УФА XII 2019

ВСЕРОССИЙСКИЙ СЪЕЗД ПО ФУНДАМЕНТАЛЬНЫМ ПРОБЛЕМАМ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

19-24 августа 2019 г.

Уфа, Республика Башкортостан, Россия

СБОРНИК ТРУДОВ

в 4 томах

ТОМ 1

Общая и прикладная механика

Уфа

РИЦ БашГУ

2019

УДК 531/534
ББК 22.2
Д23

XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник трудов в 4 томах.
Д23 **Т. 1: Общая и прикладная механика.—** Уфа: РИЦ БашГУ, 2019.—780 с.

ISBN 978-5-7477-4951-1

DOI: 10.22226/2410-3535-2019-congress-v1

Том 1 содержит расширенные тезисы пленарных докладов съезда, устных и стендовых докладов секции I.

УДК 531/534
ББК 22.2

ISBN 978-5-7477-4951-1

О СУЩЕСТВОВАНИИ ЛИУВИЛЛЕВЫХ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О КАЧЕНИИ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ ПО СФЕРЕ

А.С. Кулешов, В.А. Катасонова

[1]МГУ им. М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва
kuleshov@mech.math.msu.su

Аннотация. Рассматривается задача о качении без проскальзывания динамически симметричного тела, ограниченного поверхностью вращения, по неподвижной сфере. Предполагается, что силы, приложенные к твердому телу, имеют равнодействующую, приложенную к центру масс *G* тела, направленную к центру *O* опорной сферы, и зависящую только от расстояния между точками *G* и *O*. В этом случае решение задачи сводится к интегрированию линейного дифференциального уравнения второго порядка относительно компоненты угловой скорости тела в проекции на его ось динамической симметрии. С помощью алгоритма Ковачича исследуется вопрос о существовании лиувиллевых решений в данной задаче в случае, когда катящееся твердое тело представляет собой неоднородный динамически симметричный шар, параболоид вращения эллипсоид вращения.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 17-01-00123 и № 19-01-00140.

Введение

Задача о качении без скольжения динамически симметричного тела, ограниченного поверхностью вращения, по неподвижной поверхности является одной из классических задач механики неголономных систем. В 1897 году С.А. Чаплыгин в работе [1] установил, что в случае качения тяжелого тела вращения по горизонтальной плоскости решение соответствующей задачи сводится к интегрированию одного линейного дифференциального уравнения второго порядка относительно компоненты ω_3 угловой скорости тела в проекции на его ось симметрии. В1909 году П.В. Воронец в работе [2] показал, что рассуждения С.А. Чаплыгина без изменений переносятся на случай качения тела вращения по поверхности сферы, если приложенные к твердому телу силы имеют равнодействующую, приложенную к центру масс *G* тела, направленную к центру *O* опорной сферы и зависящую только от расстояния между точками *G* и *O*. В этом случае задача также сводится к интегрированию одного линейного дифференциального уравнения второго порядка. Поэтому имеет смысл постановка задачи о нахождении лиувиллевых решений соответствующего уравнения при помощи так называемого алгоритма Ковачича [3].

Движение динамически симметричного шара

Предположим, что движущееся по сфере твердое тело является неоднородным динамически симметричным шаром массы *m* и радиуса *R*, центр масс которого не совпадает с геометрическим центром, а отстоит от него на некоторое расстояние *a* вдоль оси динамической симметрии. Введем систему координат *Gxyz* с началом в центре масс шара и осью *Gz*, направленной вдоль оси динамической симметрии. Относительно выбранной системы координат положение точки контакта *P* шара с опорной сферой определяется радиусом - вектором с компонентами

$$x = R\sin u\cos v,\quad y = R\sin u\sin v,\quad z = R\cos u + a.$$

Здесь *u* и *v* – гауссовы криволинейные координаты точки *P* на поверхности шара. Пусть вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ шара имеет компоненты ω_1, ω_2, ω_3 в проекции на оси системы координат *Gxyz*. Уравнение второго порядка, к которому сводится решение задачи о качении шара по сфере, имеет вид:

$$\frac{d^2\omega_3}{du^2} + d_1\frac{d\omega_3}{du} + d_2\omega_3 = 0, \tag{1}$$

$$d_1 = -\frac{2mR^2\left(A_3 - A_1\right)\sin^2 u\cos u + \left(3 - \cos^2 u\right)mRaA_3 + A_3\left(A_1 + mR^2 + ma^2\right)\cos u}{\left(A_1A_3 + A_1mR^2\sin^2 u + A_3m\left(R\cos u + a\right)^2\right)\sin u},$$

$$d_2 = \frac{mR^2\left(R_1^2 - R^2\right)\left(A_3 - A_1\right)\sin^2 u}{\left(A_1A_3 + A_1mR^2\sin^2 u + A_3m\left(R\cos u + a\right)^2\right)R_1^2}.$$

Заметим, что при выполнении условия $R_1 = R$ (то есть когда радиус шара равен радиусу опорной сферы) уравнение (1) допускает частное решение

$$\omega_3 = \omega_3^0 = \mathrm{const}.$$

Сделаем в уравнении (1) замену независимой переменной по формуле $\cos u = x$. Тогда уравнение (1) перепишется в виде

$$\frac{d^2\omega_3}{dx^2}+b_1\frac{d\omega_3}{dx}+b_2\omega_3=0, \qquad (2)$$

$$b_1=\frac{3(2x-x_1-x_2)}{2(x-x_1)(x-x_2)},\quad b_2=\frac{\left(R_1^2-R^2\right)}{(x-x_1)(x-x_2)R_1^2}.$$

Здесь $b_1, b_2 \in \mathbb{C}(x)$ – рациональные функции переменной x, а x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения

$$A_1A_3+A_1mR^2\left(1-x^2\right)+mA_3\left(Rx+a\right)^2=0\,.$$

При помощи замены переменных

$$y=\omega_3\exp\left(\frac{1}{2}\int b_1(x)\,dx\right),$$

уравнение (2) приводится к виду

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{1}{2}\frac{db_1}{dx}+\frac{b_1^2}{4}-b_2\right)y=S(x)\,y\,, \qquad (3)$$

$$S(x)=\frac{R_1^2+8R^2}{8R_1^2\left(x_1-x_2\right)\left(x-x_1\right)}-\frac{3}{16\left(x-x_1\right)^2}-\frac{R_1^2+8R^2}{8R_1^2\left(x_1-x_2\right)\left(x-x_2\right)}-\frac{3}{16\left(x-x_2\right)^2}.$$

Уравнение (3) является линейным дифференциальным уравнением второго порядка, представленном в виде, удобном для применения алгоритма Ковачича [3]. Воспользуемся этим алгоритмом для нахождения лиувиллевых решений уравнения (3). Непосредственное применение алгоритма Ковачича к уравнению (3) позволяет установить следующий результат.

Теорема 1. *Уравнение (3) имеет лиувиллево решение вида*

$$y=\exp\left(\int\theta(x)\,dx\right),$$

где $\theta(x)$ *– рациональная функция,* $\theta(x)\in\mathbb{C}(x)$*, при выполнении условия*

$$\frac{R}{R_1}=\frac{N}{2},$$

где N *– натуральное число.*

Например, при $R/R_1=1/2$ общее решение уравнения (2) имеет вид

$$\omega_3=\frac{c_1}{\sqrt{x-x_1}}+\frac{c_2}{\sqrt{x-x_2}}\,.$$

При $R/R_1=3/2$ общее решение уравнения (2) имеет вид

$$\omega_3=\frac{c_1\left(4x-x_1-3x_2\right)}{\sqrt{x-x_2}}+\frac{c_2\left(4x-3x_1-x_2\right)}{\sqrt{x-x_1}}\,.$$

Теорема 2. *В общем случае дифференциальное уравнение (3) имеет лиувиллево решение вида*

$$y=\exp\left(\int\theta(x)\,dx\right)$$

где $\theta(x)$ *– алгебраическая функция степени 2.*

Общее решение уравнения (2) при произвольных значениях параметров имеет вид:

$$\omega_3=\frac{c_1\left(\sqrt{x-x_1}+\sqrt{x-x_2}\right)^{\frac{2R}{R_1}}}{\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)}}+\frac{c_2\left(\sqrt{x-x_1}+\sqrt{x-x_2}\right)^{-\frac{2R}{R_1}}}{\sqrt{(x-x_1)(x-x_2)}}\,. \qquad (4)$$

Заметим, что при выполнении условий Теоремы 1 степень выражений, заключенных в формуле (4) в скобки, оказывается целой. Это лишний раз доказывает, что при выполнении условий Теоремы 1 решение уравнения (2) имеет более простой вид, чем в самом общем случае.

Заключение

Таким образом, мы доказали, что все решения уравнения (3) являются лиувиллевыми. Следовательно, задача о движении шара в поле сил с потенциалом $V=V(u)$ интегрируется в лиувиллевых функциях. Аналогично можно рассмотреть задачу о качении по сфере параболоида вращения, эллипсоида вращения и т.д.

Литература

1. С.А. Чаплыгин // Труды отделения физических наук Общества любителей естествознания, антропологии и этнографии. 1897. Т 9. С. 10-16.
2. П.В. Воронец // Киевские Университетские Известия. 1910. Т. 50. С. 101–111.
3. J. Kovacic // Journal of Symbolic Computation. 1986. V. 2. P. 3–43.

Научное издание

XII ВСЕРОССИЙСКИЙ СЪЕЗД ПО ФУНДАМЕНТАЛЬНЫМ ПРОБЛЕМАМ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ И ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

19-24 августа 2019 года
Уфа, Республика Башкортостан, Россия

СБОРНИК ТРУДОВ
Том 1

Публикуется с представленных авторами оригиналов

Лицензия на издательскую деятельность
ЛР № 021319 от 05.01.99 г.

Подписано в печать 24.10.2019 г. Формат 60x84/8.
Усл. печ. л. 44,86. Уч.-изд. л. 46,8.
Изд. № 91. Заказ 403.

Редакционно-издательский центр
Башкирского государственного университета
450076, РБ, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32.