В.В., Роговский А.И.* К обобщению относительного порядка // Дифференц. уравнения. 2014. Т. 50. № 8. С. 1128–1132.
7. *Краев А.В., Фомичев В.В., Роговский А.И.* О приведении векторной системы к виду с относительным порядком // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычислит. математика и кибернетика. 2015. № 3. С. 20–26.

Университет электроники Ханчжоу, Китай,
Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова,
Институт проблем управления РАН,
г. Москва

Поступила в редакцию
13.04.2016 г.