МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ И УПРАВЛЕНИЯ

На правах рукописи

Латонов Василий Васильевич

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ПОЛУАВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ЛИНИЯМИ ВИЗИРОВАНИЯ НА ПОДВИЖНОМ ОСНОВАНИИ

Специальность 01.02.01 —
«Теоретическая механика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:
к. ф.-м. н., доцент
Тихомиров Владимир Викторович
д. ф-м н., профессор
Александров Владимир Васильевич

Москва — 2019

Оглавление

Стр.

Введение 4

Глава 1. Математическая и физическая постановки задачи тестирования качества целеуказания 20

1.1 Описание процесса полуавтоматического управления 20

1.1.1 Описание объектов в задаче 20

1.1.2 Описание задач оператора и инструктора 22

1.2 Математическая постановка задачи 24

1.2.1 Определения 24

1.2.2 Математическая модель видеокамеры типа «стеноп» . 25

1.2.3 Кинематические уравнения линий визирования 28

1.2.4 Моделирование движения линий визирования 29

1.2.5 Задача оптимизации системы стабилизации направляющего цилиндра 32

1.2.6 Задача быстродействия на промежуточном этапе наведения 33

1.2.7 Игровая постановка задач оператора и водителя 33

Глава 2. Задачи минимаксной стабилизации направляющего цилиндра 36

2.1 Математический аппарат в задачах минимаксной стабилизации 38

2.2 Математическая постановка задачи минимаксной стабилизации цилиндра в окрестности программной траектории 41

2.3 Минимаксная стабилизация линейной системы 44

2.3.1 Стабилизация на бесконечном времени 46

2.3.2 Стабилизация на конечном времени 50

2.4 Минимаксная стабилизация билинейной системы при постоянно действующем константном возмущении 52

2.5 Минимаксная стабилизация билинейной системы при постоянно действующем периодическом возмущении 59

2.6 Исследование промежуточного этапа наведения 65

Глава 3. Дифференциальные игры оператора и водителя подвижного основания и разработка математического обеспечения для компьютерного и динамического тренажеров 69
3.1 Игровые задачи целеуказания при движении основания по горизонтальной плоскости 70
3.1.1 Дифференциальная игра качества 72
3.1.2 Дифференциальная игра быстродействия 77
3.1.3 Анализ движения изображающей точки цели на плоскости монитора 79
3.2 Постановка задачи максиминного тестирования качества целеуказания 80
3.2.1 Задача обучения оператора 81
3.3 Постановка задачи максиминного тестирования с тремя угловыми степенями свободы подвижного основания 83
3.3.1 Уравнения движения игроков 83
3.3.2 Постановка игровых задач в чистых и смешанных стратегиях 86
3.4 Вычисление множеств достижимости игроков 88
3.4.1 Определение множества достижимости с помощью пиксельного метода 92
3.4.2 Сведение к геометрическому методу в случае произвольного выпуклого множества достижимости . . 94
3.4.3 Методика вычисления оптимальных стратегий игроков 100
3.5 Компьютерный и динамический тренажеры целеуказания . . 105
3.5.1 Методика вычисления оптимальных стратегий игроков 105
3.5.2 Описание подвижного стенда опорного типа 108
3.5.3 Проведение экспериментов на компьютерном и динамическом тренажерах 110

Заключение 114

Список литературы 119

Введение

Системы целеуказания присутствуют во многих устройствах и приборах, предназначенных для поиска и сопровождения различных целей. Процесс поиска цели, а затем и указания цели часто представим, как изменение направления визира или взора на какой-либо объект. В задачах оптического целеуказания направление взора на объект в пространстве часто называется линией визирования. Линия визирования — это математическая абстракция, которая нужна для представления направления визира на некий объект в произвольной системе координат (подвижной или непдвижной). В системах целеуказания часто возникают математические задачи оптимального управления линиями визирования, а также их стабилизации относительно заданного программного движения.

Системы наведения и стабилизации линии визирования широко применяются в различных областях — от индустрии развлечений до военно-промышленного комплекса. Понятие линии визирования используется в том числе в задачах стабилизации углового положения различных устройств визирования (например, видеокамер) в двухосном кардановом подвесе. Система стабилизации линии визирования камеры, установленной на летательный аппарат при помощи управления, построенного по измерениям угловой скорости летательного аппарата рассматривается в работе [19]. Алгоритм стабилизации линии визирования видеокамеры по изображению, которое с нее поступает, предложен в работе [11]. Алгоритм основан на отслеживании неподвижной в инерциальном пространстве точки по информации, поступающей с видеокамеры. Система стабилизации линии визирования с увеличенными углами вертикального и горизонтального наведения на основе двухосного карданова подвеса рассмотрена в работе [59].

Во многих работах, связанных с отслеживанием движения подвижных аппаратов линия визирования аппарата считается заданной либо в неподвижном пространстве, либо в системе координат, связанной с подвижным объектом.

В работе [8] предложен алгоритм стабилизации ориентации космического летательного аппарата, а также предложен критерий качества удержания направления. Метод отслеживания линии визирования морского транспорт-

ного средства с целью определения траектории его движения предложен в работе [15]. Отслеживание линии визирования происходит в условиях помех различного происхождения.

Задачи управления линией визирования морских транспортных средств, в том числе и подводных исследуются в работе [5]. В этой работе линия визирования жестко связана с корпусом транспортного средства.

Большинство существующих сегодня систем стабилизации линии визирования на подвижном объекте используют навигационную информацию, получаемую с помощью ИНС (Инерциальная Навигационная Система), находящейся на подвижном объекте. В то же время системы управления линией визирования существенно различаются в зависимости от особенностей постановки задачи и подвижного объекта.

В задачах военно-промышленного комплекса системы управления и стабилизации линии визирования часто используются для наведения управляемого оружия на цель. В этих задачах фигурируют две линии визирования — оружия, которое должно быть наведено на заданную цель, и самой цели. Алгоритм отслеживания линии визирования цели для основного боевого танка предложен в работе [12]. Стабилизация линии визирования осуществляется по видеоизображению посредством методов компьютерного зрения, без использования ИНС.

Задача наведения на цель возникает, когда истребитель находится в режиме свободной охоты. Оператор, находящийся на истребителе ищет цель самостоятельно, без указаний извне и наводит линию визирования на самолет или вертолет противника. После этого система автоматического управления наводит оружие на цель по информации, указанной оператором.

Пример задачи управления линией визирования рассмотрен в работе [14], где решается задача поражения цели ракетой. Задача сводится к построению управления радиус-вектором ракеты, приводящего к его совпадению с радиус-вектором цели (летательного аппарата). Управление строится по измерениям углового расстояния между линиями визирования цели и ракеты. Измерения производятся с неподвижной базы, расположенной на земле.

Существует класс работ, посвящённый определению направления человеческого взгляда, что также является разновидностью линии визирования. Так, например, в работе [17] рассматривается методика определения направ-

ления взгляда спортсмена с целью подготовки к выступлению на Олимпийских играх.

Задача определения направления взгляда человека на плоскость монитора с целью улучшения человеко-машинного интерфейса рассмотрена в работе [18]. В этой работе задача решается посредством обработки видеоизображения, поступающего с камеры, снимающей человека.

Системами целеуказания обычно пользуется человек-оператор. Часто задачу целеуказания человеку требуется решать, находясь на некоем подвижном объекте — основании. Это создает дополнительные сложности оператору. В связи с этим необходимо готовить оператора к использованию системы целеуказания в условиях каких-либо помех (например, движения основания). Проведение тестирования операторов особенно актуально для систем с высокой ценой риска, а также с высокой опасностью для жизни. В связи с этим возникает задача обучения оператора решать задачу целеуказания в различных сложных условиях, в том числе и неестественных для человека.

В работе [6] описан тренажер, имитирующий процесс ручного наведения на цель в условиях пребывания на горизонтально вибрирующем подвижном основании. В этой работе представлена разработка этого тренажера. Он включает в себя подвижный стул без спинки, органы управления и экран, на котором изображены два маркера. Одним из маркеров управляет оператор.

В настоящей работе рассматривается подвижный аппарат, называемый основанием, двигающийся по Земле. Подвижным основанием может быть любой колесный или летательный аппарат. Оно совершает поступательные и вращательные движения. В пространстве расположен неподвижный объект, называемый целью.

Внутри основания находятся два человека: водитель, определяющий движение основания и оператор, перед которым стоит задача целеуказания. Основание полностью закрывает оператору вид на окружающую среду. Для того, чтобы оператор видел происходящее снаружи и мог ориентироваться, на подвижном основании установлена видеокамера, а внутри основания перед оператором закреплен монитор, на который поступает изображение с видеокамеры.

Если цель попадает в поле зрения видеокамеры, то оператор видит ее изображение на мониторе. В дальнейшем будем называть ее изображение на мониторе маркером цели. При движении основания изображение цели на

мониторе будет двигаться. Также на мониторе присутствует еще один маркер — маркер оператора. Это указатель небольшого размера, нарисованный поверх изображения, поступающего с видеокамеры. Это виртуальный объект, которым управляет оператор. Этим маркером оператор осуществляет целеуказание — наводит маркер на ту часть изображения, где отображена необходимая ему цель.

На основании закреплен динамический объект, обладающий массой и ненулевым тензором инерции. Этот объект имеет форму цилиндра. В дальнейшем будем его называть направляющим цилиндром (НЦ). Он соединен с основанием при помощи карданова подвеса. Этот цилиндр однородный, и закреплен в подвесе так, что его центр масс неподвижен относительно основания. На кольцах карданова подвеса установлены датчики углов, которые измеряют ориентацию направляющего цилиндра относительно подвижного основания. По информации о положении направляющего цилиндра, на мониторе поверх поступающего с камеры изображения рисуется еще один маркер — маркер направляющего цилиндра.

Направляющий цилиндр — управляемый объект. Движением направляющего цилиндра управляют приводы, моменты сил в которых задает следящая система. Она формирует эти моменты сил в зависимости от положения маркера оператора. Следящая система работает таким образом, чтобы совместить маркер направляющего цилиндра с маркером оператора.

Таким образом, оператор видит на экране три маркера, одним из которых он может управлять сам, и еще одним он управляет посредстом следящей системы.

На основании установлена ИНС, включающая в себя инерциальные датчики и бортовой вычислитель. Информация, поступающая с ИНС может использоваться при решении задач целеуказания и при управлении направляющим цилиндром.

В описанном процессе перед оператором стоит задача сведения маркера оператора с маркером цели в условиях пребывания на подвижном основании. После сведения оператор фиксирует выбранное положение маркера и более им не управляет. Фиксируя положение маркера на изображении цели, оператор выбирает некое желаемое направление в пространстве, связанном с Землей. Далее система автоматически удерживает маркер на изображении цели при помощи информации, поступающей с ИНС. По информации с ИНС

система определяет проекцию желаемого направления на оси подвижной системы координат.

Основная особенность предлагаемой постановки задачи целеуказания в том, что управление маркером осуществляется оператором по информации, поступающей с видеокамеры. При такой постановке задачи маркер оператора не является жестко связанным с видеокамерой. Таким образом, наведение маркера оператора на изображение цели на мониторе эквивалентно выставке линии визирования маркера так, чтобы она была направлена на желаемую цель.

После указания оператором некоего фиксированного направления следящая система перемещает направляющий цилиндр таким образом, чтобы его маркер совпал с маркером оператора. Этот процесс разделяется на две последовательные процедуры: совмещение маркера направляющего цилиндра с маркером оператора и стабилизация маркера направляющего цилиндра в окрестности маркера оператора. Первая процедура всегда осуществляется за конечное и относительно небольшое время, в то время как на вторую может потребоваться много большее время, в том числе и бесконечное.

Таким образом, оператор решает задачу целеуказания (первый этап наведения), а следящая система — задачу наведения направляющего цилиндра (промежуточный этап наведения) и задачу стабилизации направляющего цилиндра (второй этап наведения). Промежуточный этап в дальнейшем будем называть наведением направляющего цилиндра на цель.

В начале описанного процесса маркер оператора, маркер цели и маркер направляющего цилиндра могут находиться в разных местах. Будем считать, что все три маркера могут быть отображены на экране. В зависимости от начального положения этих трех маркеров возможны два принципиально разных случая:

1. Маркер оператора и маркер цели полностью совпадают, или между ними расстояние ничтожно мало. В этом случае от оператора не требуется никаких действий для наведения своего маркера на изображение цели. Требуется лишь наведение и стабилизация линии визирования направляющего цилиндра, за что отвечает следящая система. Будем называть этот режим наведения автоматическим, поскольку в нем принимает участие лишь следящая система;

2. Маркер оператора и маркер цели не совпадают. При такой расстановке маркеров требуется сведение маркера оператора с маркером цели чтобы указать необходимое направление следящей системе для последующей стабилизации направляющего цилиндра. Этот режим наведения будем называть полуавтоматическим, так как в нем сначала принимает участие оператор, а затем следящая система;

В обеих задачах в системе действует возмущающий фактор — движения основания, которые определяют движение изображения цели на мониторе. Для оператора эти движения создают дополнительные сложности при наведении маркера оператора на изображение цели, поскольку в этом случае ему сложнее пользоваться элементами управления.

Также угловые ускорения вызывают смещение эндолимфы в полукружных каналах, что вызывает вестибуло-окулярный рефлекс у оператора. Это может сказаться на процессе наведения как благоприятно, так и создать дополнительные сложности. Так, если процессу наведения на цель предшествует долговременное воздействие быстрых угловых ускорений (например, вокруг вертикали), то глазные яблоки оператора будут поворачиваться вокруг той же оси, вокруг которой шло предшествующее вращение [20]. Для того, чтобы бороться с этим вращением, оператору требуется фокусироваться на цели, неподвижной относительно Земли.

За вестибуло-окулярный рефлекс отвечает периферическая нервная система, в то время как за процесс осознанной фокусировки на цели отвечает центральная нервная система. Процесс подготовки оператора вырабатывает навык подавления негативного влияния вестибуло-окулярного рефлекса и фокусировки на внешней цели.

Для следящей системы управления направляющим цилиндром движения основания также создают помехи, поскольку эта система использует информацию о положении направляющего цилиндра. Эта информация поступает с ИНС и с датчиков углов на кольцах карданова подвеса, а значит может содержать ошибки. Эти ошибки обусловлены в том числе и различными режимами движения основания.

В первой главе показано, как задачи, связанные с управлением маркерами на мониторе, могут быть описаны при помощи векторов. Приводится математическая модель видеокамеры типа «стеноп» и ее связь с понятием линии визирования. Линия визирования — это единичный вектор, направ-

ленный от начала подвижной системы координат либо в сторону точки в пространстве, либо в сторону, определяемую при помощи точки на мониторе. В рассматриваемой задаче определяются три линии визирования.

Цели ставится в соответствие линия визирования — единичный вектор, направленный от начала подвижной системы координат в сторону цели. Маркеру оператора соответствует линия визирования, которая определяет направление в трехмерном пространстве относительно подвижного основания. Управляя маркером оператор изменяет направление, определяемое этой линией визирования. Направляющему цилиндру также ставится в соответствие линия визирования — единичный вектор, параллельный оси его симметрии и направленный в одном из двух направлений, которое будем называть рабочим направлением цилиндра. Совмещение маркеров на мониторе означает совмещение линий визирования.

В этой главе дано математическое описание процесса наведения маркера оператора на изображение цели и описание процесса стабилизации направляющего цилиндра в окрестности заданного оператором положения. Приведены математические формулировки этих задач в терминах оптимального управления. Приведена общая формулировка задачи оптимизации следящей системы, отвечающей за стабилизацию направляющего цилиндра. Описана постановка задачи оптимального по быстродействию управления направляющим цилиндром. Показано, как задача целеуказания сводится к игровой задаче.

Вторая глава посвящена задачам оптимальной стабилизации направляющего цилиндра в окрестности неподвижной точки. Это задачи второго этапа наведения направляющего цилиндра на цель. Исследуется стабилизация при различных режимах возмущения.

Методика определения стабилизирующего управления зависит от функционала, определяющего качество стабилизации, от системы уравнений определяющих движение динамического объекта (они могут быть линейными и нелинейными), а также от класса функций, из которого выбирается стабилизирующее управление.

В работе [60] рассматривается нелинейная система с нелинейным функционалом качества стабилизации. В этой работе функционал качества раскладывается в ряд и берется его приближение. Далее с помощью метода

функций Ляпунова находится так называемое приближенно-оптимальное стабилизирующее управление.

В работе [64] решена задача оптимальной стабилизации с интегральным квадратичным функционалом. Под знаком интеграла в этом функционале стоит квадрат отклонения решения системы уравнений от программной траектории. В этой работе оптимальный закон стабилизирующего управления находится с помощью принципа максимума Понтрягина.

В рассматриваемой задаче основным показателем качества стабилизации является интегральный функционал рассогласования между двумя линиями визирования. Этот функционал учитывает рассогласование линий визирования на большом промежутке времени, поскольку время, отведенное на второй этап управления не ограничено. Оно может быть ограничено лишь условиями задачи стабилизации. Стабилизирующее управление строится в виде обратной связи по фазовым координатам.

Коэффициенты обратной связи находятся как решение задачи минимизации функционала качества стабилизации. Для их вычисления используется методика В.В. Александрова [1], созданная с использованием уравнения А.М. Ляпунова и метода шатров В.Г. Болтянского [30]. Этот метод разработан для вычисления коэффициентов линейной обратной связи в линейных стационарных системах дифференциальных уравнений при интеральном квадратичном функционале качества стабилизации.

Также во второй главе исследована задача промежуточного этапа наведения. Рассмотрена система уравнений, линеаризованная в окрестности произвольной начальной точки. Построено оптимальное управление для редуцированной линеаризованной системы.

В третьей главе решаются задачи первого этапа наведения на цель. Задача наведения маркера оператора на изображение цели — полуавтоматический процесс, поскольку в управлении участвует оператор. В этой задаче оператор изменяет положение маркера при помощи различных органов управления, например, кнопок, мыши или джойстика. В задачах рассматривается кинематическая модель управления маркером оператора, в которой на управления маркером наложены ограничения. Эти ограничения связаны с тем, что оператор не сможет управлять визуальным маркером, если он может двигаться с бесконечно большой скоростью. Также эти ограничения

моделируют физические ограничения скорости движения рук оператора, а также искусственные ограничения системы управления.

Основными показателями качества целеуказания (как для автоматических, так и для полуавтоматических и ручных систем указания цели) являются точность и скорость наведения указателя на цель. Обучение оператора — это наработка его навыков. Это достигается многократным повторением одного и того же упражнения. Это упражнение предполагает, что человек-оператор будет погружаться в условия, идентичные условиям решения реальной задачи. Для погружения оператора в эти условия используются визуальные, динамические и другие тренажеры.

Динамические тренажеры используются для имитации ощущения вектора перегрузки, возникающего при нахождении на подвижном транспортном средстве, а также для имитации угловых ускорений. Эти тренажеры используются при подготовке космонавтов к полетам в космос, а также к подготовке пилотов самолетов и водителей автомобилей.

Таким образом, тренажер — это система, имитирующая условия задачи целеуказания и выставляющая оценку действий человека во время тренировки решения задачи целеуказания на нем.

Максимальная эффективность проводимых тренировок достигается при условии загрузки, близкой к предельной, которую может вынести оператор. Поэтому в настоящей работе рассматривается методика максиминного тестирования, описанная в работах [7; 25], как метод обучения оператора решению задачи. Для этой методики требуется теоретическое вычисление гарантированного показателя результата работы оператора при его оптимальном поведении, ориентированном на наихудшее из возможных возмущений, действующих на систему, в которой работает оператор. Набор параметров, определяющих управление системой со стороны оператора называется управляющей стратегией. Набор параметров, определяющих возмущение, действующее на систему, называется возмущающей стратегией.

Максиминное тестирование — это алгоритм обучения, зарекомендовавший себя в задаче разработки тренажера для подготовки космонавтов к использованию устройства спасения космонавтов на орбите МКС [24].

Для проведения процедуры тестирования по алгоритму максиминного тестирования требуется найти наихудшую для оператора функцию возмущения и наилучшую для него функцию управления. Эта задача формализуется

как игровая; в ней два игрока — оператор и источник возмущений. В диссертации рассмотрены несколько игровых задач преселдования-уклонения, где преследователь — это маркер оператора наведения, а убегающий — изображение цели. Для решения этих задач привелкается математический аппарат теории игр.

Теория игр — это раздел математики, который зародился в начале двадцатого века благодаря трудам Э. Ласкера, Э. Цермело и Э. Бореля. Математический аппарат теории дифференциальных игр в значительной степени представлен в работах Р. Айзекса [13], Н.Н. Воробьева [33] и Л.А. Петросяна [55].

Значительный вклад в теорию игр преследования-уклонения внес Н.Н. Красовский и его ученики [45; 46].

Несколько работ, посвященных играм преследования-уклонения, были опубликованы Л.Д. Берковицом [3; 4]. В его работах рассмотрены вопросы, связанные с играми, в которых функционал, определяющий цену игры, — интегральный.

Множество работ было посвящено дифференциальным играм сотрудниками кафедры исселования операций и кафедры оптимального управления ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова. В частности Н.Л. Григоренко были опубликованы труды [35; 36], а также множество статей. Помимо этого ряд работ и учебных пособий были опубликованы А.В. Кряжимским, Д.В. Камзолкиным, Ю.С. Осиповым и Ю.Б. Гермейером.

В игровых задачах у каждого из участников есть количественная оценка его действий в игре — выигрыш. В рассматриваемой игровой задаче участники играют друг против друга, и выигрыш одного равен выигрышу другого со знаком минус. Эта игра называется антагонистической.

Другая важная подзадача процедуры максиминного тестирования — проверка существования так называемой седловой точки в задаче максиминного тестирования. В работе [51] была представлена классификация процедур тестирования, где тестирования называются «мягкими», если в игровой задаче существует седловая точка. Для обучающегося — оператора — существование седловой точки означает, что он может гарантировать себе некий заранее предписанный результат при некоторой управляющей стратегии независимо от возмущающей стратегии. В этом случае обучение предпо-

лагает освоение испытуемым одной стратегии, которая будет гарантировать ему результат.

Если же седловой точки не существует, значит перед оператором стоит задача, в которой не существует стратегии, гарантирующей оператору заранее предписанный результат. Тестирующие стратегии в этом случае называются «жесткими» стратегиями. В этой главе задача поиска оптимальных функций управления маркером оператора и подвижного основания сводятся к игровой задаче.

В этой главе показано, как игровая задача преследования-уклонения сводится к геометрической игре на плоскости. Для проверки существования седловой точки и нахождения оптимальных стратегий в этой игре требуется определение множеств достижимости игроков, то есть множеств точек, которые могут быть достигнуты каждым из игроков к моменту окончания игры. Задача определения множества достижимости динамической системы решалась многими авторами для разных частных случаев динамических систем. Большинство работ посвящено апроксиммации множеств достижимости при помощи различных численных методов, которые связаны с численными методами интегрирования дифференциальных уравнений. Так, ряд авторов строили множество достижимости динамических систем [52; 54] с помощью пиксельного метода. Несколько работ было опубликовано В.А. Комаровым, в которых были предложены методы оценки множеств достижимости сверху [43; 44].

Цель этой главы — нахождение оптимальных алгоритмов управления маркером оператора и оптимальных движений основания, которые бы мешали оператору наведения. Эти два решения использованы для разработки математического обеспечения тренажеров для подготовки оператора наведения на цель в условии пребывания на подвижном основании. В этой главе описан компьютерный и динамический тренажеры целеуказания, описана процедура эксперимента с компьютерным и динамическим тренажерами, которые были разработаны для подготовки операторов целеуказания. Динамический тренажер включает в себя подвижную платформу опорного типа, используемую в лаборатории МОИДС отдела прикладных исследований механико-математического факультета МГУ. Эта платформа предварительно прошла процедуру идентификации геометрических параметров [31], что позволило реализовать на ней алгоритмы тестирования, полученные аналитиче-

ски в третьей главе диссертации. Значительный вклад в сферу динмиеской имитации и работы с подвижными стендами опорного типа внесли М.П. Юшков [58] и его ученики [37–39].

В работе представлены постановки и решения задач реализации первого и второго этапов наведения направляющего цилиндра на цель. Решены задачи оптимальной стабилизации направляющего цилиндра в различных постановках. Решены задачи оптимального целеуказания с разными моделями подвижного основания и разными функционалами качества целеуказания.

Также в работе изучена проблема разработки математического обеспечения тренажеров оператора целеуказания. Эта проблема рассматривается в связке с задачей целеуказания.

Целью данной работы является:

1. Разработка математичекой модели процесса наведения на цель, расположенной в инерциальном пространстве, относительно подвижного основания.
2. Разработка алгоритмов тестирования на тренажерах наведения на цель в экстремальных условиях. В работе рассматриваются два типа тренажеров:
   - Компьютерный — тренировка оператора, сидящего на неподвижном кресле. Включает только визуальную имитацию;
   - Динамический — тренировка оператора на подвижном стенде опорного типа. Включает визуальную имитацию и имитацию угловых ускорений.
3. Исследование влияния движений подвижного основания на систему стабилизации направляющего цилиндра, установленного на основании.

Для достижения поставленных целей необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Разработать математические модели всех объектов, фигурирующих в физической постановке задачи;
2. Исследовать структуру множества достижимости кинематической модели подвижного основания;
3. Разработать алгоритм быстрого вычисления оптимальных стратегий в антагонистической игре, где движения одного из игроков опи-

сываются системой нелинейных дифференциальных уравнений. Эта задача необходима для разработки тренажера целеуказания, который предполагает быстрый подсчет оптимальных стратегий и выставление оценок испытуемому;

4. Исследовать области устойчивости линейной и билинейной системы дифференциальных уравнений четвертого порядка;
5. Привести линейную систему дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами к стационарному виду;

Научная новизна:

1. Сформулирована математическая модель процесса целеуказания относительно подвижного основания. Движение основания моделируется кинематическими уравнениями. Сформулирована общая математическая постановка задачи целеуказания в рамках описанных моделей. Решение сведено к игровой задаче двух лиц;
2. Решена задача минимаксной стабилизации динамического объекта, установленного на подвижном основании. Рассмотрено влияние начальных отклонений траекторий системы от нуля и разные функциональные классы действующих в системе возмущений: класс постоянных по времени функций и класс периодических функций;
3. Разработан алгоритм быстрого подсчета множества достижимости системы дифференциальных уравнений, на которую наложены геометрческие связи. Полученный алгоритм работает быстрее, чем пиксельный метод;
4. Найдены седловые точки в игровых задачах с невыпуклым множеством стратегий одного из игроков в чистых и смешанных стратегиях;
5. Разработано математическое обеспечение для компьютерного и динамического тренажеров целеуказания. Проведены эксперименты на обоих тренажерах. Проведено сравнение полученных результатов;

Практическая значимость работы заключается в том, что постановка задачи оптимального целеуказания в дальнейшем может быть расширена путем усложнения моделей подвижного основания, маркера оператора и движения цели. Методика решения задачи минимаксной стабилизации, построенная на базе матричного уравнения Ляпунова и методе шатров Болтянского

применена впервые. В дальнейшем могут быть рассмотрены и более сложные задачи минимаксной стабилизации.

Рассматриваемые в диссертации игровые задачи используются в теории тестирования. Эта теория была развита с целью создания математического обеспечения подготовки операторов сложных систем. В дальнейшем полученные результаты могут быть использованы при создании тренажеров целеуказания на других, более сложных стендах опорного типа.

Задача минимаксной стабилизации может быть применена в системах автоматической стабилизации видеокамеры в кардановом подвесе. Также полученный результат применим к задаче стабилизации радиотелескопа при его наведении на космический объект.

Методология и методы исследования. В задачах минимаксной стабилизации динамического объекта относительно подвижного основания функционалом качества наведения берется интеграл от квадрата нормы фазового вектора. Этот функционал учитывает рассогласование линий визирования на большом промежутке времени, поскольку время, отведенное на второй этап управления не ограничено. Стабилизирующее управление строится в виде обратной связи по фазовым координатам.

Коэффициенты обратной связи находятся как решение задачи минимизации функционала качества стабилизации. Для их вычисления используется методика В.В. Александрова, созданная с использованием уравнения А.М. Ляпунова и метода шатров В.Г. Болтянского. Этот метод разработан для вычисления коэффициентов линейной обратной связи в линейных стационарных системах дифференциальных уравнений при интегральном квадратичном функционале качества стабилизации.

При исследовании задачи наискорейшего перевода динамического объекта из одного заданного состояния в другое используется принцип максимума Понтрягина.

Для решения задач минимаксного управления и максиминного тестирования используется математический аппарат теории игр.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Задача оптимального управления относительно подвижного основания линией визирования маркера и задача оптимального уклонения линии визирования цели сводятся к геометрической игре на плоскости;

2. Существует управление, обеспечивающее минимаксную стабилизацию цилиндра в карданове подвесе на подвижном основании в окрестности положения равновесия, причем коэффициенты линейной обратной связи по фазовым переменным могут быть вычислены аналитически как точка минимума кусочно-гладкой функции, если граница области асимптотической устойчивости положения равновесия цилиндра вычислена аналитически;
3. Вычисление множества достижимости управляемой системы, аффинной по управлению и содержащей первые интегралы, сводится к решению двух задач: 1) вычисление проекции множества достижимости на подпространство размерности, совпадающей с размерностью конфигурационного многообразия; 2) построение отображения полученной проекции на дополнение выбранного подпространства до пространства, в котором определен вектор позиционных переменных динамической системы.

Достоверность полученных результатов обеспечивается проведенным численным моделированием каждой из решенных в диссертации задач. Результаты находятся в соответствии с результатами, полученными другими авторами. Разработанное математическое обеспечение для тренажеров целеуказания было опробовано в ходе экспериментов. Проведенные эксперименты продемонстрировали обучаемость операторов целеуказания.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих конференциях:

– Навигация, наведение и управление летательными аппаратами — ФГУП «ГосНИИАС», Россия, Москва, 21-22 сентября 2017.
– IX Международный аэрокосмический конгресс IAC'18 — МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия, Москва, 28-31 августа 2018.
– XII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики — БашГУ, Россия, Уфа, 19-24 августа 2019.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в семи печатных изданиях, четыре из которых опубликованы в рецензируемых журналах, индексируемых в международных базах Scopus, WoS, RSCI, три — в тезисах докладов.

– Латонов В.В., Тихомиров В.В. Управление линией визирования цели по видеоизображению // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2018. — № 1. — С. 53–59.
– Латонов В.В. Программные стратегии тестирования качества управления линией визирования по видеоизображению // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2018. — № 6. — С. 51–56.
– Бурлаков Д.С., Латонов В.В., Чертополохов В.А. Идентификация параметров модели подвижной платформы опорного типа // Фундаментальная и прикладная математика. — 2018. — Т. 22, № 2. — С. 57–73.
– Латонов В.В. Задача минимаксной оптимизации системы стабилизации линии визирования // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2019. — № 6. — С. 64–68.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и двух приложений. Полный объём диссертации составляет 125 страниц, включая 33 рисунка и 0 таблиц. Список литературы содержит 65 наименований.

Глава 1. Математическая и физическая постановки задачи тестирования качества целеуказания

В этой главе даны физическая и математическая постановки задачи целеуказания. Приведен список объектов, фигурирующих в задаче, и математическое описание каждого из них. Сформулирована задача оптимального целеуказания в терминах теории игр. Сформулирована задача оптимизации системы стабилизации.

Глава содержит материалы, изложенные в статье [49] [1], написанной соискателем в соавторстве с Тихомировым В.В., которому принадлежит постановка задачи.

1.1 Описание процесса полуавтоматического управления

1.1.1 Описание объектов в задаче

В задаче рассматривается подвижный аппарат, называемый основанием, двигающийся по Земле. Подвижным основанием может быть любой колесный или летательный аппарат. Оно совершает поступательные и вращательные движения. С Землей связана инерциальная система координат (ИСК), в которой задается положение аппарата. С основанием в свою очередь жестко связана подвижная система координат (приборный трехгранник). В пространстве расположен неподвижный объект, называемый целью.

На основании жестко закреплена видеокамера для фиксации движения цели. Также на основании расположен монитор, на который поступает изображение с камеры. Перед монитором сидит оператор. На основании закреплен объект, обладающий массой и ненулевым тензором инерции. Этот объект в дальнейшем будем называть направляющим цилиндром. Он соединен с основанием при помощи карданова подвеса. Центр масс направляющего цилиндра неподвижен относительно основания. Движением направляющего

[1] Латонов В.В., Тихомиров В.В. Управление линией визирования цели по видеоизображению // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2018. — № 1. — С. 53–59.

цилиндра управляет следящая система, которая формирует управляющие моменты сил в зависимости от положения маркера. Можно считать, что оператор управляет направляющим цилиндром посредством следящей системы. У цилиндра есть рабочее направление вдоль оси симметрии цилиндра.

На основании установлена инерциальная навигационная система для отслеживания движения основания. На кольцах карданова подвеса установлены датчики угла для определения положения направляющего цилиндра относительно подвижного основания.

Также на основании сидит водитель, управляющий движением основания. Он наряду с формой рельефа Земли определяет режим поступательных и вращательных движений основания и, следовательно, движение изображения цели на экране монитора. На рис. 1.1 представлены все объекты, фигурирующие в задаче. Рабочее направление направляющего цилиндра обозначено штрихованным лучом, который имеет начало в центре масс цилиндра.
Таким образом, в задаче фигурируют следующие объекты:

1. Подвижное основание;
2. Земля — инерциальная система координат;
3. Цель (точка E) — неподвижна относительно инерциальной системы координат;
4. Видеокамера фиксации движения цели — жестко зафиксирована на подвижном основании;
5. Экран монитора — жестко зафиксирован на подвижном основании;
6. Оператор по преследованию цели;
7. Маркер на экране монитора (его координаты обозначаются через M);
8. Направляющий цилиндр — тело, обладающее массой и тензором инерции, прикрепленное к подвижному основанию (его координаты обозначаются через P);
9. Водитель — управляет движением основания. В задачах подготовки оператора может выполнять роль инструктора;
10. Бортовые датчики (инерциальные и датчики угла).

На экране монитора поверх изображения, поступающего с видеокамеры, изображен маркер оператора — метка, которой управляет оператор, и маркер направляющего цилиндра — точка, положение которой на мониторе

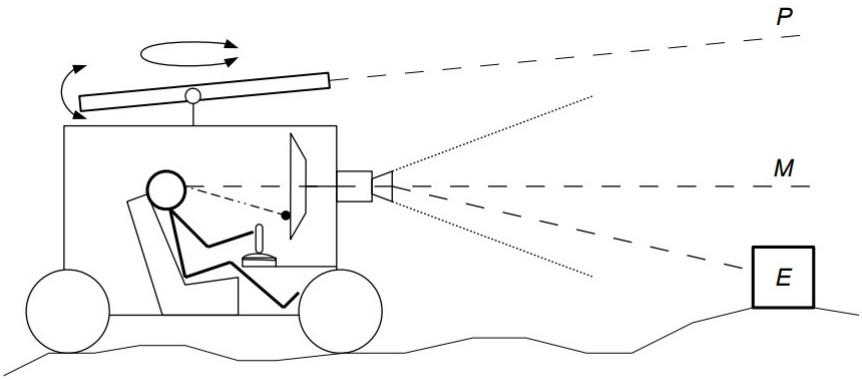


Рисунок 1.1 — Схематичное изображение объектов в задаче

зависит от текущего направления оси симметрии направляющего цилиндра. На рис. 1.2 показано изображение на мониторе, которое видит оператор.

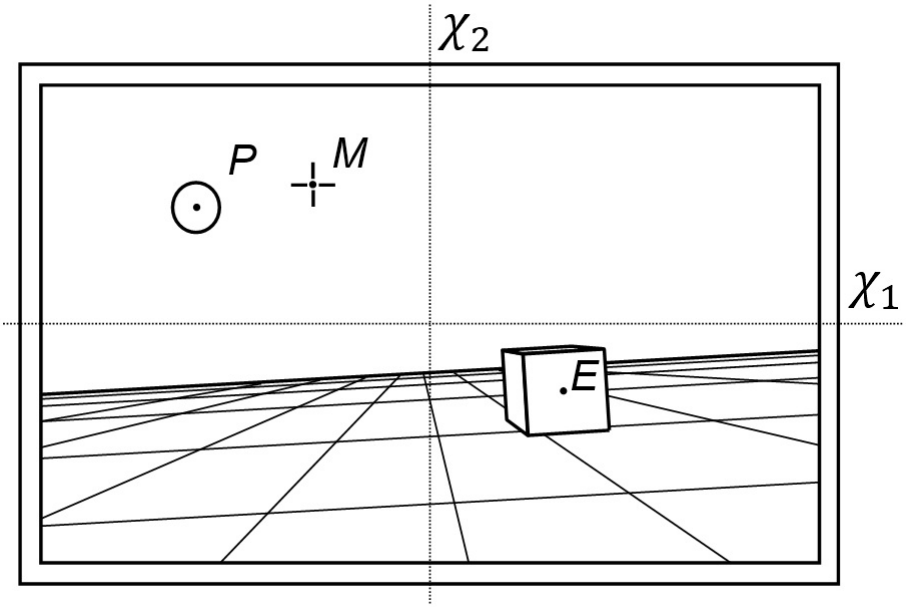


Рисунок 1.2 — Изображение экрана монитора. E — цель, неподвижная относительно Земли, M — маркер оператора, P — маркер направляющего цилиндра

1.1.2 Описание задач оператора и инструктора

Задача оператора заключается в сведении маркера и изображения цели и в последующем поддержании их сведенными в течение определенного времени. Эта задача называется задачей целеуказания и разбивается на две

подзадачи: наведение маркера на цель и стабилизация маркера в установленном относительно изображения цели положении.

Наведение маркера на цель осуществляется по видеоизображению, которое оператор видит на мониторе. Также задача наведения может решаться с использованием информации, получаемой с ИНС. Оператор должен наводить маркер на цель оптимальным образом в условиях существующих возмущений. Возмущениям в этой задаче для оператора является движение основания.

После совмещения маркера оператора с изображением цели оператор фиксирует с помощью маркера цель на мониторе. Далее решается задача наведения маркера направляющего цилиндра на изображение цели и дальнейшего удержания его в этом положении независимо от движений основания. Для этого также может использоваться информация, поступающая с ИНС.

Перед водителем стоят две задачи. В первой задаче водитель рассматривается как инструктор. Задача водителя заключается в управлении основанием таким образом, чтобы создать наименее удобное для оператора движение основания, при котором ему было бы наиболее сложно наводить маркер на цель.

Таким образом, имеет место антагонистическая игра между инструктором и оператором. Каждый из двух игроков выбирает свою стратегию управления и старается добиться максимального для себя результата в игре. У каждого из игроков имеются свои ограничения на управления. Далее маркер будем называть преследователем, а цель — убегающим.

Вторая задача водителя — управление основанием таким оразом, чтобы создать наибольшие помехи для следящей системы, ведущей маркер направляющего цилиндра в след за маркером оператора.

Все задачи, стоящие перед водителем и оператором, интерпретируются как экстремальные задачи. Решения для обоих типов задач водителя могут как совпадать, так и отличаться, в зависимости от функционала, которому он стремится доставить экстремум.

1.2 Математическая постановка задачи

1.2.1 Определения

Основание движется относительно инерциальной системы координат $O\xi_1^*\xi_2^*\xi_3^*$, которую будем в дальнейшем считать связанной с Землей. Движение происходит в поле сил тяжести. Считается, что ось $O\xi_3^*$ направлена вертикально вверх (рис. 1.3).

Введем следующие обозначения:

$C\xi_1\xi_2\xi_3$ — опорная система отсчета, не совершающая вращательных движений и оси которой сонаправлены с осями системы отсчета $O\xi_1^*\xi_2^*\xi_3^*$. Точка C связана с основанием,

$Cz_1z_2z_3$ — приборная система отсчета (приборный трехгранник). Эта система координат жестко связана с основанием и соответственно с осями чувствительности инерциальных датчиков, входящих в состав ИНС. Она совершает поступательные и вращательные движения относительно системы координат $O\xi_1^*\xi_2^*\xi_3^*$. В проекциях на оси приборного трехгранника измеряются угловая скорость основания и внешняя удельная сила, действующая на приведенную чувствительную массу,

$Cz_1'z_2'z_3'$ — модельная система отсчета (модельный трехгранник). В отсутствие ошибок измерений инерциальных сенсоров трехгранник $Cz_1'z_2'z_3'$ совпадает с трехгранником $Cz_1z_2z_3$.

$O\xi_1'\xi_2'\xi_3'$ — модельный опорный трехгранник [34]. В отсутствие ошибок измерений трехгранник $O\xi_1'\xi_2'\xi_3'$ совпадает с трехгранником $C\xi_1\xi_2\xi_3$.

В инерциальной системе отсчёта $O\xi_1^*\xi_2^*\xi_3^*$ расположен неподвижный объект, называемый целью. Цель находится в поле зрения видеокамеры и отображается на мониторе. Размерами цели будем пренебрегать, поэтому считается, что цель — точка.

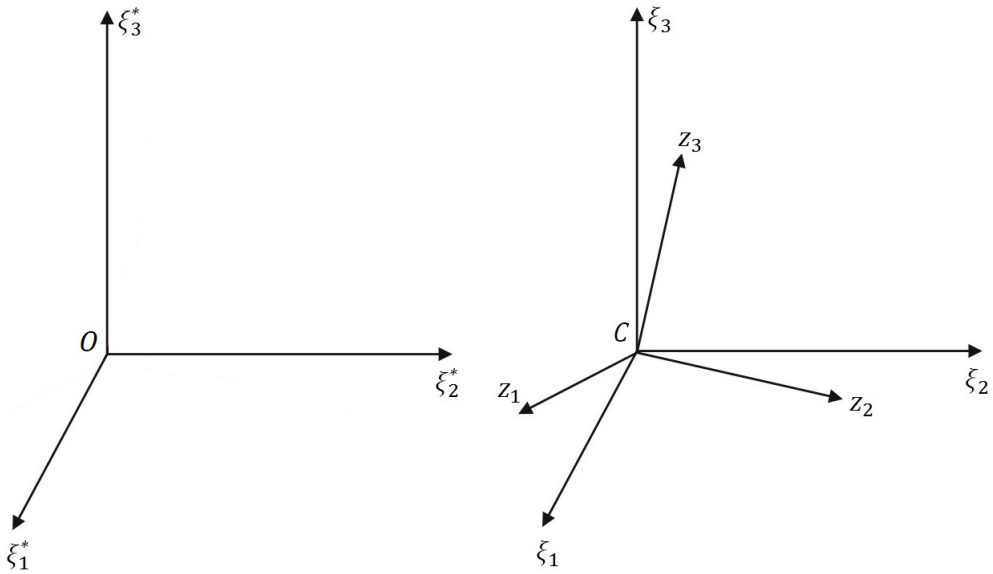


Рисунок 1.3 — $O\xi_1^*\xi_2^*\xi_3^*$ — инерциальная система координат, $C\xi_1\xi_2\xi_3$ — опорный трехгранник, $Cz_1z_2z_3$ — приборный трехгранник

1.2.2 Математическая модель видеокамеры типа «стеноп»

Рассматривается математическая модель видеокамеры типа «стеноп» [10] [10; 21]. Эта модель, представляющая собой идеальную камеру, описывает соотношение между координатами точек в инерциальном пространстве и координатами точек на двумерном изображении, поступающем с видеокамеры. Модель «стеноп» не учитывает искажений изображения, вызываемых линзами камеры, а также погрешность изображения объектов, находящихся не в фокусе.

Пусть точка C — центр проекции всех точек трехмерного пространства, попадающих в поле зрения камеры, на плоскость П. Плоскость П будем называть изображающей плоскостью. Размеры изображающей плоскости определяются характеристиками видеокамеры. Изображение произвольной точки E в трехмерном пространстве строится путем проведения прямой через точку E и центр проекции C. Изображением точки E будет точка $E_{\text{П}}$ пересечения такой прямой с изображающей плоскостью (рис. 1.4). Эта прямая называется линией визирования точки. Она определена для каждой точки в любой системе координат. Для каждой линии визирования определен единичный вектор $\mathbf{e}$, называемый направляющим вектором линии визирования, задающий направление этой линии в соответствующей системе отсчета. Вектор всегда направлен «от начала координат к точке».

Через f обозначим расстояние от изображающей плоскости до центра проекции. Величина f называется фокусным расстоянием видеокамеры. Оптической называется ось камеры, проведенная через центр проекции и перпендикулярная изображающей плоскости. Центром изображения $R_{\text{П}}$ называется точка пересечения оптической оси с изображающей плоскостью. Камера расположена относительно приборного трехгранника $Cz_1z_2z_3$ таким образом, что изображающая плоскость задается в нем уравнением $f - z_2 = 0, f > 0$, а ось Cz_3 направлена вверх относительно камеры (рис. 1.4).

Будем обозначать при помощи индекса П координаты точек на мониторе. На мониторе изображена точка $M_{\text{П}}$. Это маркер, который рисуется поверх поступающего с видеокамеры изображения, и существует исключительно в плоскости монитора. Оператор может управлять движением маркера в плоскости монитора. Маркеру также ставится в соответствие линия визирования. Также на мониторе изображается точка $E_{\text{П}}$ — изображение цели, расположенной в инерциальном пространстве. Таким образом, оператор видит на мониторе изображение цели $E_{\text{П}}$ (при условии, что цель попадает в поле зрения видеокамеры) и маркер $M_{\text{П}}$.

Введем связанную с изображающей плоскостью систему координат $R_{\text{П}}\chi_1\chi_2$, начало которой находится в центре изображения $R_{\text{П}}$, а координатные оси лежат в изображающей плоскости. При этом ось $R_{\text{П}}\chi_1$ сонаправлена с осью Cz_1, а ось $R_{\text{П}}\chi_2$ сонаправлена с осью Cz_3. Соответственно оптическая ось Cz_2 перпендикулярна осям $R_{\text{П}}\chi_1$ и $R_{\text{П}}\chi_2$.

Пусть точка E имеет координаты (z_{1E},z_{2E},z_{3E}) в приборном трехграннике. Поскольку центр проекции расположен в начале координат, направляющий вектор линии визирования точки E будет иметь в приборном трехграннике координаты $(z_{1E},z_{2E},z_{3E})^T$. Координаты изображения этой точки будут выражаться по формулам:

$$\begin{cases} \chi_{1E} = f\frac{z_{1E}}{z_{2E}}, \\ \chi_{2E} = f\frac{z_{3E}}{z_{2E}}. \end{cases} \tag{1.1}$$

Поскольку ориентация линии визирования в приборном трехграннике определяется двумя параметрами, удобно использовать углы для определения направляющего вектора линии визирования цели и маркера в приборной системе координат (рис. 1.4). Через θ обозначается угол между линией визирования и ее проекцией l на плоскость Cz_1z_2. Положительное направление

отсчёта угла — против часовой стрелки вокруг оси $[l \times z_3]$. Через φ обозначается угол между проекцией линии визирования на плоскость Cz_1z_2 и осью Cz_2. Положительное направление отсчета угла — против часовой стрелки вокруг оси Cz_3. Каждой точке (χ_1, χ_2) на изображающей плоскости соответствует единственная пара углов (φ, θ) с точностью до 2π. Таким образом θ — угол возвышения, а φ — угол курса направляющего вектора линии визирования в системе координат $Cz_1z_2z_3$.

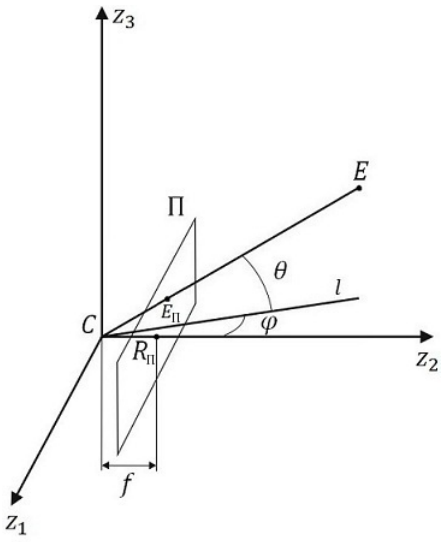


Рисунок 1.4 — Приборный трехгранник $Cz_1z_2z_3$: оптическая ось камеры — Cz_2, изображающая плоскость — П, фокусное расстояние камеры — f, центр изображения — $R_П$, точка в инерциальном пространстве — E, ее изображение — $E_П$, угловые координаты направляющего вектора линии визирования точки E — (φ, θ).

Координаты направляющего вектора линии визирования вычисляются по формулам

$$\begin{cases} z_1 = -\sin\varphi\cos\theta, \\ z_2 = \cos\varphi\cos\theta, \\ z_3 = \sin\theta. \end{cases} \tag{1.2}$$

Система координат на плоскости монитора отождествляется с системой координат на изображающей плоскости (χ_1,χ_2). Изображение на мониторе полностью совпадает с набором точек на изображающей плоскости. Не всякая линия визирования пересекает изображающую плоскость, поскольку ее размеры ограничены. Если точка в инерциальной системе координат нахо-

дится вне поля зрения камеры, то линия визирования этой точки не пересекает изображающую плоскость, и значит на мониторе эта точка не изображена.

Рассмотрим множество линий визирования, направленных в ту часть полупространства, в которой содержится изображающая плоскость камеры, то есть те, у которых $z_2 > 0$. Углы, (φ, θ), задающие эти направления, принадлежат множеству $\{-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$. Для этого множества существует взаимно-однозначное соответствие между сферическими координатами и координатами на изображающей плоскости:

$$\begin{cases} \chi_1 = -f \operatorname{tg} \varphi, \\ \chi_2 = f \frac{1}{\cos \varphi} \operatorname{tg} \theta \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi = \operatorname{arctg} \frac{-\chi_1}{f}, \\ \theta = \operatorname{arctg} \left(\frac{\chi_2}{f} \cos \left(\operatorname{arctg} \frac{-\chi_1}{f} \right) \right) \end{cases} \tag{1.3}$$

Это отображение дает возможность в дальнейшем формулировать все задачи, связанные с точками, изображенными на мониторе, в терминах углов линий визирования.

1.2.3 Кинематические уравнения линий визирования

Через R обозначим матрицу ориентации системы координат $Cz_1z_2z_3$, связанной с основанием, относительно невращающейся системы координат $C\xi_1\xi_2\xi_3$. Пусть некоторый вектор $\mathbf{l}$ имеет постоянные проекции $\mathbf{l}_\xi$ в системе координат $C\xi_1\xi_2\xi_3$. Тогда в системе координат $Cz_1z_2z_3$ его проекции будут $\mathbf{l}_z = R\mathbf{l}_\xi$.

Выведем дифференциальные уравнения, описывающие скорость изменения (χ_{1E},χ_{2E}), при произвольных вращательных движениях основания. Рассмотрим случай отсутствия поступательных движений основания. Через $\omega = (\omega_{z_1}, \omega_{z_2}, \omega_{z_3})$ обозначим проекцию вектора угловой скорости основания на оси системы координат $Cz_1z_2z_3$. Это функция времени. Введем следующие обозначения кососимметрической матрицы:

$$\widehat{\omega}_z = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{z_3} & -\omega_{z_2} \\ -\omega_{z_3} & 0 & \omega_{z_1} \\ \omega_{z_2} & -\omega_{z_1} & 0 \end{pmatrix}$$

Изменение матрицы ориентации R подчиняется уравнению Пуассона [27; 29]:

$$\dot{R} = \widehat{\omega}_z R$$

Следовательно

$$\dot{\mathbf{l}}_z = \widehat{\omega}_z \mathbf{l}_z \tag{1.4}$$

Продифференцируем соотношения (1.1) и подставим в них (1.4). Получим:

$$\begin{cases} \dot{\chi}_1 = f\omega_{z_3} - \chi_2\omega_{z_2} - \frac{\omega_{z_1}}{f}\chi_1\chi_2 + \frac{\omega_{z_3}}{f}\chi_1^2, \\ \dot{\chi}_2 = \omega_{z_2}\chi_1 - f\omega_{z_1} - \frac{\omega_{z_1}}{f}\chi_2^2 + \frac{\omega_{z_3}}{f}\chi_1\chi_2. \end{cases} \tag{1.5}$$

Эти соотношения определяют скорости изменения координат изображающей точки на плоскости в зависимости от угловой скорости основания.

1.2.4 Моделирование движения линий визирования

Обозначим через (φ_M, θ_M) углы курса и возвышения линии визирования маркера, через (φ_P, θ_P) — углы курса и возвышения направляющего цилиндра, а через (φ_E, θ_E) — углы курса и возвышения линии визирования цели. Эти углы задают направление линий визирования в системе координат $Cz_1z_2z_3$.

Через $(\xi_1^*, \xi_2^*, \xi_3^*)$ обозначим радиус-вектор точки C, связанной с основанием. Через $\mathbf{w}$ обозначим вектор управляющих воздействий, который задается водителем-инструктором.

Ориентацию подвижного основания относительно невращающейся системы координат можно задать при помощи трех независимых параметров — углов курса, тангажа и крена, которые в дальнейшем будем обозначать через α, β, γ соответственно. Ориентация подвижного основания определяется цепочкой поворотов:

$$C\xi_1\xi_2\xi_3 \xrightarrow[\xi_3\xi_3']{\alpha} C\xi_1'\xi_2'\xi_3' \xrightarrow[\xi_1'z_1']{\beta} Cz_1'z_2'z_3' \xrightarrow[z_2'z_2]{\gamma} Cz_1z_2z_3 \tag{1.6}$$

Следовательно матрица R ориентации системы координат $Cz_1z_2z_3$, связанной с основанием, относительно невращающейся системы координат $C\xi_1\xi_2\xi_3$ имеет вид:

$$R = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma & \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma & -\cos\beta\sin\gamma \\ -\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\beta & \sin\beta \\ \cos\alpha\sin\gamma + \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma & \sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma & \cos\beta\cos\gamma \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

Таким образом положение основания определяется вообще говоря шестью координатами: ξ_1^*, ξ_2^*, ξ_3^*, α, β, γ. Основание перемещается по действием управлений $\mathbf{w}(\cdot) \in W = \{PC : |w_i| < w_i^{\max}, i = 1,...,n\}$. Функции w_i являются кусочно-непрерывными. В модель движения основания вообще говоря могут входить аэродинамические силы и силы, описывающие взаимодействие основания с Землей. Также обычно на угловые координаты и скорости накладываются ограничения, что позволяет исключить переворачивания основания «вверх ногами» и бесконечно большие скорости. В дальнейшем в работе будут рассмотрены различные кинематические модели подвижного основания.

Цель неподвижна относительно инерциального пространства, поэтому положение ее линии визирования в системе координат $Cz_1z_2z_3$ определяется только движением основания.

Модель управления угловыми параметрами линии визирования маркера оператора — кинематическая:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_M = u_1, \\ \dot{\theta}_M = u_2, \end{cases} \tag{1.8}$$

$$\varphi_M(t_0) = \varphi_M^0, \quad \theta_M(t_0) = \theta_M^0,$$
$$u_1(\cdot),u_2(\cdot) \in U_M = \{PC : |u_1| \le u_1^{\max},|u_2| \le u_2^{\max}\}.$$

Через U_M обозначено функциональное множество, из которого выбирается управление маркером. Оператор может управлять маркером посредством различных интерфейсов. Это может быть джойстик, компьютерная мышь или просто панель, по которой опреатор может водить пальцем. Таким образом ограничения на управления маркером имеют смысл физических

ограничений оператора, в частости его способность быстро водить рукой по тачпаду или двигать мышью.

Выражения (1.5) могут интерпретироваться, как скорости изменения координат маркера оператора. В этом случае угловые скорости в правой части соотошений интерпретируются как скорости некой системы координат, связанной с линией визирования маркера оператора, относительно системы координат, связанной с основанием. Уравнения (1.8) определяют угловую скорость линии визирования маркера в системе координат, связанной с основанием $\omega_M = (u_2 \cos\varphi_M, u_2 \sin\varphi_M, u_1)$. Подставим эту угловую скорость в выражения (1.5):

$$\begin{cases} \dot{\chi}_{1M} = f u_1 - u_2 \chi_{2M} \sin\varphi_M - \frac{u_2 \cos\varphi_M}{f} \chi_{1M}\chi_{2M} + \frac{u_1}{f}\chi_{1M}^2, \\ \dot{\chi}_{2M} = u_2 \chi_{1M} \sin\varphi_M - f u_2 \cos\varphi_M - \frac{u_2 \cos\varphi_M}{f} \chi_{2M}^2 + \frac{u_1}{f}\chi_{1M}\chi_{2M}. \end{cases} \tag{1.9}$$

Эти выражения описывают скорость движения маркера оператора в плоскости монитора в зависимости от управлений, формируемых оператором.

Движение направляющего цилиндра обусловлено управлением, которое реализуется путем подачи управляющих моментов сил, выбираемых из некоего функционального множества. Эти моменты обеспечивают перемещение направляющего цилиндра вслед за маркером, поэтому они зависят во-первых от движений маркера M, задаваемых оператором, а во-вторых от устройства приводов, на которые подаются управляющие моменты. Также на движение цилиндра влияют возмущающие движения самого основания, так как на цилиндр могут вообще говоря действовать силы со стороны основания, вызванные этими движениями. Например, при наличии сухого или вязкого трения в подвесе, движение основания влечет за собой движения цилиндра. В работе будет рассмотрена система динамических уравнений, определяющая движение цилиндра.

Обозначим через $F \in \mathbb{R}^2$ множество угловых параметров линии визирования, при которых линия визирования пересекает изображающую плоскость (размеры изображающей плоскости определяются параметрами камеры). Если линия визирования цели пересекает изображающую плоскость, то цель видна на мониторе. Пусть длина изображающей плоскости равна $2a$, а высота равна $2b$. Из уравнений (1.1) определяются соотношения, задающие множество F:

$$F = \{|\theta| \leq \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{f}\cos\varphi\right),\ |\varphi| \leq \operatorname{arctg}\frac{a}{f}\}.$$

Оператор работает в приборной системе координат и на мониторе видит изображение цели E_{Π}. Маркер, отображаемый на мониторе, также можно определить как точку, лежащую на изображающей плоскости, с координатами (χ_{1M},χ_{2M}). В системе координат $Cz_1z_2z_3$ зададим линию визирования маркера, направляющий вектор которой задается координатами $(\chi_{1M}, f, \chi_{2M})^T$. Маркер всегда лежит в плоскости монитора, следовательно, его линия визирования всегда пересекает изображающую плоскость.

1.2.5 Задача оптимизации системы стабилизации направляющего цилиндра

Второй этап процесса наведения — стабилизация направляющего цилиндра в окрестности направления, которое постоянно в системе координат, связанной с Землей. Стабилизация требуется если начальное положение направляющего цилиндра имеет незначительное начальное отклонение от программного направления, а также для нивелирования возмущающих эффектов. В связи с этим возникает задача синтеза оптимального стабилизирующего управления, рассчитанного на наихудшие возмущения и наихудшие начальные отклонения фазовых координат. При этом ресурсы стабилизирующего управления ограничены. Будем это называть задачей минимаксной оптимизации системы стабилизации направляющего цилиндра.

Через $\delta u \in U$ обозначим стабилизирующее управление, выбираемое из функционального множества U, а через $\delta w \in W$ обозначим возмущения, которые вызывают отклонения направляющего цилиндра от программного направления. Во множество W включаются как возмущения начальных отклонений, так и функции времени. Введем функционал качества стабилизации $\Phi(\delta u, \delta w)$.

Требуется найти стабилизирующее управление, которое обеспечивало бы минимальное значение функционала качества стабилизации при возмущениях, стремящихся его максимизировать:

$$\max_{\delta w \in W} \Phi(\delta u, \delta w) \to \min_{\delta u \in U},$$

1.2.6 Задача быстродействия на промежуточном этапе наведения

Задача промежуточного этапа наведения заключается в поиске такого управления, которое обеспечивало бы наиболее быстрое совмещение оси направляющего цилиндра с направлением, которое оператор наведения зафиксировал на первом этапе наведения. Рассматривается функционал быстродействия $J_t = t_1 - t_0$. В этой задаче задаются начальные и конечные условия на фазовые переменные. Требуется найти управление $u \in U$ направляющим цилиндром, которое доставляло бы минимум функционалу быстродействия, то есть

$$J_t \to \min_{u \in U},$$

1.2.7 Игровая постановка задач оператора и водителя

Первый этап процесса наведения требует участия оператора. Процесс наведения маркера оператора на изображение цели усложняется для оператора движением основания, которое ему заранее неизвестно и которым он не может управлять. В худшем случае можно считать, что возмущения процесса наведения, связанные с движением основания, играют против оператора. Источником возмущения служит водитель, задающий движение основания. В связи с этим возникает задача определения управления, которое бы обеспечивало оптимальное наведение маркера оператора на цель при наихудших возмущениях. Будем называть это задачей нахождения минимаксного управления.

В этом процессе участвует человек — оператор. Его можно подготовить к решению задачи целеуказания, если перед этим провести ряд тренировок. Для проведения тренировок целеуказания требуется определить такие возмущения, которые бы обеспечивали наихудший результат целеуказания при оптимальном поведении оператора. Именно такие возмущения требуется имитировать при тестировании для наилучшей подготовки оператора

целеуказания. В связи с этим возникает задача нахождения максиминных возмущений.

Эти две задачи неразрывно связаны друг с другом, и могут быть представлены в виде одной игровой задачи.

Определение 1.1. Система $\Gamma = \Gamma(U, W, J)$, где U, W — непустые функциональные множества, и функция $J : U \times W \to \mathbb{R}$ называется антагонистической игрой в нормальной форме [55].

Процесс наведения маркера оператора на цель интерпретируется как антагонистическая игра двух лиц. Первый игрок — это оператор, для которого U — множество управлений, которые доступны ему для наведения маркера на цель. Второй игрок — это водитель основания, который представляет источник возмущений в системе. Функционал J — это функционал выигрыша обоих игроков, который определен на множестве всех пар стратегий $U \times W$. Так при выборе игроками стратегий $u \in U$ и $w \in W$ у первого игрока выигрыш будет равен $J(u, w)$, а у второго $-J(u, w)$. Игроки одновременно и независимо друг от друга выбирают стратегии, после чего определяется выигрыш каждого из них.

Цель каждого из игроков — максимизировть свой выигрыш, однако величина выигрыша каждого из игроков зависит не только от его выбора, но и от того, как будет действовать его противник. Поэтому естественным образом возникает задача вычисления оптимальной стратегии для игрока в предположении, что противник действует оптимально. Игровая задача состоит в вычислении стратегий для обоих игроков, которые были бы оптимальны в смысле заданного функционала J.

Поскольку тренажер предполагает обучение оператора оптимально наводить маркер на цель в наихудших для этого условиях, необходимо вычислить оптимальную стратегию для оператора, которой его в дальнейшем будет необходимо обучить, а также оптимальную стратегию его противника — водителя, чтобы использовать эту стратегию в процессе обучения. Поэтому решение игрвой задачи — это решение двух задач оптимизации. В игровой задаче оператор стремится минимизировать функционал:

$$\max_{w \in W} J(u,w) \to \min_{u \in U},$$

в свою очередь возмущение стремится максимизировать функционал:

$$\min_{u \in U} J(u,w) \to \max_{w \in W}.$$

Определение 1.2. Пара стратегий (u^*, w^*) называется седловой точкой игры $\Gamma(U, W, J)$, если $\forall u \in U, \forall w \in W$ выполняются соотношения:

$$J(u^*, w) \leq J(u^*, w^*) \leq J(u, w^*)$$

Для седловой точки выполняется свойство [55]: $\max\limits_{w \in W} \min\limits_{u \in U} J(u, w) = \min\limits_{u \in U} \max\limits_{w \in W} J(u, w)$. Существование седловой точки означает, что первый игрок может гарантировать себе выигрыш не хуже, чем $J(u^*, w^*)$, если будет придерживаться стратегии u^*. В то же время второй игрок может гарантировать себе выигрыш $-J(u^*, w^*)$, если не будет отклоняться от стратегии w^*. Седловая точка важна для задач тестирования, поскольку ее существование гарантирует, что оператор будет обучаться потенциально выполнимому заданию, и в ходе обучения будет получать объективную оценку своих действий.

Глава 2. Задачи минимаксной стабилизации направляющего цилиндра

В этой главе рассматриваются задачи минимаксной стабилизации направляющего цилиндра в окрестности направления, неподвижного относительно Земли. Оператор наведения управляет маркером, указывая с его помощью следящей системе желаемое направление оси симметрии цилиндра. Следящая система управляет цилиндром таким образом, чтобы он перемещался вслед за маркером до полного совпадения. Он не может перемещаться мгновенно, поэтому следует за маркером с некоторым отставанием. После того, как следящая система обеспечивает попадание оси симметрии направляющего цилиндра в ε-окрестность линии визирования маркера оператора, включается режим стабилизации.

Следящая система реализует стабилизирующее управление направляющим цилиндром в виде обратной связи, то есть предполагается, что есть измерительные устройства, которые в каждый момент времени выдают измерения рассогласования линии визирования маркера и оси симметрии направляющего цилиндра. В этой главе предполагается, что маркер наведен на цель и оператор зафиксировал желаемое направление.

В первой части этой главы приводится математический аппарат, используемый при решении задач минимаксной стабилизации решения системы линейных дифференциальных уравнений, содержащих неоднородные по стабилизирующему управлению части. Критерием качества стабилизации берется интегральный квадратичный функционал. Стабилизирующее управление строится в виде линейной обратной связи. Приводится методика вычисления оптимального управления, обеспечивающего минимальное значение функционала качества стабилизации при наихудших возмущениях, действующих в системе. При вычислении наихудших возмущений интегральный функционал сводится к терминальному функционалу. Методика поиска управления, обеспечивающего оптимальную стабилизацию, разработана В.В. Александровым [1].

Первая часть главы содержит определения и теоремы, изложенные в статье [1] [1], одним из авторов которой является В.В. Александров.

Во второй части излагается постановка задачи минимаксной стабилизации направляющего цилиндра в окрестности неподвижного направления. Выводятся уравнения Лагранжа второго рода, описывающие движения направляющего цилиндра. Решаются три задачи минимаксной стабилизации.

В первой задаче рассматривается система линейных дифференциальных уравнений, полученная путем линеаризации уравнений Лагранжа второго рода в окрестности неподвижной точки. Рассмотрены возмущения по начальным условиям системы. В этой задаче рассмотрены два разных функционала качества стабилизации системы — на бесконечном времени и на конечном. Для случая бесконечного времени получены аналитические формулы наихудших возмущений, которые могут возникнуть в системе.

Во второй и третьей задачах уравнения содержат билинейные по координатам и возмущениям части. В системе действуют постоянные возмущения. Во второй задаче постоянно действующие возмущения выбираются из множества константных функций. Эта задача решена с помощью теоремы Харитонова, из которой определяются условия устойчивости системы линейных дифференциальных уравнений с параметрами. Приведен пример решения этой задачи при заданных численных параметрах. В третьей задаче постоянно действующие возмущения выбираются из множества периодических функций. В этой задаче нестационарная система линейных дифференциальных уравнений приведена к стационарному виду с помощью преобразования Ляпунова.

Во всех задачах коэффициенты обратной связи находятся из области устойчивости, которая строится с учетом требований к запасу устойчивости решений системы уравнений, описывающей колебания направляющего цилиндра.

В третьей части этой главы исследуется задача промежуточного этапа управления направляющим цилиндром, который предшествует задаче стабилизации.

[1] Alexandrov V.V., Bugrov D.I., Corona M.G., Tikhonova K.V. Tent-method application for minmax stabilization and maxmin testing // IMA Journal of Mathematical Control and Information. — 2017. — Vol. 34, no. 1. — P. 15–25.

Глава содержит материалы, изложенные в статье [47] [2], написанной соискателем.

2.1 Математический аппарат в задачах минимаксной стабилизации

Методика минимаксной стабилизации В.В. Александрова разработана на базе следующего математического аппарата. Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = A_c x + bu, \tag{2.1}$$

где $det(b, A_c b, A_c^2 b, ..., A_c^{n-1} b) \neq 0$, и матрица A_c и вектор b — независимые от времени функции, управление представляется в виде обратной связи $u = \mathbf{k}^T x$, где $\mathbf{k}$ — это упорядоченный набор коэффициентов обратной связи. Величина $\mathbf{k}$ может быть в том числе и матричной. Будем использовать интегральный квадратичный функционал качества стабилизации:

$$\Phi(\mathbf{k}, x(t_0)) = \int_{t_0}^{t_1} x^T S_1 x dt,$$

где S_1 — симметричная положительно определенная матрица, а через Q_0 обозначено выпуклое односвязное компактное множество, из которого могут быть выбраны коэффициенты $\mathbf{k}$. Множество Q_0 содержит только те коэффициенты $\mathbf{k}$, при которых решение системы (2.1) ассимптотически устойчиво (в противном случае функционала $\Phi(\mathbf{k}, x(t_0))$ может не существовать). Введем обозначение $A(\mathbf{k}) = A_c + b\mathbf{k}^T$. Чтобы свести интегральный функционал к терминальному, введем матрицу $H(\mathbf{k})$:

$$H(\mathbf{k}) = \int_{t_0}^{t_1} e^{A^T(\mathbf{k})t} S_1 e^{A(\mathbf{k})t} dt$$

Матрица $H(\mathbf{k})$ — это решение матричного уравнения Ляпунова [57]:

[2] Латонов В.В. Задача минимаксной оптимизации системы стабилизации линии визирования // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2019. — № 6. — С. 64–68.

$$A^T(\mathbf{k})H(\mathbf{k}) + H(\mathbf{k})A(\mathbf{k}) = -S(\mathbf{k}), \tag{2.2}$$

где $S(\mathbf{k}) = S_1 - e^{A_c^T(\mathbf{k})t_1} S_1 e^{A_c(\mathbf{k})t_1}$. Если $t_1 = \infty$, то матрица $H(\mathbf{k})$ определена неотрицательно. Если при этом $\mathbf{k}$ принадлежит области асимптотической устойчивости, построенной с учетом требований к запасу устойчивости, то $H(\mathbf{k})$ определена положительно, и ее собственные значения — действительные числа. В этом случае $\int_{t_0}^{t_1} x^T S_1 x dt = x^T(t_0)H(\mathbf{k})x(t_0)$. При $t_1 < \infty$, то необходимо проверять положительную определенность матрицы $H(\mathbf{k})$ отдельно.

Через μ_i обозначим i-е собственное значение матрицы $H(\mathbf{k})$. Максимум по шару $||x(t_0)|| \leq 1$ функционала $\Phi(\mathbf{k}, x(t_0))$ равен его максимуму по сфере $||x(t_0)|| = 1$, поскольку квадратичная функция $x^T(t_0)H(\mathbf{k})x(t_0)$ — выпуклая. Максимум этой функции совпадает с максимальным собственным значением матрицы $H(\mathbf{k})$, а аргумент $x^0(t_0)$, на котором достигается максимальное значение функции — это собственный вектор, соответствующий максимальному собственному значению матрицы $H(\mathbf{k})$. Таким образом $\max\limits_{||x(t_0)||=1} x^T(t_0)H(\mathbf{k})x(t_0) = \max\limits_{1\leq i\leq n} \mu_i$, где n — размерность матрицы $H(\mathbf{k})$. Воспользуемся концепцией активных индексов, предложенной в работе [1]: введем множество индексов $J(\mathbf{k})$ такое, что $j \in J(\mathbf{k})$ если $\mu_j = \max\limits_{1\leq i\leq n} \mu_i$. Абсолютный минимум функции $\max\limits_{||x(t_0)||=1} \Phi(\mathbf{k}, x(t_0))$ по переменным $\mathbf{k}$ на множестве Q_0 может находиться либо внутри множества Q_0, либо на его границе.

Если внутренняя точка $\mathbf{k}^0$ множества Q_0 является точкой локального минимума функционала $\max\limits_{||x(t_0)||=1} \Phi(\mathbf{k}, x(t_0))$, то она удовлетворяет необходимым условиям локального минимума: $\frac{\partial \mu_i(\mathbf{k}^0)}{\partial \mathbf{k}} = 0$. Эти условия позволяют найти точки, подозрительные на минимум, если на область поиска не наложены никакие ограничения. Для граничных точек необходимое условие имеет более сложный вид.

Сформулируем необходимые условия локального минимума для точек, лежащих на границе множества. Пусть в пространстве параметров $\mathbf{k}$ заданы m гладких функций $f_1(\mathbf{k})$,...,$f_m(\mathbf{k})$. Пусть граница множества Q_0 задается уравнениями $f_1(\mathbf{k}) = 0$,..., $f_m(\mathbf{k}) = 0$. Рассмотрим задачу минимизации функции $f_0(\mathbf{k})$ в n-мерном евклидовом пространстве на множестве Q_0.

Введем обозначения: $\Omega_0(\mathbf{k}^0) = \{\mathbf{k}^0\} \cup \{\mathbf{k} : f_0(\mathbf{k}) < f_0(\mathbf{k}^0)\}$, $\Omega_i = \{\mathbf{k} : f_i(\mathbf{k}) = 0\}, i = 1,...,m$.

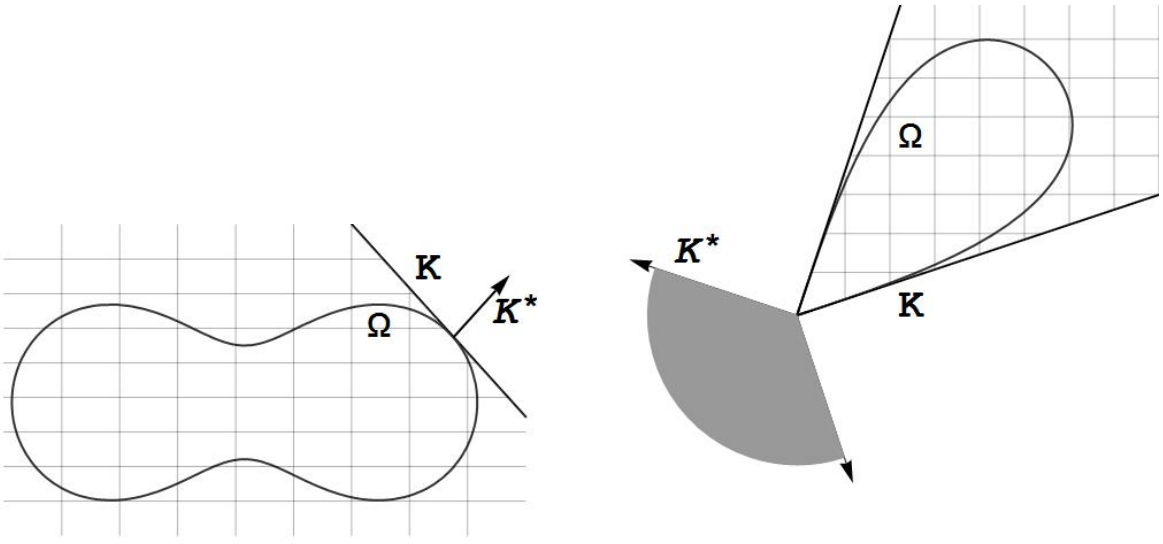
Лемма 2.1. Точка $\mathbf{k}^0$ является точкой минимума функции $f_0(\mathbf{k})$ на множестве Q_0 тогда, и только тогда, когда $\Omega_0(\mathbf{k}^0) \cup \Omega_1 \cup ... \cup \Omega_m = \mathbf{k}^0$.

Допустим, что другая точка $\tilde{\mathbf{k}}^0 \in \Omega_0(\mathbf{k}^0) \cup \Omega_1 \cup ... \cup \Omega_m$. Тогда $f_0(\tilde{\mathbf{k}}^0) < f_0(\mathbf{k}^0)$. Следовательно $\mathbf{k}^0$ — не точка минимума.

Обратно: если $\mathbf{k}^0$ — не точка минимума $f_0(\mathbf{k})$ на множестве Q_0, то существует точка $\tilde{\mathbf{k}}^0$, такая что $f_0(\tilde{\mathbf{k}}^0) < f_0(\mathbf{k}^0)$. Следовательно она принадлежит $\Omega_0(\mathbf{k}^0) \cup \Omega_1 \cup ... \cup \Omega_m$, и следовательно, это объединение состоит из более, чем одной точки.

Определение 2.1. Пусть можество $\Omega \in R^m$ содержит точку $\mathbf{k}^0$, а K — выпуклый конус с вершиной в этой точке. Конус K называется шатром множества Ω в точке $\mathbf{k}^0$, если существует непрерывное отображение $\varphi : U \to R^m$, где $U \subset R^m$ — окрестность точки $\mathbf{k}^0$, такое, что $\varphi(\mathbf{k}) = \mathbf{k} + \bar{o}(\mathbf{k} - \mathbf{k}^0)$ и $\varphi(U \cap K) \subset \Omega$. Также это множество называется касательным выпуклым конусом.

Определение 2.2. Пусть $K_i(\mathbf{k}^0), i = 1,..., m$ — шатер в точке $\mathbf{k}^0$. Двойственным конусом $K_i^*(\mathbf{k}^0)$ к шатру $K_i(\mathbf{k}^0)$ называется замкнутое множество $K_i^*(\mathbf{k}^0) = \{a : a^T(\mathbf{k} - \mathbf{k}^0) \leq 0, \mathbf{k} \in K_i(\mathbf{k}^0)\}$ [30]. Если шатер — это полупространство, то двойственный конус будет состоять из луча (рис. 2.1а). Если же шатер имеет угол, отличный от π, то двойственный конус состоит из бесконечного множества векторов (рис. 2.1б).



а) б)

Рисунок 2.1 — Примеры шатров и двойственных конусов

Поскольку шатры являются локальными приближениями множества Q_0 в его граничных точках, можно переформулировать условие единствен-

ности $\mathbf{k}^0$ на пересечении $K_0(\mathbf{k}^0) \bigcap K_1^*(\mathbf{k}^0) \bigcap ... \bigcap K_m^*(\mathbf{k}^0) = \mathbf{k}^0$. Это условие выполняется, если антиградиент функции $f_0(\mathbf{k})$ в граничной точке $\mathbf{k}^0$ представим в виде линейной комбинации векторов, принадлежащий двойственным конусам, построенным в точке $\mathbf{k}^0$. Таким образом если граничная точка множества Q_0 является точкой локального минимума функции $f_0(\mathbf{k})$, то существуют числа $\nu_j \geq 0, j \in J(\mathbf{k})$ и $a \in K_0^*$, такие, что:

$$\sum_{j \in J(\mathbf{k})}^{N} \nu_j + |a| \neq 0,$$

$$\sum_{j \in J(\mathbf{k})}^{N} \nu_j \frac{\partial \mu_j(\mathbf{k}^0)}{\partial \mathbf{k}} + a^T = 0.$$

Путем перебора всех точек внутри множества Q_0 и на его границе, выбираются все, удовлетворяющие необходимым условиям локального минимума. Среди этих точек выбирается точка, в которой функция $f_0(\mathbf{k})$ достигает наименьшего значения. Эта точка — искомая точка задачи минимизации.

2.2 Математическая постановка задачи минимаксной стабилизации цилиндра в окрестности программной траектории

Рассматривается подвижное основание, движение которого моделируется классической машиной Дубинса. Через α обозначим угол курса основания. Обозначим через C точку, связанную с основанием. Через $\xi_1\xi_2\xi_3$ обозначим опорную систему отсчёта — систему, не совершающую вращательных движений, а через $Cz_1z_2z_3$ — приборную систему отсчета, жестко связанную с основанием, совершающую поступательные и вращательные движения. Через E обозначим цель, неподвижную относительно инерциальной системы координат и удаленную от основания на бесконечное расстояние. Сопоставим ей линию визирования — прямую, соединяющую эту точку с точкой C. Также на основании закреплен цилиндрический объект, обладающий физическими параметрами. В дальнейшем будем называть этот объект направляющим цилиндром и обозначать его координаты индексом P. Его центр масс совпадает с точкой C, и он закреплен на основании посредством двухстепенного карданова подвеса. Направляющему цилиндру также сопоставим

линию визирования, совпадающую с его осью симметрии. Каждая из линий визирования задается двумя параметрами: φ — углом курса и θ — углом возвышения. Угол курса отсчитывается от направления оси Cz_2, угол возвышения отсчитывается от плоскости Cz_1z_2. Через (φ_E, θ_E) обозначим углы курса и возвышения цели, относительно подвижного основания.

Зададим систему координат $Cy_1''y_2''y_3''$, связанную с направляющим цилиндром. Ось Cy_2'' является его осью симметрии. Направляющий цилиндр имеет две степени свободы относительно подвижного основания — углы, определяющие его ориентацию. Для задания положения направляющего цилиндра относительно основания достаточно взять две независимых переменных — φ_P и θ_P — углы курса и возвышения его оси симметрии. Этих параметров достаточно, поскольку угол крена направляющего цилиндра равен нулю в силу имеющихся связей. На рисунке 2.2 схематично представлен карданов подвес, закрепленный на основании. Внутри подвеса находится направляющий цилиндр.

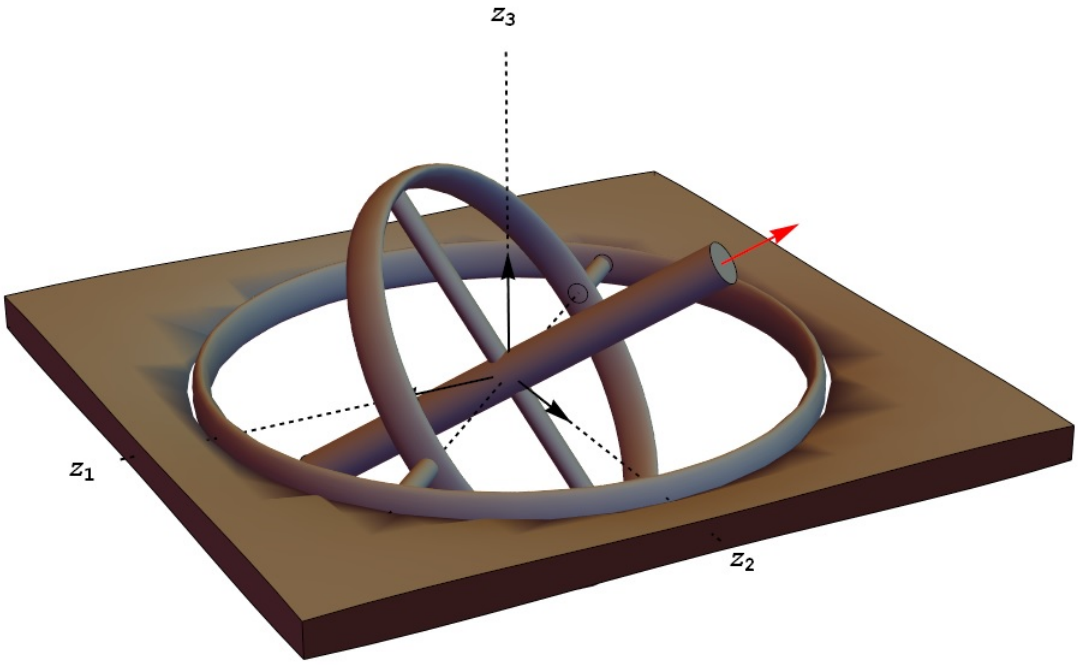


Рисунок 2.2 — Направляющий цилиндр в карданновом подвесе

Рассмотрим задачу оптимизации системы стабилизации направляющего цилиндра в окрестности линии визирования цели на заданном временном промежутке. Обозначим через t_0 момент начала движения основания, через t_1 — момент окончания движения ($t_1 \leq \infty$). Через Ω обозначим вектор угловой скорости направляющего цилиндра в проекции на его главные оси инерции. Через J_r обозначим тензор инерции направляющего цилиндра:

$$J_r = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

В дальнейшем будем считать, что $I_1 > I_2$, поскольку I_1 — это момент инерции цилиндра относительно оси, которая перпендикулярна его оси симметрии и проходит через его центр масс, а I_2 — момент инерции цилиндра относительно его оси симметрии. Запишем цепочку поворотов, определяющих переход от опорной системы координат к системе координат, связанной со стволом:

$$C\xi_1\xi_2\xi_3 \xrightarrow[\xi_3 z_3]{\alpha} Cz_1z_2z_3 \xrightarrow[z_3 y_3']{\varphi_P} Cy_1'y_2'y_3' \xrightarrow[y_1' y_1'']{\theta_P} Cy_1''y_2''y_3''.$$

Запишем угловую скорость ствола в системе координат $Cy_1''y_2''y_3''$:

$$\begin{cases} \omega_{y_1''} = \dot\theta_P, \\ \omega_{y_2''} = (\dot\alpha + \dot\varphi_P)\sin\theta_P, \\ \omega_{y_3''} = (\dot\alpha + \dot\varphi_P)\cos\theta_P. \end{cases}$$

Потенциальная энергия цилиндра равна константе, так как его центр масс движется так же, как точка C, связанная с основанием. В рассматриваемой задаче на систему действует двусторонняя голономная удерживающая связь, обеспечивающая равенство угла крена нулю. Запишем лагранжиан системы:

$$L = \frac{1}{2}(J_r\omega, \omega) = (I_1\dot\theta_P^2 + I_2(\dot\alpha + \dot\varphi_P)^2\sin^2\theta_P + I_1(\dot\alpha + \dot\varphi_P)^2\cos^2\theta_P)/2. \tag{2.4}$$

Запишем систему уравнений Лагранжа второго рода:

$$\begin{cases} (I_1\cos^2\theta_P + I_2\sin^2\theta_P)(\ddot\varphi_P + \ddot\alpha) + (I_1 - I_2)\sin 2\theta_P(\dot\alpha + \dot\varphi_P)\dot\theta_P = u_{\varphi_P}, \\ I_1\ddot\theta_P + (\dot\alpha + \dot\varphi_P)^2(I_1 - I_2)\sin\theta_P\cos\theta_P = u_{\theta_P}, \end{cases}$$

Параметры ω_α и ν_α — это угловая скорость $\dot\alpha$ и угловое ускорение $\ddot\alpha$ подвижного основания при вращении вокруг вертикальной оси, u_{φ_P} и u_{θ_P} — управления, обеспечивающие движение цилиндра. Предположим, что основание двигается произвольным образом.

Разрешим уравнения Лагранжа относительно старших производных и добавим в систему уравнения, связанные с управлением подвижным основанием. Полная система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_P = \frac{1}{(I_1 \cos^2\theta_P + I_2 \sin^2\theta_P)} u_{\varphi_P} - \nu_\alpha + \frac{1}{(I_1 \cos^2\theta_P + I_2 \sin^2\theta_P)} \dot{\theta}_P (\omega_\alpha + \dot{\varphi}_P)(I_1 - I_2) \sin 2\theta_P, \\ \ddot{\theta}_P = \frac{1}{I_1} u_{\theta_P} - \frac{(I_1 - I_2)}{I_1} (\omega_\alpha + \dot{\varphi}_P)^2 \sin\theta_P \cos\theta_P, \\ \ddot{\varphi}_E = -\nu_\alpha, \\ \dot{\omega}_\alpha = \nu_\alpha. \end{cases} \tag{2.5}$$

2.3 Минимаксная стабилизация линейной системы

Будем считать, что программная траектория цилиндра такова, что его ось симметрии совпадает с линией визирования цели E, неподвижной относительно Земли. Программные управления, необходимые для поддержания этой траектории — нулевые моменты $u^*_{\varphi_P} = 0$ и $u^*_{\theta_P} = 0$. Программная траектория $\varphi_P = \varphi_E$, $\theta_P = \theta_E$ удовлетворяет системе уравнений (2.5) при соответствующих программных управлениях. При заданной модели движения основания программный θ_E — постоянен.

Линеаризуем систему (2.5) в окрестности программной траектории цилиндра. Зададим вектор фазовых координат $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, определяющих рассогласование между линией визирования цели и осью симметрии направляющего цилиндра, где $x_1 = \varphi_P - \varphi_E$, $x_2 = \theta_P - \theta_E$, $x_3 = \dot{\varphi}_P - \dot{\varphi}_E$, $x_4 = \dot{\theta}_P - \dot{\theta}_E$. Это вектор отклонений истинной траектории системы от программной. Также зададим вектор стабилизирующих управлений $\delta u = (\delta u_{\varphi_P}, \delta u_{\theta_P})$. Уравнения в вариациях по начальным условиям имеют вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3, \\ \dot{x}_2 = x_4, \\ \dot{x}_3 = \delta u_{\varphi_P} / (I_1 \cos^2\theta_E + I_2 \sin^2\theta_E), \\ \dot{x}_4 = \delta u_{\theta_P} / I_1. \end{cases} \tag{2.6}$$

Построим стабилизирующее управление в виде $\delta u_{\varphi_P} = k_{1\varphi}x_1 + k_{2\varphi}x_3$ и $\delta u_{\theta_P} = k_{1\theta}x_2 + k_{2\theta}x_4$. Получим однородную систему линейных дифференциальных уравнений в виде $\dot{x} = A(\mathbf{k})x$. Здесь и далее через $\mathbf{k}$ обозначается упорядоченная четверка коэффициентов $(k_{1\varphi}, k_{2\varphi}, k_{1\theta}, k_{2\theta})$. Функционалом качества в рассматриваемой задаче будет интеграл от квадрата евклидова расстояния отклонения фазовых координат от нуля:

$$\Phi(\mathbf{k}, x(t_0)) = \int_{t_0}^{t_1} x^T E_4 x dt, \tag{2.7}$$

где E_4 — единичная матрица размером 4×4. Далее будем обозначать через $C = I_1 \cos^2\theta_E + I_2 \sin^2\theta_E$. Обозначим через Q_0 выпуклое односвязное компактное множество, из которого могут быть выбраны коэффициенты $\mathbf{k}$. Множество Q_0 содержит только те коэффициенты $\mathbf{k}$, при которых решение системы (2.6) асимптотически устойчиво.

Задача минимаксной стабилизации заключается в том, чтобы найти такие коэффициенты $k_{1\varphi}, k_{2\varphi}, k_{1\theta}, k_{2\theta}$, которые обеспечивали бы минимум $\Phi(\mathbf{k}, x(t_0))$, при наихудших возмущениях. Возмущения в этой задаче — начальные отклонения линии визирования направляющего цилиндра от линии визирования цели. Начальное положение вектора x принадлежит единичному шару в четырехмерном пространстве, то есть $||x(t_0)|| \leq 1$. Таким образом требуется вычислить коэффициенты линейной обратной связи, при которых функционал (2.7) принимал бы наименьшее значение при возмущениях, стремящихся его максимизировать: $\max\limits_{||x(t_0)||\leq 1} \Phi(\mathbf{k}, x(t_0)) \to \min\limits_{\mathbf{k}\in Q_0}$.

Введем ограничения, которые обеспечивали бы запас устойчивости α_0 системе (2.6). Сделаем замену переменных $x_i = e^{-\alpha_0 t} y_i, i = 1, 2, 3, 4$. Вычислим характеристический многочлен матрицы $A(\mathbf{k})$. Система уравнений (2.6) разделяется на две независимые подсистемы по (x_1, x_3) и по (x_2, x_4). Поэтому искомый характеристический многочлен представим в виде произведения двух квадратных трехчленов. Более того, каждый из двух трехчленов зависит только либо от пары $(k_{1\varphi}, k_{2\varphi})$, либо от пары $(k_{1\theta}, k_{2\theta})$:

$$P(\lambda) = \tfrac{1}{I_1 C}(k_{1\varphi} + \lambda(k_{2\varphi} - C\lambda) - (k_{2\varphi} - 2C\lambda)\alpha_0 - C\alpha_0^2)(k_{1\theta} + \lambda(k_{2\theta} - I_1\lambda) - (k_{2\theta} - 2I_1\lambda)\alpha_0 - I_1\alpha_0^2)$$

Его корни определяются формулами:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2C}(k_{2\varphi} \pm \sqrt{(k_{2\varphi}^2 + 4Ck_{1\varphi})} + 2C\alpha_0),$$
$$\lambda_{3,4} = \frac{1}{2I_1}(k_{2\theta} \pm \sqrt{(k_{2\theta}^2 + 4I_1k_{1\theta})} + 2I_1\alpha_0).$$

Решение системы (2.6) ассимптотически устойчиво, если действительные части этих корней отрицательны. Для этого необходимо, чтобы выполнялись неравенства $k_{2\varphi} \leq -2C\alpha_0$ и $k_{2\theta} \leq -2I_1\alpha_0$. Определим ограничения на коэффициенты $\mathbf{k}$ при помощи критерия Гурвица. Этот критерий дает еще два неравенства, определяющих множество Q_0:

$$(k_{2\varphi} + 2C\alpha_0)(C\alpha_0^2 + k_{2\varphi}\alpha_0 - k_{1\varphi}) \leq 0,$$
$$(k_{2\theta} + 2I_1\alpha_0)(I_1\alpha_0^2 + k_{2\theta}\alpha_0 - k_{1\theta}) \leq 0.$$

Все неравенства, определяющие множество Q_0, полагаем нестрогими, поскольку они построены с учетом запаса устойчивости, значит Q_0 можно определить замкнутым.

На плоскости $(k_{1\varphi}, k_{2\varphi})$ множество Q_0 ограничено прямыми $k_{2\varphi} + 2C\alpha_0 = 0$ и $k_{2\varphi}\alpha_0 + C\alpha_0^2 = k_{1\varphi}$. На плоскости $(k_{1\theta}, k_{2\theta})$ оно ограничено прямыми $k_{2\theta} + 2I_1\alpha_0 = 0$ и $k_{2\theta}\alpha_0 + I_1\alpha_0^2 = k_{1\theta}$. Введем дополнительные ограничения $k_{1\varphi} \geq -6, k_{1\theta} \geq -6$, чтобы Q_0 было компактным. Таким образом, проекции Q_0 на плоскости $(k_{1\varphi}, k_{2\varphi})$ и $(k_{1\theta}, k_{2\theta})$ — это треугольники (рис. 2.5 и 2.6).

2.3.1 Стабилизация на бесконечном времени

Согласно методике, описанной в разделе 2.1 функционал $\Phi(\mathbf{k}, x(t_0))$ заменяется терминальным функционалом. Рассмотрим $t_1 = \infty$. В этом случае матрица $S(\mathbf{k})$ в уравнении (2.2) равна E_4. Определим матрицу $H(\mathbf{k})$:

$$h_{11} = -C(k_{1\varphi} - k_{1\varphi}^2 - k_{2\varphi}^2)/2k_{1\varphi}k_{2\varphi}, \quad h_{12} = 0,$$
$$h_{13} = -C/2k_{1\varphi}, \quad h_{14} = 0,$$
$$h_{22} = -I_1(k_{1\theta} - k_{1\theta}^2 - k_{2\theta}^2)/2k_{1\theta}k_{2\theta}, \quad h_{23} = 0,$$
$$h_{24} = -I_1/2k_{1\theta}, \quad h_{33} = C(C - k_{1\varphi})/2k_{1\varphi}k_{2\varphi},$$
$$h_{34} = 0, \quad h_{44} = I_1(I_1 - k_{1\theta})/2k_{1\theta}k_{2\theta}.$$

Собственные значения $\mu_i, i = 1{,}2{,}3{,}4$ выражаются по формулам:

$$\mu_{1,2} = \frac{1}{4k_{1\varphi}k_{2\varphi}}\Big(C^2 - 2Ck_{1\varphi} + k_{1\varphi}^2 + k_{2\varphi}^2 \pm \sqrt{C^4 - 2C^2(k_{1\varphi}^2 - k_{2\varphi}^2) + (k_{1\varphi}^2 + k_{2\varphi}^2)^2}\Big),$$
$$\mu_{3,4} = \frac{1}{4k_{1\theta}k_{2\theta}}\Big(I_1^2 - 2I_1k_{1\theta} + k_{1\theta}^2 + k_{2\theta}^2 \pm \sqrt{I_1^4 - 2I_1^2(k_{1\theta}^2 - k_{2\theta}^2) + (k_{1\theta}^2 + k_{2\theta}^2)^2}\Big).$$

Задача поиска максимина сведена к задаче минимизации кусочно-гладкой функции, где куски функции — это максимальные собственные числа матрицы $H(\mathbf{k})$ на соответствующем значении $\mathbf{k}$. Пара чисел $\mu_{1,2}$ зависит только от $k_{1\varphi}$ и $k_{2\varphi}$, а пара чисел $\mu_{3,4}$ зависит только от $k_{1\theta}$ и $k_{2\theta}$. Следовательно, задача минимизации по четырем переменным распадается на две задачи минимизации по двум переменным. Следовательно, можно рассматривать только по одному числу из каждой пары $\mu_{1,2}$ и $\mu_{3,4}$ как подозрительное на максимум. Более того, они имеют одинаковую форму зависимости от соответствующих пар $\mathbf{k}$. Решения обеих задач минимизации будут зависеть только от ограничений на переменные $\mathbf{k}$.

Зададим параметры системы для численного моделирования: $\theta_E = 0{,}3$, $I_1 = 2{,}5$, $I_2 = 1{,}5$, $\alpha_0 = 0{,}5$. Во множестве Q_0 имеют место неравенства $\mu_1 > \mu_2$ и $\mu_3 > \mu_4$. Поэтому поиск максимального значения будет осуществляться среди двух функций: μ_1 и μ_3. На рис. 2.3 представлены графики функций μ_1 и μ_2, на рис. 2.4 представлены графики функций μ_3 и μ_4.

Рассмотрим внутренние точки множества Q_0. Необходимое условие минимума для внутренних точек записывается в виде пар соотношений

$$\frac{\partial\mu_1}{\partial k_{1\varphi}} = 0, \quad \frac{\partial\mu_1}{\partial k_{2\varphi}} = 0,$$
$$\frac{\partial\mu_3}{\partial k_{1\theta}} = 0, \quad \frac{\partial\mu_3}{\partial k_{2\theta}} = 0.$$

Эти уравнения не имеют решений. Это проиллюстрировано на рис. 2.5а, где представлено векторное поле антиградиента μ_1, линии уровня этой функции и граница проекции Q_0 на $(k_{1\varphi}, k_{2\varphi})$. Рассмотрим граничные точки множества Q_0. Исследуем функцию μ_1. Построим двойственные конусы в граничных точках проекции Q_0 на $(k_{1\varphi}, k_{2\varphi})$. Найдем все граничные точки, в которых антиградиент функции принадлежит двойственному конусу, построенному в этих точках. При заданных параметрах численного моделирования была найдена одна такая точка на вертикальной границе $k_{1\varphi} = -6$.

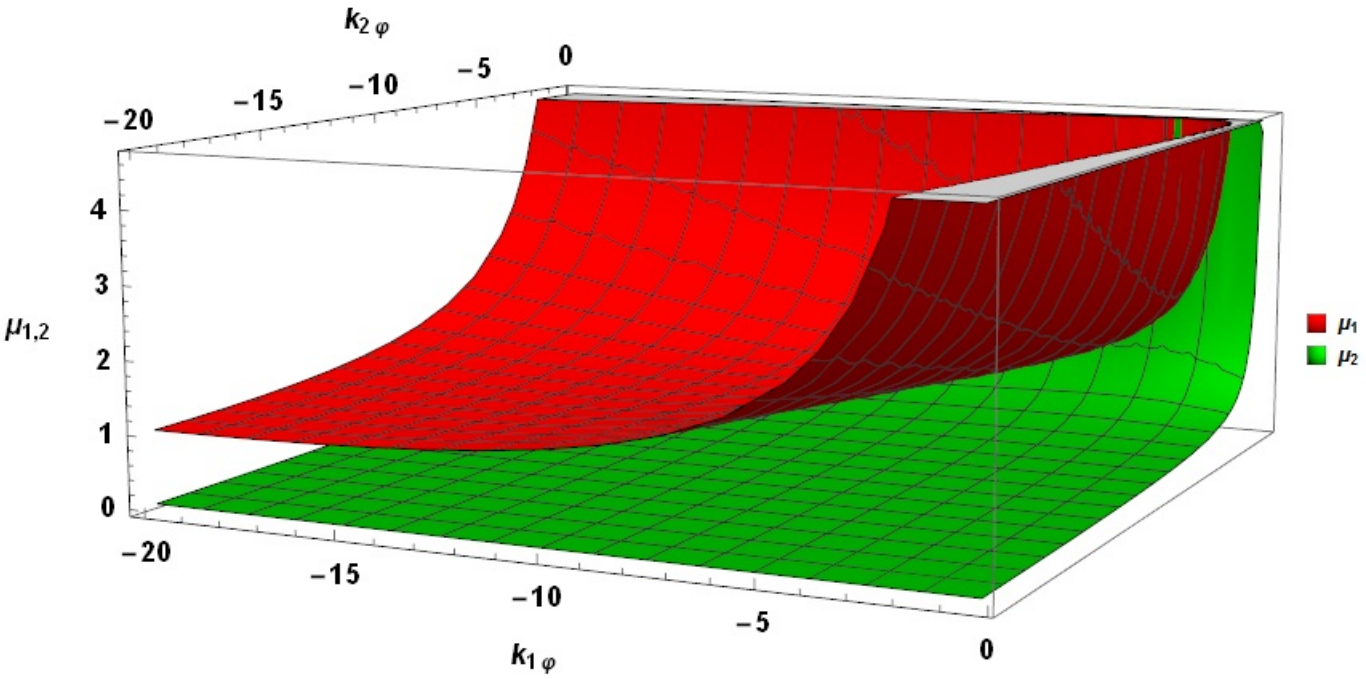


Рисунок 2.3 — Графики функций μ_1 (красный) и μ_2 (зеленый)

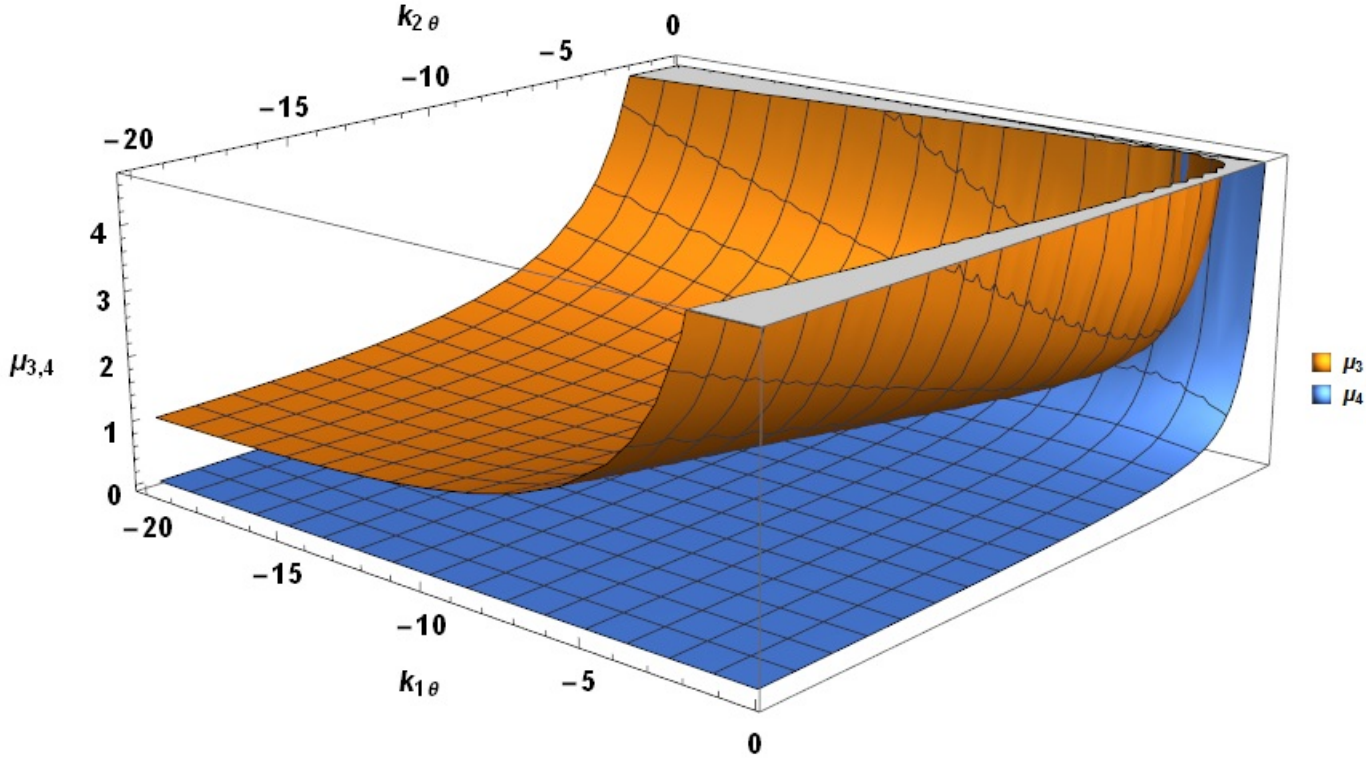
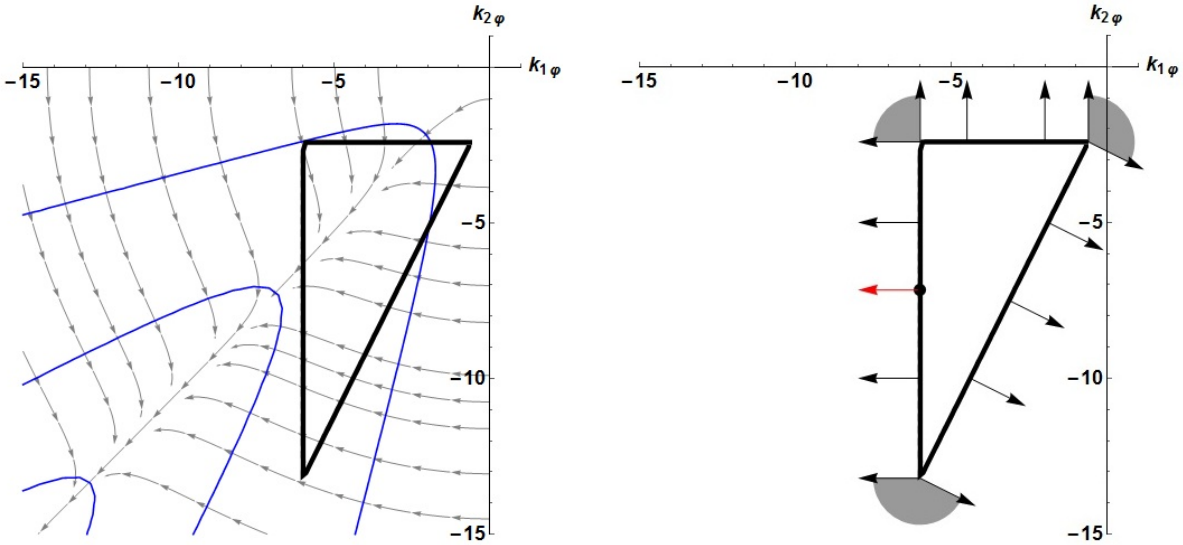


Рисунок 2.4 — Графики функций μ_3 (оранжевый) и μ_4 (голубой)

На рис. 2.5б изображена эта точка и двойственный конус, построенный в этой точке (обозначен красной стрелкой). Также на этом рисунке нарисованы другие двойственные конусы в некоторых граничных точках (обозначены черными стрелками и секторами в угловых точках).



а) б)

Рисунок 2.5 — Проекция области устойчивости Q_0 на плоскость $(k_{1\varphi}, k_{2\varphi})$

Аналогично исследуем на минимум функцию μ_3 на границе проекции Q_0 на $(k_{1\theta}, k_{2\theta})$. При численном моделировании была найдена точка на вертикальной границе $k_{1\theta} = -6$. На рис. 2.6 изображена эта точка и двойственный конус, построенный в этой точке (обозначен красной стрелкой), а также другие двойственные конусы вдоль границы.

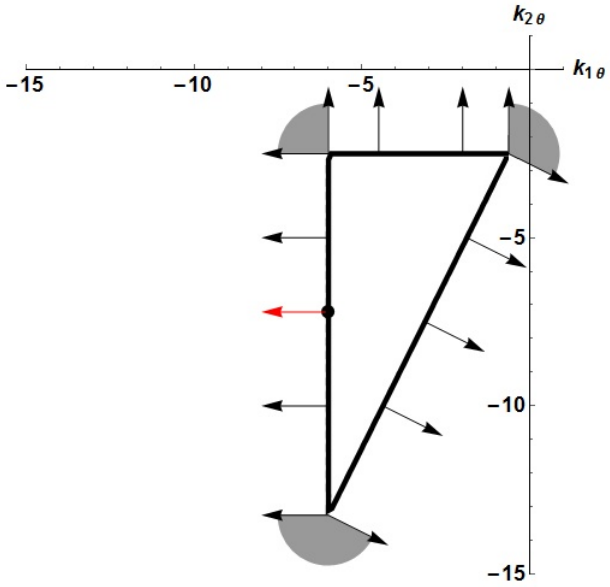


Рисунок 2.6 — Проекция области устойчивости Q_0 на плоскость $(k_{1\theta}, k_{2\theta})$

Собственным значениям $\mu_1(k^0_{1\varphi}, k^0_{1\theta})$ и $\mu_3(k^0_{1\varphi}, k^0_{1\theta})$ соответствуют собственные векторы:

$$x^0_1(0) = (-\frac{-C^2+k^2_{1\varphi}+k^2_{2\varphi}+\sqrt{C^4-2C^2k^2_{1\varphi}+k^4_{1\varphi}+2C^2k^2_{2\varphi}+2k^2_{1\varphi}k^2_{2\varphi}+k^4_{2\varphi}}}{2Ck_{2\varphi}}, 0, 1, 0)$$

$$x_3^0(0) = (0, -\frac{-I_1^2+k_{1\theta}^2+k_{2\theta}^2+\sqrt{I_1^4-2I_1^2k_{1\theta}^2+k_{1\theta}^4+2I_1^2k_{2\theta}^2+2k_{1\theta}^2k_{2\theta}^2+k_{2\theta}^4}}{2I_1k_{2\theta}}, 0, 1)$$

Если $C > I_1$, то наихудшим возмущением является вектор $x_1^0(0)$ и функционал $\max\limits_{||x(t_0)||\leq 1} \Phi(\mathbf{k}, x(t_0))$ равен μ_1. Если $C < I_1$, то наихудшим возмущением является вектор $x_3^0(0)$ и функционал $\max\limits_{||x(t_0)||\leq 1} \Phi(\mathbf{k}, x(t_0))$ равен μ_3. Таким образом одно из собственных чисел матрицы $H(\mathbf{k})$ всегда больше других при всех значениях $\mathbf{k}$. Следовательно в этой задаче $\Phi_0 = \max\limits_{||x(t_0)||\leq 1} \min\limits_{\mathbf{k}\in Q_0} \Phi(\mathbf{k}, x(t_0)) = \min\limits_{\mathbf{k}\in Q_0} \max\limits_{||x(t_0)||\leq 1} \Phi(\mathbf{k}, x(t_0)) = \Phi^0 = \Phi_0^0$. При варьировании одного из параметров $\mathbf{k}$ значение функционала будет больше Φ_0^0 независимо от начального возмущения. В то же время при выборе начальных возмущений, отличных от оптимальных, значение функционала будет меньше Φ_0^0 при любых коэффициентах обратной связи из области Q_0.

Функционал (2.7) был сведен к квадратичной форме по возмущениям $x(0)$, у которой отсутствует линейная часть. Значит, если $x^0(0)$ — оптимальное возмущение в рассматриваемой задаче, то и $-x^0(0)$ также оптимальное возмущение в этой задаче.

При вычисленных значениях коэффициентов обратной связи функционал $\max\limits_{||x(t_0)||\leq 1} \Phi(\mathbf{k}, x(t_0))$ достигает минимального значения. Рассмотрим различные значения $k_{1\theta}$, отличные от оптимального. На рисунке 2.7 представлены траектории фазовых переменных при различных $k_{1\theta}$, а красным цветом нарисованы траектории при оптимальном $k_{1\theta}$. В качестве начального отклонения взято $x^0(0)$.

На рисунке 2.8 представлены графики функции $x^T(t)E_4x(t)$ при различных $k_{1\theta}$. Значение функционала $\Phi(\mathbf{k}, x(t_0))$ — это площадь под графиком. Красным цветом нарисован график при оптимальном $k_{1\theta}$. В качестве начального отклонения взято $x^0(0)$.

2.3.2 Стабилизация на конечном времени

Рассмотрим $t_1 = 1$. В этом случае матрица $S(\mathbf{k})$ в уравнении (2.2) вообще говоря не выражается аналитически в виде функции переменных $\mathbf{k}$.

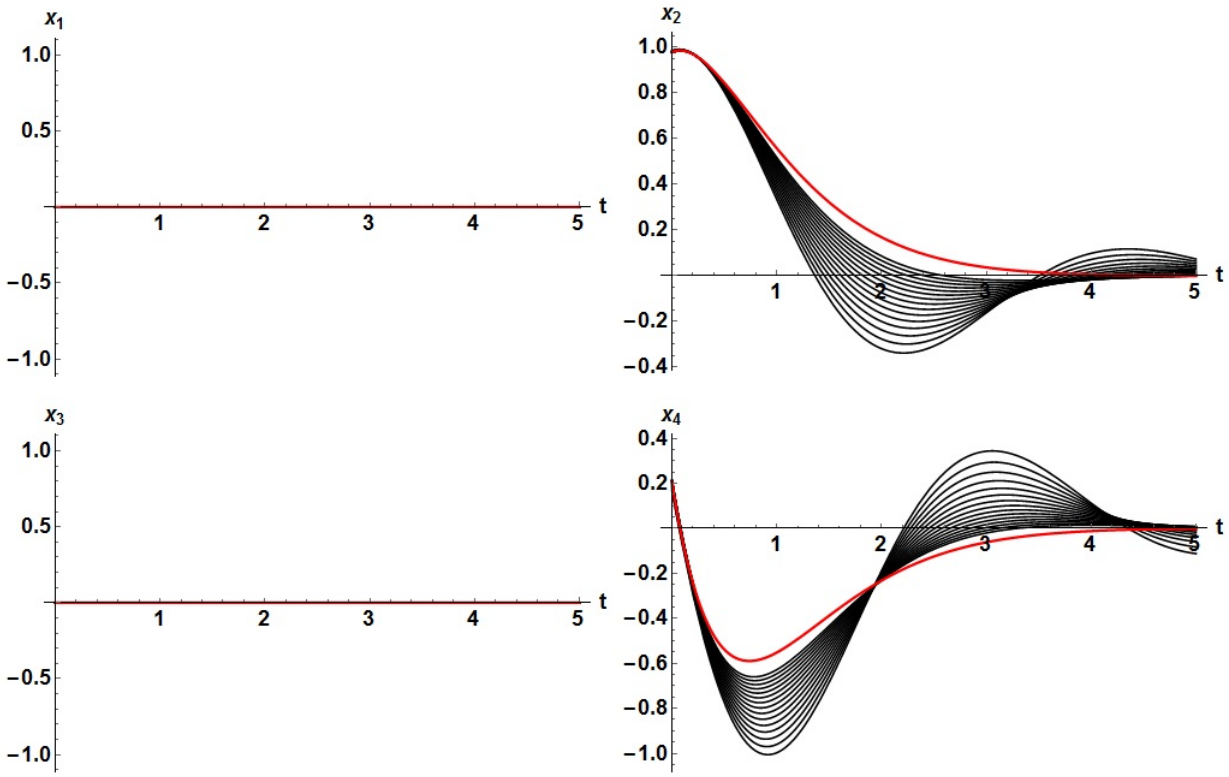


Рисунок 2.7 — Траектории решений линейной системы при вариации $k_{2\theta}$

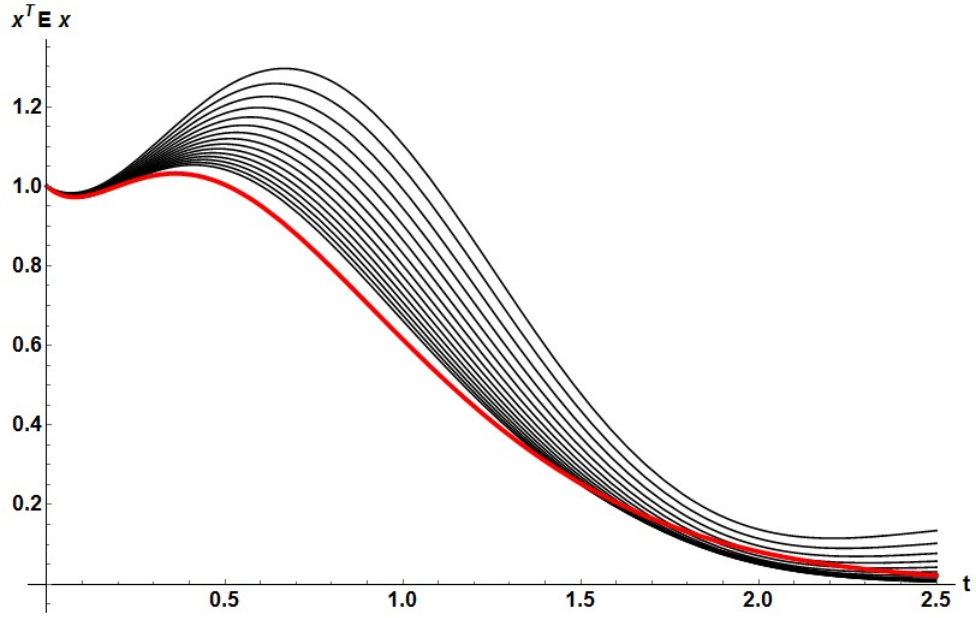


Рисунок 2.8 — Траектории подынтегральной функции критерия качества при вариации $k_{2\theta}$

Используем для численного моделирования те же параметры, которые были заданы для моделирования в разделе 2.3.1.

Было проведено численное моделирование с построением разбиения четырехмерного пространства $(k_{1\varphi}, k_{2\varphi}, k_{1\theta}, k_{2\theta})$ с шагом разбиения 0,005. Были рассмотрены все точки, принадлежащие множеству Q_0. В каждой точке ре-

шено уравнение (2.2). В этой задаче в каждой исследуемой точке необходимо проверять, что матрица $H(\mathbf{k})$ положительно определена. Также проверялась положительная определенность матрицы $-S$, стоящей в правой части уравнения (2.2), с помощью критерия Сильвестра. Если критерий удовлетворялся для обеих матриц, то после этой проверки вычислялись все собственные значения матрицы $H(\mathbf{k})$ и выбиралось среди них максимальное. Исследуя таким образом все узлы разбиения, принадлежащие множеству Q_0, выбералась та точка, в которой максимум среди собственных значений марицы $H(\mathbf{k})$ минимален.

При заданных параметрах и при выбранном конечном t_1 матрица $H(\mathbf{k})$ определена положительно во всех узлах разбиения. Численное моделирование показало, что минимакс $\Phi^0 = 0{,}852$ достигается при значениях параметров $k^0_{1\varphi} = -5{,}995, k^0_{2\varphi} = -12{,}98, k^0_{1\theta} = -6, k^0_{2\theta} = -13$. Пара наихудших возмущений в этом случае имеет вид:

$$x^0(0) = (0, -0{,}995, 0, -0{,}1), \quad x^0(0) = (0, 0{,}995, 0, 0{,}1).$$

2.4 Минимаксная стабилизация билинейной системы при постоянно действующем константном возмущении

Рассмотрим случай постоянно действующих в системе возмущений. Зададим переменную v — возмущение по ω_α, и переменную w — возмущение по ν_α. Это значит, что $v = \tilde{\omega}_\alpha - \omega_\alpha$, где $\tilde{\omega}_\alpha$ — измеряемая информация об угловой скорости основания. Аналогично $w = \tilde{\nu}_\alpha - \nu_\alpha$, где $\tilde{\nu}_\alpha$ — измеряемая информация об угловом ускорении основания. При линеаризации системы (2.5) в окрестности программных траекторий не остается слагаемых, содержащих v и w. Через x, как и в предыдущей задаче обозначим вектор рассогласования между программной траекторией системы, и ее истинной траекторией.

Обозначим через f правую часть системы уравнений (2.5), а через p обозначим вектор переменных (φ_P, θ_P). Рассмотрим разложение правой части первых двух уравнений системы (2.5) в ряд Тейлора в окрестности программной траектории $p = (\varphi_E, \theta_E)$ и программного управления $u = (u^*_{\varphi_P}, u^*_{\theta_P})$, где $u^*_{\varphi_P} = 0, u^*_{\theta_P} = 0$. Отбросим все члены, кроме линейных по фазовым перемен-

ным, управлениям и возмущениям, а также билинейных по xv. В матричной форме она имеет вид $\dot{x} = (A_0 + A_1 v(t))x + B\delta u + B_1 v(t) + B_2 w(t)$, где

$$A_0 = \frac{\partial f}{\partial p}\Big|_{\substack{p=(\varphi_E,\theta_E)\\ u=(u^*_{\varphi_P},u^*_{\theta_P})}}, \; A_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial \omega_\alpha}\Big|_{\substack{p=(\varphi_E,\theta_E)\\ u=(u^*_{\varphi_P},u^*_{\theta_P})}},$$

$$B = \frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{\substack{p=(\varphi_E,\theta_E)\\ u=(u^*_{\varphi_P},u^*_{\theta_P})}}, \; B_1 = \frac{\partial f}{\partial \omega_\alpha}\Big|_{\substack{p=(\varphi_E,\theta_E)\\ u=(u^*_{\varphi_P},u^*_{\theta_P})}}, \; B_2 = \frac{\partial f}{\nu_\alpha}\Big|_{\substack{p=(\varphi_E,\theta_E)\\ u=(u^*_{\varphi_P},u^*_{\theta_P})}}.$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(I_1-I_2)\sin 2\theta_E}{I_1\cos^2\theta_P + I_2\sin^2\theta_P} \\ 0 & 0 & -\frac{(I_1-I_2)\sin 2\theta_E}{I_1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{I_1\cos^2\theta_P + I_2\sin^2\theta_P} & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_1} \end{pmatrix} \qquad B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Будем считать, что $v(t) \equiv v = \text{const}$ и $w \equiv 0$. Ограничим v: $|v| \le \tilde{v}$. В этом случае компоненты матрицы $A_0 + A_1 v$ принимают значения из конечного отрезка. Полученная система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3, \\ \dot{x}_2 = x_4, \\ \dot{x}_3 = (\delta u_{\varphi_P} + (I_1 - I_2)\sin 2\theta_E v x_4)/(I_1\cos^2\theta_E + I_2\sin^2\theta_E), \\ \dot{x}_4 = (\delta u_{\theta_P} - (I_1 - I_2)\sin 2\theta_E v x_3)/I_1. \end{cases} \tag{2.8}$$

Положим $D = (I_1 - I_2)\sin 2\theta_E$. Как и в предыдущей задаче, будем строить стабилизирующее управление в виде $\delta u_{\varphi_P} = k_{1\varphi}x_1 + k_{2\varphi}x_3$ и $\delta u_{\theta_P} = k_{1\theta}x_2 + k_{2\theta}x_4$. Получим однородную систему линейных дифференциальных уравнений, имеющую вид $\dot{x} = A(\mathbf{k}, v)x$. В этом случае функционал (2.7) зависит еще и от константы v. Рассмотрим случай $t_1 = \infty$, то есть интеграл в функционале (2.7) — несобственный. Поставим задачу: вычислить коэффициенты линейной обратной связи, при которых функционал

(2.7) принимал бы наименьшее значение при возмущениях, стремящихся его максимизировать: $\max\limits_{|v|\le\tilde{v}}\ \max\limits_{||x(t_0)||\le 1} \Phi(\mathbf{k}, x(t_0), v) \to \min\limits_{\mathbf{k}\in Q_0}$.

Рассмотрим упрощенную задачу: будем считать, что коэффициенты $k_{2\varphi}$ и $k_{2\theta}$ заданы, а минимум будем искать только по коэффициентам $k_{1\varphi}$ и $k_{1\theta}$. Коэффициенты $k_{2\varphi}$ и $k_{2\theta}$ определяют линейную зависимость между скоростью углового движения цилиндра и силой вязкого трения, действующей на него. Далее под функцией $\mathbf{k}$ будем подразумевать функцию переменных $k_{1\varphi}$ и $k_{1\theta}$, а под минимумом по $\mathbf{k}$ будем подразумевать минимум по $k_{1\varphi}$ и $k_{1\theta}$. Следовательно, минимум по $\mathbf{k}$ будем в дальнейшем искать в пространстве $\mathbb{R}^2$.

Зададим дополнительное требование к коэффициентам $\mathbf{k}$: они должны обеспечивать запас устойчивости α_0 системе (2.8). Сделаем замену переменных $x_i = e^{-\alpha_0 t} y_i, i = 1, 2, 3, 4$. Характеристический многочлен системы (2.8) имеет вид:

$$P(v,\lambda) = a_0(v) + a_1(v)\lambda + a_2(v)\lambda^2 - \tfrac{I_1 k_{2\varphi} + C k_{2\theta} + 4 C I_1 \alpha_0}{C I_1}\lambda^3 + \lambda^4,$$

$$a_0(v) = (k_{1\varphi}k_{1\theta} - (k_{2\varphi}k_{1\theta} + k_{1\varphi}k_{2\theta})\alpha_0 - (I_1 k_{1\varphi} + C k_{1\varphi} - k_{2\varphi}k_{2\theta} - D^2 v^2)\alpha_0^2 + \\ + (I_1 k_{2\varphi} + C k_{2\theta})\alpha_0^3 + C I_1 \alpha_0^4)\frac{1}{C I_1},$$

$$a_1(v) = (k_{2\varphi}k_{1\theta} + k_{1\varphi}k_{2\theta} + (2 I_1 k_{1\varphi} + 2 C k_{1\theta} - 2 k_{2\varphi}k_{2\theta} - 2 D^2 v^2)\alpha_0 - 3(I_1 k_{2\varphi} + \\ + C k_{2\theta})\alpha_0^2 - 4 C I_1 \alpha_0^3)\frac{1}{C I_1},$$

$$a_2(v) = (k_{2\varphi}k_{2\theta} - I_1 k_{1\varphi} - C k_{1\theta} + D^2 v^2 + 3 I_1 k_{2\varphi}\alpha_0 + 3 k_{2\theta}\alpha_0 + 6 I_1 \alpha_0^2)\frac{1}{C I_1},$$

Решение билинейной системы ассимптотически устойчиво, если этот полином является полиномом Гурвица при любом значении $-\tilde{v} \le v(t) \le \tilde{v}$.

Определение 2.3. Интервальным полиномом называется полином вида

$$F(\lambda) = a_0 + \lambda a_1 + ... + \lambda^{n-1} a_{n-1} + \lambda^n a_n, \tag{2.9}$$

где $a_i \in [\underline{a}_i, \bar{a}_i], i = 0,...,n$, $\underline{a}_i$ и $\bar{a}_i$ — константы.

Теорема (Харитонова). Для того, чтобы интервальный полином (2.9) был полиномом Гурвица при любых значениях $a_i \in [\underline{a}_i, \bar{a}_i]$, необходимо и достаточно, чтобы следующие четыре полинома были полиномами Гурвица:

$$\begin{aligned}
F_1(\lambda) &= \underline{a}_0 + \lambda\bar{a}_1 + \lambda^2\bar{a}_2 + \lambda^3\underline{a}_3 + \lambda^4\underline{a}_4 + ..., \\
F_2(\lambda) &= \bar{a}_0 + \lambda\underline{a}_1 + \lambda^2\underline{a}_2 + \lambda^3\bar{a}_3 + \lambda^4\bar{a}_4 + ..., \\
F_3(\lambda) &= \underline{a}_0 + \lambda\underline{a}_1 + \lambda^2\bar{a}_2 + \lambda^3\bar{a}_3 + \lambda^4\underline{a}_4 + ..., \\
F_4(\lambda) &= \bar{a}_0 + \lambda\bar{a}_1 + \lambda^2\underline{a}_2 + \lambda^3\underline{a}_3 + \lambda^4\bar{a}_4 + ...,
\end{aligned}$$

Только три коэффициента полинома $P(v, \lambda)$ зависят от v — a_0, a_1 и a_2. Более того, они зависят только от v^2, поэтому достаточно получить условия устойчивости при $v \in [0, \tilde{v}]$. Рассмотрим четыре полинома, которые получаются из $P(v, \lambda)$ при следующих наборах коэффициентов, зависящих от v:

1. $a_0(\tilde{v})$, $a_1(\tilde{v})$, $a_2(0)$, 2. $a_0(0)$, $a_1(0)$, $a_2(\tilde{v})$,
3. $a_0(\tilde{v})$, $a_1(0)$, $a_2(0)$, 4. $a_0(0)$, $a_1(\tilde{v})$, $a_2(\tilde{v})$.

Этим четырем полиномам соответствуют четыре области $Q_i, i = 1, 2, 3, 4$, определяемые с помощью критерия Гурвица. В области Q_i полином с индексом i является полиномом Гурвица. Согласно теореме Харитонова в области $Q_0 = \bigcap_{i=1}^{4} Q_i$ полином (2.9) является полиномом Гурвица при любом значении его коэффициентов из $a_i \in [\underline{a}_i, \bar{a}_i], i = 0,...,n$ [63].

Аналитически границы множеств Q_i задаются при помощи неявных функций. Их представление очень громоздко. Однако у всех четырех множеств часть границы определяется одной и той же гиперболой $h(k_{1\varphi}, k_{1\theta}, \alpha_0) = 0$, где:

$$\begin{aligned}
h(k_{1\varphi}, k_{1\theta}, \alpha_0) = k_{1\varphi}k_{1\theta} - k_{1\varphi}\alpha_0(k_{2\theta} + I_1\alpha_0) - k_{1\theta}\alpha_0(k_{2\varphi} + C\alpha_0) + (k_{2\varphi}k_{2\theta} + \\
+D^2\tilde{v})^2)\alpha_0^2 + (I_1k_{2\varphi} + Ck_{2\theta})\alpha_0^3 + I_1C\alpha_0^4
\end{aligned}$$

Асимптоты этой гиперболы задаются уравнениями $k_{1\varphi} = \alpha_0(k_{2\theta} + I_1\alpha_0)$ и $k_{1\theta} = \alpha_0(k_{2\varphi} + C\alpha_0)$. Они отображены на рисунке 2.10а.

Обозначим через $\mathrm{pr}_{k_{1\varphi}k_{1\theta}}(Q_0)$ проекцию на плоскость $(k_{1\varphi}, k_{1\theta})$ множества Q_0. Она представляет особый интерес, поскольку именно на этой плоскости в дальнейшем будет проводиться поиск минимума. Также обозначим через $\mathrm{pr}_{k_{2\varphi}k_{2\theta}}(Q_0)$ проекцию этого множества на плоскость $(k_{2\varphi}, k_{2\theta})$.

Ограничим все параметры неравенствами $k_{1\varphi} \geq -12, k_{1\theta} \geq -12$, чтобы множество $\mathrm{pr}_{k_{1\varphi}k_{1\theta}}(Q_0)$ было компактным. Матрица $H(\mathbf{k}, v)$ и ее собственные значения и собственные векторы имеют громоздкое представление в аналитическом виде. Зададим параметры системы для численного моделирования: $\theta_E = 0{,}3, I_1 = 2{,}5, I_2 = 1{,}5, k_{2\varphi} = -9, k_{2\theta} = -8, \alpha_0 = 0{,}9, \tilde{v} = 3{,}5$. Таким образом каждая клетка h_{ij} матрицы $H(\mathbf{k}, v)$ — это функция $k_{1\varphi}$, $k_{1\theta}$ и v. Только h_{13} и h_{24} имеют простой вид. Остальные разложим в ряд Тейлора по $k_{1\varphi}$, $k_{1\theta}$ и v в окрестности середины области асимптотической устойчивости.

Для решения поставленной задачи требуется проверить условия локального максимума во всех точках $[-\tilde{v}, \tilde{v}]$. Соотношение $\frac{\partial \mu_j(\mathbf{k}, v^0)}{\partial v} = 0$ определяет необходимое условие максимума на внутренней точке отрезка $[-\tilde{v}, \tilde{v}]$. Максимум по v также может достигаться в одной из точек $\pm\tilde{v}$, поэтому значения функции $\mu_j(\mathbf{k}, v)$ также проверяются и в этих точках. На рисунке 2.9 представлены графики собственных чисел матрицы $H(\mathbf{k}, v)$, при $v = \tilde{v}$

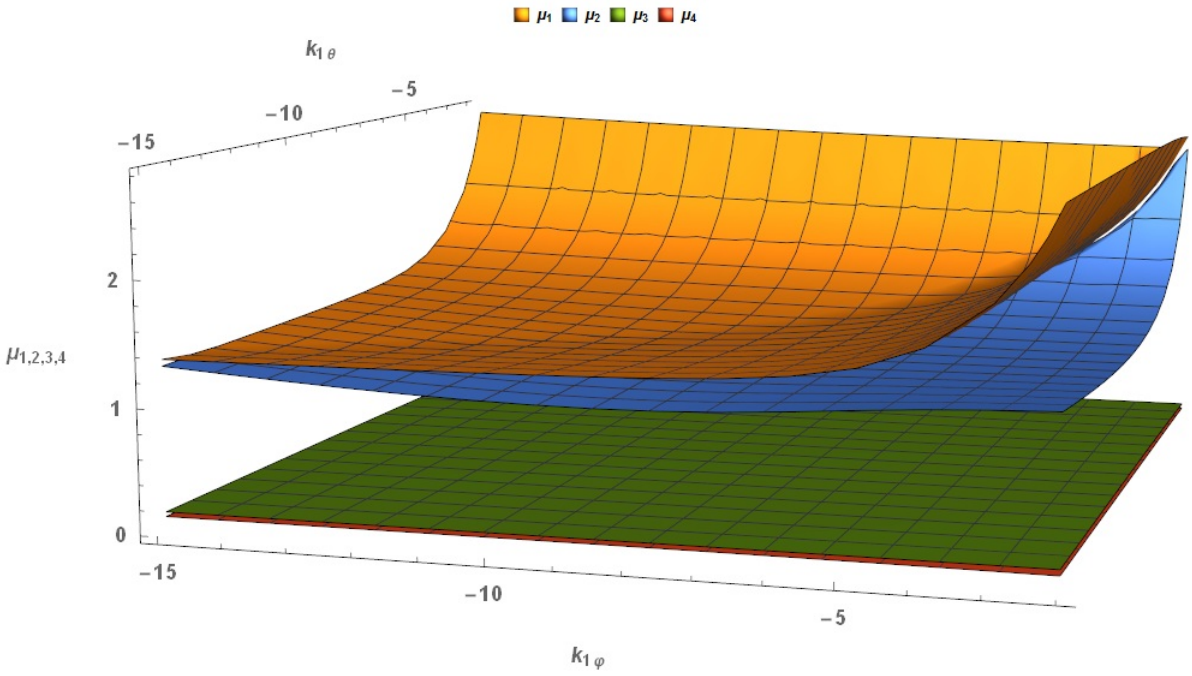


Рисунок 2.9 — Собственные значения матрицы $H(\mathbf{k}, \tilde{v})$

Среди граничных точек существуют такие, в которых отрицательный градиент минимизируемой функции выражается через векторы, лежащие в двойственных конусах, в том числе и в угловых точках. На рисунке 2.10б изображены двойственные конусы вдоль границы множества $\mathrm{pr}_{k_{1\varphi}k_{1\theta}}(Q_0)$.

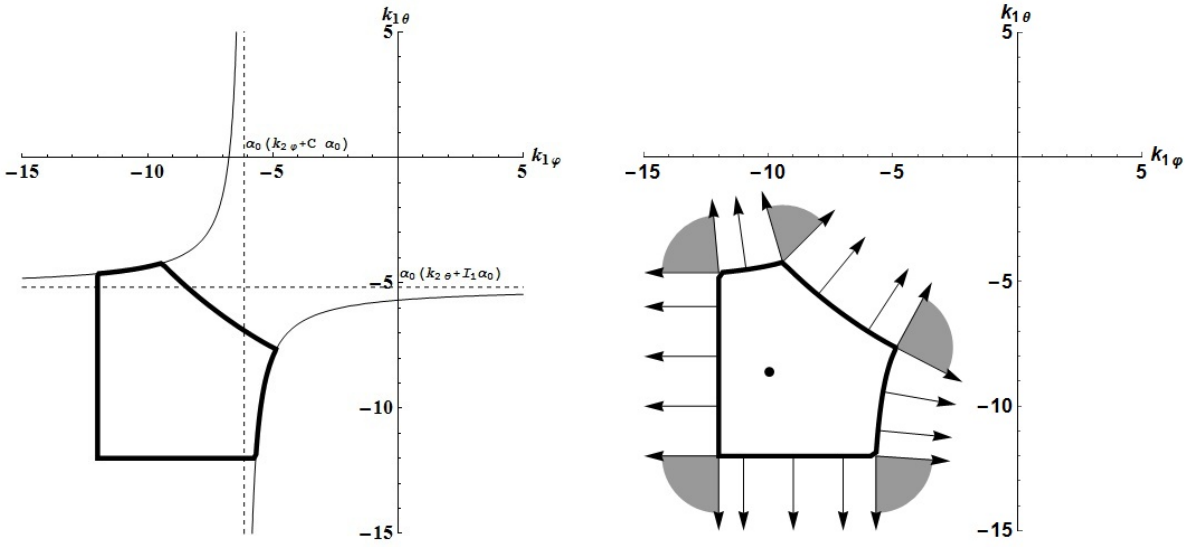
Воспользуемся указанными условиями и вычислим минимум по $\mathbf{k}$ среди всех максимумов по v от $\mu_j(\mathbf{k}, v)$. Численный эксперимент показал, что при

заданных параметрах минимакс достигается в точке ($k^0_{1\varphi} = -9{,}977, k^0_{1\theta} = -8{,}609$) при значении $v^0 = \pm 3{,}5$. Это внутренняя точка $\mathrm{pr}_{k_{1\varphi}k_{1\theta}}(Q_0)$.

Минимаксное значение функционала (2.7) при $t_1 = \infty$ равно $\Phi^0 = 1{,}202$. Это значение достигается на двух начальных отклонениях, симметричных относительно начала координат:

$$x^0(t_0) = (0{,}101, 0{,}984, -0{,}017, 0{,}146),$$
$$x^0(t_0) = (-0{,}101, -0{,}984, 0{,}017, -0{,}146).$$

На рисунке 2.10б представлено множество $\mathrm{pr}_{k_{1\varphi}k_{1\theta}}(Q_0)$ и точка $(k^0_{1\varphi}, k^0_{1\theta})$, на которой достигается минимум среди максимумов по v.



а)

б) Двойственные конусы вдоль границы $\mathrm{pr}_{k_{1\varphi}k_{1\theta}}(Q_0)$ и точка, на которой достигается минимакс

Рисунок 2.10 — Область устойчивости $\mathrm{pr}_{k_{1\varphi}k_{1\theta}}(Q_0)$

Точка $k_{2\varphi} = -9, k_{2\theta} = -8$, выбранная для численного моделирования, удовлетворяет критерию Гурвица. На рисунке 2.11 представлена проекция множетва Q_0 на плоскость $(k_{2\varphi}, k_{2\theta})$.

Вычислим аналогичным образом $\Phi_0 = \max\limits_{|v|\le\tilde{v}} \max\limits_{||x(t_0)||\le 1} \min\limits_{\mathbf{k}\in Q_0} \Phi(\mathbf{k}, x(t_0))$. В этой задаче, как и в предыдущей, $\Phi_0 = \Phi^0 = \min\limits_{\mathbf{k}\in Q_0} \max\limits_{|v|\le\tilde{v}} \max\limits_{||x(t_0)||\le 1} \Phi(\mathbf{k}, x(t_0))$. Максимин достигается на тех же аргументах, что и минимакс. При отклонении параметров $k_{1\varphi}$ и $k_{1\theta}$ от оптимальных значение функционала (2.7) будет увеличиваться, независимо от действующего постоянного возмущения и от начального отклонения. Рассмотрим различные значения $k_{1\theta}$, отличные

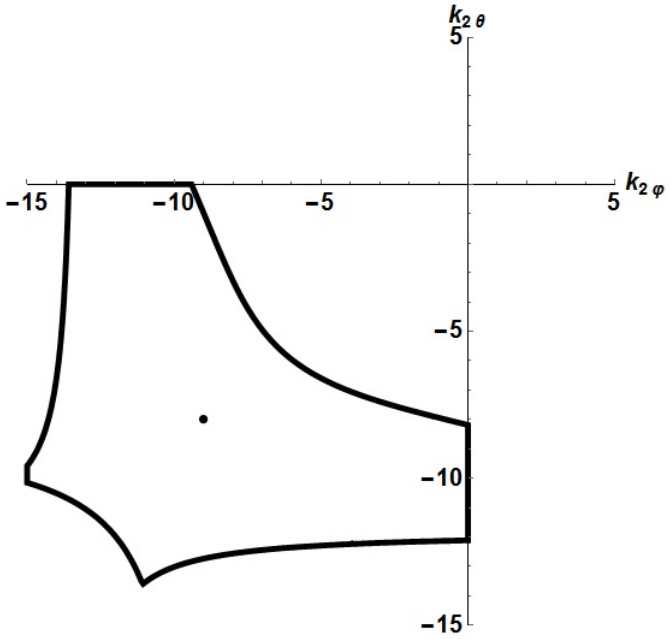


Рисунок 2.11 — Проекция множества Q_0 на плоскость $(k_{2\varphi}, k_{2\theta})$ и точка $(-9, -8)$

от оптимального. На рисунке 2.12 представлены траектории фазовых переменных при различных $k_{1\theta}$, а красным цветом нарисованы траектории при оптимальном $k_{1\theta}$. В качестве начального отклонения взято $x^0(0)$.

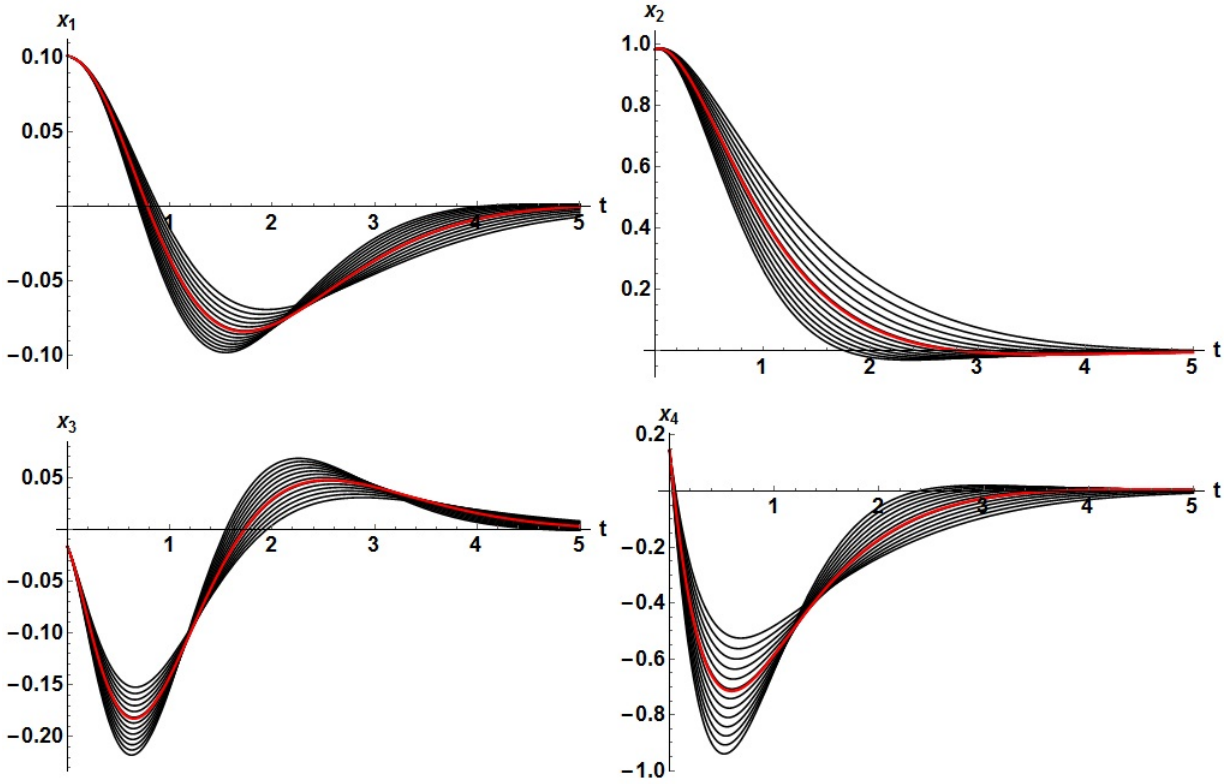


Рисунок 2.12 — Траектории решений билинейной системы при вариации $k_{1\theta}$

На рисунке 2.13 представлены графики функции $x^T(t)E_4x(t)$ при различных $k_{1\theta}$. Значение функционала $\Phi(\mathbf{k}, x(t_0))$ — это площадь под графиком.

Красным цветом нарисован график при оптимальном $k_{1\theta}$. В качестве начального отклонения взято $x^0(0)$.

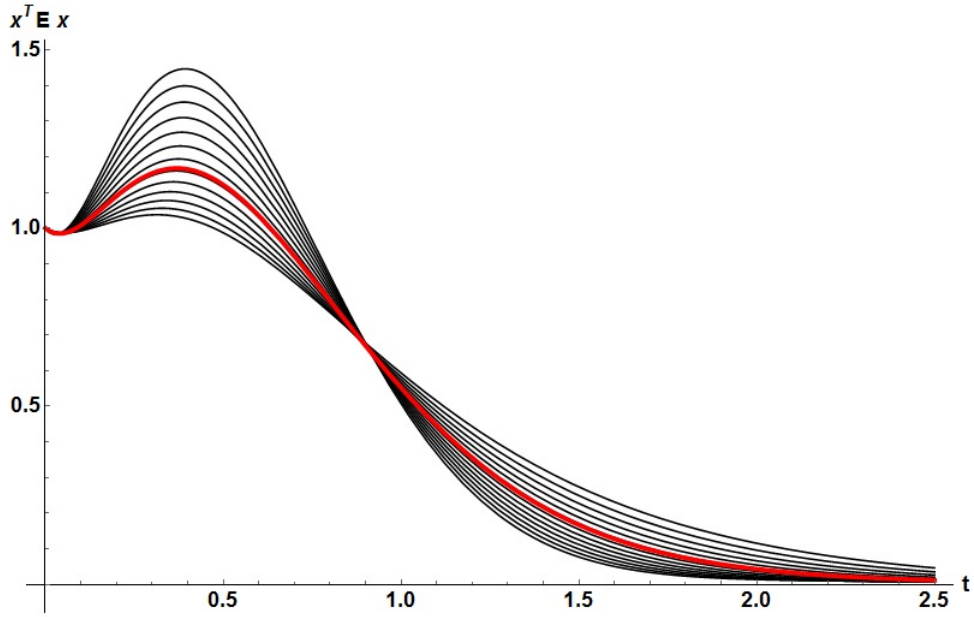


Рисунок 2.13 — Траектории подынтегральной функции критерия качества на решении билинейной системы при вариации $k_{1\theta}$

2.5 Минимаксная стабилизация билинейной системы при постоянно действующем периодическом возмущении

Рассмотрим случай постоянно действующих периодических возмущений в системе (2.8). Пусть $v(t) = a + b\sin\pi qt$. Через T обозначим период функции $v(t)$. Очевидно, что T зависит от выбранного q: $T = 2/q$. Будем считать, что коэффициенты a и b заданы, а q будем рассматривать как параметр возмущения, который принадлежит заданному отрезку $q_{int} = [q^{min}, q^{max}]$, $q^{min} > 0, q^{max} > 0$. Тогда рассматриваемая линейная система в матричном виде записывается следующим образом:

$$\dot{x} = A(\mathbf{k}, q, t)x \tag{2.10}$$

В этом случае функционал (2.7) зависит от константы q, от коэффициентов $\mathbf{k}$ и от начального возмущения $x(t_0)$. Как и в предыдущей задаче, рассмотрим случай $t_1 = \infty$ в функционале (2.7). Поставим задачу: вычислить коэффициенты линейной обратной связи, при которых функционал

(2.7) принимал бы наименьшее значение при возмущениях, стремящихся его максимизировать: $\max\limits_{q\in q_{int}}\max\limits_{||x(t_0)||\le 1}\Phi(\mathbf{k},x(t_0),q)\to\min\limits_{\mathbf{k}\in Q_0}$. Как и в предыдущей задаче, зададим дополнительное требование к коэффициентам $\mathbf{k}$: они должны обеспечивать запас устойчивости α_0 системе (2.10).

Система (2.10) не стационарна. Матрица $A(\mathbf{k},t)$ непрерывна, и некоторые из ее клеток являются периодическими функциями времени. Чтобы использовать математический аппарат, приведенный в разделе 2.1 для решения этой задачи, необходимо привести эту систему к стационарному виду [53;61;65]. Воспользуемся преобразованием Ляпунова, и приведем рассматриваемую систему к линейной системе со стационарной матрицей. Для вычисления этого преобразования требуется найти общее однородное решение системы. Поэтому необходимо найти фундаментальную матрицу системы.

Теорема (Флоке). Фундаментальная матрица $X(t)$ системы вида (2.10) с непрерывной периодической матрицей имеет вид

$$X(t)=F(\mathbf{k},q,t)e^{K(\mathbf{k},q)t},$$

где $F(\mathbf{k},q,t)$ — непрерывно-дифференцируемая периодическя матрица с периодом T, причем $F(\mathbf{k},q,0)=E_4$, а $K(\mathbf{k},q)$ — постоянная по времени матрица [41]. Матрица $X(t)$ является решением дифференциального матричного уравнения:

$$\dot{X}(\mathbf{k},q,t)=A(\mathbf{k},q,t)X(\mathbf{k},q,t),\quad X(0)=E_4. \tag{2.11}$$

Для вычисления преобразования Ляпунова требуется вычислить матрицу монодромии системы (2.10) — матрицу $X(T)$. $F(\mathbf{k},q,T)=E_4$, следовательно $X(T)=e^{K(\mathbf{k},q)T}$. Собственные значения матрицы $X(T)$ могут быть вообще говоря комплексными [53], поэтому матрица $K(\mathbf{k},q)$ также может быть комплексной. Собственные значения $\rho_i, i=1,2,3,4$ матрицы $K(\mathbf{k},q)$ вычисляются по формуле:

$$\rho_i=\frac{1}{T}(\ln|\mu_i^x|+i\arg\mu_i^x), \tag{2.12}$$

где μ_i^x — это собственные значения матрицы $X(T)$.

Сделаем замену переменных: $z=F(\mathbf{k},q,t)x$. Тогда система уравнений относительно z будет иметь матрицу $K(\mathbf{k},q)$, которая не зависит от времени:

$$\dot{z} = K(\mathbf{k}, q)z. \tag{2.13}$$

Из периодичности матрицы $F(\mathbf{k}, q, t)$ следует что она ограничена. Следовательно существует мажоранта $F^{max} > 0$ такая, что [62]:

$$\begin{aligned} ||x|| \leq ||F(\mathbf{k}, q, t)^{-1}||_2||z|| \leq F^{max}||z|| < \infty, \\ ||z|| \leq ||F(\mathbf{k}, q, t)||_2||x|| \leq F^{max} < \infty. \end{aligned} \tag{2.14}$$

где норма $||W||_2$ матрицы W определяется формулой

$$||W||_2 = \sup_{x \neq 0} \frac{||Wx||}{||x||}.$$

Выразить решение системы (2.10) в замкнутой форме не представляется возможным, поскольку она не относится ни к одному из специальных классов линейных систем, а также ни к одному из классов функционально-коммутативных линейных систем [41]. Зададим параметры системы для численного моделирования: $\theta_E = 0{,}3, I_1 = 2{,}5, I_2 = 1{,}5, k_{2\varphi} = -9, k_{2\theta} = -8, \alpha_0 = 0{,}9, a = 0{,}5, b = 0{,}7$. Также зададим границы отрезка q_{int}, из которого выбирается параметр возмущения: $q^{min} = 0{,}5, q^{max} = 8$. Для того, чтобы найти преобразование Ляпунова, построим разбиение множества $\mathbb{R}^2 \times q_{int}$. Возьмем интервал разбиения 0,05. Для каждого узла разбиения найдем решение уравнения (2.11) в момент T. Далее на каждом из узлов вычислим ρ_i по формуле (2.12). В этой формуле T задается в зависимости от q.

Если собственные числа ρ_i различаются и вещественны, то матрица $K(\mathbf{k}, q)$ вещественна и имеет диагональный вид. Если собственные числа ρ_i вещественны и среди них есть одинаковые, то матрица $K(\mathbf{k}, q)$ состоит из жордановых клеток размера, соответствующего кратности каждого из собственных чисел.

Если на каком-то узле разбиения среди чисел ρ_i есть одна или две пары комплексно-сопряженных, то матрица $K(\mathbf{k}, q)$ комплексная. В этом случае применяется дополнительное преобразование, приводящее ее к вещественному виду [53]. После этого преобразования в полученной вещественной матрице каждой паре комплексно-сопряженных корней будет соответствовать блок 2×2 на диагонали. На главной диагонали каждого блока будет стоять вещественная часть комплексно сопряженной пары, а на побочной диагонали будут стоять мнимые части.

Численное моделирование показало, что кратных вещественных корней нет ни в одной точке узла разбиения. Следовательно, в зависимости от комбинации собственных чисел ρ_i, матрица $K(\mathbf{k}, q)$ она будет иметь одну из следующих форм:

1. Четыре разных вещественных числа:

$$K = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_4 \end{pmatrix}$$

2. Две разных пары комплексно-сопряженных чисел:

$$K = \begin{pmatrix} Re(\rho_1) & Im(\rho_1) & 0 & 0 \\ -Im(\rho_1) & Re(\rho_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Re(\rho_3) & Im(\rho_3) \\ 0 & 0 & -Im(\rho_3) & Re(\rho_3) \end{pmatrix}$$

3. Два разных действительных числа и одна пара комплексно-сопряженных. В этом случае может быть три варианта матрицы K:

$$K = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Re(\rho_3) & Im(\rho_3) \\ 0 & 0 & -Im(\rho_3) & Re(\rho_3) \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} Re(\rho_1) & Im(\rho_1) & 0 & 0 \\ -Im(\rho_1) & Re(\rho_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_4 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Re(\rho_2) & Im(\rho_2) & 0 \\ 0 & -Im(\rho_2) & Re(\rho_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_4 \end{pmatrix}$$

Для вычисления области Q_0, которая строится с учетом требования к запасу устойчивости, необходимо сравнить вещественные части собственных значений матрицы $K(\mathbf{k}, q) + \alpha_0 E_4$ с нулем. Если при произвольно взятой

паре $(k_{1\varphi}, k_{1\theta})$ для всех $q \in [q^{min}, q^{max}]$ вещественные части всех собственных значений этой матрицы меньше нуля, то пара $(k_{1\varphi}, k_{1\theta})$ включается во множество Q_0. Ограничим эту область неравенствами $k_{1\varphi} \geq -12, k_{1\theta} \geq -12$.

Решение системы (2.10) ассимптотически устойчиво только при $(k_{1\varphi}, k_{1\theta}) \in Q_0$, поэтому поиск оптимальных коэффициентов обратной связи далее осуществляется только среди точек из этого множества. Будем искать минимум по $(k_{1\varphi}, k_{1\theta})$ среди всех максимумов по q. Для каждой упорядоченной тройки чисел $(k_{1\varphi}, k_{1\theta}, q)$ будем решать матричное уравнение (2.2), используя $S(\mathbf{k}, q) = E_4, A = K(\mathbf{k}, q)$, после чего вычислять собственные числа матрицы $H(\mathbf{k}, q)$ и выбирать среди них максимальное. Таким образом, путем прохождения по всем узлам построенной сетки, определим $\Phi^0 = \min\limits_{\mathbf{k}\in Q_0} \max\limits_{q\in q_{int}} \max\limits_{||x(t_0)||\leq 1} \Phi(\mathbf{k}, x(t_0), q)$ и значения аргументов, на которых он достигается:

$$\Phi^0 = 0{,}313, k^0_{1\varphi} = -12, k^0_{1\theta} = -12, q = 0{,}925$$

Вычислим $\Phi_0 = \max\limits_{q\in q_{int}} \max\limits_{||x(t_0)||\leq 1} \min\limits_{\mathbf{k}\in Q_0} \Phi(\mathbf{k}, x(t_0), q)$ аналогичным образом: при прохождении по всем узлам построенной сетки будем вычислять собственные числа матрицы $H(\mathbf{k}, q)$. Далее будем выбирать максимальное собственное значение среди всех максимумов по q среди всех минимумов по $(k_{1\varphi}, k_{1\theta})$. Получен численный результат:

$$\Phi_0 = 0{,}289, k^0_{1\varphi} = -8{,}995, k^0_{1\theta} = -8{,}79, q = 0{,}5 = q^{min}$$

В обоих случаях выбранная для моделирования точка $(k_{2\varphi} = -9, k_{2\theta} = -8)$ принадлежит множеству $\mathrm{pr}_{k_{2\varphi}k_{2\theta}}(Q_0)$.

Следует отметить, что при переходе к стационарной системе не была вычислена T-периодическая матрица $F(\mathbf{k}, q, t)$, и на каждом узле разбиения трехмерного пространства параметров при вычислении минимакса и максимина в функционале $\Phi(\mathbf{k}, x(t_0), q)$ использовалась матрица E_4, как и в функционале (2.7), записанном в терминах переменных x. Таким образом величины Φ^0 и Φ_0 были определены не в смысле исходного функционала, а в смысле функционала

$$\Phi_1(\mathbf{k}, q, z(t_0)) = \int\limits_{t_0}^{\infty} z^T E_4 z dt,$$

Однако можно сделать оценку сверху для этого функционала, используя соотношение (2.14):

$$\int_{t_0}^{\infty} z^T E_4 z dt = \int_{t_0}^{\infty} ||F(\mathbf{k}, q, t)^{-1} x||^2 dt \leq \int_{t_0}^{\infty} (F^{max})^2 ||x||^2 dt.$$

В этой задаче $\Phi_0 \neq \Phi^0$. В случае минимакса наихудшее возмущение по v достигается не на границе отрезка q_{int}. В этой задаче имеет место резонанс, при котором достигается наибольшая амплитуда колебаний, которые следящая система должна погасить. Из этого можно заключить, что при произвольных постоянно действующих возмущениях потребуется система стабилизации, которая бы приспосабливалась под возмущающие воздействия.

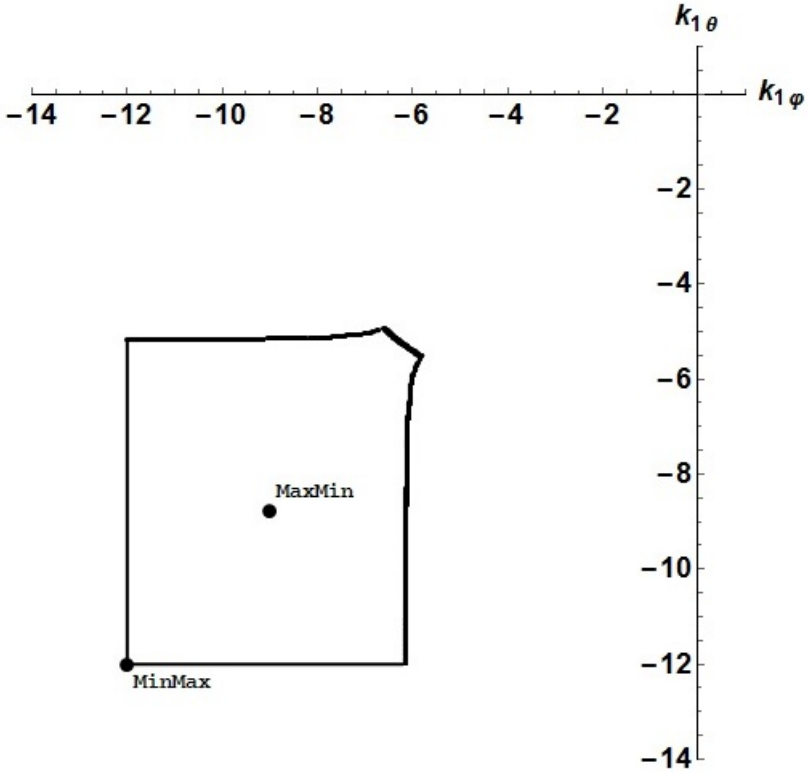


Рисунок 2.14 — Граница множества $\mathrm{pr}_{k_{1\varphi}k_{1\theta}}(Q_0)$, построенного численно при заданных параметрах

На рисунке 2.14 представлена граница множества $\mathrm{pr}_{k_{1\varphi}k_{1\theta}}(Q_0)$ и точки, на которых достигается максимин и минимакс.

2.6 Исследование промежуточного этапа наведения

Задаче стабилизации предшествует этап сведения оси симметрии направляющего цилиндра с линией визирования цели. На этом этапе наведение осуществляется неточно, поскольку предполагается, что полное совпадение линий визирования будет обеспечено на этапе стабилизации.

Рассмотрим задачу быстродействия. Найдем оптимальное управление, которое переводило бы направляющий цилиндр из некоего начального положения в заданное предписанное за минимальное время. Будем считать, что в начальный момент t_0 известны углы $\varphi_P(t_0) = \varphi_P^0, \theta_P(t_0) = \theta_P^0$ и угловые скорости $\dot{\varphi}_P(t_0) = \dot{\varphi}_P^0, \dot{\theta}_P(t_0) = \dot{\theta}_P^0$. Будем искать управление, обеспечивающее в конце процесса координаты $\varphi_P(t_1) = \varphi_{P1}, \theta_P(t_1) = \theta_{P1}^0, \dot{\varphi}_P(t_1) = \dot{\varphi}_{P1}, \dot{\theta}_P(t_1) = \dot{\theta}_{P1}^0$.

Система (2.5) нелинейна и ее уравнения перевязаны между собой. Использование принципа максимума Понтрягина сводит задачу оптимального управления к краевой задаче восьмого порядка, которая аналитически неразрешима.

При необходимости строить оптимальное управление численно, можно строить его приближенно в разные последовательные моменты времени. Линеаризуем систему (2.5) в окрестности начальных углов и начальных угловых скоростей. При линеаризации будем считать, что основание не совершает движений, а также что управляющие моменты u_{φ_P} и u_{θ_P} не равны нулю. Введем вектор фазовых переменных в линеаризованной системе (y_1, y_2, y_3, y_4). Управление будем считать ограниченным: $|u_{\varphi_P}| \leq u_{\varphi_P}^{\max}, |u_{\theta_P}| \leq u_{\theta_P}^{\max}$. Линеаризация этой задаче имеет смысл, если предполагается построение оптимального управления на небольшом временном отрезке. Программные траектории, в окрестности которых проводится линеаризация — это углы и угловые скорости в момент t_0.

Экстремальная задача записывается в виде $t_1 - t_0 \to \min\limits_{u_{\varphi_P}, u_{\theta_P}}$. Будем искать оптимальное управление, обеспечивающее попадание на терминальное многообразие $\mathbf{M} = \{y_1(t_1) = y_1^1, y_2(t_1) = y_2^1, y_3(t_1) = y_3^1, y_4(t_1) = y_4^1\}$. Это означает, что требуется попасть в определенную предписанную точку в четырехмерном фазовом пространстве.

Сделаем замену переменных: $x_1 = y_1 - y_1(t_1), x_2 = y_2 - y_2(t_1), x_3 = y_3 - y_3(t_1), x_4 = y_4 - y_4(t_1)$.

Переформулируем конечные условия в терминах переменных x следующим образом: необходимо попасть на окружность маленького радиуса ε с центром в начале координат. Таким образом, терминальное многообразие в задаче задается в виде $M = \{x_1^2(t_1) + x_2^2(t_1) + x_3^2(t_1) + x_4^2(t_1) = \varepsilon^2\}$.

Введем дополнительную фазовую переменную $x_0 = t_1 - t_0$. Это добавление сводит экстремальную задачу к задаче минимизации терминального функционала: $x_0(t_1) \to \min\limits_{u_{\varphi_P}, u_{\theta_P}}$. Расширенный фазовый вектор имеет вид $x = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$. Система уравнений записывается в форме Коши

$$\dot{x} = Ax + Bu + (1, 0, 0, 0, 0)^T, \tag{2.15}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{42} & a_{43} & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ b_{31} & 0 \\ 0 & b_{42} \end{pmatrix}$$

Индексы в матрицах A и B принимают значения от 0 до 4, поскольку индексация фазовых переменных идет также от нуля до четырех. Коэффициенты матриц A и B зависят от углов и угловых скоростей, в окрестности которых была проведена линеаризация.

Рассмотрим случай, в котором начальная угловая скорость по курсу равна нулю, то есть $\dot{\varphi}_P^0 = 0$. В этом случае $a_{34} = a_{42} = a_{43} = 0$. Выпишем сопряженную систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_0 = 0, \\ \dot{\psi}_1 = 0, \\ \dot{\psi}_2 = -a_{32}\psi_3, \\ \dot{\psi}_3 = -\psi_1 - a_{33}\psi_3, \\ \dot{\psi}_4 = -\psi_2, \end{cases} \tag{2.16}$$

и функцию Понтрягина:

$$H = \psi_0 + x_3\psi_1 + x_4\psi_2 + (a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_{31}u_{\varphi_P})\psi_3 + b_{42}u_{\theta_P}.$$

Условия трансверсальности имеют вид

$$\begin{pmatrix} \psi_0(t_1) \\ \psi_1(t_1) \\ \psi_2(t_1) \\ \psi_3(t_1) \\ \psi_4(t_1) \end{pmatrix} + \lambda_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -2x_1(t_1) \\ -2x_2(t_1) \\ -2x_3(t_1) \\ -2x_4(t_1) \end{pmatrix},$$

где $\mu \geq 0$. Из условий трансверсальности следует, что $\psi_0(t_1) = -\lambda_0 \leq 0$. Видно, что если $\psi_1(t_1) = \psi_2(t_1) = \psi_3(t_1) = \psi_4(t_1) = 0$, то из условия $H \equiv 0$ следует, что единственным решением системы уравнений (2.16) будет тривиальное. Это противоречит принципу максимума. Поэтому нормируем $\mu = 1/2$. Точка на трехмерной сфере в четырехмерном пространстве задается тремя углами. Обозначим их через (α, β, γ). Условия трансверсальности переписываются в виде

$$\begin{aligned} \psi_1(t_1) &= -\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma, \\ \psi_2(t_1) &= -\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma, \\ \psi_3(t_1) &= -\sin\beta\cos\gamma, \\ \psi_4(t_1) &= -\sin\gamma, \end{aligned}$$

где $\alpha \in [-\pi;\pi), \beta \in [-\pi/2;\pi/2], \gamma \in [-\pi/2;\pi/2]$. Оптимальная траектория попадает на окружность извне, поэтому вектор $(\psi_1(t_1), \psi_2(t_1), \psi_3(t_1), \psi_4(t_1))^T$ всегда направлен внутрь окружности.

Из условия принципа максимума получим:

$$u_{\varphi_P} = \begin{cases} u_{\varphi_P}^{\max}, & \psi_3 > 0; \\ -u_{\varphi_P}^{\max}, & \psi_3 < 0; \end{cases} \qquad u_{\theta_P} = \begin{cases} u_{\theta_P}^{\max}, & \psi_4 > 0; \\ -u_{\theta_P}^{\max}, & \psi_4 < 0; \end{cases}$$

Запишем решение системы уравнений (2.16):

$$\psi_0(t) = -\lambda_0,$$
$$\psi_1(t) = \psi_1(t_1),$$
$$\psi_2(t) = \frac{1}{a_{33}^2}(a_{33}(\psi_2(t_1)a_{33} - \psi_3(t_1)a_{32}) + \exp(a_{33}(t_1 - t))\, a_{32}(\psi_1(t_1) + \psi_3(t_1)a_{33}) +$$
$$+ \psi_1(t_1)a_{32}(a_{33}(t - t_1) - 1)),$$
$$\psi_3(t) = \frac{1}{a_{33}}(\exp(a_{33}(t_1 - t))\,(\psi_1(t_1) + \psi_3(t_1)a_{33}) - \psi_1(t_1)),$$
$$\psi_4(t) = \psi_2(t_1)(t_1 - t) + \psi_4(t_1) + \frac{1}{a_{33}^2}(\exp(a_{33}(t_1 - t))\, a_{32}(\psi_1(t_1) +$$
$$+ \psi_3(t_1)a_{33})) + \frac{1}{a_{33}^2}(\psi_3(t_1)a_{32}(a_{33}(t - t_1) - 1)) -$$
$$- \psi_1(t_1)a_{32}(2 + a_{33}(a_{33}(t - t_1) - 2)(t - t_1))\frac{1}{2a_{33}^2}.$$

Решения $\psi_3(t)$ и $\psi_4(t)$ вообще говоря могут иметь конечное число точек, где они обращаются в ноль. Следовательно, оптимальное управление может содержать переключения. Из уравнения $\psi_3(t^*) = 0$ найдем момент переключения u_{φ_P}:

$$t^* = \frac{1}{a_{33}}(\ln(\exp(a_{33}t_1) + \exp(a_{33}t_1)\, a_{33}\, \mathrm{t}g\, \alpha\, \mathrm{t}g\, \beta)).$$

Система уравнений (2.15) может быть решена вместе с (2.16) методом стрельбы, где параметрами пристрелки выступают углы (α, β, γ) и параметр t_1.

Глава 3. Дифференциальные игры оператора и водителя подвижного основания и разработка математического обеспечения для компьютерного и динамического тренажеров

В этой главе рассматриваются примеры игровой задачи целеуказания, постановка которой была изложена в первой главе. Это задача первого этапа наведения на цель. Во всех рассматриваемых в этой главе задачах движение основания моделируется кинематическими уравнениями. В первых двух примерах рассматривается движение основания по гладкой горизонтальной плоскости. Это позволяет описывать ориентацию корпуса подвижного основания с помощью одной угловой координаты — угла курса. В третьем примере используется модель, допускающая произвольную ориентацию подвижного основания. В этом случае ориентация основания описывается тремя углами — курса, тангажа и крена. В этой модели на угловые координаты и угловые скорости наложены ограничения.

Глава состоит из трех частей. В первой части поставлены и решены две игровые задачи целеуказания. Первая — задача качества, где исследуется принципиальная возможность сведения линий визирования маркера оператора и цели. Вторая — задача быстродействия. Цель этой задачи — найти управление, позволяющее оператору сводить линию визирования его маркера с линией визирования цели наиболее быстро.

Во второй части описана и решена игровая задача качества наведения на цель. В этой задаче оператору дается ограниченный период времени. Его задача — свести линии визирования настолько точно, насколько это возможно. Игровая задача сведена к геометрической игре на плоскости с нелинейной метрикой. Большая часть решения игровой задачи посвящена изучению структуры множества достижимости системы нелинейных дифференциальных уравнений, которые описывают движение линии визирования цели. Для этой игровой задачи найдено решение в программных и смешанных стратегиях, поскольку в некоторых случаях исследуемая игра не имеет седловой точки в программных стратегиях. Описана методика вычисления оптимальных стратегий оператора и наихудших возмущений, на которые оператору следует ориентироваться при тренировке.

В третьей части рассмотрены компьютерный и динамический тренажеры, на которых реализован процесс тренировки оператора целеуказания. Изложены результаты экспериментов, проведенных на ряде испытуемых. Обработка данных показала, что тренировки улучшают навыки оператора наведения.

Глава содержит материалы, изложенные в статье [48] [1]*, написанной соискателем.*

3.1 Игровые задачи целеуказания при движении основания по горизонтальной плоскости

В первой главе были введены следующие системы координат:

$O\xi_1^*\xi_2^*\xi_3^*$ — система координат, связанная с Землей. Ось $O\xi_3^*$ направлена вертикально вверх;

$C\xi_1\xi_2\xi_3$ — опорная система отсчета, не совершающая вращательных движений и оси которой сонаправлены с осями системы отсчета $O\xi_1^*\xi_2^*\xi_3^*$. Точка C связана с подвижным основанием;

$Cz_1z_2z_3$ — приборная система отсчета (приборный трехгранник). Эта система координат жестко связана с основанием и соответственно с осями чувствительности инерциальных датчиков, входящих в состав ИНС. Она совершает поступательные и вращательные движения относительно системы координат $O\xi_1^*\xi_2^*\xi_3^*$.

Рассмотрим задачу целеуказания. Пусть основание движется по гладкой горизонтальной плоскости. Такое движение основания моделируется классической машиной Дубинса [22]. Модель машины Дубинса — простейшая кинематическая модель автомобиля. Эта модель была разработана для задачи нахождения кратчайшего пути на плоскости, соединяющего две точки, при заданных ограничениях на кривизну. Считается, что объект двигается по гладкой плоскости с постоянной по величине линейной скоростью V и совершает повороты вокруг вертикальной оси $C\xi_3$. При таком движении

[1] Латонов В.В. Программные стратегии тестирования качества управления линией визирования по видеоизображению // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2018. — № 6. — С. 51–56.

ось $C\xi_3$ будет совпадать с осью Cz_3. Угол поворота основания вокруг вертикальной оси обозначается через ψ. Эта модель задается системой уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1^* = -V\sin\psi, \\ \dot{\xi}_2^* = V\cos\psi, \\ \dot{\psi} = w_1, \end{cases} \tag{3.1}$$

$$w_1(\cdot) \in W = \{PC : |w_1| \leq w_1^{\max}\}.$$

где w_1 — управление, определяющее угловую скорость машины Дубинса. Направление линий визирования определяется углом курса φ и углом возвышения θ. Из уравнений (3.1) определяются уравнения линии визирования цели:

$$\begin{cases} \dot{\varphi_E} = -w_1, \\ \dot{\theta_E} = 0, \end{cases} \tag{3.2}$$

$$\varphi_E(t_0) = \varphi_E^0, \quad \theta_E(t_0) = \theta_E^0,$$
$$w_1(\cdot) \in W = \{PC : |w_1| \leq w_1^{\max}\}.$$

Заданы начальные условия $\varphi_E(t_0) = \varphi_E^0, \theta_E(t_0) = \theta_E^0$. Используем в этой задаче кинематические уравнения линии визирования маркера оператора, введенные в первой главе:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_M = u_1, \\ \dot{\theta}_M = u_2, \end{cases} \tag{3.3}$$

$$\varphi_M(t_0) = \varphi_M^0, \quad \theta_M(t_0) = \theta_M^0,$$
$$u_1(\cdot), u_2(\cdot) \in U_M = \{PC : |u_1| \leq u_1^{\max}, |u_2| \leq u_2^{\max}\}.$$

Исследуем две антагонистических игры между маркером M и целью E с разными функционалами. Дадим определения, которые потребуются в этих задачах.

Определение 3.1. Областью встречи C_{Π}^{ε} называется множество таких начальных состояний игроков $(\varphi_M^0, \theta_M^0, \varphi_E^0, \theta_E^0)$, что для преследователя

существует стратегия, обеспечивающая его попадание в ε-окрестность убегающего независимо от поведения последнего.

Определение 3.2. Областью встречи в поле зрения камеры $C^{\varepsilon}_{\Pi F}$ будем называть множество таких начальных состояний игроков, что для преследователя существует стратегия, обеспечивающая его попадание независимо от поведения убегающего, в ε-окрестность убегающего до того, как он покинет множество F.

Множества C^{ε}_{Π} и $C^{\varepsilon}_{\Pi F}$ определены в $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ и зависят от ресурсов управления убегающего и преследователя. Очевидно, что $C^{\varepsilon}_{\Pi F} \subset C^{\varepsilon}_{\Pi}$, поскольку если при начальном состоянии $(\varphi^0_M, \theta^0_M, \varphi^0_E, \theta^0_E)$ преследователь может попасть в ε-окрестность убегающего до того, как он покинет множество F, значит из этого состояния преследователь может попасть в ε-окрестность убегающего.

3.1.1 Дифференциальная игра качества

Введем функцию, которая определяет качество совмещения двух единичных по модулю векторов, определяющих направление линий визирования маркера оператора и цели (рис. 3.1). Определим, чему равен угол раствора между двумя векторами. Пусть $(\varphi_M, \theta_M, \varphi_E, \theta_E)$ — четверка сферических координат, определяющих два вектора. Первые два параметра — углы курса и возвышения вектора M, а последние два — углы курса и возвышения вектора E.

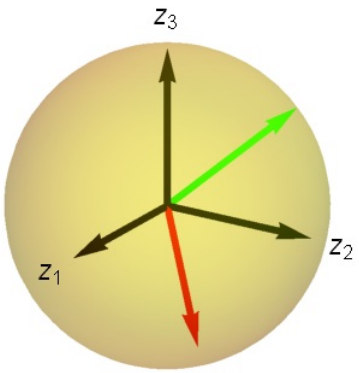


Рисунок 3.1 — Единичные векторы, определяющие направление линий визирования цели и маркера оператора

Введем функцию, определяющую угол между линиями визирования маркера и цели как функцию времени. Найти угол между двумя единичными векторами означает найти сферическое расстояние между двумя точками на единичной сфере, которых касаются концы этих векторов. Геодезическая между двумя точками на сфере (φ_M, θ_M) и (φ_E, θ_E) задается пересечением сферы и плоскости, которая проходит через эти две точки и центр сферы. Первая квадратичная форма сферы единичного радиуса имеет вид

$$ds^2 = d\theta^2 + \cos^2\theta d\varphi^2.$$

Выразим расстояние между точками (φ_M, θ_M) и (φ_E, θ_E) с помощью функции

$$H(\varphi_M, \theta_M, \varphi_E, \theta_E) = \int\limits_{(\varphi_M,\theta_M)}^{(\varphi_E,\theta_E)} \sqrt{d\theta^2 + \cos^2\theta d\varphi^2}.$$

Обозначим предписанную точность наведения через ε, через t_1 — первый момент попадания траекторий на множество $H(\varphi_M(t_1), \theta_M(t_1), \varphi_E(t_1), \theta_E(t_1)) \le \varepsilon$. Введем функционал выигрыша:

$$J_1(\varphi_M^0, \theta_M^0, \varphi_E^0, \theta_E^0, u_1, u_2, w_1) = \begin{cases} 1, & t_1 < \infty, (\varphi_E(t_1), \theta_E(t_1)) \in F, \\ 0, & t_1 < \infty, (\varphi_E(t_1), \theta_E(t_1)) \notin F, \\ -1, & t_1 = \infty, \end{cases} \tag{3.4}$$

где $(u_1, u_2)(\cdot) \in U, w_1(\cdot) \in W$ — ресурсы управления и возмущения, а F — множество угловых параметров линии визирования цели, при которых она видна на мониторе. Это множество было определено в разделе 1.2.3. Из этого определения следует, что граница F задается равенствами:

$$\varphi = \begin{cases} \arccos\left(\frac{f}{b}\,\mathrm{tg}\,|\theta|\right), & |\theta| > \mathrm{arctg}\left(\frac{b}{f}\cos\left(\mathrm{arctg}\,\frac{a}{f}\right)\right); \\ \mathrm{arctg}\,\frac{a}{f}, & |\theta| \le \mathrm{arctg}\left(\frac{b}{f}\cos\left(\mathrm{arctg}\,\frac{a}{f}\right)\right). \end{cases}$$

Уравнения (3.3) и (3.2) и функционал качества (3.4) определяют игру оператора и подвижного основания, движением которого определяется направление линии визирования цели в системе координат, связанной с основанием. Будем эту игру называть игрой оператора и цели. В этой игре оператор старается максимизировать функционал качества (3.4), а цель —

минимизировать. Эта игра называется игрой качества [55]. Результат этой игры зависит от начальных состояний игроков.

Рассмотрим случай, когда $\varepsilon = 0$, т. е. требуется полное совпадение линий визирования маркера и цели. Будем считать, что каждому из игроков доступна информация о своем положении и положении противника. Угол θ_E не меняется, поскольку основание движется по плоскости. Скомбинируем уравнения (3.3) и (3.2) и введем новые переменные: $x_\varphi = \varphi_M - \varphi_E, x_\theta = \theta_M - \theta_E$.

$$\begin{cases} \dot{x}_\varphi = u_1 + w_1, \\ \dot{x}_\theta = u_2. \end{cases} \tag{3.5}$$

Множества C^ε_Π и $C^\varepsilon_{\Pi F}$ зависят от ресурсов управления $(u_1^{\max}, u_2^{\max})$ и возмущения $w_1^{\max}$. Рассмотрим случай, когда $w_1^{\max} < u_1^{\max}$. В этом случае из вида уравнений (3.3) следует, что всегда существует управление u_1, приводящее переменную x_φ в ноль. Для переменной x_θ всегда существует управление u_2, приводящее ее в ноль. Следовательно, в этом случае $C^\varepsilon_\Pi = R^2 \times R^2$.

Чтобы определить множество $C^\varepsilon_{\Pi F}$, необходимо определить, при каких начальных положениях игроков у убегающего (E) гарантированно существует управление, при котором догоняющий (M) не сможет его догнать до момента покидания множества F.

Траектория убегающего на плоскости (φ, θ) — всегда прямая, параллельная оси абсцисс, поскольку свой угол возвышения убегающий игрок менять не может. Из начального положения θ^0_M можно определить две точки на границе F, через которые убегающий может покинуть это множество. Эти точки имеют координаты $(\pm\varphi_{\max}, \theta^0_E)$, где

$$\varphi_{\max} = \begin{cases} \arccos\left(\frac{f}{b}\,\mathrm{t}g\,|\theta^0_E|\right), |\theta^0_E| > \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{f}\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{a}{f}\right)\right); \\ \operatorname{arctg}\frac{a}{f}, |\theta^0_E| \le \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{f}\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{a}{f}\right)\right). \end{cases}$$

По определению, $\varphi_{\max} > 0$. Следовательно, управление $w_1 = \pm w_1^{\max}$ обеспечивает убегающему наискорейшее попадание в эти точки (знак перед $w_1^{\max}$ выбирается в зависимости от требуемого направления). Введем угол $\varphi_{\max}$. Минимальное время, которе убегающий затратит на достижение граничных точек, равно $\frac{|\varphi^0_E \pm \varphi_{\max}|}{w_1^{\max}}$. Чтобы у догоняющего (M) была возможность догнать убегающего (E) до, того, как убегающий покинет множество F, у до-

гоняющего (M) должна быть возможность достичь точек $(\pm\varphi_{\max}, \theta_E^0)$ быстрее, чем убегающий (E). Для этого он должен достигать $\pm\varphi_{\max}$ и θ_E^0 быстрее $\frac{\varphi_E^0 \pm \varphi_{\max}}{w_1^{\max}}$. Минимальное время, необходимое догоняющему для достижения $\pm\varphi_{\max}$ равно $\frac{|\varphi_M^0 \pm \varphi_{\max}|}{u_1^{\max}}$. Минимальное время, необходимое догоняющему для достижения θ_E^0 равно $\frac{|\theta_M^0 - \theta_E^0|}{u_2^{\max}}$. Учитывая, что φ_E^0 может быть как больше, так и меньше φ_M^0, множество $C_{\Pi F}^{\varepsilon}$ представляется в виде пересечения двух множеств:

$$C_{\Pi F}^{\varepsilon} = \{\frac{\varphi_{\max} - \varphi_E^0}{w_1^{\max}} \geq \max\{\frac{|\theta_M^0 - \theta_E^0|}{u_2^{\max}}, \frac{\varphi_{\max} - \varphi_M^0}{u_1^{\max}}\}\} \cap$$
$$\cap\{\frac{\varphi_{\max} + \varphi_E^0}{w_1^{\max}} \geq \max\{\frac{|\theta_M^0 - \theta_E^0|}{u_2^{\max}}, \frac{\varphi_{\max} + \varphi_M^0}{u_1^{\max}}\}\}.$$

Таким образом, догоняющему требуется максимально быстрое сближение с убегающим независимо от начальных условий. Если начальные условия позволяют убегающему отсрочить момент встречи, или вовсе его избежать, он это сможет сделать при оптимальном управлении независимо от действий догоняющего. Аналогично, если начальные условия и ресурсы управления позволяют игроку M догнать игрока E, он сможет это сделать, независимо от действий игрока E при оптимальном управлении. Таким образом, значения $\max\limits_{w_1 \in W} \min\limits_{(u_1,u_2)\in U} J_1$ и $\min\limits_{(u_1,u_2)\in U} \max\limits_{w_1 \in W} J_1$ определяются лишь начальными условиями и ресурсами управления игроков. Оптимальное управление для догоняющего определяется следующими соотношениями:

$$u_1 = \begin{cases} u_1^{\max} \operatorname{sign}(\varphi_E - \varphi_M), & \varphi_M \neq \varphi_E; \\ \dot{\varphi}_E, & \varphi_M = \varphi_E, \end{cases} \tag{3.6}$$

$$u_2 = \begin{cases} u_2^{\max} \operatorname{sign}(\theta_E - \theta_M), & \theta_M \neq \theta_E; \\ 0, & \theta_M = \theta_E. \end{cases} \tag{3.7}$$

Это управление не зависит от начальных положений игроков. Оптимальное возмущение задается более сложно, поскольку если начальное положение игроков не принадлежит множеству $C_{\Pi F}^{\varepsilon}$, у убегающего есть возможность свести функционал к нулю, то есть убежать за пределы F до момента поимки. Для этого требуется определить, в какую сторону требуется убегать от догоняющего. Это определяется по начальным условиям. Убегать следует

вправо, если либо есть возможность убежать только вправо до момента поимки в F, либо нет возможности убежать до момента поимки в F, но убегание вправо отсрочит поимку более, чем убегание влево. Аналогично определяются случаи, в которых следует убегать влево. Если есть возможность убежать как влево, так и вправо, то следует убегать вправо, если угол φ убегающего больше, чем у догоняющего, и влево, если φ убегающего меньше, чем у догоняющего. Таким образом, оптимальное управление убегающего определяется по следующим правилам:

$w_1 = w_1^{\max}$, если выполняется одно из условий:

$$1.(\varphi_M^0, \theta_M^0, \varphi_E^0, \theta_E^0) \in C_{\Pi F}^{\varepsilon}, \frac{\varphi_{\max} - \varphi_E^0}{w_1^{\max}} \geq \frac{\varphi_E^0 + \varphi_{\max}}{w_1^{\max}};$$
$$2.\frac{\varphi_{\max} - \varphi_E^0}{w_1^{\max}} \leq \max\{\frac{|\theta_M^0 - \theta_E^0|}{u_2^{\max}}, \frac{\varphi_{\max} - \varphi_M^0}{u_1^{\max}}\};$$

$w_1 = -w_1^{\max}$, если выполняется одно из условий:

$$1.(\varphi_M^0, \theta_M^0, \varphi_E^0, \theta_E^0) \in C_{\Pi F}^{\varepsilon}, \frac{\varphi_{\max} - \varphi_E^0}{w_1^{\max}} < \frac{\varphi_E^0 + \varphi_{\max}}{w_1^{\max}};$$
$$2.\frac{\varphi_E^0 + \varphi_{\max}}{w_1^{\max}} \leq \max\{\frac{|\theta_M^0 - \theta_E^0|}{u_2^{\max}}, \frac{\varphi_M^0 + \varphi_{\max}}{u_1^{\max}}\};$$

$w_1 = w_1^{\max} \operatorname{sign}(\varphi_E - \varphi_M)$, если:

$$\frac{\varphi_{\max} - \varphi_E^0}{w_1^{\max}} \leq \max\{\frac{|\theta_M^0 - \theta_E^0|}{u_2^{\max}}, \frac{\varphi_{\max} - \varphi_M^0}{u_1^{\max}}\} \frac{\varphi_E^0 + \varphi_{\max}}{w_1^{\max}} \leq \max\{\frac{|\theta_M^0 - \theta_E^0|}{u_2^{\max}}, \frac{\varphi_M^0 + \varphi_{\max}}{u_1^{\max}}\}.$$

На рисунке 3.2 изображены множество F и множество $C_{\Pi F}^{\varepsilon}$ (заштриховано) для фиксированного начального положения маркера при $u_1^{\max} = 0{,}4, u_2^{\max} = 0{,}15, w_1^{\max} = 0{,}1, \varphi_M^0 = 0{,}7, \theta_M^0 = 0{,}2$. Изображено начальное положение маркера $(\varphi_M^0, \theta_M^0)$. Если начальное положение изображения цели находится в заштрихованной области, то у оператора всегда существует управление, обеспечивающее сведение маркера с изображением цели до того, как цель покинет поле зрения видеокамеры.

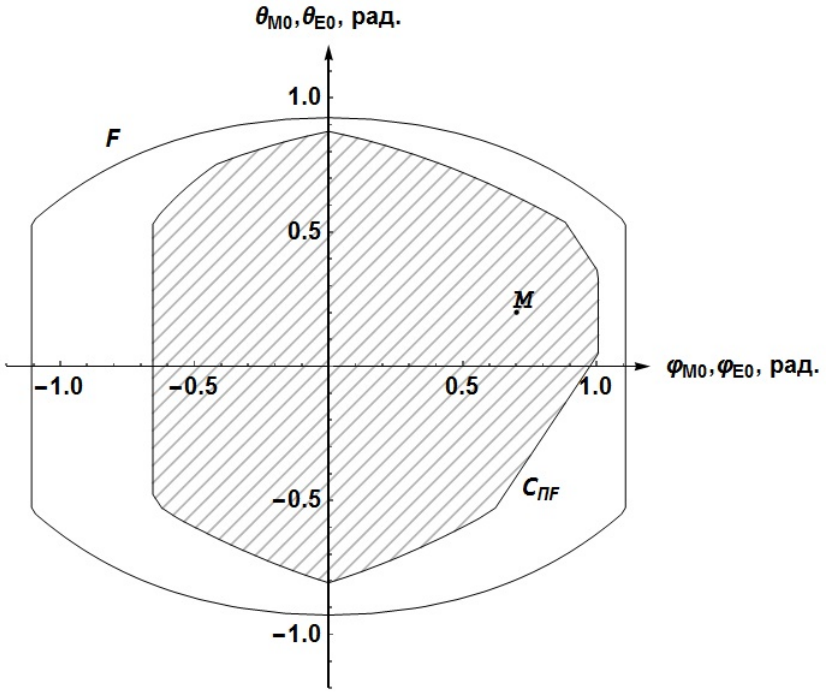


Рисунок 3.2 — Множество F, множество $C^{\varepsilon}_{\Pi F}$ (заштриховано) при $\varepsilon = 0$ и начальное положение маркера $(\varphi^0_M, \theta^0_M)$

Значения $\max\limits_{w_1 \in W} \min\limits_{(u_1,u_2)\in U} J_1$ и $\min\limits_{(u_1,u_2)\in U} \max\limits_{w_1 \in W} J_1$ равны между собой, поскольку выбор управления каждого из игроков определяется начальными условиями и не зависит от выбора оптимального управления противника.

Если начальные условия принадлежат множеству $C^{\varepsilon}_{\Pi F}$, то $\max\limits_{w_1 \in W} \min\limits_{(u_1,u_2)\in U} J_1$ равен единице. Если же начальные условия лежат в области $C^{\varepsilon}_{\Pi} \setminus C^{\varepsilon}_{\Pi F}$, то $\max\limits_{w_1 \in W} \min\limits_{(u_1,u_2)\in U} J_1$ равен нулю. Если условие $w_1^{\max} < u_1^{\max}$ не выполняется, то $\max\limits_{w_1 \in W} \min\limits_{(u_1,u_2)\in U} J_1$ равен минус единице. Таким образом, седловая точка дифференциальной игры качества существует при $\varepsilon = 0$.

3.1.2 Дифференциальная игра быстродействия

В этой задаче снова будем использовать классическую машину Дубинса в качестве модели подвижного основания. Уравнения, описывающие движение игроков такие же, как и в предыдущей задаче (3.3) и (3.2). Рассмотрим функционал быстродействия:

$$J_2(\varphi^0_M, \theta^0_M, \varphi^0_E, \theta^0_E, u, w) = t_1 - t_0.$$

В этой задаче догоняющий старается минимизировать время до попадания в ε-окрестность убегающего, в то время как убегающий старается его максимизировать. В этом случае игра заканчивается в момент первого попадания догоняющего в ε-окрестность изображения цели. Как и в предыдущей задаче, положим $\varepsilon = 0$, т. е. требуется полное совпадение линий визирования маркера и цели. Снова будем считать, что каждому из игроков доступна информация о своём положении и положении противника.

Рассмотрим игру быстродействия. Она имеет смысл, если известно, что сближение маркера с целью возможно, т.е. если $(\varphi_M^0, \theta_M^0, \varphi_E^0, \theta_E^0) \in C_{\Pi}^{\varepsilon}$. Это означает, что $w_1^{\max} < u_1^{\max}$. Рассмотрим случай, когда начальные состояния игроков принадлежат множеству $C_{\Pi F}^{\varepsilon}$ и каждому из игроков доступна информация о своем положении и положении противника. Принадлежность начальных состояний к $C_{\Pi F}^{\varepsilon}$ не гарантирует, что цель не убежит за пределы множества F (при неоптимальной стратегии оператора это возможно). Поэтому если в процессе игры цель убежала за пределы множества F, то такую игру будем считать несостоявшейся.

Условие $w_1^{\max} < u_1^{\max}$ гарантирует возможность сведения линий визирования за конечное время из любых начальных состояний. В работе [45] такой случай игры преследования называется грубым. Для него доказано существование седловой точки.

В игре быстродействия оптимальное управление для оператора задается соотношениями (3.6) и (3.7), а оптимальное возмущение определяется соотношением:

$$w_1 = \begin{cases} -w_1^{\max} \operatorname{sign}(\varphi_E - \varphi_M), \varphi_M \neq \varphi_E; \\ \pm w_1^{\max}, \varphi_M = \varphi_E. \end{cases}$$

Знак $\pm$ используется в этой формуле потому, что не имеет значения, куда в какую сторону двигаться убегающему игроку, если уже произошло полное совпадение φ_M φ_E.

Таким образом, оптимальное возмущение для игры преследования быстродействия отличается от оптимального возмущения для игры преследования качества. Это объясняется тем, что цель убегающего — отсрочить момент встречи. Тем не менее, придерживаясь оптимального управления, оператор не только обеспечивает минимальное время преследования, но и гарантированно не позволяет изображению цели «убежать» за пределы монитора до момента встречи.

На рисунке 3.3 по оси абсцисс отмеряется угол φ. Показано начальное положение маркера φ_M^0. На этом графике показана зависимость времени встречи t_1 двух игроков от начального значения φ_E^0 при оптимальном поведении обоих игроков, которое задано формулами выше. Это значение функционала J_2. Этот график получен путем интегрирования уравнений (3.5) при оптимальных u_1, u_2 и w_1 для этой задачи быстродействия. Видно, что чем дальше в изображение цели от маркера начале игры, тем больше потребуется времени оператору на сведение маркера с изображением цели.

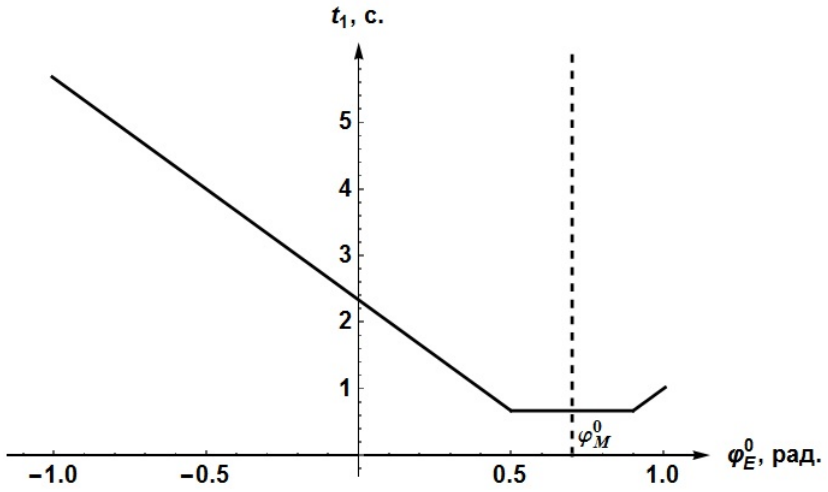


Рисунок 3.3 — Зависимость момента t_1 окончания игры от начального значения φ_E^0

Значения $\max\limits_{w_1 \in W} \min\limits_{(u_1,u_2)\in U} J_2$ и $\min\limits_{(u_1,u_2)\in U} \max\limits_{w_1 \in W} J_2$ в этой игре равны, поскольку оптимальные стратегии каждого из игроков, как и в предыдущей задаче, зависят лишь от начальных условий, а не от стратегии противника.

3.1.3 Анализ движения изображающей точки цели на плоскости монитора

Продифференцировав соотношения (1.1) и (1.2), определенные в первой главе, и скомбинировав их, получим дифференциальные уравнения, описы-

вающие движение изображения цели на мониторе:

$$\begin{cases} \dot{\chi}_{1E} = f w_1 + \frac{w_1}{f}\chi_{1E}^2, \\ \dot{\chi}_{2E} = \frac{w_1}{f}\chi_{1E}\chi_{2E}, \\ \dot{\psi} = w_1, \end{cases}$$

где w_1 — угловая скорость основания. В системе координат $Cz_1z_2z_3$, связанной с основанием, она равна $(0, 0, w_1)^T$.

Рассмотрим произвольную точку E и углы (φ_E, θ_E), соответствующие ее линии визирования. Угол θ_E фиксирован, поскольку классическая машина Дубинса вращается только вокруг вертикали. При фиксированном θ_E изменение угла φ_E вызовет движение точки E_Π (изображение точки E) по гиперболе, задаваемой формулой:

$$c^2\chi_{2E}^2 - \frac{\chi_{1E}^2}{f^2} = 1, \quad c = 1/(\chi_{20}\cos(\operatorname{arctg}\frac{\chi_{10}}{f})).$$

Константа c определяется из начальных условий изображения точки на мониторе:

$$\chi_{1E}(t_0) = \chi_{10} = f\,\mathrm{tg}\,\varphi_E(t_0), \quad \chi_{2E}(t_0) = \chi_{20} = f\,\mathrm{tg}\,\theta_E(t_0)\frac{1}{\cos\varphi_E(t_0)}.$$

Таким образом, при фиксированном θ_E, геометрическое место точек, через которые может проходить траектория изображения точки E на мониторе, определяется лишь начальным положением изображения E_Π, и не зависит от угловой скорости основания.

На рисунке 3.4 изображены траектории изображающей точки цели при различных значениях константы c.

В случае произвольного движения основания траектория изображающей точки зависит не только от начального угла возвышения.

3.2 Постановка задачи максиминного тестирования качества целеуказания

В предыдущем параграфе рассматривались антагонистические игры качества и быстродействия. В этом параграфе рассматривается игра, в которой строится количественная оценка работы оператора, решающего задачу

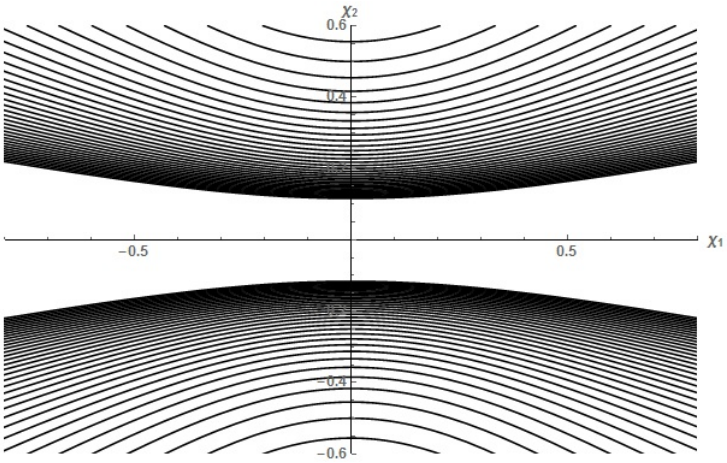


Рисунок 3.4 — Траектории изображающей точки цели при различных значениях константы c

целеуказания в экстремальных условиях. В дальнейшем будем обозначать через u вектор управлений маркером оператора, а через w — вектор управлений подвижным основанием.

3.2.1 Задача обучения оператора

Обозначим через κ угол раствора между двумя линиями визирования. Введем функцию, определяющую величину угла раствора между ними:

$$J(u, w) = -\langle \mathbf{e}_E(t_1), \mathbf{e}_M(t_1) \rangle = -\cos\kappa, \tag{3.8}$$

где $\mathbf{e}_E(t)$ и $\mathbf{e}_M(t)$ — единичные направляющие векторы двух линий визирования. Функционал (3.8) терминальный — его значение зависит от положения игроков в момент окончания игры, поэтому его можно рассмотреть как функцию от четырех переменных, то есть от двух точек, расположенных на одной плоскости (φ, θ). Она определена на множестве $\{\varphi_M(t_1) \in [-\pi, \pi], \quad \theta_M(t_1) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \quad \varphi_E(t_1) \in [-\pi, \pi], \quad \theta_E(t_1) \in (-\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2})\}$. Значение этой функции зависит от двух точек, расположенных на одной плоскости (φ, θ), и у нее есть простой геометрический смысл — это косинус угла раствора между направляющими векторами линий визирования маркера и цели. В дальнейшем также будем использовать обозначение $J(\mathbf{e}_E, \mathbf{e}_M)$ и называть это функцией двух точек. Запишем определение этой функции:

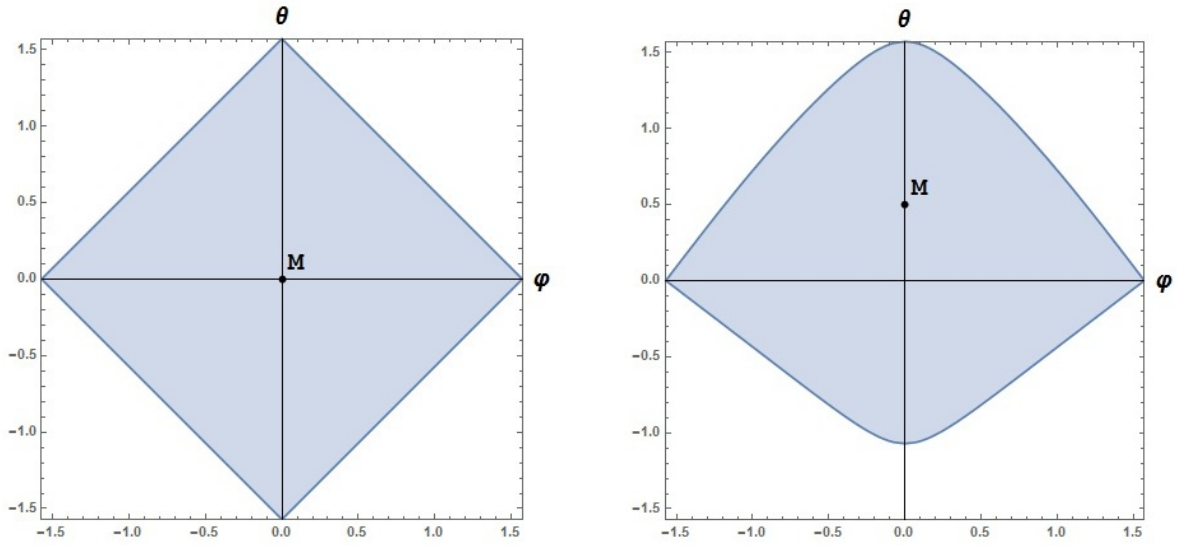
$$J(\mathbf{e}_E, \mathbf{e}_M) = -(\cos\theta_E \cos\theta_M \cos(\varphi_E - \varphi_M) + \sin\theta_E \sin\theta_M)$$

Зафиксировав любую из двух точек, получим функцию, зависящую от двух переменных. Она определена на множестве $\{\varphi_M(t_1) \in [-\pi, \pi], \quad \theta_M(t_1) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \quad \varphi_E(t_1) \in [-\pi, \pi], \quad \theta_E(t_1) \in (-\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2})\}$ и не является выпуклой на всей области определения. Однако, можно выделить подобласть, на которой она строго выпукла. Зафиксируем точку $(\varphi_M, \theta_M) = (\varphi_M^*, \theta_M^*)$, оставив свободными переменные (φ_E, θ_E) (ситуация с фиксированной точкой E и свободной точкой M рассматривается аналогично). Через $\widetilde{J}(\mathbf{e}_E)$ обозначим функцию $J(\mathbf{e}_E, \mathbf{e}_M)$ с зафиксированной точкой M. Определим область выпуклости этой функции.

Согласно критерию выпуклости функции, функция $\widetilde{J}(\mathbf{e}_E)$ выпукла в той области, где матрица Гессе этой функции положительно определена. Эта матрица имеет размер 2×2. Условие положительной определенности этой матрицы записывается в виде неравенств:

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 \widetilde{J}(\mathbf{e}_E)}{\partial \theta_M^2} = -\widetilde{J}(\mathbf{e}_E) \leq 0$$
$$\Delta_2 = \widetilde{J}(\mathbf{e}_E)(\cos\theta_E \cos\theta_M^* \cos(\varphi_E - \varphi_M^*)) - \cos^2\theta_M^* \sin^2\theta_E \sin^2(\varphi_E - \varphi_M^*)) \geq 0$$

которые определяют область на плоскости (φ, θ), зависящую от $\mathbf{e}_M$.



а) Область выпуклости $\widetilde{J}(\mathbf{e}_E)$ при $\varphi_M^* = \theta_M^* = 0$

б) Область выпуклости $\widetilde{J}(\mathbf{e}_E)$ при $\varphi_M^* = 0, \theta_M^* = 0.5$

Рисунок 3.5

На рисунке 3.5 изображены примеры области выпуклости функции $\widetilde{J}(\mathbf{e}_E)$ при разных точках $\mathbf{e}_M$. На рисунке 3.5а эта точка расположена в на-

чале координат, а на рисунке 3.5б ее координаты равны $(0,0{,}5)$. Область выпуклости $\widetilde{J}(\mathbf{e}_E)$ достаточно большая. В дальнейшем при решении задач оптимального управления будем полагать, что функция $J(\mathbf{e}_E, \mathbf{e}_M)$ выпукла по обоим параметрам.

3.3 Постановка задачи максиминного тестирования с тремя угловыми степенями свободы подвижного основания

3.3.1 Уравнения движения игроков

В предыдущей главе рассматривалась классическая модель машины Дубинса. В этой модели используется только один угловой параметр для определения ориентации основания. Существует расширение этой модели до двух угловых параметров — углов курса и тангажа. Эта модель также известна как самолет Дубинса [2] и используется для нахождения кратчайшего пути в трехмерном пространстве. В этой главе рассматривается расширение модели машины Дубинса до трех угловых параметров — углов курса, тангажа и крена. Управляющие моменты в этой модели пропорциональны угловым ускорениям. Углы курса, тангажа и крена обзначаются через α, β, γ соответственно. Пусть V — скорость движения основания, которую будем считать постоянной. Вектор скорости направлен вдоль оси Cz_2. Учитывая вид матрицы ориентации (1.7), получим уравнения, описывающие движение этой машины:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = -V \sin\alpha \cos\beta, \\ \dot{\xi}_2 = V \cos\alpha \cos\beta, \\ \dot{\xi}_3 = V \sin\beta, \\ \dot{\alpha} = \omega_\alpha, \\ \dot{\beta} = \omega_\beta, \\ \dot{\gamma} = \omega_\gamma, \\ \dot{\omega}_\alpha = w_\alpha, \\ \dot{\omega}_\beta = w_\beta, \\ \dot{\omega}_\gamma = w_\gamma, \end{cases}$$

Выведем дифференциальные уравнения, определяющие углы курса и возвышения линии визирования цели. Воспользуемся уравнением Пуассона [27] и соотношениями (1.2) и выразим скорости изменения φ_E и θ_E:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_E = -\omega_{z_3} - \omega_{z_1} \sin\varphi_E \operatorname{tg}\theta_E + \omega_{z_2} \cos\varphi_E \operatorname{tg}\theta_E \\ \dot{\theta}_E = \omega_{z_1} \cos\varphi_E + \omega_{z_2} \sin\varphi_E \end{cases} \tag{3.9}$$

Эти уравнения определяют скорости изменения углов курса и возвышения цели как функции от проекций угловой скорости основания на оси системы $Cz_1z_2z_3$. Выразим правые части этих уравнений как функции ω_α, ω_β и ω_γ. Найдем преобразование $(\omega_{z_1}, \omega_{z_2}, \omega_{z_3})$ в $(\omega_\alpha, \omega_\beta, \omega_\gamma)$.

Ориентация подвижного основания задается цепочкой поворотов (1.6). В соответствие с этой цепочкой поворотов угловая скорость трехгранника $Cz_1z_2z_3$ в проекциях на свои оси есть

$$\begin{cases} \omega_{z_1} = -\omega_\alpha \cos\beta \sin\gamma + \omega_\beta \cos\gamma, \\ \omega_{z_2} = \omega_\alpha \sin\beta + \omega_\gamma, \\ \omega_{z_3} = \omega_\alpha \cos\beta \cos\gamma + \omega_\beta \sin\gamma. \end{cases} \tag{3.10}$$

Разрешая эту систему относительно производных от углов Крылова получим:

$$\begin{cases} \omega_\alpha = \frac{1}{\cos\beta}(\omega_{z_3} \cos\gamma - \omega_{z_1} \sin\gamma), \\ \omega_\beta = \omega_{z_3} \sin\gamma + \omega_{z_1} \cos\gamma, \\ \omega_\gamma = \omega_{z_2} - \omega_{z_3} \cos\gamma \operatorname{tg}\beta + \omega_{z_1} \sin\gamma \operatorname{tg}\beta. \end{cases} \tag{3.11}$$

Обозначим через $\mathbf{p}$ вектор-столбец переменных $\mathbf{p} = (\varphi_E, \theta_E)^T$, который характеризует положение линии визирования цели в системе координат, связанной с основанием. Подставим соотношения (3.11) в уравнения (3.9), получим полные уравнения линии визирования цели:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}} = \omega_\alpha V_\alpha(\mathbf{p}, \alpha, \beta, \gamma) + \omega_\beta V_\beta(\mathbf{p}, \alpha, \beta, \gamma) + \omega_\gamma V_\gamma(\mathbf{p}, \alpha, \beta, \gamma), \\ \dot{\alpha} = \omega_\alpha, \\ \dot{\beta} = \omega_\beta, \\ \dot{\gamma} = \omega_\gamma, \\ \dot{\omega}_\alpha = w_\alpha, \\ \dot{\omega}_\beta = w_\beta, \\ \dot{\omega}_\gamma = w_\gamma, \end{cases} \tag{3.12}$$

где $V_\alpha(\mathbf{p}, \alpha, \beta, \gamma)$, $V_\beta(\mathbf{p}, \alpha, \beta, \gamma)$, $V_\gamma(\mathbf{p}, \alpha, \beta, \gamma)$ — вектор-функции:

$$V_\alpha(\mathbf{p}, \alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} \operatorname{tg}\theta_E(\sin\varphi_E \cos\beta \sin\gamma + \cos\varphi_E \sin\beta) - \cos\beta\cos\gamma \\ \cos\varphi_E \cos\beta \sin\gamma - \sin\varphi_E \sin\beta \end{pmatrix}$$

$$V_\beta(\mathbf{p}, \alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi_E \operatorname{tg}\theta_E \cos\gamma - \sin\gamma \\ -\cos\varphi_E \cos\gamma \end{pmatrix}$$

$$V_\gamma(\mathbf{p}, \alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} \cos\varphi_E \operatorname{tg}\theta_E \\ -\sin\varphi_E \end{pmatrix}$$

Эти вектор-функции определяют линейную зависимоть $\dot{\varphi}_E$ и $\dot{\theta}_E$ от ω_α, ω_β и ω_γ. Система (3.12) имеет начальные условия

$$\varphi_E(0) = \varphi_E^0, \quad \theta_E(0) = \theta_E^0, \quad \alpha_E(0) = \alpha_E^0, \quad \beta_E(0) = \beta_E^0, \quad \gamma_E(0) = \gamma_E^0,$$

$$\dot{\alpha}_E(0) = \dot{\alpha}_E^0, \quad \dot{\beta}_E(0) = \dot{\beta}_E^0, \quad \dot{\gamma}_E(0) = \dot{\gamma}_E^0,$$

и ограничения на ресурсы управления

$$w_\alpha, w_\beta, w_\gamma \in W = \{PC : |w_\alpha| \le w_\alpha^{max}, |w_\beta| \le w_\beta^{max} |w_\gamma| \le w_\gamma^{max}\},$$
$$(\alpha, \beta, \gamma) \in A_{\alpha\beta\gamma}.$$

Множество $A_{\alpha\beta\gamma}$ задает ограничения на угловые координаты, определяющие положение основания.

Как и в предыдущей главе, воспользуемся кинематической моделью для линии визирования маркера:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_M = u_1, \\ \dot{\theta}_M = u_2, \end{cases} \tag{3.13}$$

$$u_1(\cdot),u_2(\cdot) \in U = \{PC : |u_1| \le u_1^{max},|u_2| \le u_2^{max}\},$$
$$\varphi_M(0) = \varphi_M^0, \quad \theta_M(0) = \theta_M^0.$$

Эта модель управлений предполагает, что оператор может без ошибок отслеживать изображение цели на экране монитора и наводить на это изображение маркер. Она не учитывает возможных ошибок отслеживания, вызываемых быстрыми угловыми ускорениями основания. Такие ошибки могут возникать из-за вестибуло-окулярного рефлекса (ВОР), который естественным образом возникает при быстрых угловых ускорениях головы. В этой задаче предполагается, что голова оператора неподвжна относительно основания, следовательно на нее действуют такие же угловые ускорения, как и на основание.

3.3.2 Постановка игровых задач в чистых и смешанных стратегиях

Обозначим через t_0 момент начала движения основания, через t_1 — момент окончания движения ($t_1 < \infty$). Требуется оценить качество сведения линий визирования маркера и цели в момент t_1. Рассмотрим антагонистическую игру преследования, в которой линия визирования маркера — преследователь, а линия визирования цели — убегающий. Положения обоих игроков задаются углами φ и θ. Уравнения (3.13) и (3.12) вместе с функционалом (3.8) определяют игровую задачу. Дифференциальную игру, описывающую эту задачу будем далее обозначать через $\Gamma(U, W, J(u, w))$. Оператор старается минимизировать функционал при наихудших возмущениях, а возмущение стремится его максимизировать при наилучшем управлении оператором:

$$\max_{w\in W} J(u,w) \to \min_{u\in U}, \quad \min_{u\in U} J(u,w) \to \max_{w\in W}.$$

Решить игровую задачу означает найти чистые стратегии игроков, обеспечивающие им оптимальные выигрыши и значения их оптимальных выигрышей. При вычислении стратегий u_0 и w_0 используется предположение, что стратегии выбираются обоими игроками в момент времени t_0 и ни один из игроков не может изменить свой выбор в процессе игры. Такие стратегии называются программными.

Не во всякой игре существует седловая точка в чистых стратегиях. Для задач тестирования [25] седловые точки в антагонистических играх представляют интерес. Если в игре Γ седловой точки не существует, то оптимальные стратегии игроков выбираются из класса смешанных стратегий.

Определим смешанное расширение бесконечной антагонистической игры $\Gamma(U, W, J(u,w))$. Пусть ν_u — некоторая σ-алгебра подмножеств множества U (включающая в себя одноточечные множества $u \in U$) и ν_w — σ-алгебра подмножеств W. Обозначим через N_u и N_w множества всех вероятностных мер μ_u и μ_w на σ-алгебрах ν_u и ν_w соответственно. Через $K(\mu_u, \mu_w)$ обозначим интеграл:

$$K(\mu_u, \mu_w) = \int_U \int_W J(u,w) d\mu_u(u) d\mu_w(w), \tag{3.14}$$

представляющий собой математическое ожидание выигрыша $J(u,w)$ по вероятностным мерам μ_u и μ_w.

Определение 3.1. Пусть $\Gamma(U, W, J(u,w))$ — выпуклая антагонистическая игра в чистых стратегиях. Смешанным расширением этой игры называется игра $\bar{\Gamma}(N_u, N_w, K(\mu_u, \mu_w))$.

В этой игре оператор стремится минимизировать функционлал (3.14) при наихудших действиях возмущения, а возмущение — максимизировать при наилучших действиях оператора:

$$\max_{\mu_w\in N_w} K(\mu_u, \mu_w) \to \min_{\mu_u\in N_u}, \quad \min_{\mu_u\in N_u} K(\mu_u, \mu_w) \to \max_{\mu_w\in N_w}.$$

В смешанном расширении антагонистической игры вероятностные меры μ_u и μ_w — это стратегии игроков. Эти стратегии называются смешанными. Они определяют вероятность выбора одной из стратегий из класса чистых. Предполагается, что стратегии μ_u и μ_w стохастически независимы.

Определение 3.2. Спектром смешанной стратегии μ называется наименьшее замкнутое множество, μ-мера которого равна единице [55].

Частным случаем смешанной стратегии является чистая стратегия — программная стратегия, принадлежащая исходному множеству стратегий игрока. В этом случае говорят, что спектр смешанной стратегии состоит из одной точки.

В работе [55] приведено доказательство того, что антагонистическая игра в смешанных стратегиях имеет седловую точку, если множества U и W — метрические компакты, а функционал $J(u, w)$ непрерывен на произведении этих множеств.

Определение 3.3. Игра $\Gamma(U, W, J(u, w))$ называется выпуклой, если множество U выпукло, а функционал $J(u, w)$ является выпуклым по $u \in U$ при всех $w \in W$ [55].

Решение задачи вычисления оптимальных вероятностных мер было также исследовано в работе [55]. В этой работе доказаны следующие теоремы:

Теорема 3.1. Пусть игра $\Gamma(U, W, J(u, w))$ выпукла, а игра $\bar{\Gamma}(N_u, N_w, K(\mu_u, \mu_w))$ — ее смешанное расширение. Тогда спектр оптимальной смешанной стратегия игрока первого игрока u^0 в игре $\bar{\Gamma}$ состоит из одной точки.

Теорема 3.2. Пусть игра $\Gamma(U, W, J(u, w))$ выпукла, а игра $\bar{\Gamma}(N_u, N_w, K(\mu_u, \mu_w))$ — ее смешанное расширение. Тогда спектр оптимальной смешанной стратегии второго игрока w^0 в игре $\bar{\Gamma}$ состоит из $(n + 1)$-й точки, где n — размерность пространства W.

Из теоремы 3.1 следует, что в смешанном расширении игры у догоняющего игрока (маркера оператора) оптимальная стратегия — чистая. Эти две теоремы позволяют упростить процесс вычисления оптимальных смешанных стратегий в смешанном расширении игры.

3.4 Вычисление множеств достижимости игроков

Важную роль в решении игровой задачи играют множества достижимости игроков, поскольку размер и форма множеств достижимости опре-

деляют возможности каждого из игроков. Через $\Omega_E^{t_1}$ обозначим множество достижимости убегающего (E) в момент t_1. Аналогично через $\Omega_M^{t_1}$ обозначим множество достижимости преследователя (M).

В игре $\Gamma(U, W, J(u, w))$ движение преследователя (M) описывается простой системой линейных дифференциальных уравнений. Границы множества достижимости этой системы строятся аналитическими методами. Легко видеть, что множество достижимости преследователя $\Omega_M^{t_1}$ — это прямоугольник на плоскости (φ_M, θ_M).

В то же время движение убегающего игрока (E) описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений, поэтому структура его множества достижимости требует исследования. Множество $\Omega_E^{t_1}$ определено в пятимерном пространстве $(\varphi_E, \theta_E, \alpha, \beta, \gamma)$. Обозначим через $\mathrm{pr}_{\varphi_E\theta_E}(\Omega_E^{t_1})$ проекцию множества $\Omega_E^{t_1}$ на плоскость (φ_E, θ_E), а через $\mathrm{pr}_{\alpha\beta\gamma}(\Omega_E^{t_1})$ — проекцию на (α, β, γ).

Также введем обозначения для граничных точек введенных проекций. Через $\partial\Omega_E^{t_1}$ обозначим множество граничных точек $\Omega_E^{t_1}$. Аналогично через $\partial pr_{\varphi_E\theta_E}(\Omega_E^{t_1})$ и $\partial pr_{\alpha\beta\gamma}(\Omega_E^{t_1})$ обозначим множества граничных точек соответствующих проекций.

Введем вспомогательную систему координат $Cx_1x_2x_3$. Она получается из системы координат $Cz_1z_2z_3$ цепочкой поворотов:

$$Cz_1z_2z_3 \xrightarrow[z_3x_3']{\varphi_E} Cx_1'x_2'x_3' \xrightarrow[x_1'x_1]{\theta_E} Cx_1x_2x_3$$

Через G обозначим матрицу ориентации системы координат $Cx_1x_2x_3$ относительно $Cz_1z_2z_3$. Тогда вектор $\mathbf{l}$, имеющий проекции $\mathbf{l}_z$ в системе координат $Cz_1z_2z_3$, будет иметь проекции $\mathbf{l}_x = G\mathbf{l}_z$ в системе координат $Cx_1x_2x_3$.

Легко видеть, что вектор линии визирования цели будет иметь в системе координат $Cx_1x_2x_3$ проекции $(0, 1, 0)^T$, что совпадает с координатами орта $\hat{\mathbf{e}}_{x_2}$. В то же время вектор линии визирования цели имеет постоянные проекции на оси невращающейся системы координат $C\xi_1\xi_2\xi_3$, поскольку цель неподвижна и бесконечно удалена от основания.

Матрица G ориентации системы координат $Cx_1x_2x_3$ относительно $Cz_1z_2z_3$ имеет вид:

$$G = \begin{pmatrix} \cos\varphi_E & \sin\varphi_E & 0 \\ -\sin\varphi_E\cos\theta_E & \cos\varphi_E\cos\theta_E & \sin\theta_E \\ \sin\varphi_E\sin\theta_E & -\cos\varphi_E\sin\theta_E & \cos\theta_E \end{pmatrix}$$

Обозначим через $l_{E\xi}$ проекции вектора линии визирования цели на оси системы координат $C\xi_1\xi_2\xi_3$. Проекции $\mathbf{l}_{E_\xi}$ связаны с ортом $\hat{\mathbf{e}}_{x_2}$ системы координат $Cx_1x_2x_3$ по формуле:

$$GR\mathbf{l}_{E_\xi} = \hat{\mathbf{e}}_{x_2}.$$

Эта связь представима в виде:

$$R^{-1}G^{-1}\hat{\mathbf{e}}_{x_2} = \mathbf{l}_{E_\xi}.$$

Поскольку углы φ_E, θ_E, α, β, γ — это функции времени, то матрицы R и G — тоже функции времени. Обозначим через $R(t)$ и $G(t)$ эти функции. Тогда полученная геометрическая связь записывается в виде:

$$R^{-1}(t)G^{-1}(t)\hat{\mathbf{e}}_{x_2} = \mathbf{l}_{E_\xi}.$$

Вектор $\mathbf{l}_{E_\xi}$ постоянен, поскольку цель неподвижна относительно инерциальной системы координат, следовательно $R^{-1}(t)G^{-1}(t)\hat{\mathbf{e}}_{x_2}$ — также постоянный вектор. Умножение матрицы $R^{-1}(t)G^{-1}(t)$ на вектор-столбец $\hat{\mathbf{e}}_{x_2}$ дает вектор-столбец, совпадающий со вторым столбцом матрицы $R^{-1}(t)G^{-1}(t)$. Таким образом второй столбец матрицы $R^{-1}(t)G^{-1}(t)$ не изменяется с течением времени. Его элементы выражаются формулами:

$$\begin{aligned}
c_1 &= -\cos\varphi_E\cos\theta_E\sin\alpha\cos\beta + \sin\theta_E(\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma) - \\
&- \sin\varphi_E\cos\theta_E(\cos\alpha\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma), \\
c_2 &= \cos\varphi_E\cos\theta_E\cos\alpha\cos\beta + \sin\theta_E(\sin\alpha\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma) - \\
&- \sin\varphi_E\cos\theta_E(\sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma), \\
c_3 &= \cos\varphi_E\cos\theta_E\sin\beta + \sin\theta_E\cos\beta\cos\gamma + \sin\varphi_E\cos\theta_E\cos\beta\sin\gamma.
\end{aligned}$$

Функции c_1, c_2 и c_3 постоянны на любом решении системы (3.12). Следовательно они являются ее первыми интегралами. Они связаны функциональным соотношением:

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1,$$

так как это элементы столбца матрицы ортогонального преобразования. Таким образом, функции c_1, c_2 и c_3 задают две функционально независимые

голономные стационарные связи. Эти связи определяются начальными условиями φ_E^0, θ_E^0, α^0, β^0, γ^0 и не зависят от ω_α, ω_β и ω_γ.

Следовательно, конфигурационное многообразие системы (3.12) трехмерно. Также из этого следует, что множество достижимости $\Omega_E^{t_1}$ убегающего игрока трехмерно. Это связано с тем, что положение машины Дубинса определяется тремя углами $(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t))$. Этими же тремя углами определяется и направление линии визирования игрока E. Найдем способ выразить проекции вектора линии визирования цели на оси системы координат $Cz_1z_2z_3$ через c_1, c_2 и c_3. Для этого проведем ряд преобразований над c_1, c_2 и c_3. Получим выражения:

$$\begin{cases} Q_1 = (c_3\cos\beta - (c_2\cos\alpha - c_1\sin\alpha)\sin\beta)\sin\gamma + (c_1\cos\alpha + c_2\sin\alpha)\cos\gamma, \\ Q_2 = c_3\sin\beta + (c_2\cos\alpha - c_1\sin\alpha)\cos\beta, \\ Q_3 = (c_3\cos\beta - (c_2\cos\alpha - c_1\sin\alpha)\sin\beta)\cos\gamma + (c_1\cos\alpha + c_2\sin\alpha)\sin\gamma. \end{cases}$$

Следовательно

$$\begin{cases} Q_1 = -\sin\varphi_E\cos\theta_E, \\ Q_2 = \cos\varphi_E\cos\theta_E, \\ Q_3 = \sin\theta_E. \end{cases} \tag{3.15}$$

Выражения Q_1, Q_2 и Q_3 зависят от констант c_1, c_2, c_3 и от углов α, β, γ. Параметры Q_1, Q_2 и Q_3, имеют геометрический смысл проекций вектора линии визирования игрока E на оси системы координат $Cz_1z_2z_3$. При помощи параметров Q_1, Q_2 и Q_3 задается отображение из пространства углов (α, β, γ) в пространство углов (φ_E, θ_E):

$$\begin{cases} \varphi_E = -\arcsin\left(\frac{Q_1}{\sqrt{1-Q_3^2}}\right), \\ \theta_E = \arcsin Q_3. \end{cases} \tag{3.16}$$

Будем обозначать это отображение через $\Psi(\alpha, \beta, \gamma)$. Таким образом если известна проекция точки из множества достижимости на трехмерное подпространство (α, β, γ), то по этим трем координатам можно однозначно определить остальные две — на плоскости (φ_E, θ_E).

Лемма 3.1.Динамическая система (3.12) при любых начальных условиях φ_E^0, θ_E^0, α^0, β^0, γ^0, $\dot{\alpha}^0$, $\dot{\beta}^0$, $\dot{\gamma}^0$ для любых двух моментов t_1 и t_2, таких, что $t_1 < t_2$, удовлетворяет соотношению $\Omega_E^{t_1} \subset \Omega_E^{t_2}$.

Доказательство. Зафиксируем произвольные начальные условия φ_E^0, θ_E^0, α^0, β^0, γ^0, $\dot{\alpha}^0$, $\dot{\beta}^0$, $\dot{\gamma}^0$. Предположим, что вычислено множество $\Omega_E^{t_1}$. Рассмотрим произвольную точку $(\varphi_E(t_1), \theta_E(t_1), \alpha(t_1), \beta(t_1), \gamma(t_1))$, принадлежащую этому множеству. Пусть в эту точку игрок приходит при помощи допустимого управления $(w_\alpha^*, w_\beta^*, w_\gamma^*))$ на отрезке $[t_0, t_1]$. Это управление определяет движение по некоторой траектории $(\varphi_E(t), \theta_E(t), \alpha(t), \beta(t), \gamma(t))$ в пятимерном пространстве. Рассмотрим управление на отрезке $[t_0, t_2]$:

$$w_\alpha = w_\alpha^* \frac{t_1 - t_0}{t_2 - t_0},$$

$$w_\beta = w_\beta^* \frac{t_1 - t_0}{t_2 - t_0},$$

$$w_\gamma = w_\gamma^* \frac{t_1 - t_0}{t_2 - t_0},$$

Очевидно, что константа $\frac{t_1 - t_0}{t_2 - t_0} < 1$, следовательно новое управление также принадлежит множеству допустимых управлений. Функции $V_\alpha(\mathbf{p}, \alpha, \beta, \gamma)$, $V_\beta(\mathbf{p}, \alpha, \beta, \gamma)$ и $V_\gamma(\mathbf{p}, \alpha, \beta, \gamma)$ не зависят явно от времени. Следовательно новому управлению на подотрезке $[t_0, t_2]$ отвечает траектория $(\varphi_E(t), \theta_E(t), \alpha(t), \beta(t), \gamma(t))$, которая пересекает точку $(\varphi_E(t_1), \theta_E(t_1), \alpha(t_1), \beta(t_1), \gamma(t_1))$ в момент t_2. Следовательно, эта точка достижима в момент t_2. В силу произвольности $(\varphi_E(t_1), \theta_E(t_1), \alpha(t_1), \beta(t_1), \gamma(t_1))$ множество $\Omega_E^{t_2}$ содержит все точки множества $\Omega_E^{t_1}$. Лемма доказана.

3.4.1 Определение множества достижимости с помощью пиксельного метода

Один из способов построить множество $\Omega_E^{t_1}$ — построение этого множества приближенно при помощи численных методов. Для этого требуется перебор всевозможных функций из множества W. Это предполагает перебор континуума параметров, поскольку требуется перебрать все значения

функций вомущения во всех точках временного отрезка $[t_0, t_1]$. Будем строить множество достижимости при помощи пиксельного метода [52; 54]. Суть пиксельного метода заключается в том, что временной отрезок $[t_0, t_1]$, отведенный на управляемый процесс, разбивается на множество маленьких подотрезков. Процесс определения множества достижимости требует столько шагов, на сколько подотрезков был разбит временной отрезок $[t_0, t_1]$. На первом шаге вычисляются все возможные точки, в которые система может попасть из начального положения. На втором шаге вычисляются все точки, в которые система может попасть из точек, вычисленных на предыдущем шаге. На k-м шаге вычисляются все точки, в которые система может попасть из точек, вычисленных на $k-1$-м шаге. На каждом таком шаге система дифференциальных уравнений интегрируется на соответствующем временном подотрезке численно.

Искомое множество достижимости вложено в пятимерное пространство позиционных координат системы $(\mathbf{p}, \alpha, \beta, \gamma)$, однако для интегрирования системы (3.12) потребуется рассмотреть восьмимерное пространство параметров $x = (\mathbf{p}, \alpha, \beta, \gamma, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma})$, поскольку правая часть системы (3.12) зависит от этих восьми фазовых переменных. Обозначим ее через $f(x, w)$. Это восьмимерная вектор-функция. Будем искать расширенное множество достижимости в восьмимерном пространстве — обозначим его через $\tilde{\Omega}_E^{t_1}$.

Построим разбиение пространства, в котором лежит множество $\tilde{\Omega}_E^{t_1}$ на пиксели — квадратные блоки с маленьким диаметром разбиения δ_x. Пространство управляющих воздействий также разобьем на блоки с диаметром разбиения δ_w, а временную шкалу разобьем на подотрезки с диаметром δ_t. Число шагов, которые потребуются для построения множества достижимости, равно $(t_1 - t_0)/\delta_t$. Вместо координат точек, которые входят во множество $\tilde{\Omega}_E^{t_1}$, будем искать все пиксели, множество которых содержит множество достижимости $\tilde{\Omega}_E^{t_1}$. Обозначим множество этих пикселей через $Pix_E(t_k)$, где k — номер итерации. Также введем множество точек $X(t_k)$ из восьмимерного пространства $(\mathbf{p}, \alpha, \beta, \gamma, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma})$, которые принадлежат искомому множеству достижимости. Пусть заданы координаты начального состояния системы $(\mathbf{p}(t_0), \alpha(t_0), \beta(t_0), \gamma(t_0))$. Пусть на первом шаге $Pix_E(t_0) = \emptyset$, $X(t_0) = (\mathbf{p}(t_0), \alpha(t_0), \beta(t_0), \gamma(t_0))$. Каждый шаг состоит из двух процедур:

1. Вычисление множества точек $X(t_{k+1}) = \bigcup_{x \in X(t_k)} \{x + \delta_t \bigcup_{w \in W} f(x, w)\}$.

2. Определение множества $Pix_E(t_{k+1})$ как объединение пикселей $Pix_E(t_k)$, и тех пикселей которые содержат точки из $X(t_{k+1})$, но не входят в $Pix_E(t_k)$.

Процесс завершается при $t_{k+1} = t_1$. Множество $Pix_E(t_1)$ проецируется на подпространство координат $(\mathbf{p}, \alpha, \beta, \gamma)$, в результате чего получается множество достижимости $\Omega_E^{t_1}$. Размеры δ_x, δ_w и δ_t выбираются таким образом, чтобы получившееся множество пикселей $Pix_E(t_1)$ образовывало односвязное подмножество в конфигурационном пространстве. В конце процесса множество $Pix_E(t_1)$ содержит все пиксели, принадлежащие искомому множеству достижимости.

После завершения процесса требуется определить граничные точки множества достижимости. Это можно сделать путем перебора всех пикселей, вошедших во множество достижимости. Если все пиксели, окружающие выбранный пиксель, входят во множество $Pix_E(t_1)$, значит выбранный пиксель — внутренний. Если иначе — значит это граничный пиксель.

В результате работы численного метода определяется массив точек, образующих границу множества $\Omega_E^{t_1}$. Каждая такая точка определяется упорядоченной пятеркой координат. Этот массив задает соответствие каждой граничной точке множества $pr_{\varphi_E\theta_E}(\Omega_E^{t_1})$ точку из множества $pr_{\alpha\beta\gamma}(\Omega_E^{t_1})$. В дальнейшем этот массив точек используется для поиска седловой точки и вычисления стратегий игроков.

В настоящей работе с помощью пиксельного метода было проведено численное определение множества достижимости системы (3.12). Пиксельный метод был реализован на языке $C++$. При диаметре разбиения равном 0,001 вычисление заняло около 30 минут.

3.4.2 Сведение к геометрическому методу в случае произвольного выпуклого множества достижимости

Пиксельные методы требуют больших временных затрат. В данном случае процесс вычисления множества достижимости может быть существенно упрощен при помощи свойств первых интегралов, присутствующих в системе (3.12). Построенное отображение (3.16) позволяет облегчить процесс

определения множества достижимости $\Omega_E^{t_1}$. Отображение (3.16) преобразует множество $pr_{\alpha\beta\gamma}(\Omega_E^{t_1})$ — проекцию множества $\Omega_E^{t_1}$ на (α, β, γ) — во множество $pr_{\varphi_E\theta_E}(\Omega_E^{t_1})$ — проекцию множества $\Omega_E^{t_1}$ на (φ_E, θ_E). Следовательно, если вычислено множество $pr_{\alpha\beta\gamma}(\Omega_E^{t_1})$, то множество $pr_{\varphi_E\theta_E}(\Omega_E^{t_1})$ вычисляется преобразованием всех точек, принадлежащих множеству $pr_{\alpha\beta\gamma}(\Omega_E^{t_1})$. При численном моделировании, требуется перебор всех точек $pr_{\alpha\beta\gamma}(\Omega_E^{t_1})$, для вычисления всех точек $pr_{\varphi_E\theta_E}(\Omega_E^{t_1})$.

В этой задаче процесс вычисления всех точек множества $pr_{\varphi_E\theta_E}(\Omega_E^{t_1})$ может быть существенно упрощен.

Проекция $pr_{\alpha\beta\gamma}(\Omega_E^{t_1})$ — трехмерна, в то время, как проекция $pr_{\varphi_E\theta_E}(\Omega_E^{t_1})$ — двумерна. Отображение (3.16) вообще говоря может переводить континуум точек из (α, β, γ) в одну точку на плоскости (φ_E, θ_E). Из этого следует, что при численном моделировании не обязательно перебирать все точки из $pr_{\alpha\beta\gamma}(\Omega_E^{t_1})$, для вычисления всех точек $pr_{\varphi_E\theta_E}(\Omega_E^{t_1})$. Следующая теорема гласит, что для этого достаточно рассмотреть влияние отображения (3.16) лишь на граничные точки $pr_{\alpha\beta\gamma}(\Omega_E^{t_1})$.

Теорема 3.3. $pr_{\varphi_E\theta_E}(\Omega_E^{t_1}) \subset \Psi(\partial pr_{\alpha\beta\gamma}(\Omega_E^{t_1}))$.

Доказательство.

Рассмотрим произвольную точку $(\varphi_E^*, \theta_E^*)$, принадлежащую множеству $pr_{\varphi_E\theta_E}(\Omega_E^{t_1})$. Докажем, что на границе множества $pr_{\alpha\beta\gamma}(\Omega_E^{t_1})$ найдется такая точка $(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*)$, которой отображение $\Psi(\alpha, \beta, \gamma)$ ставит в соответствие точку $(\varphi_E^*, \theta_E^*)$.

Для доказательства теоремы необходимо детально изучить геометрические свойства системы. Если углы φ_E и θ_E фиксированы, то соотношения (3.15) задают кривую в пространстве углов (α, β, γ). Будем обозначать эту кривую через $C(\varphi_E, \theta_E)$. Отображение (3.16) переводит любую точку на этой кривой в одну и ту же пару углов φ_E и θ_E. Если углы α, β и γ изменяются таким оразом, что точка $(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t))$ всегда принадлежит этой кривой, то подвижное основание вращается вокруг оси (Q_1, Q_2, Q_3), то есть вокруг единичного вектора, определяемого фиксированными углами φ_E и θ_E в системе координат $Cz_1z_2z_3$.

Следовательно бесконечному множеству точек из $pr_{\alpha\beta\gamma}(\Omega_E^{t_1})$ может соответствовать лишь одна точка из $pr_{\varphi_E\theta_E}(\Omega_E^{t_1})$. Значит не обязательно перебирать все точки из $pr_{\alpha\beta\gamma}(\Omega_E^{t_1})$ чтобы определить все точки $pr_{\varphi_E\theta_E}(\Omega_E^{t_1})$.

Кривая $C(\varphi_E, \theta_E)$ — это неявная кривая в пространстве (α, β, γ). Она задается при помощи решений системы уравнений

$$\begin{cases} Q_1(\alpha, \beta, \gamma) = Q_1^0, \\ Q_2(\alpha, \beta, \gamma) = Q_2^0, \\ Q_3(\alpha, \beta, \gamma) = Q_3^0, \end{cases} \tag{3.17}$$

где (Q_1^0, Q_2^0, Q_3^0) — константы, определяемые только углами φ_E и θ_E. Эта кривая определяется при помощи двух из этих трех уравнений, так как существует функциональное ограничение $Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 = 1$. Докажем, что кривая $C(\varphi_E^*, \theta_E^*)$ пересекает $\partial pr_{\alpha\beta\gamma}(\Omega_E^{t_1})$.

Эта кривая может быть представлена как одномерное многообразие [40]. Каждая из трех координат непрерывно зависит от одного параметра и в каждой точке этой кривой определен вектор ее скорости. Продифференцируем $Q_1(\alpha, \beta, \gamma)$, $Q_2(\alpha, \beta, \gamma)$ и $Q_3(\alpha, \beta, \gamma)$ по времени. Полученные выражения будут зависеть от пятерки координат $(\varphi_E^*, \theta_E^*, \alpha, \beta, \gamma)$, а также от скоростей изменения углов α, β и γ:

$$\begin{cases} \cos\gamma(c_2\cos\alpha - c_1\sin\alpha)\dot{\alpha} + \\ + \sin\gamma(-\sin\beta(c_1\cos\alpha + c_2\sin\alpha)\dot{\alpha} + \\ + \cos\beta(c_2\cos\alpha - c_1\sin\alpha)\dot{\beta} + c_3\sin\beta\dot{\beta}) - \\ - \cos\gamma(\sin\beta(c_1\sin\alpha - c_2\cos\alpha) + c_3\cos\beta)\dot{\gamma} - \\ -(c_1\cos\alpha + c_2\sin\alpha)\cos\gamma\dot{\gamma} = 0, \\ \cos\beta(-c_1\cos\alpha\dot{\alpha} - c_2\sin\alpha\dot{\alpha}) + c_3\cos\beta\dot{\beta} - (c_2\cos\alpha - c_1\sin\alpha)\sin\beta\dot{\beta} = 0, \\ \sin\gamma(c_2\cos\alpha\dot{\alpha} - c_1\sin\alpha\dot{\alpha}) + \\ + \cos\gamma(-\sin\beta(-c_1\cos\alpha\dot{\alpha} - c_2\sin\alpha\dot{\alpha}) - \\ - \cos\beta(c_2\cos\alpha - c_1\sin\alpha)\dot{\beta} - c_3\sin\beta\dot{\beta}) + \\ + \cos\gamma(c_1\cos\alpha + c_2\sin\alpha)\dot{\gamma} - \\ -(c_3\cos\beta - (c_2\cos\alpha - c_1\sin\alpha)\sin\beta)\sin\gamma\dot{\gamma} = 0 \end{cases} \tag{3.18}$$

Из полученных выражений можно определить вектор скорости движения вдоль кривой $C(\varphi_E^*, \theta_E^*)$. Далее будем обозначать этот вектор через $\mathbf{v}_{\alpha\beta\gamma}$. Заметим, что полученные выражения содержат угол α только в виде кон-

струкций $c_1 \cos\alpha + c_2 \sin\alpha$ и $c_2 \cos\alpha - c_1 \sin\alpha$. Подставляя c_1 и c_2 в эти выражения, получим

$$c_1 \cos\alpha + c_2 \sin\alpha = \sin\gamma,$$
$$c_2 \cos\alpha - c_1 \sin\alpha = \cos\beta \cos\theta_E^* \cos\varphi_E^* - \sin\beta(\cos\gamma \sin\theta_E^* + \sin\gamma \sin\varphi_E^* \cos\theta_E^*),$$

то есть скорости изменения углов α, β и γ не зависят от угла α. Это связано с тем, что α — первый угол в цепочке поворотов (1.6), определяющей ориентацию подвижного основания.

Возьмем в качестве независимого параметра кривой $C(\varphi_E^*, \theta_E^*)$ угол α. Из соотношений (3.18) выразим скорости изменения углов β и γ. Через α'_α, β'_α и γ'_α будем обозначать скорости изменения углов. Очевидно, что $\alpha'_\alpha = 1$. Остальные две составляющие вектора скорости зависят от величины α'_α:

$$\begin{cases} \beta'_\alpha = \alpha'_\alpha \cos\beta(c_1 \cos\alpha + c_2 \sin\alpha)/((\sin\beta(c_1 \sin\alpha - c_2 \cos\alpha) + c_3 \cos\beta), \\ \gamma'_\alpha = -\alpha'_\alpha(c_2 \cos\alpha - c_1 \sin\alpha)/((\sin\beta(c_2 \cos\alpha - c_1 \sin\alpha) - c_3 \cos\beta), \end{cases} \tag{3.19}$$

Эти соотношения определяют вектор скорости движения вдоль кривой $C(\varphi_E^*, \theta_E^*)$ как вектор-функцию координат (α, β, γ): $\mathbf{v}_{\alpha\beta\gamma} = (\alpha'_\alpha, \beta'_\alpha, \gamma'_\alpha)$. Определим, когда выполняются соотношения $\beta'_\alpha = 0$ и $\gamma'_\alpha = 0$ исключая из рассмотрения случай $\alpha'_\alpha = 0$:

$$\beta = \operatorname{arctg}\left(\frac{\cos\varphi_E^* \cos\theta_E^*}{\sqrt{\sin\varphi_E^{*\,2} + \cos\varphi_E^{*\,2} \sin\theta_E^{*\,2}}}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$
$$\gamma = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin\varphi_E^* \cos\theta_E^*}{\sin\theta_E^*}\right) + 2\pi l, l \in \mathbb{Z},$$

Рассмотрим другую параметризацию кривой $C(\varphi_E^*, \theta_E^*)$: возьмем в качестве независимого параметра угол γ. Из соотношений (3.18) выразим скорости изменения углов α и β:

$$\begin{cases} \alpha'_\gamma = -\gamma'_\gamma(\sin\beta(c_1 \sin\alpha - c_2 \cos\alpha) + c_3 \cos\beta)/(c_2 \cos\alpha - c_1 \sin\alpha), \\ \beta'_\gamma = \gamma'_\gamma \cos\beta(c_1 \cos\alpha + c_2 \sin\alpha)/(c_2 \cos\alpha - c_1 \sin\alpha), \end{cases} \tag{3.20}$$

Определим, когда выполняются соотношения $\alpha'_\gamma = 0$ и $\beta'_\gamma = 0$, исключая из рассмотрения случай $\gamma'_\gamma = 0$:

$$\beta = \pm\tfrac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z},$$
$$\gamma = \operatorname{arctg}(-\tfrac{\sin\varphi_E^* \cos\theta_E^*}{\sin\theta_E^*}) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z},$$

Системы (3.19) и (3.20) имеют нулевые правые части одновременно только при $\beta = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим другую параметризацию кривой $C(\varphi_E^*, \theta_E^*)$ углом β. Из соотношений (3.18) выразим скорости изменения углов α и γ:

$$\begin{cases} \alpha'_\beta = \beta'_\beta \sec\beta(c_2\cos\alpha - c_1\sin\alpha)/(c_1\cos\alpha + c_2\sin\alpha), \\ \gamma'_\beta = \beta'_\beta(c_3 + \operatorname{tg}\beta(c_1\sin\alpha - c_2\cos\alpha))/(c_1\cos\alpha + c_2\sin\alpha), \end{cases} \tag{3.21}$$

У этой системы при $\beta = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$ есть особенность, и скорость движения вдоль кривой $C(\varphi_E^*, \theta_E^*)$ не обращается в ноль при этих значениях β. Следовательно, не существует таких точек в пространстве (α, β, γ), в которых вектор скорости движения вдоль кривой $C(\varphi_E^*, \theta_E^*)$ не обращался бы в ноль. Рассматривая различные варианты параметризации этой кривой, можно считать, что независимый параметр изменяется только в положительную сторону. Таким образом, построив вектор $\mathbf{v}_{\alpha\beta\gamma}$ в каждой точке вдоль кривой $C(\varphi_E^*, \theta_E^*)$, получим векторное поле, которое нигде не обращается в ноль. Следовательно эта кривая пересекает дважды любое двумерное многообразие без края в трехмерном пространстве (α, β, γ) или касается этого многообразия в одной точке. Из этого следует, что через любую точку $(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*)$, принадлежащую множеству $pr_{\alpha\beta\gamma}(\Omega_E^{t_1})$, граница которого является двумерным многообразием без края, для любой точки $(\varphi_E^*, \theta_E^*)$ можно провести траекторию $C(\varphi_E^*, \theta_E^*)$, которая будет иметь пересечение с границей множества $pr_{\alpha\beta\gamma}(\Omega_E^{t_1})$. Теорема доказана.

На рисунке 3.6 изображены траектории системы (3.17), построенные для разных начальных условий. На этом рисунке видно, что они пересекают дважды границу множества $pr_{\alpha\beta\gamma}(\Omega_E^{t_1})$. Точки пересечения выделены красным. Ни одна из траекторий не остается внутри этого множества.

Из теоремы 3.3 следует, что для нахождения всех точек, принадлежащих множеству $pr_{\varphi_E\theta_E}(\Omega_E^{t_1})$ достаточно построить отображение (3.16) лишь точек $\partial pr_{\alpha\beta\gamma}(\Omega_E^{t_1})$, то есть точек, принадлежащих границе множества $pr_{\alpha\beta\gamma}(\Omega_E^{t_1})$. Это существенно упрощает процесс численного построения множества достижимости игрока E. На рисунке 3.7 представлен пример построения этого множества. На рисунке 3.7а изображена граница множества

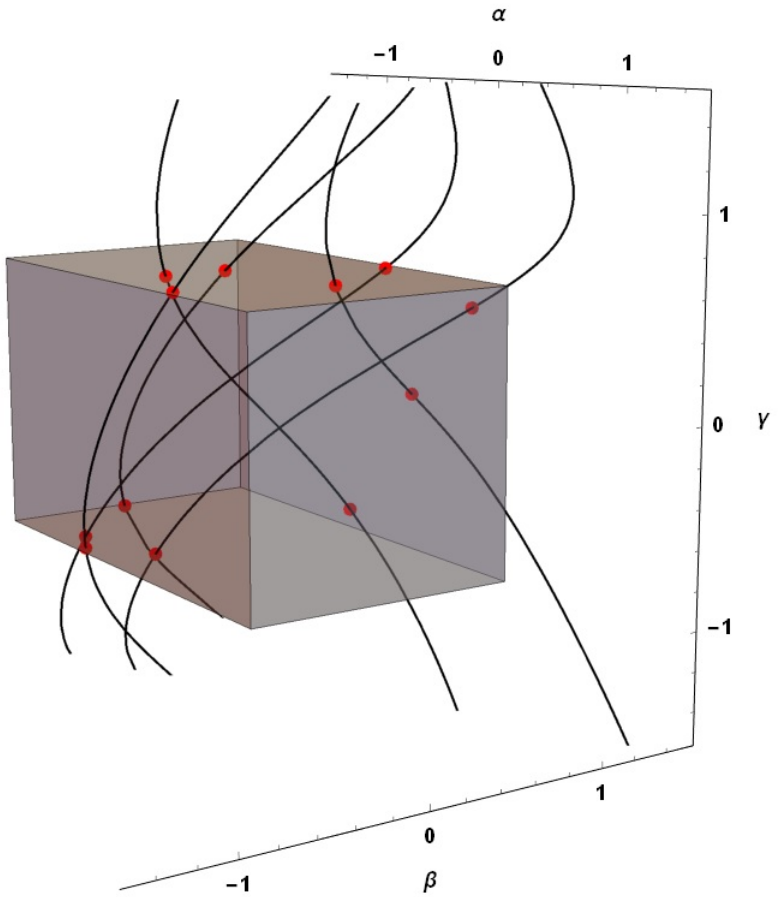


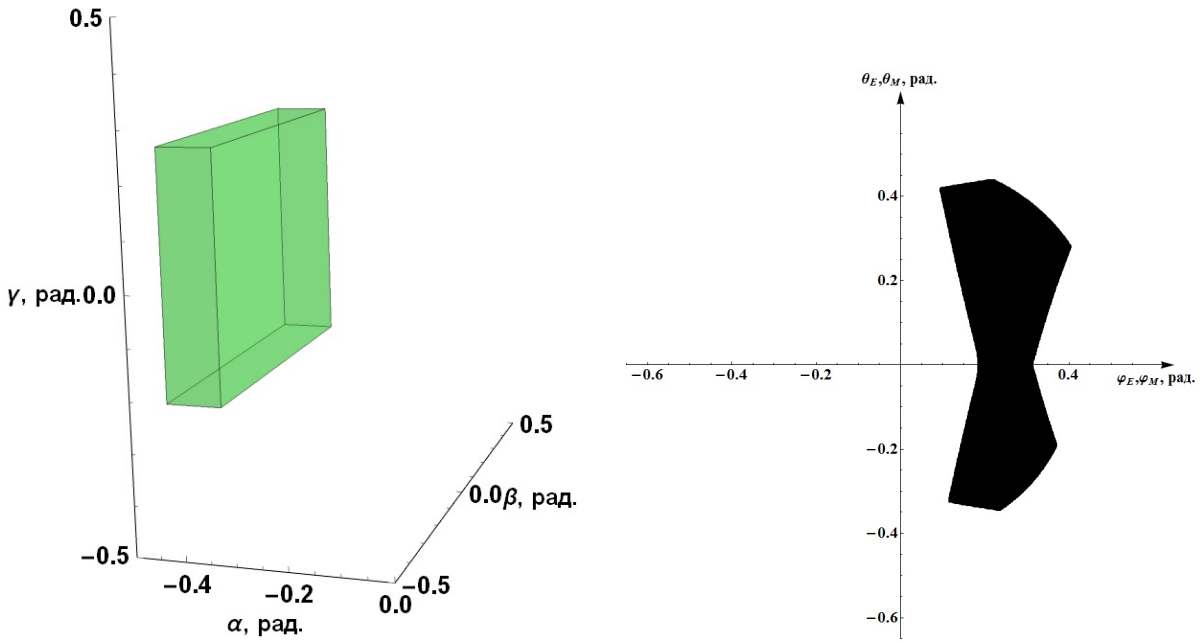
Рисунок 3.6 — Траектории системы(3.17) при различных начальных условиях пересекают границу множества $pr_{\alpha\beta\gamma}(\Omega_E^{t_1})$

$\partial pr_{\alpha\beta\gamma}(\Omega_E^{t_1})$, а на рисунке 3.7б изображен образ этой границы при отображении (3.16).

Граница полученного множества может быть вычислена при помощи метода приграничного слоя также, как и при построении множества достижимости пиксельным методом. Поскольку функционал (3.8) выпуклый в достаточно большой области, граничные точки множеств достижимости обоих игроков являются подозрительными на оптимальные стратегии.

На рис. 3.8 в координатах экрана представлена граница того множества достижимости изображения цели, которое изображено на рис. 3.7б. Для получения этого изображения было использовано преобразование (1.3).

Описанй метод определения множества достижимости системы (3.12) при диаметре разбиения равном 0.001 занимает около трех секунд.



а) Граница множества $\partial pr_{\alpha\beta\gamma}(\Omega_E^{t_1})$ б) Множество $pr_{\varphi_E\theta_E}(\Omega_E^{t_1})$

Рисунок 3.7

3.4.3 Методика вычисления оптимальных стратегий игроков

При произвольной форме границы $\partial pr_{\alpha\beta\gamma}(\Omega_E^{t_1})$ требуется строить отображение каждой точки этой границы в плоскость $(\varphi_E\theta_E)$. Если же граница $\partial pr_{\alpha\beta\gamma}(\Omega_E^{t_1})$ задается гладкой функцией, то граница множества $pr_{\varphi_E\theta_E}(\Omega_E^{t_1})$ может быть также задана гладкой функцией.

В уравнениях (3.12), описывающих движение игрока E, отсутствуют координаты игрока M и его управления. Следовательно любая стратегия из множества W, выбранная игроком E, обеспечивает его попадание в одну из точек множества $\Omega_E^{t_1}$ независимо от стратегии игрока M. Аналогично, на игрока M не влияет выбор стратегии игрока E, что видно из уравнений (3.12). Для каждой точки множества достижимости игрока определено программное управление. Каждому программному управлению соответствует траектория на плоскости (φ, θ), которая определяется как решение системы алгебраических уравнений.

Поскольку функционал $J(\mathbf{e}_E, \mathbf{e}_M)$ в игре $\Gamma(U, W, J(u, w))$ терминальный, множества достижимости могут рассматриваться как множества стратегий игроков E и M. Игра $\Gamma(U, W, J(u, w))$ сводится к геометрической игре

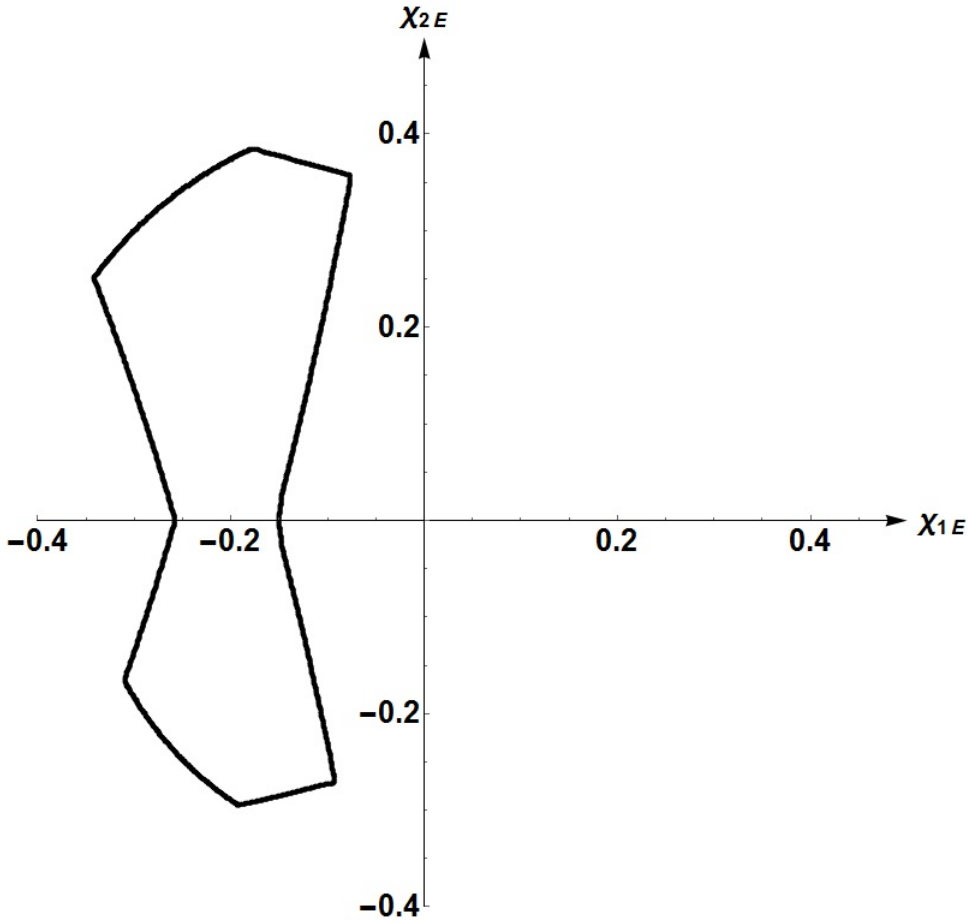


Рисунок 3.8 — Проекция множества достижимости цели на экране монитора при $f = 0.8$

на плоскости (φ, θ), поскольку множества $\partial pr_{\varphi_E\theta_E}(\Omega_E^{t_1})$ и $\Omega_M^{t_1}$ принадлежат одному пространству углов, а значение функции $J(\mathbf{e}_E, \mathbf{e}_M)$ зависит от двух точек на плоскости (φ, θ).

Для объективного выставления оценки действий игроков, необходимо, чтобы в игре существовала седловая точка. Определение седловой точки было дано в первой главе. Седловая точка в антагонистической игре существует тогда и только тогда, когда $\max\limits_{w\in W}\min\limits_{u\in U} J(u,w) = \min\limits_{u\in U}\max\limits_{w\in W} J(u,w)$.

Сделаем обозначения: $\max\limits_{w\in W}\min\limits_{u\in U} J(u,w) = J_0$, $\min\limits_{u\in U}\max\limits_{w\in W} J(u,w) = J^0$. Для проверки существования седловой точки обычно требуется вычисление этих обеих величин. Однако, в некоторых случаях эта проверка может быть упрощена. Через $D(r, M)$ будем обозначать геометрическое место точек, равноудаленных от точки P на расстояние r по метрике $J(M, E)$. Оно представляет собой кривую, отделяющую множество более удаленных точек $\{E \in (\varphi, \theta) : J(M, E) > r\}$ от множества менее удаленных то-

чек $\{E \in (\varphi, \theta) : J(M, E) < r\}$. Обозначим через $ImD(r, M)$ множество $\{E \in (\varphi, \theta) : J(M, E) \leq r\}$. Это множество замкнуто.

Теорема 3.4. Пара стратегий (M_0, E_0) является седловой точкой игры $\Gamma(pr_{\varphi\theta}(\Omega_E^{t_1}), \Omega_M^{t_1}, J(\mathbf{e}_E, \mathbf{e}_M E))$ с ценой игры r тогда и только тогда, когда существуют две кривые $D(r, M_0)$ и $D(r, E_0)$, такие что:
1. $M_0 \in D(r, E_0)$, $E_0 \in D(r, M_0)$;
2. Множество $pr_{\varphi\theta}(\Omega_E^{t_1})$ содержит точку E_0 и принадлежит множеству $ImD(r, M_0)$;
3. Множество $\Omega_M^{t_1}$ содержит точку M_0, и M_0 — единственная общая точка $\Omega_M^{t_1}$ и множества $ImD(r, E_0)$.

Эта теорема является обобщением теоремы, доказанной в работе [28], на случай, когда одна из систем нелинейна, а также на случай метрики, задаваемой непрерывной функцией $J(P, E)$. При этих условиях теорема остается верной. Более того, ее доказательство аналогично доказательству в работе [28]. Таким образом, для поиска седловой точки в этой задаче достаточно вычислить максимин и проверить условие 2 из теоремы 3.4.

Минимаксная программная стратегия преследователя и максиминная программная стратегия убегающего лежат на границах множеств достижимости, поскольку функционал $J(P, E)$ — выпуклый в достаточно большой области. Следовательно, при поиске седловой точки достаточно рассмотреть лишь точки лежащие на границах множеств достижимости игроков. Поэтому задача определения величины J_0 и пары точек, на которой она достигается, решается на границах двух множеств на плоскости.

В рассматриваемой задаче граница множества $\Omega_M^{t_1}$ представляет собой прямоугольник, поэтому граница этого множества состоит лишь из прямых линий. Задача поиска максимина в этом случае может быть сведена к задаче условной оптимизации. Градиент функции $J(\mathbf{e}_E, \mathbf{e}_M)$ по координтам (φ_M, θ_M) определяется формулой:

$$\nabla_{\varphi_M\theta_M} J(\mathbf{e}_E, \mathbf{e}_M) = \begin{pmatrix} -\cos\theta_E \cos\theta_M \sin\varphi_E - \varphi_M \\ \cos\theta_E \sin\theta_M \cos\varphi_E - \varphi_M - \sin\theta_E \cos\theta_M \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Существование оптимальной стратегии преследователя на границе множества $\Omega_M^{t_1}$ эквивалентно ортогональности этого градиента границе. Граница

этого множества задается четырьмя уравнениями: $\varphi_M = \pm u_1^{\max}(t_1 - t_0)$, $\theta_M = \pm u_2^{\max}(t_1 - t_0)$. Сделаем обозначения: $\bar{\varphi}_M = u_1^{\max}(t_1 - t_0)$, $\bar{\theta}_M = u_2^{\max}(t_1 - t_0)$.

Рассмотрим нормаль к той части границы, которая задается уравнением $\theta_M = \bar{\theta}_M$. Запишем условие ортогональности вектора (3.22) этой границе:

$$-\cos\theta_E \cos\theta_M \sin(\varphi_E - \varphi_M) = 0$$

Это условие выполняется либо при $\varphi_E = \varphi_M$, либо при $\theta_E = \pm\frac{\pi}{2}$, либо при $\theta_M = \pm\frac{\pi}{2}$. Последние два случая исключим из рассмотрения, так как при этих значениях угла возвышения линия визирования находится вне поля зрения видеокамеры. Если $\varphi_E = \varphi_M$, то $J(M,E) = -\cos(\theta_E - \bar{\theta}_M)$. Значит, если точка M, отвечающая максимину, лежит на горизонтальной границе множества $\Omega_M^{t_1}$, то точка E, отвечающая максимину, должна максимизировать функцию $-\cos(\theta_E - \bar{\theta}_M)$ и лежать на границе множества $\partial pr_{\varphi_E\theta_E}(\Omega_E^{t_1})$.

Рассмотрим нормаль к той части границы, которая задается уравнением $\varphi_M = u_1^{\max}(t_1 - t_0)$. Запишем условие ортогональности вектора (3.22) этой части границ:

$$\cos\theta_E \sin\theta_M \cos(\varphi_E - \varphi_M) - \sin\theta_E \cos\theta_M = 0$$

Это условие удовлетворяется, при $\theta_M = f_\theta(\bar{\varphi}_M)$, где

$$f_\theta(\varphi_M) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin\theta_E}{\cos\theta_E \cos(\varphi_E - \varphi_M)}\right).$$

Наконец, максимин функции $J(M,E)$ может достигаться на одной из четырех угловых точек множества. Чтобы проверить, есть ли в угловых точках максимин, нужно решить четыре задачи максимизации функции $J(M,E)$ при $\varphi_M = \pm\bar{\varphi}_M, \theta_M = \pm\bar{\theta}_M$.

Таким образом, для вычисления максимина достаточно решить восемь задач максимизации и выбрать наибольшее решение среди полученных восьми. Эти задачи формально записываются следующим образом:

$$\begin{gathered}
-\cos(\theta_E \mp \bar{\theta}_M) \to \max_{\theta_E \in \partial pr_{\varphi\theta}(\Omega_E^{t_1})}, \\
\sin\theta_E \sin f_\theta(\pm\bar{\varphi}_M) - \cos\theta_E \cos f_\theta(\pm\bar{\varphi}_M)\cos(\varphi_E \mp \bar{\varphi}_M) \to \max_{\varphi_E, \theta_E \in \partial pr_{\varphi\theta}(\Omega_E^{t_1})}, \\
-\cos\theta_E \cos\bar{\theta}_M \cos(\varphi_E \mp \bar{\varphi}_M) + \sin\theta_E \sin\pm\bar{\theta}_M \to \max_{\varphi_E, \theta_E \in \partial pr_{\varphi\theta}(\Omega_E^{t_1})}.
\end{gathered}$$

Максиминная стратегия убегающего совпадает с решением, на котором достигается максимум среди всех функционалов в этих задачах. Максимумы ищутся среди граничных точек $\mathrm{pr}_{\varphi\theta}(\Omega_E^{t_1})$. Эти задачи максимизации решаются простым численным перебором граничных точек множества $\mathrm{pr}_{\varphi\theta}(\Omega_E^{t_1})$, которые были вычислены при построении множества достижимости убегающего игрока.

В случае невыполнения условий теоремы 3.4 требуется сделать переход к смешанному расширению игры и найти смешанные оптимальные стратегии. В задаче, рассматриваемой в этом разделе, требуется вычислить минимаксное значение J^0 для вычисления оптимальной смешанной стратегии.

Согласно теореме 3.1 спектр смешанной стратегии преследователя состоит из одной точки. Обозначим ее через M^0. Величина J^0 достигается на паре точек, одна из которых — точка M^0. В то же время согласно теореме 3.2 спектр смешанной стратегии убегающего состоит не более чем из трех точек множества $\Omega_E^{t_1}$. Обозначим через E_1^0, E_2^0, E_3^0 эти точки, а через p_1, p_2, p_3 — вероятности выбора этих точек. p_i — это вероятности выбора i-й точки из спектра смешанной стратегии. В работе [55] показано, что в этой задаче для этих точек выполняются соотношения: $J(M^0, E_1^0) = J(M^0, E_2^0) = J(M^0, E_3^0) = J^0$. Пример вычисления смешанных стратегий при дискретизации множества достижимости игрока приведен в диссертации [50]. В этой работе выписаны соотношения, которые выполняются для смешанной стратегии убегающего. Если точка M^0 лежит на границе $\Omega_M^{t_1}$, то эти соотношения имеют вид:

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{3} p_i \frac{M^0 - E_i^0}{|M^0 - E_i^0|} = -a, \\ \sum_{i=1}^{3} p_i = 1, \end{gathered} \tag{3.23}$$

где a — вектор, ортогональный границе множества $\Omega_M^{t_1}$ в точке M^0 и направленный «наружу» множества. Если M^0 — угловая точка этого множества, то вектор a — это линейная комбинация двух таких нормалей к границам, пересечение которых образует эту угловую точку. Вектор a — это вектор, принадлежащий к двойственному конусу, построенному в граничной точке множества достижимости. Понятие двойственного конуча было введено и подробно раскрыто в начале второй главы. Если же точка M^0 лежит внутри множества $\Omega_M^{t_1}$, то вектор a полагается нулевым в этой системе.

Из этого следует, что вероятности выбора любой из точек E_i^0 должны быть одинаковы. При численном вычислении смешанной стратегии используется следующий алгоритм:

1. Нахождение пары стратегий M^0 и E_1^0, на которых достигается J^0;
2. Среди граничных точек множества $\Omega_E^{t_1}$ находятся все остальные, которые вместе с точкой M^0 дают значение, равное $J^0 - \varepsilon$, где ε — допустимая численная погрешность. Если такая точка одна, то она выбирается второй для искомого спектра стратегий. Если больше одной, то выбираются две, на которых удовлетворяются уравнения (3.23);

3.5 Компьютерный и динамический тренажеры целеуказания

3.5.1 Методика вычисления оптимальных стратегий игроков

Поскольку точка множества достижимости каждого из игроков является либо его программной стратегией, либо точкой из спектра смешанной стратегии, любое управление, приводящее игрока из начального положения в выбранную точку множества будет оптимальной стратегией игрока. Обозначим через $(\varphi_M^0, \theta_M^0)$ начальное положение игрока M, а через $(\varphi_M^{'}, \theta_M^{'})$ положение, которое он должен принять в момент окончания игры. Управления вычисляются как аналитические решения алгебраических уравнений. Эти решения имеют вид:

$$u_1 = \frac{\varphi_M^{'} - \varphi_M^0}{t_1 - t_0}, \qquad u_2 = \frac{\theta_M^{'} - \theta_M^0}{t_1 - t_0}.$$

Полученные решения принадлежат функциональному множеству U, поскольку множество достижмости $\Omega_M^{t_1}$ построено с учетом ограничений, налагаемых на функции из U.

Аналогично обозначим через $(\varphi_E^0, \theta_E^0, \alpha^0, \beta^0, \gamma^0, \dot{\alpha}^0, \dot{\beta}^0, \dot{\gamma}^0)$ начальное положение и начальную скорость игрока E, а через $(\varphi_E^{'}, \theta_E^{'}, \alpha^{'}, \beta^{'}, \gamma^{'})$ положение, которое он должен принять в момент окончания игры. Возмущения, приводящие убегающего в требуемое положение, определяются формулами:

$$w_\alpha = \frac{2(\alpha' - \alpha^0 - \dot{\alpha}^0(t_1 - t_0))}{(t_1 - t_0)^2}, \qquad w_\beta = \frac{2(\beta' - \beta^0 - \dot{\beta}^0(t_1 - t_0))}{(t_1 - t_0)^2}, \qquad w_\gamma = \frac{2(\gamma' - \gamma^0 - \dot{\gamma}^0(t_1 - t_0))}{(t_1 - t_0)^2}.$$

Полученные решения принадлежат функциональному множеству W, поскольку множество достижмости $\Omega_E^{t_1}$ построено с учетом ограничений, налагаемых на функции из W.

На рисунке 3.9 представлены графики углов и угловых скоростей, которые отвечают оптимальным чистым стратегиям убегающего игрока.

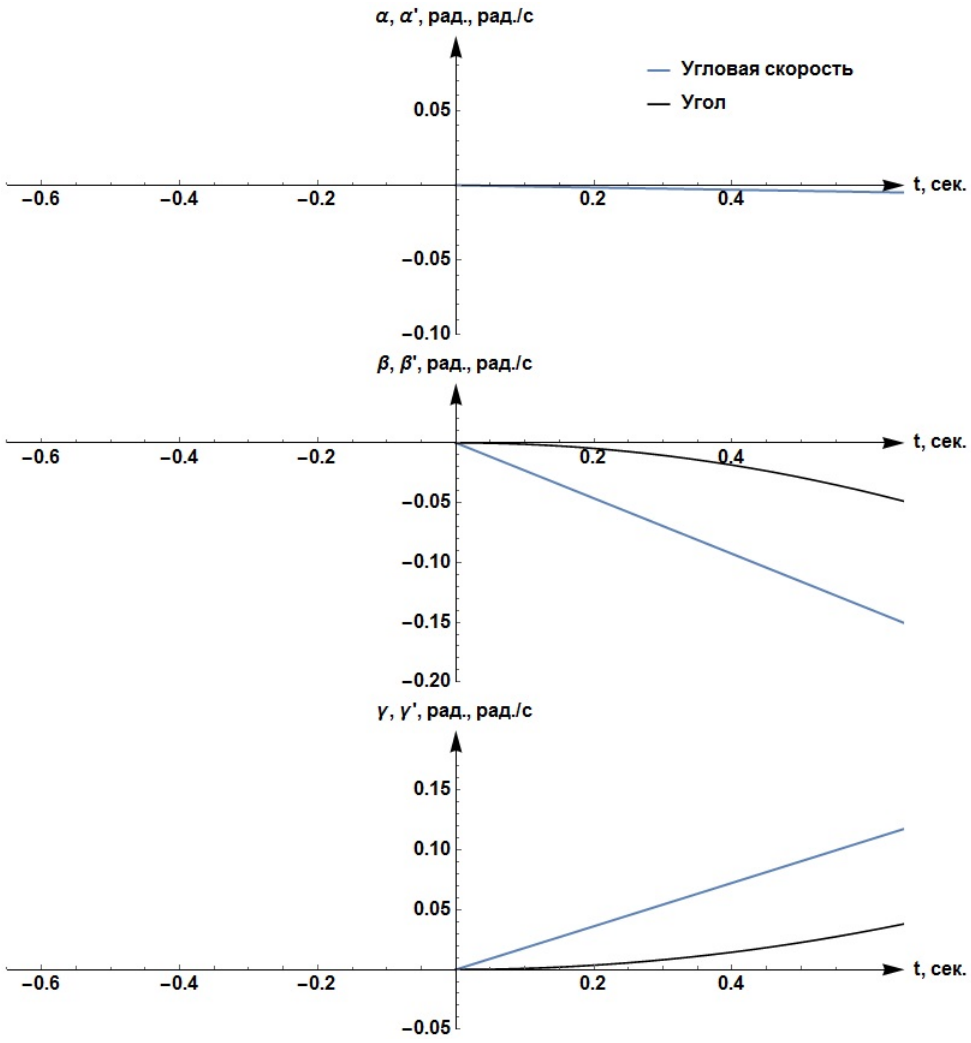


Рисунок 3.9 — Пример существования седловой точки в программных стратегиях

Пусть множество $A_{\alpha\beta\gamma}$, определяющее ограничение на углы Крылова имеет вид прямоугольного параллелепипеда (как на рисунке 3.6): $A_{\alpha\beta\gamma} = \{|\alpha| \le \alpha^{max}, |\beta| \le \beta^{max}, |\gamma| \le \gamma^{max}\}$.

На рисунке 3.10 представлен пример существования программной стратегии при заданных параметрах для численного моделирования. На этом рисунке красными точками обозначены начальные положения игроков на плоскости (φ, θ), черными точками — оптимальные программные стратегии.

Также на рисунке изображены границы множеств $\Omega_M^{t_1}$ и $\mathrm{pr}_{\varphi\theta}(\Omega_E^{t_1})$ и траектории обоих игроков, обеспечиваемые оптимальными управлениями. Красной пунктирной линией показано расстояние между игроками в начале игры, черной — в момент окончания. На этом рисунке изображены замкнутые кривые $D(r, M_0)$ и $D(r, E_0)$ из теоремы 3.4. Видно, что множество $pr_{\varphi\theta}(\Omega_E^{t_1})$ содержится целиком внутри $D(r, M_0)$.

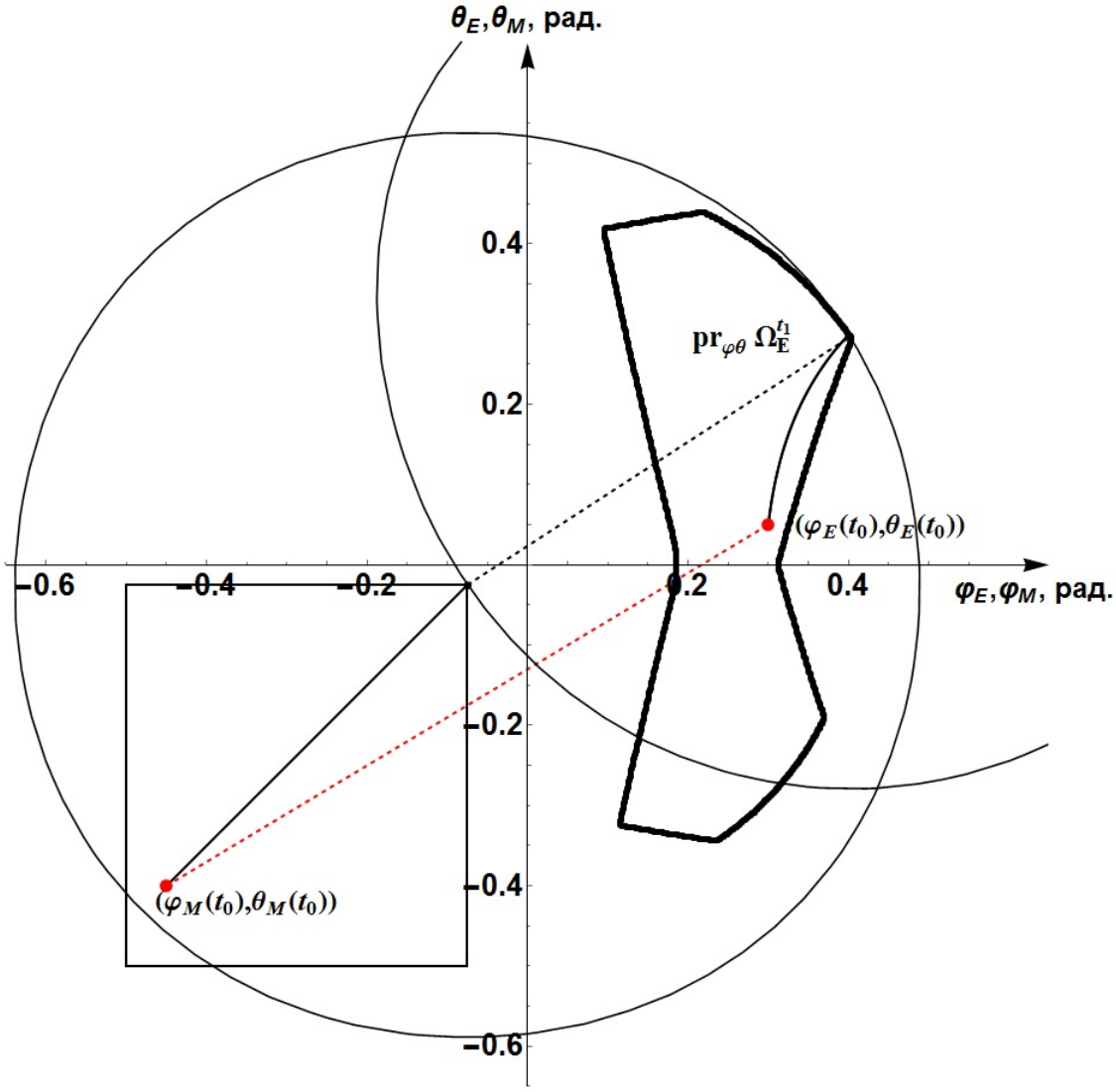


Рисунок 3.10 — Пример существования седловой точки в программных стратегиях

На рисунке 3.11 представлен пример отсутствия седловой точки в программных стратегиях при заданных параметрах для численного моделирования. На этом рисунке изображены замкнутые кривые $D(r, M_0)$ и $D(r, E_0)$ из теоремы 3.4. Множество $pr_{\varphi\theta}(\Omega_E^{t_1})$ не содержится целиком внутри $D(r, M_0)$. Видно, что спектр смешанной стратегии состоит из двух точек, равноудален-

ных от M^0. Вероятность выбора каждой из них равна $\frac{1}{2}$, а сумма $E_1^0 + E_2^0$ равна нулю.

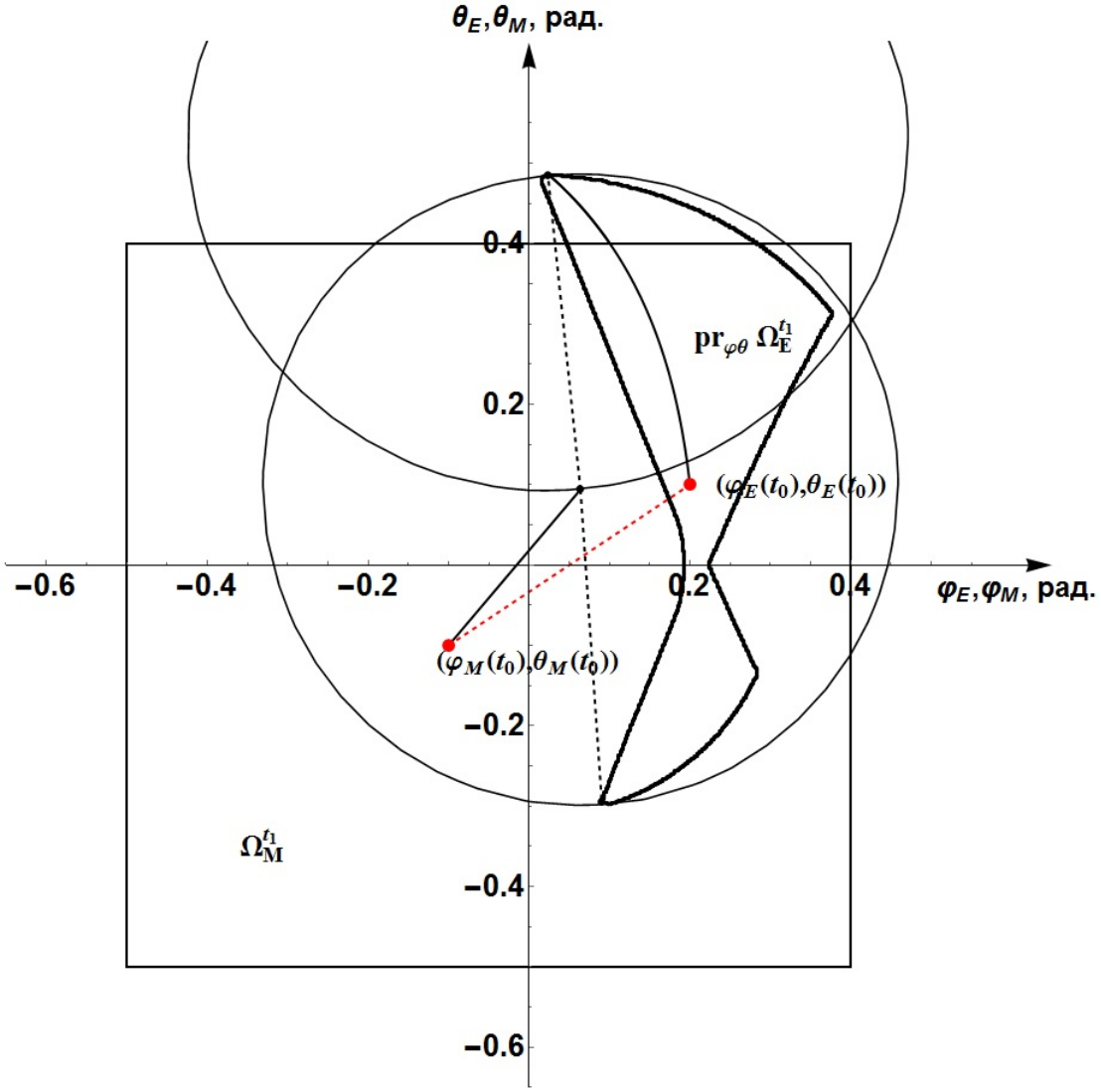


Рисунок 3.11 — Пример отсутствия седловой точки в программных стратегиях — найдена седловая точка в смешанных стратегиях

На втором примере оптимальная стратегия преследователя не лежит на границе его множества достижимости, поэтому его оптимальное управление не будет также достигать ограничений на управления U.

3.5.2 Описание подвижного стенда опорного типа

Для испытаний использовался подвижный трехстепенной стенд-платформа, произведенный фирмой Логос. Он представляет собой подвижную

платформу, оснащенную креслом для человека (далее — испытуемого), и связанную тремя подвижными опорами с основанием. Три рычажных опоры, закрепленных на валах редукторов, обеспечивают подвижность по трем степеням свободы (наклоны относительно продольной оси — по углу крена, наклоны относительно поперечной оси — по углу тангажа, вертикальное перемещение). Основание платформы оснащено колесными опорами, предназначенными для транспортировки. Центровка и стабилизация по углу курса осуществляется центральной телескопической опорой с многогранным профилем сечения, обеспечивающим одну степень свободы — линейные перемещения вдоль вертикальной оси, и кардановым шарниром в соединении верхней точки штока опоры с серединой рамы подвижной платформы, обеспечивающим две угловые степени свободы — повороты относительно продольной (по углу крена) и поперечной (по углу тангажа) осей.

Эта платформа используется на Панорамной системе виртуальной реальности (ПСВР) лаборатории МОИДС механико-математического факультета МГУ. На стенде-платформе ПСВР установлены инерциальные датчики модели MPU–9150, в состав которых входит трехосный ДУС и трехосный акселерометр. На рисунке 3.12 представлена фотография этой платформы.

Рисунок 3.12 — Подвижная стенд-платформа опорного типа, использовавшаяся при разработке тренажера

Как на рисунке 3.12 видно, на платформе установлен монитор перед сиденьем оператора. Этот монитор предназначен для визуальной имитации.

Для разработки тренажера требовалось согласование динамической имитации и визуальной имитации.

Для построения согласованной имитации требовалось решить задачу идентификации геометрических параметров стенда-платформы и отслеживания его положения. Для этого часто используются оптические датчики [16], лазерные датчики [9], и другие измерительные устройства.

Авторами статьи [31], среди которых — автор настоящей диссертации, был разработан алгоритм идентификации геометрических параметров платформы опорного типа. Для этого была построена модель платформы, которая позволяет преобразовать управляющие сигналы в ориентацию платформы в заданной системе координат и может использоваться для дальнейшей имитации движения. Определение положения платформы в процессе калибровки осуществляется с помощью системы видеоанализа, жестко связанной с комнатой, в которой расположена платформа. Особенность алгоритма заключается в том, что расположение маркеров системы видеоанализа на платформе может быть произвольным.

После идентификации геометрических параметров платформы дальнейшее отслеживание ее угловых движений возможно и без использования видеоанализа. Оценка ориентации платформы в автономном режиме проводится при помощи инерциальной навигационной системы.

3.5.3 Проведение экспериментов на компьютерном и динамическом тренажерах

До этого момента рассматривались игры, в которых предполагается, что оба игрока выбирают стратегию в течение игры один раз — в момент начала игры. Будем называть такие игры одношаговыми. Моделирование этой игры на тренажере позволяет сделать игру длительностью 2-3 секунды. Для тренировки оператора наведения этого недостаточно. Необходима повторяемость игры, чтобы можно было увидеть улучшение оценок в процессе обучения.

Определение 3.5. Многошаговой игрой называется игра, в которой игроки выбирают стратегию в течение игры более одного раза [56].

Построим многошаговую игру путем последовательного проведения одношаговых игр, описанных в разделе 3.4.3.

Были проведены две серии экспериментов на неподвижном и подвижном стенде. В каждом эксперименте участвовали по пять человек. Пятерым была поставлена задача: наводить маркер на цель в течение тридцати секунд. Остальные пять человек делали то же самое на подвижном стенде. В случае подвижного стенда платформа двигалась так, как этого требовали оптимальные стратегии на каждом из шагов (раздел 3.4.3). Фазовые ограничения были заданы такие, какие наложены на подвижную платформу. Каждый шаг игры — это одношаговая подыгра. Интервал одного шага игры — 0.1 секунды. Каждому испытуемому было предоставлено по три попытки.

Каждый участник в эксперименте управлял маркером на экране монитора при помощи джойстика. У каждого испытуемого были ограничения на управления: $|u_1| \leq 1.2, |u_2| \leq 1.2$. В программу были введены следующие ограничения на углы:

$$|\alpha| = 0.0, |\beta| \leq 0.216, |\gamma| \leq 0.167.$$

Эти ограничения были определены путем измерения максимальных возможных углов крена и тангажа с помощью инклинометра. Угол курса в экспериментах был равен нулю, поскольку платформа не имеет степени свободы, связанной с ним.

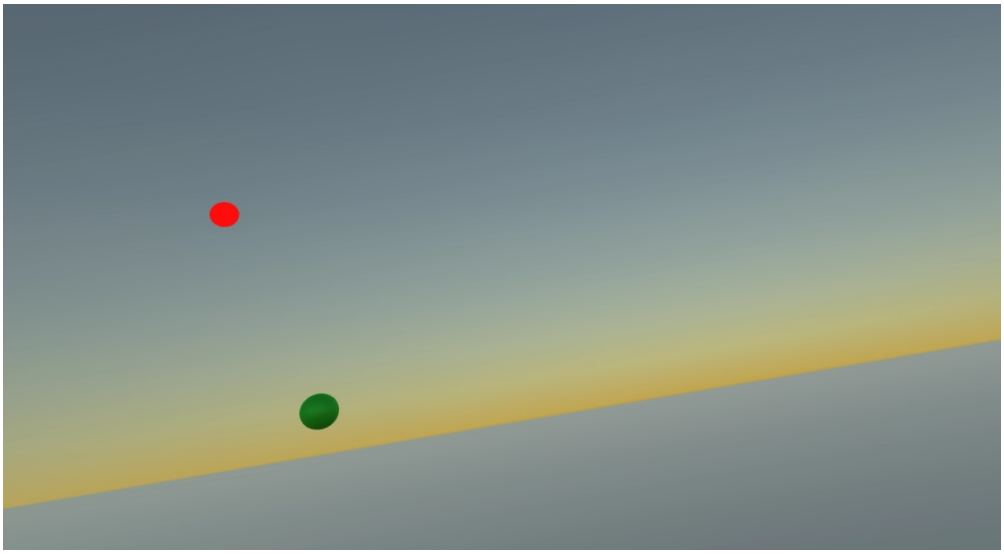


Рисунок 3.13 — Изобажение на мониторе в экспериментах: зеленая точка — маркер цели, красная точка — маркер оператора

На рисунке 3.13 представлено изображение на мониторе, которе видел каждый участник во время проведеня испытаний. На рисунке 3.14 представ-

лены графики углов α, β и γ подвижного основания в многошаговой игре. Эти графики получены при численном моделировании многошаговой игры, в котором оба игрока использовали оптимальные стратегии на каждой подыгре.

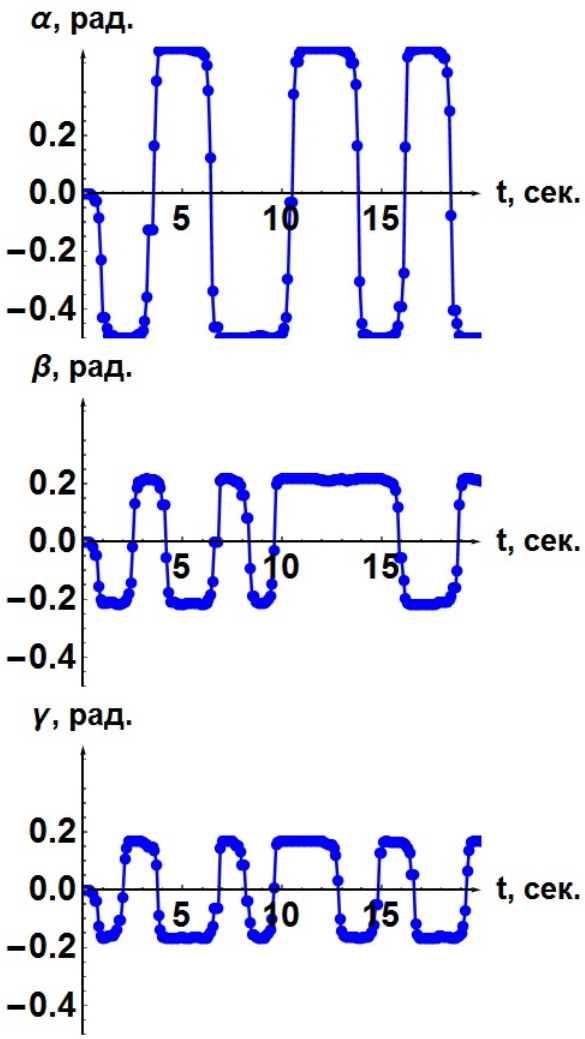


Рисунок 3.14 — Пример существования седловой точки в программных стратегиях

Методика построения оценки в результате каждого испытания следующая: на каждой подыгре в режиме реального времени проверяется наличие седловой точки в программных стратегиях, вычисляется оптимальное управление в программных или смешанных стратегиях. Для получения оценки действий оператора будем рассмтривать только те подыгры, в которых была седловая точка в программных стратегиях. Обозначим через $\tilde{J}_i$ показатель функционала (3.8) на стратегии, реализованной оператором в i-й подыгре, а через J_i обозначим значение i-й подыгры. Пусть за многошаговую игру было N подыгр, в которых существовала седловая точка в программных

стратегиях. Оценка действий оператора за многошаговую игру вычисляется по формуле:

$$\Phi = 100 \sum_{i=1}^{N} \frac{J_i}{\tilde{J}_i}$$

На рисунке 3.15 показаны оценки всех испытуемых. Каждому испытуемому соответствует одна ломаная на графике. Синим цветом обозначены графики испытуемых, которые играли на неподвижном сденде, черным — на подвижном.

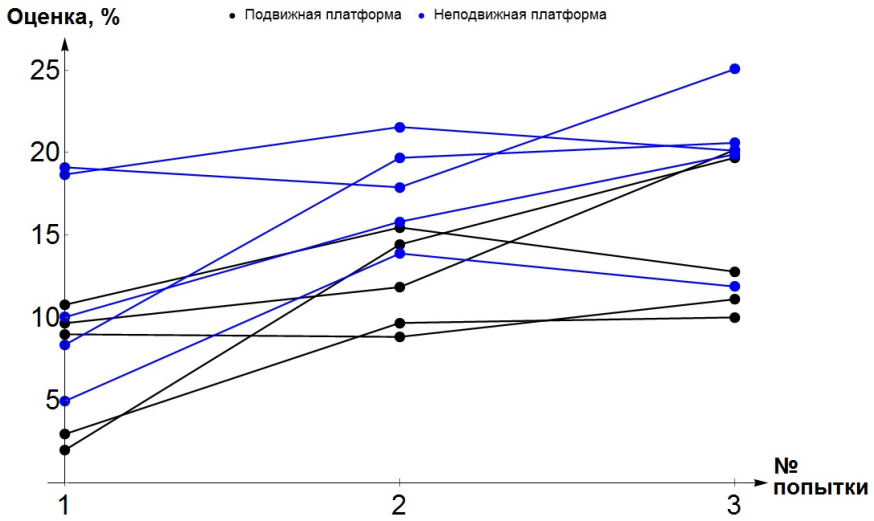


Рисунок 3.15 — Статистика испытуемых. Синим цветом обозначены графики испытуемых, которые играли на неподвижном сденде, черным — на подвижном

Видно, что оценки испытуемых в среднем улучшаются. Также видно, что у испытуемых на подвижном стенде оценки в среднем хуже.

Заключение

Основные результаты работы заключаются в следующем.

В первой главе изложена общая физическая и математическая постановка задачи целеуказания, которая решается относительно подвижного основания. Движение основания определяется управлением водителя. Внутри основания помимо водителя сидит оператор, который не видит окружающую обстановку сквозь стены основания, поэтому ориентируется по монитору, установленному перед ним. На монитор поступает изображение с видеокамеры, жестко закрепленной на основании снаружи.

В задаче присутствуют три обьекта, которым ставится в соответствие линия визирования — единичный вектор ориентира, задаваемый относительно подвижной системы координат. Первая линия визирования сопоставляется цели — объекту, неподвижному относительно Земли. Вторая линия визирования — линия визирования направляющего цилиндра — инерционного объекта, установленного на основании и управляемого следящей системой относительно подвижного основания. Третья — линия визирования маркера. Это виртуальный ориентир, которым оператор наведения указывает следящей системе направление в пространстве, которого должна придерживаться линия визирования направляющего цилиндра.

Задача оператора — указать с помощью маркера на цель по изображению монитора (цель отображается на мониторе, если попадает в поле зрения видеокамеры). Задача следящей системы — обеспечивать совпадение линий визирования маркера оператора и направляющего цилиндра.

Считается, что следящая система использует два режима управления: наведения и стабилизации. Первый режим используется, когда угол между линиями визирования маркера оператора и направляющего цилиндра достаточно большой, второй — когда он равен нулю или очень мал. В этой главе поставлена задача оптимизации стабилизирующего управления, при различных видах возмущения, действующих на направляющий цилиндр.

Также в этой главе поставлена задача оптимального наведения маркера оператора на изображение цели и задача оптимального уклонения изображения цели от маркера оператора. первая задача нужна для определения оптимальных управлений маркером оператора для максимально качествен-

ного целеуказания. Вторая задача необходима для вычисления управления основанием, которое бы вызывало оптимальное уклонение изображения цели от маркера оператора. Это в дальнейшем использовано для создания математического обеспечения тренажеров целеуказания. Эти две задачи сведены к одной игровой задаче.

Во второй главе решены три задачи минимаксной стабилизации линии визирования направляющего цилиндра в окрестности точки, неподвижной относительно инерциальной системы координат. Выведены уравнения Лагранжа второго рода, описывающие движение направляющего цилиндра относительно подвижного основания. Стабилизирующее управление ищется в виде линейной обратной связи.

Первая задача стабилизации решена в линейном приближении. В этой задаче рассмотрены случаи стабилизации на конечном и бесконечном времени. Во второй и третьей задачах получены уравнения, содержащие билинейные части по отклонениям и возмущениям. В последних двух задачах помимо начальных отклонений присутствуют постоянно действующие возмущения: константное и периодическое.

Оптимальные коэффициенты обратной связи были найдены с помощью методики, предложенной В.В. Александровым [1], основанной на методе редукции исходной задачи с помощью метода А.М. Ляпунова к задаче минимизации кусочно-гладкой функции и на методе шатров В.Г. Болтянского [30]. Эта методика разработана для поиска коэффициентов обратной связи, обеспечивающих оптимальную стабилизацию при наихудших начальных отклонениях системы от нуля. Во второй главе при решении последних двух задач этот метод был расширен до поиска оптимальных коэффициентов при наихудших начальных отклонениях и наихудших постояно действующих возмущениях.

Во всех задачах с помощью критерия Гурвица получено множество коэффициентов обратной связи, обеспечивающих асимптотическую устойчивость линейной системы с заданным запасом устойчивости. Во всех задачах, кроме последней, граница этого множества описана аналитически. Численное моделирование было проведено с помощью пакета программ *Wolfram Mathematica*.

В третьей главе решены три игровые задачи преследования-уклонения с разными критериями качества наведения. В первых двух задачах исполь-

зуется критерий качества наведения (описывает принципиальную возможность наведения маркера на цель) и критерий быстродействия. Движение подвижного основания моделируется машиной Дубинса [22]. В третьей задаче эта модель расширена до трех угловых координат; используется критерий точности наведения.

В статье [28] приведен критерий существования седловой точки в чистых стратегиях в геометрической игре с выпуклыми множествами достижимости и выпуклым функционалом. На основе этой работы в третьей игровой задаче получен критерий существования седловой точки в чистых стратегиях. Отличие полученного критерия в том, что в рассматриваемой игре у одной из динамических систем множество достижимости невыпукло.

При решении третьей задачи разработан алгоритм построения множества достижимости нелинейной управляемой системы, которая описывает движение линии визирования цели относительно подвижного основания. Эта динамическая система содержит первые интегралы, поэтому ее конфигурационное многообразие имеет меньшую размерность, чем число координат, описывающих положение линии визирования цели. Полученный алгоритм позволил реализовать процедуру обучения оператора наведения на компьютерном и динамическом тренажерах.

Процесс обучения построен на основе методики максиминного тестирования [51]. В этой работе приведена методика тестирования на основе одношаговой игры, то есть когда оба игрока принимают решение один раз за игру. В диссертации эта процедура расширена до многошаговой игры. При проведении тестирования на тренажере программа, формирующая управление основанием, формирует управляющие моменты несколько раз в секунду. Выбор управлений зависит от положения маркера оператора на мониторе и от положения основания.

Для проведения тестирования разработано программное обеспечение для визуальной имитации процесса наведения. Визуальная часть симулятора разработана на игровом движке *Unity3D*. Программа, отвечающая за управление динамическим стендом разработана на языке программирования *C#* в среде разработки *Microsoft Visual Studio*. Проведены эксперименты, которые демонстрируют обучаемость испытуемых на обоих тренажерах. Процедура представляет собой игру, в которой оператор наведения является одним из игроков.

Проведено сравнение результатов, полученных при тестировании на компьютерном и динамическом тренажерах. Показано, что при тестировании на динамическом тренажере результаты целеуказания хуже, чем при тестировании на компьютерном тренажере. Также из результатов видно, что многократное повторение процедуры тестирования позволяет обеспечить улучшение результатов целеуказания на обоих тренажерах.

В дальнейшем перспективным представляется рассмотрение динамической модели подвижного основания, которая учитывает размер и форму основания, силы его взаимодействия с поверхностью Земли и аэродинамические силы. Также представляется перспективным рассмотрение цели, имеющей возможность двигаться относительно Земли. Эти модели предполагается использовать для улучшения моделирования процесса целеуказания при разработке тренажеров целеуказания, ориентированных на имитацию конкретного транспортного средства.

Благодарности

Автор выражает благодарность и большую признательность своим научным руководителям Тихомирову Владимиру Викторовичу и Александрову Владимиру Васильевичу за постановку задачи, обсуждение результатов и плодотворную совместную работу.

Автор выражает благодарность своим учителям, сотрудникам кафедры прикладной механики и управления, за консультации и помощь, а также за ценные замечания по тексту работы. Особую благодарность автор выражает Бугрову Дмитрию Игоревичу, Лемаку Степану Степановичу, Морозову Виктору Михайловичу и Формальскому Александру Моисеевичу.

Также автор благодарит своих коллег, сотрудников лаборатории МОИДС, Бурлакова Даниила Сергеевича и Чертополохова Виктора Александровича за ценные советы и помощь в нахождении решений задач, Кручинину Анну Павловну за помощь в оформлении текста и Сухочева Павла Юрьевича за подготовку иллюстраций. Кроме того автор благодарит студента кафедры прикладной механики и управления Зайделя Петра Ильича за помощь в разработке программного обеспечения для подсчета множества достижимости динамической системы пиксельным методом и проведении численного моделирования.

Автор искренне благодарит своих родителей Латоновых Василия Васильевича и Маргариту Константиновну за мотивацию к работе и всестороннюю моральную поддержку.

Список литературы

1. Alexandrov V.V., Bugrov D.I., Corona M.G., Tikhonova K.V. Tent-method application for minmax stabilization and maxmin testing // IMA Journal of Mathematical Control and Information. — 2017. — Vol. 34, no. 1. — P. 15–25.

2. Beard R.W., McLain T.W. Implementig Dubins airplane path on fixed-wing UAVs // Springer handbook of unmanned aerial vehicles. — 2013. — P. 1677–1701.

3. Berkowitz L. D. A variational approach to differential games // Annals of Math. Study. — 1964. — no. 52. — P. 127–173.

4. Berkowitz L. D., Fleming I. H. On differential games with integral payoff // Annals of Math. Study. — 1957. — no. 39. — P. 413–435.

5. Caharija W., Pettersen K.Y., Bibuli M., Calado P., Zereik E., Braga J., Gravdahl J.T., Sorensen A. J., Milovanovic M., Bruzzone G. Integral Line-of-Sight Guidance and Control of Underactuated Marine Vehicles: Theory,Simulations, and Experiments // IEEE Trans. Control System Technol. — 2016. — Vol. 24, no. 5. — P. 1623–1642.

6. Campos L.C.A., Menegaldo L.L. Design of a simulator for eye and hand tracking tasks under horizontal whole body vibration // 2013 ISSNIP Biosignals and Biorobotics Conference: Biosignals and Robotics for Better and Safer Living (BRC). — IEEE, 2013. — 18–20 February.

7. Chen T.Y., Yu Y.T. Optimal improvement of the lower bound performance of partition testing strategies // IEEE Proceedings — Software Engineering. — Vol. 144. — 1997. — P. 271–278.

8. Daozhe S., Yunhai G., Xiang F. Spacecraft line-of-sight nonlinear control using two wheels // 2016 10th International Conference on Intelligent Systems and Control (ISCO). — IEEE, 2016. — 7–8 January.

9. Gao T.Y., Meng. L. Calibration method and experiment of Stewart platform using a laser tracker // IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics (ICSMC). — Vol. 3. — IEEE, 2003. — 8 October.

10. Hartley R., Zisserman A. Multiple View Geometry in computer vision. — Cambridge: Cambridge University Press, 2003.

11. Hur'ak Z., Rez'ac M. Combined line-of-sight inertial stabilization and visual tracking: application to an airborne camera platform // Proceedings of the 48h IEEE Conference on Decision and Control (CDC) held jointly with 2009 28th Chinese Control Conference. — SHanghai: IEEE, 2009. — 15–18 December.

12. Ilamathi M., Abiram M. Automatic target tracker for main battle tank // 2015 International Conference on Communications and Signal Processing (ICCSP). — Madras: IEEE, 2015. — 2–4 April.

13. Isaacs R. Differential games. — New York: John Wiley and Sons Inc., 1969. — P. 408.

14. Lin Ch.M, Peng Y.F. Missile guidance law design using adaptive cerebellar model articulation controller // IEEE Transactions on Neural Networks. — 2005. — Vol. 16, no. 3. — P. 636–644.

15. Liu L., Wang D., Peng Zh. ESO-based Line-of-sight Guidance Law for Straight Line Path Following with Exact Sideslip Compensation // 2016 12th World Congress on Intelligent Control and Automation (WCICA). — Guiin, China: IEEE, 2016. — 12–15 June.

16. Luo R.C., Hsieh C.H., Chou S.C. Effective visual calibration system for parallel robot using decision tree with cooperative coevolution network approach // IEEE International Conference on Industrial Technology (ICIT). — Seville, Spain: IEEE, 2015. — 17–19 March.

17. Mochiduki S., Suganuma M., Shoji G., Yamada M. Analysis of lines of sight while playing sport using a newly developed lines-of-sight analyzer // 2016 11th International Conference on Computer Science & Education (ICCSE). — Nagoya, Japan: IEEE, 2016. — 23–25 August.

18. Nishiuchi N., Kurihara K., Sakai S., Takada H. A man-machine interface for camera control in remote monitoring using line-of-sight // IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics. — Vol. 2. — Nashville, TN, USA: IEEE, 2000. — 8–11 October.

19. Sangveraphunsiri V., Malithong K. Robust Inverse Dynamics Control and Sliding Mode Control // The 6th Int. Conf. on Automotive Engineering (ICAE-6). — Bangkok, Thailand: IEEE, 2010. — March 29–April 2.

20. Shubert M.C., Minor L.B. Vestibulo-ocular Physiology Underlying Vestibular Hypofunction // Physical Therapy. — 2004. — Vol. 84, no. 4. — P. 373–385.

21. Xu G., Zhang. Zh. Epipolar geometry in Stereo, Motion and Object Recognition. A Unified Approach. — First Edition. — 6. Springer, Netherlands, 1996. — P. 316.

22. Аграчев А.А., Сачков Ю.Л. Геометрическая теория управления. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — С. 392.

23. Александрова О.В., Козик А.А. Минимаксная оптимизация параметров стабилизации программного полета // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2019. — № 3. — С. 45–49.

24. Александров В.В., Бугров Д.И., А.П. Кручинина, Лебедев А.В., Лемак С.С., Тихонова К.В., Чертополохов В.А., Шуленина Н.Э. Тестирование качества сближения устройства спасения космонавта с международной космической станцией. Спецправктикум по теоретической и прикладной механике. — 2019. — М.: Издательство Московского университета. — С. 53.

25. Александров В.В., Лемак С.С., Парусников Н.А. Лекции по механике управляемых систем. — М.: МАКСПресс, 2012. — С. 240.

26. Александров В.В., Рамирез Гутиерез Х.А. Алгоритм минимаксной стабилизации линейных систем третьго порядка // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2018. — № 2. — С. 47–52.

27. Арнольд В.И. Математические методы классической механики: Учебное пособие. — Изд. 5-е, стереотипное. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — С. 416.

28. Блаженнова-Микулич Л.Ю. Некоторые задачи геометрической теории игр // Фундаментальная и прикладная математика. — 2005. Т. 11, №8. — С. 131–137.

29. Болотин С. В., Карапетян А. В., Кугушев Е. И., Трещев Д. В. Теоретическая механика. — Москва: Издательский центр «Академия», 2010. — С. 432.

30. Болтянский В.Г. Метод шатров в теории экстремальных задач // УМН. — 1975. — Т. 30, № 3(183). — С. 3–55.

31. Бурлаков Д. С., Латонов В. В., Чертополохов В. А. Идентификация параметров модели подвижной платформы опорного типа // Фундаментальная и прикладная математика. — 2018. — Т. 22, № 2. — С. 57–73.

32. Вильке В.Г. Теоретическая механика: Учебник. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Изд-во МГУ, 1998. — С. 272.

33. Воробьев Н.Н. Основы теории игр. Бескоалиционные игры. — М.: Наука, 1984. — С. 496.

34. Голован А.А., Парусников Н.А. Математические основы навигационных систем. Часть I. Математические модели инерциальной навигации. — 3-е изд., испр. и. доп. — М.: Изд-во МГУ, 2011. — С. 136.

35. Григоренко Н. Л. Дифференциальные игры преследования несколькими объектами. — Москва: Издательство МГУ, 1983. — С. 79.

36. Григоренко Н. Л. Математические методы управления несколькими динамическими процессами. — Москва: Издательство МГУ, 1990. — С. 197.

37. Данилов А.В., Трифоненко Б.В. Динамика робототехнических систем типа стенда-имитатора. // Труды IV Всесоюзного совещания по робототехническим системам. — 1987. С. 271–278.

38. Данилов А.В., Трифоненко Б.В. Программное управление движением динамического стенда. // Вестник ЛГУ. Серия 1. — 1988. — № 4. — С. 49–53.

39. Зуев С.М., Трифоненко Б.В. К вопросу об устойчивости платформы Стюарта с тремя опорными штоками // Фундаментальные и прикладные проблемы науки. Материалы VIII Международного симпозиума. — 2013. — Т 3. — С. 93–103.

40. Иванов А.О., Тужилин А.А. Лекции по классической дифференциальной геометрии: учебное пособие. — М.: Университетская книга; Логос, 2009. — С. 224.

41. Каленова В.И., Морозов В.М. Линейные нестационарные системы и их приложения к задачам механики. — Москва: КУРС: ИНФРА-М, 2016. — С. 208.

42. Камзолкин Д.В., Кряжимский А.В. Введение в позиционные дифференциальные игры. — Москва: МГУ имени М.В. Ломоносова, 2009.

43. Комаров В.А. Об одном способе описания эволюции множества достижимости дифференциального включения // Труды математического института РАН. — 1995. — Т. 211. — С. 235–242.

44. Комаров В.А. Оценки множества достижимости дифференциальных включений // Математические заметки. — 1985. — Т. 37, № 6. — С. 916–925.

45. Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. — М.: Наука, 1970. — С. 420.

46. Красовский Н.Н. Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. — М.: Наука, 1974. — С. 456.

47. Латонов В.В. Задача минимаксной оптимизации системы стабилизации линии визирования // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2019. — № 6. — С. 64–68.

48. Латонов В.В. Программные стратегии тестирования качества управления линией визирования по видеоизображению // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2018. — № 6. — С. 51–56.

49. Латонов В.В., Тихомиров В.В. Управление линией визирования цели по видеоизображению // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2018. — № 1. — С. 53–59.

50. Лебедев А.В. Алгоритмы максиминного тестирования качества стабилизации динамических систем: Диссертация на соискание ученой степени

к.ф.-м.н.: 01.02.01 / А.В. Лебедев; МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет. — М., 2008.

51. Лемак С.С. Максиминный контроль качества стабилизации космических объектов: Диссертация на соискание ученой степени к.ф.-м.н.: 01.02.01 / С.С. Лемак; МГУ имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет. — М., 2004.

52. Лотов А.В. Численный метод построения множеств достижимости для линейных управляемых систем с фазовыми ограничениями // Журнал вычислительной математики и ммматематической физики — 1975. — Т. 15, № 1. — С. 18–25.

53. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. — 2-е изд. испр. — М.: Наука, 1966. — С. 530.

54. Новикова А.О. Построение множеств достижимости некоторых управляемых систем пиксельным методом // Сб. статей молодых ученых факультета ВМК МГУ. — 2012. — № 9. — С. 136–153.

55. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория Игр. — М.: Высш. шк., Книжный дом «Университет», 1998, 304 с.

56. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Шевкопляс Е.В. Теория Игр. — СПб.: БХВ-Петербург, 2012. — С. 432.

57. Поляк Б.Т., Щербаков П.С. Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002. — С. 303.

58. Поляхов Н.Н., Зегжда С.А., Юшков М.П. Теоретическая механика. — М.: Юрайт. 2012. — С. 593.

59. Смирнов В.А., Захариков В.С. Система стабилизации и наведения линии визирования с увеличенными углами обзора // Изв. ТулГУ. Техн. науки. — 2013. — № 11. — С. 68–73.

60. Тригуб М.В. Приближенно-оптимальная стабилизация однго класса нелинейных систем // Автоматика и телемеханика. — 1987. — № 1. — С. 34–47.

61. Тузов К.А. О применимости метода шатров в задаче стабилизации периодического программного движения // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. — 2017. — № 6. — С. 50–54.

62. Тузов К.А. Стабилизация вектора перегрузки относительно кабины тренажера типа центрифуги с кардановым подвесом. — Дипломная работа, МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва, 2017.

63. Харитонов В.Л. Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства систем линейных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. — 1978. — Т. 14, № 4. — С. 2086–2088.

64. Челноков Ю.Н., Нелаева Е.И. Бикватернионное решение кинематической задачи оптимальной нелинейной стабилизации произвольного программного движения свободного твердого тела // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. — 2016. — Т. 16, № 2. — С. 198–207.

65. Якубович В.А., Старжинский В.М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. — М.: Наука, 1972. — С. 720.