МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Петрунин Максим Максимович

S-единицы и функциональные непрерывные дроби в гиперэллиптических полях

Специальность 01.01.06 —
«Математическая логика, алгебра и теория чисел»

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2019

Работа выполнена в Федеральном государственном учреждении «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук».

Научный руководитель: **Платонов Владимир Петрович**,
академик РАН, доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Нестеренко Юрий Валентинович,**
член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор,
кафедра теории чисел ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова», заведующий кафедрой

Добровольский Николай Михайлович,
доктор физико-математических наук, профессор,
кафедра алгебры, математического анализа и геометрии ФГБОУ ВО «Тульский государственный педагогический университет им. Л.Н. Толстого», заведующий кафедрой

Гриценко Сергей Александрович,
доктор физико-математических наук, профессор,
кафедра математических и компьютерных методов анализа ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова», профессор

Защита диссертации состоится 6 декабря 16:45 на заседании диссертационного совета МГУ.01.17 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: 119234, Москва, ГСП-1, Ленинские горы д. 1, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова», механико-математический факультет, аудитория 14-08.

E-mail: msu.01.17@mail.ru
С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27) и на сайте ИАС «ИСТИНА»: https://istina.msu.ru/dissertations/245080651/.

Автореферат разослан 6 ноября 2019 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
МГУ.01.17,
член-корреспондент РАН А. И. Шафаревич

Общая характеристика работы

Актуальность темы и степень её разработанности.

Диссертация посвящена исследованию проблемы существования и построения S-единиц в гиперэллиптических полях над полем рациональных чисел, которая тесно связана с проблемой кручения в якобианах (якобиевых многообразиях) гиперэллиптических кривых. Также в диссертации исследуется связь указанных проблем с проблемой периодичности и квазипериодичности функциональных непрерывных дробей.

Вопросами, связанными с S-единицами, т.е. с элементами поля с нулевым значением нормирования, для нормирований не лежащих в конечном множестве S, в функциональном случае занимались многие математики, в числе которых Э. Артин[1] и В. П. Платонов. Проблема существования и построения S-единиц в функциональных полях представляет самостоятельный интерес, но в то же время её исследование мотивировано естественной связью S-единиц с точками кручения в якобианах гиперэллиптических кривых. Эта связь легла в основу предложенного в 2010 году В. П. Платоновым подхода к проблеме кручения, т.е. к проблеме описания подгрупп конечного порядка в якобианах гиперэллиптических кривых над числовыми полями.

В эллиптическом случае проблема кручения была полностью решена в 1977-1978 годах Б. Мазуром[2] для поля рациональных чисел: было доказано, что кручение ограничено, а также было дано описание всех возможных групп кручения.

Следующим естественным шагом является попытка получить решение проблемы кручения для гиперэллиптических кривых большего рода над полем рациональных чисел. Полное решение проблемы требует ответа на два вопроса: ограничено ли кручение и, если ограничено, то какие существуют порядки кручения? К настоящему моменту ответ на первый вопрос неизвестен даже для кривых рода 2. Последние 30 лет специалистам в этой области в основном удавалось получать результаты, связанные со вторым вопросом, и заключающиеся в нахождении кривых, якобианы которых обладают $\mathbb{Q}$-точками кручения определенного порядка. Усилиями ряда исследователей (Е. Флин[3], Ф. Лепровост[4,5,6],

[1] *Artin E., Whaples G.* Axiomatic characterization of fields by the product formula for valuations // Bulletin of the American Mathematical Society. 1945. Vol. 51, no. 7. P. 469—492.

[2] *Mazur B.* Rational points on modular curves // Modular Functions of one Variable V / ed. by J.-P. Serre, D. B. Zagier. Springer Berlin Heidelberg, 1977. P. 107—148. (Lecture Notes in Mathematics).

[3] *Flynn E. V.* Large rational torsion on abelian varieties // J. Number Theory. 1990. Vol. 36, no. 3. P. 257—265.

[4] *Leprévost F.* Famille de courbes de genre 2 munies d’une classe de diviseurs rationnels d’ordre 13 // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1991. Vol. 313, no. 7. P. 451—454.

[5] *Leprévost F.* Familles de courbes de genre 2 munies d’une classe de diviseurs rationnels d’ordre $15, 17, 19$ ou 21 // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1991. Vol. 313, no. 11. P. 771—774.

[6] *Leprévost F.* Jacobiennes de certaines courbes de genre 2: torsion et simplicité // J. Théor. Nombres Bordeaux. 1995. Vol. 7, no. 1. P. 283—306.

Х. Огава[7], Н. Д. Элкис[8], Э. В. Хау[9,10] и других[11]) было доказано существование $\mathbb{Q}$-точек кручения больших порядков в якобианах гиперэллиптических кривых рода 2, определённых над $\mathbb{Q}$. Эти доказательства были получены с использованием различных методов, индивидуальных для отдельных порядков.

Пусть множество S состоит из двух нормирований гиперэллиптического поля, причём одно из них — единственное продолжение бесконечного нормирования поля рациональных функций, или оба нормирования сопряжены. Тогда нетривиальная группа S-единиц является прямым произведением мультипликативной группы поля констант и бесконечной циклической группы. Образующая циклической группы называется фундаментальной S-единицей. Предложенный В. П. Платоновым[12] новый подход к проблеме кручения в якобиевых многообразиях гиперэллиптических кривых над полем рациональных чисел был основан на построении фундаментальных S-единиц в соответствующих гиперэллиптических полях. Ранее в работе 2009 года[13] В. П. Платоновым и В. В. Беняш-Кривцем был развит математический аппарат и построены алгоритмы для нахождения фундаментальных S-единиц в гиперэллиптических полях, заданных многочленами f нечётной степени. С помощью указанного подхода в работах В. П. Платонова и М. М. Петрунина[14,15] было завершено доказательство гипотезы существования $\mathbb{Q}$-точек любого порядка ≤ 30, были единообразно построены все $\mathbb{Q}$-точки простых порядков $p \leq 29$, а также было доказано существование $\mathbb{Q}$-точек неизвестных ранее порядков в якобианах кривых рода 2.

Опираясь на полученные результаты, В. П. Платонов высказал предположение, что если рассмотреть S, состоящее из конечного и бесконечного нормирования, то порядки $\mathbb{Q}$-точек кручения, как правило, будут определяться степенями фундаментальных S-единиц, эта числовая характеристика S-единицы была впервые введена в работе В. П. Платонова и М. М. Петрунина[16]. Одним

[7] *Ogawa H.* Curves of genus 2 with a rational torsion divisor of order 23 // Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 1994. Vol. 70, no. 9. P. 295—298.

[8] *Elkies N. D.* Curves of genus 2 over Q whose Jacobians are absolutely simple abelian surfaces with torsion points of high order // preprint Harvard University. 2010.

[9] *Howe E. W., Leprévost F., Poonen B.* Large torsion subgroups of split Jacobians of curves of genus two or three // Forum Math. 2000. Vol. 12, no. 3. P. 315—364.

[10] *Howe E. W.* Genus-2 Jacobians with torsion points of large order // Bull. Lond. Math. Soc. 2015. Vol. 47, no. 1. P. 127—135.

[11] *Bernard N., Leprévost F., Pohst M.* Jacobians of genus-2 curves with a rational point of order 11 // Experiment. Math. 2009. Vol. 18, no. 1. P. 65—70.

[12] *Платонов В. П.* Арифметика квадратичных полей и кручение в якобианах // Доклады Академии наук. 2010. Т. 430, № 3. С. 318—320.

[13] *Беняш-Кривец В. В., Платонов В. П.* Группы S-единиц в гиперэллиптических полях и непрерывные дроби // Математический сборник. 2009. Т. 200, № 11. С. 15—44.

[14] *Платонов В. П., Петрунин М. М.* Новые порядки точек кручения в якобианах кривых рода 2 над полем рациональных чисел // Доклады Академии наук. 2012. Т. 443, № 6. С. 664—667.

[15] *Платонов В. П., Петрунин М. М.* О проблеме кручения в якобианах кривых рода 2 над полем рациональных чисел // Доклады Академии наук. 2012. Т. 446, № 3. С. 263—264.

[16] *Платонов В. П., Петрунин М. М.* Фундаментальные S-единицы в гиперэллиптических полях и проблема кручения в якобианах гиперэллиптических кривых // Доклады Академии наук. 2015. Т. 465, № 1. С. 23—25.

из основных результатов диссертации является построение фундаментальных S-единиц больших степеней методами, основанными на подходе В. П. Платонова, с применением высокопроизводительных вычислений. Многие результаты настоящей диссертации в существенной степени получены с использованием симбиоза глубокой теории, эффективных алгоритмов и супервычислений.

Теория S-единиц в функциональных полях имеет глубокие связи с теорией функциональных непрерывных дробей и с проблемой периодичности функциональных непрерывных дробей. История изучения разложения квадратичных иррациональностей в функциональную непрерывную дробь восходит к Абелю[17] и Чебышеву[18]. Пусть множество S_∞ состоит из двух продолжений бесконечного нормирования поля $k(x)$ на гиперэллиптическое поле $L = k(x)(\sqrt{f})$, где k — поле констант гиперэллиптического поля, char $k \neq 2$, а $f \in k[x]$. Существует связь кручения в якобиане гиперэллиптического поля L, S_∞-единиц в L и разложения квадратного корня многочлена f, задающего L, в непрерывную дробь в поле формальных степенных рядов $k((1/x))$. Впервые указанная связь в современной трактовке была упомянута в работе 1980 года В. В. Адамса и М. Дж. Разара[19]. Различные аспекты функциональных непрерывных дробей в указанном случае исследовались также в работах А. Шинцеля, Дж. Ю, В. М. Шмидта, У. Цаньера, А. Дж. ван дер Пуртена, Т. Г. Бэрри и других авторов.

В. П. Платоновым и В. В. Беняш-Кривцем[20] было показано, что эффективная связь между нетривиальными S-единицами для S, состоящего из конечного и бесконечного нормирования, и функциональными непрерывными дробями возможна только в случае линейного нормирования, и была развита теория функциональных непрерывных дробей для поля формальных степенных рядов $k((h))$, где h — линейный многочлен. Высокую эффективность метода построения S-единиц с помощью непрерывных дробей демонстрирует следующий факт: существование большей части известных к настоящему моменту порядков кручения в якобианах кривых рода 2 над $\mathbb{Q}$ может быть доказано путём построения S-единицы для множества S, содержащего линейное нормирование и бесконечное нормирование.

Кроме того, в вышеупомянутой работе было доказано, что для гиперэллиптических полей с конечным полем констант в случае линейного нормирования всякая квадратичная иррациональность, содержащаяся в соответствующем поле формальных степенных рядов, периодична, т.е. обладает периодическим разложением в непрерывную дробь. Таким образом, для конечного поля констант

[17] *Abel N.* Ueber die Integration der Differential-Formel $\rho dx/\sqrt{R}$ wenn R und ρ ganze Functionen sind // Journal für die reine und angewandte Mathematik. 1826. Vol. 1. P. 185—221.

[18] *Tchebicheff P.* Sur l'intégration des différentielles qui contiennent une racine carrée d'un polynome du troisieme ou du quatrieme degré' // Journal des math. pures et appl. 1857. Vol. 2. P. 168—192.

[19] *Adams W. W., Razar M. J.* Multiples of point on elliptic curves and continued fractions // Proc. London Math. Soc. 1980. Vol. 41, no. 3. P. 481—498.

[20] *Беняш-Кривец В. В., Платонов В. П.* Группы S-единиц в гиперэллиптических полях и непрерывные дроби // Математический сборник. 2009. Т. 200, № 11. С. 15—44.

был сформулирован полный функциональный аналог теоремы Лагранжа: квадратичные иррациональности и только они представимы в виде бесконечных периодических непрерывных дробей. В случае функциональных непрерывных дробей с произвольным полем констант этот факт вообще говоря неверен. Более того, группа обратимых элементов кольца, элементами которого являются полные частные разложения в непрерывную дробь, может быть бесконечна. Это позволяет ввести понятие более слабое чем периодичность, а именно понятие квазипериодичности: непрерывная дробь является квазипериодической, если в бесконечной последовательности полных частных встречаются равные с точностью до мультипликативной константы элементы. Наличие элементов с квазипериодическим, но не периодическим разложением в непрерывную дробь, а также наличие квадратичных иррациональностей с неквазипериодическим разложением в непрерывную дробь существенно отличает функциональный случай от классического случая числовых непрерывных дробей.

Для непрерывных дробей в $k((1/x))$ существование S_∞-единиц поля $k(x)(\sqrt{f})$, $f \in k[x]$, связано с периодичностью элемента $\sqrt{f}$. Он является ключевым с точки зрения исследования периодичности и квазипериодичности непрерывных дробей в $k((1/x))$: элемент $\sqrt{f}$ периодичен всегда, когда поле $k(x)(\sqrt{f})$ содержит какие либо квазипериодические элементы, т.е. элементы с квазипериодическим разложением в непрерывную дробь[21,22]. Однако в рассматриваемом нами случае непрерывных дробей в $k((h))$, как показано в настоящей диссертации, даже при наличии в гиперэллиптическом поле периодических элементов элемент $\sqrt{f}$ квазипериодичен не всегда, а компьютерные вычисления демонстрируют, что квазипериодичность $\sqrt{f}$ сравнительно редкое явление. В 2017 году В. П. Платонову и Г. В. Фёдорову[23] удалось показать, что за исключением семейства $ch^3 + 1$, $c \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, количество кубических многочленов f над $\mathbb{Q}$ с квазипериодическим разложением $\sqrt{f}$ в непрерывную дробь в $\mathbb{Q}((h))$ ограничено с точностью до естественной эквивалентности тремя примерами. Различные аспекты, связанные с квазипериодическим $\sqrt{f}$, исследовались также в работах В. П. Платонова, Г. В. Фёдорова, В. С. Жгуна[24,25] и других. В настоящей диссертации даны ответы на многие вопросы, связанные с квазипериодичностью и периодичностью непрерывных дробей элементов общего вида, а также исследованы свойства периодичности элементов, связанных с $\sqrt{f}$, в т.ч.

[21] *Schmidt W. M.* On continued fractions and Diophantine approximation in power series fields // Acta arithmetica. 2000. Vol. 95, no. 2. P. 139—166.

[22] *Платонов В. П.* Теоретико-числовые свойства гиперэллиптических полей и проблема кручения в якобианах гиперэллиптических кривых над полем рациональных чисел // УМН. 2014. Т. 69:1, № 415. С. 3—38.

[23] *Платонов В. П., Федоров Г. В.* О периодичности непрерывных дробей в эллиптических полях // Доклады Академии наук. 2017. Т. 475, № 2. С. 133—136.

[24] *Платонов В. П., Федоров Г. В.* О проблеме периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // Математический сборник. 2018. Т. 209, № 4. С. 54—94.

[25] *Платонов В. П., Жгун В. С., Федоров Г. В.* О периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях над квадратичным полем констант // Доклады Академии наук. 2018. Т. 482, № 2. С. 137—141.

элемента $\sqrt{f}$. Отметим, что доказательство периодичности квазипериодичного $\sqrt{f}$ не может быть получено путём перенесения рассуждений о периодичности и симметриях разложения с числового случая, и требует иного подхода. В настоящей диссертации приведено доказательство этого факта, а также выведены другие свойства периодического элемента $\sqrt{f}$.

В. П. Платоновым и Г. В. Фёдоровым[26] были введены S_h-единицы, где S_h состоит из двух сопряженных конечных нормирований, связанных с неприводимым многочленом h. В случае $\deg f = 2g + 1$ бесконечное нормирование поля $k(x)$ обладает единственным продолжением на $k(x)(\sqrt{f})$, что позволяет сосредоточиться на рассмотрении S-единиц, которые при таком условии, как показано в настоящей диссертации, дают больше информации о кручении, чем более универсальные S_h-единицы.

С точки зрения исследования периодичности и квазипериодичности непрерывных дробей в $k((h))$ ключевым является элемент $\sqrt{f}/h^{g+1}$. В настоящей диссертации описаны свойства его разложения в непрерывную дробь, связь периода этого разложения и степени соответствующей S-единицы, а также получены утверждения о свойствах специальных многочленов, связанных с разложением квадратичной иррациональности в непрерывную дробь, и определяющих полное частное на шаге $n+1$. Отметим, что свойства этих многочленов существенно используются в эффективных алгоритмах построения S-единиц, а сами многочлены тесно связаны с непрерывными дробями и многочленами Мамфорда, задающими дивизоры на гиперэллиптической кривой[27].

Каждая непрерывная дробь сходится к некоторому элементу из поля формальных степенных рядов. Если непрерывная дробь квазипериодическая, то этот элемент является квадратичной иррациональностью и лежит в соответствующем гиперэллиптическом поле. Отдельный интерес представляет описание свойств квазипериодических, но не периодических элементов, лежащих в гиперэллиптическом поле, задаваемом многочленом нечётной степени, и методы построения примеров таких элементов в явном виде. Указанные вопросы рассмотрены в настоящей диссертации.

Целью данной работы является:

- Получение критерия квазипериодичности элементов $\sqrt{f}$, $\sqrt{f}/h^{g+1}$ и более широкого класса элементов гиперэллиптического поля $k(x)(\sqrt{f})$ и поля формальных степенных рядов $k((h))$, где k — поле, $\operatorname{char} k \neq 2$, $h, f \in k[x]$, $\deg h = 1$, $g = \lfloor \frac{\deg f - 1}{2} \rfloor$;
- Доказательство свойства периодичности квазипериодического разложения вышеуказанных элементов в непрерывную дробь;

[26] *Платонов В. П., Федоров Г. В.* О периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // Доклады Академии наук. 2017. Т. 474, № 5. С. 540—544.

[27] *Платонов В. П., Жгун В. С., Федоров Г. В.* Непрерывные дроби в гиперэллиптических полях и представление Мамфорда // Доклады Академии наук. 2016. Т. 471, № 6. С. 640—644.

– Описание свойств гиперэллиптического поля, определяемого многочленом нечётной степени, связанных с разложением элементов в непрерывную дробь. Установление связи между степенью фундаментальной S-единицы и квазипериодом разложения в непрерывную дробь элемента $\sqrt{f}/h^{g+1}$;
– Построение фундаментальных S-единиц новых степеней ≥ 20 для гиперэллиптических полей рода 2 над полем рациональных чисел.

Основные положения, выносимые на защиту.

– Критерий квазипериодичности разложения в непрерывную дробь в поле формальных степенных рядов $k((h))$ элементов вида $\frac{\sqrt{f}}{dh^s}$, где k — поле, char $k \neq 2, h \in k[x]$, $\deg h = 1$, d — делитель бесквадратного многочлена $f \in k[x]$, а s — целое число.
– Теорема о периодичности квазипериодических разложений в непрерывную дробь в $k((h))$ элементов вида $\frac{\sqrt{f}}{dh^s}$, в частности, о периодичности квазипериодичного разложения элемента $\sqrt{f}$. Существование нетривиальных примеров многочленов f, определяющих гиперэллиптическое поле, как с периодическим разложением $\sqrt{f}$ в непрерывную дробь, так и с неквазипериодическим разложением $\sqrt{f}$ в непрерывную дробь в $k((h))$.
– Необходимое условие квазипериодичности, но не периодичности разложения в непрерывную дробь в $k((h))$ элемента гиперэллиптического поля, определяемого многочленом нечётной степени.
– Оценки, связывающие степень фундаментальной S-единицы (и, таким образом, порядок некоторой точки кручения якобиана соответствующей гиперэллиптической кривой), квазипериод разложения в непрерывную дробь элемента $\sqrt{f}/h^{g+1}$, где $\deg f = 2g + 1$ и $g \in \mathbb{N}$, в $k((h))$ и номер шага n, на котором специальный вид принимают многочлены, связанные с разложением квадратичной иррациональности в непрерывную дробь. Существование элементов, на которых найденные оценки являются достижимыми.
– Эффективная программная реализация алгоритмов, являющихся развитием алгоритмов В. П. Платонова и В. В. Беняш-Кривеца поиска и построения фундаментальных S-единиц в гиперэллиптических полях для S, состоящего из конечного и бесконечного нормирования. Построение с помощью высокопроизводительных вычислений фундаментальных S-единиц больших степеней для гиперэллиптических полей рода 2 над полем рациональных чисел. Новое доказательство существования $\mathbb{Q}$-точек кручения порядков $20, 21, \ldots, 30$ и $32, 34, 36, 39, 40, 48$ в якобианах кривых рода 2.

Основные результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно.

Теоретическая и практическая значимость.

Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты могут быть полезны при исследовании функциональных непрерывных дробей, S-единиц и проблемы кручения. Кроме того, полученные результаты могут быть использованы в учебном процессе в рамках специальных курсов и семинаров.

Методология и методы исследования. В диссертации используются методы алгебры и алгебраической теории чисел, методы вычисления S-единиц, предложенные В. П. Платоновым и В. В. Беняш-Кривцем, методы алгебраической геометрии и методы теории функциональных непрерывных дробей, а также методы компьютерной алгебры, связанные с высокопроизводительными вычислениями.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и международных научных конференциях:

1. XIV Международная конференция «Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения», сентябрь 2016 года, Саратов;
2. XV Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения» май 2018 года, Тула;
3. Научный-исследовательский семинар «По проблемам теоретической и прикладной алгебры и теории чисел» (рук. В. П. Платонов), ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, февраль 2019, Москва;
4. Научный семинар «Аналитическая теория чисел и приложения» (рук. В. Н. Чубариков), МГУ имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, март 2019, Москва;
5. Научно-исследовательский семинар кафедры высшей алгебры (рук. В. А. Артамонов), МГУ имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, апрель 2019, Москва.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 5 печатных изданиях, 4 из которых изданы в журналах, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности, 3 — в периодических научных журналах, индексируемых Web of Science и Scopus.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав, и заключения. Полный объём диссертации составляет 97 страниц. Список литературы содержит 36 наименований.

Содержание работы

Во **введении** описывается структура диссертации и история рассматриваемых вопросов; обосновывается актуальность темы, описывается степень ее разработанности; ставятся цели диссертации, указываются основные методы исследования и обосновывается научная новизна полученных результатов; описываются основные результаты и положения, выносимые на защиту.

Пусть k — поле характеристики отличной от 2 и $h \in k[x]$ — неприводимый над k многочлен. И пусть $f \in k[x]$ — свободный от квадратов многочлен, и $g = \lfloor \frac{\deg f - 1}{2} \rfloor$.

В **первой главе** приведены необходимые факты из теории нормирований, теории непрерывных дробей и теории S-единиц, введены основные определения и построена теория, описывающая поведение квазипериодических и периодических элементов в $k((h))$ в случае $\deg h = 1$. В качестве основного результата главы показана периодичность квазипериодического элементов вида $\frac{\sqrt{f}}{dh^s}$.

В параграфе §1.1 предлагается краткое изложение основных фактов из теории нормирований и функциональных непрерывных дробей в $k((h))$, которые потребуются нам для доказательства основных результатов диссертации.

Через ν_h будем обозначать дискретное нормирование поля $k(x)$, задаваемое равенством $\nu_h\left(h^m \frac{a}{b}\right) = m$, где $a, b \in k[x]$, $h \nmid a$, $h \nmid b$, $m \in \mathbb{Z}$. Через ν_∞ будем обозначать дискретное нормирование $\nu_\infty(a/b) = \deg b - \deg a$, $a, b \in k[x]$.

Пусть h — многочлен первой степени и пусть $\alpha = \sum_{j=e}^{\infty} b_j h^j$, где $b_j \in k$, элемент поля формальных степенных рядов $k((h))$. Обозначим через $[\alpha] = \sum_{j=e}^{0} b_j h^j$ — сумму членов с неположительными, показателями степени h разложения α в ряд Лорана. Положим $A_0 = [\alpha]$ и $\alpha_i = \frac{1}{\alpha_{i-1} - A_{i-1}} \in k((h))$, $A_i = [\alpha_i]$.

В результате мы получим *непрерывную дробь*

$$A_0 + \cfrac{1}{A_1 + \cfrac{1}{A_2 + \cfrac{1}{A_3 + \cdots}}}.$$

Квазипериодическим будем называть такой элемент α поля $k((h))$, чье разложение в непрерывную дробь периодично с точностью до мультипликативной константы, т.е. если существуют такие $i, j \in \mathbb{Z}$, $c \in k \setminus \{0\}$, что $\alpha_i = c\alpha_j$. Мы будем использовать обозначение $\alpha = \left[A_0, \ldots, A_{n-1}, \overline{B_1, \ldots, B_t}^{\,b}\right]$ для элементов, которые разлагается в непрерывную дробь вида

$$\begin{aligned} \alpha = [A_0, \ldots, A_{n-1}, &B_1, B_2, \ldots, B_t, bB_1, b^{-1}B_2, \ldots, b^{-1}B_t, \\ &b^2B_1, b^{-2}B_2, \ldots, b^{-2}B_t, b^3B_1, \ldots], \end{aligned}$$

а если $b = 1$, то будем писать, что $\alpha = \left[A_0, \ldots, A_{n-1}, \overline{B_1, \ldots, B_t}\right]$.

Отметим, что в случае бесконечного поля констант бесконечность множества обратимых элементов кольца $k[h^{-1}] = \{\sum_0^n a_i h^{-i} \| a_i \in k, n \geq 0, n \in \mathbb{Z}\}$, т.е. кольца многочленов от h^{-1}, является одной из причин существования квазипериодических, но не периодических элементов. Последнее существенно отличает функциональные непрерывные дроби от числовых. В параграфе §1.2 даны основные определения и базовые факты, связанные с понятием квазипериодичности, а также показано, что квазипериодическим (и периодическим) может быть только элемент, являющийся квадратичной иррациональностью. В параграфе §1.2.2 приведены основные понятия и соотношения, связанные с разложением в непрерывную дробь квадратичной иррациональности. В частности, введены многочлены L_n и M_n, которые связаны с полным частным с номером $n+1$ соотношением $\alpha_{n+1} = \frac{M_n+\lambda_2\alpha}{L_n}$, где λ_2 — коэффициент минимального многочлена элемента α: $\lambda_2\alpha^2+\lambda_1\alpha+\lambda_0=0$, $\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2 \in k[x]$.

В параграфе §1.2.3 представлен критерий квазипериодичности произвольной квадратичной иррациональности: необходимо и достаточно проверить наличие решения в $k[h^{-1}]$, специального уравнения, зависящего от квадратичной иррациональности. А именно, функциональный аналог теоремы Лагранжа для поля $k((h))$ можно сформулировать следующим образом (для случая непрерывных дробей в $k((\frac{1}{x}))$ он был доказан Шмидтом).

***Теорема* 1 (Шмидт[28]).** *Пусть $\alpha \in k((h)) \setminus k(x)$, char $k \neq 2$.*

Если α квазипериодичен, то α является квадратичной иррациональностью. Обратно, пусть α удовлетворяет уравнению

$$\Lambda_2\alpha^2+\Lambda_1\alpha+\Lambda_0=0,\ \Lambda_2,\Lambda_1,\Lambda_0 \in k[h^{-1}],\ \text{НОД}(\Lambda_2,\Lambda_1,\Lambda_0) \in k. \tag{1}$$

Обозначим $D=\Lambda_1^2-4\Lambda_2\Lambda_0$. Тогда α разлагается в квазипериодическую непрерывную дробь в том и только том случае, когда соотношение:

$$Y^2-DZ^2=b \in k \setminus \{0\} \tag{2}$$

обладает нетривиальным решением относительно неизвестных $Y,Z \in k[h^{-1}]$ и некоторой неизвестной константы b, т.е. решением с $Z \neq 0$.

Указанные критерий позволяет выделить ключевой с точки зрения периодичности элемент гиперэллиптического поля.

Пусть $L=k(x)(\sqrt{f})$ — гиперэллиптическое поле. Предположим конечное нормирование ν_h поля рациональных функций от одного переменного $k(x)$, связанное с линейным многочленом h, обладает двумя продолжениями на L: ν_h^+ и ν_h^-, или, что то же самое, поле L имеет два вложения в $k((h))$. Зафиксируем одно из них. Тогда элементы поля L разлагаются в формальный степенной ряд по h.

***Следствие* 1.** *Пусть f — бесквадратный многочлен, и пусть разложение в непрерывную дробь некоторой квадратичной иррациональности $\alpha=\frac{v+w\sqrt{f}}{u} \in L$ квазипериодично, где $v,w,u \in k[x]$ и НОД$(v,w,u) \in k$. Тогда квазипериодична любая квадратичная иррациональность с дискриминантом $D=\frac{f}{h^{2g+2}} \in k[h^{-1}]$. В частности, квазипериодичен элемент $\frac{\sqrt{f}}{h^{g+1}}$.*

Обратно, предположим, что элемент $\frac{\sqrt{f}}{h^{g+1}}$ квазипериодический. Тогда квадратичная иррациональность $\alpha=\frac{v+w\sqrt{f}}{u}$ обладает квазипериодическим

[28] *Schmidt W. M.* On continued fractions and Diophantine approximation in power series fields // Acta arithmetica. 2000. Vol. 95, no. 2. P. 139—166.

разложением если и только, если уравнение (2) *для* $D = \frac{f}{h^{2g+2}} \in k[h^{-1}]$ *имеет решение* $Y, Z \in k[h^{-1}]$ *такое, что* $Z = Z'H$, *где* $H = h^{g+1-l}wu/r$, $Z' \in k[h^{-1}]$, $r =$ *НОД*$(u, v^2 - w^2 f)$ *и* $l = \max\{2\deg u, \deg u + \deg v, \deg(v^2 - w^2 f)\} - \deg r$.

Следствие 1 показывает, что квазипериодичность элемента поля L, не принадлежащего $k(x)$, возможна только при условии периодичности $\sqrt{f}/h^{g+1}$. Это позволяет считать элемент $\sqrt{f}/h^{g+1}$ ключевым с точки зрения изучения квазипериодических элементов поля L.

***Следствие* 2.** *Пусть* $f = dd'$, *где* $d, d' \in k[x]$, $\deg d = t$, $\deg f = w$, $s \in \mathbb{Z}$. *Квазипериодичность разложения следующих элементов равносильна:* $\frac{\sqrt{f}}{h^{t+s}}$, $\frac{\sqrt{f}}{h^{w-(t+s)}}$, $\frac{\sqrt{f}}{dh^s}$, $\frac{h^s\sqrt{f}}{d'}$, $\frac{\sqrt{f}}{d'h^{2t+s-w}}$.

Следствие 2 показывает, что элемент $\frac{\sqrt{f}}{h^s}$ квазипериодический тогда и только тогда, когда квазипериодичен $\frac{\sqrt{f}}{h^{w-s}}$. В частности, при $\deg f = 2g + 1$ имеет место равносильность квазипериодичности элементов $\frac{\sqrt{f}}{h^g}$, $\frac{\sqrt{f}}{h^{g+1}}$.

Для квадратичной иррациональности $\alpha = \frac{v+w\sqrt{f}}{u}$ через $\alpha' = \frac{v-w\sqrt{f}}{u}$ будем обозначать элемент сопряженный к ней. В параграфе §1.2.3 для некоторых квазипериодических элементов показана их периодичность (аналогичный критерий для случая непрерывных дробей в $k((\frac{1}{x}))$ был доказан Шмидтом).

***Теорема* 2** (Шмидт[29]). *Следующие условия на квазипериодический элемент* $\alpha \in k((h))$ *эквивалентны.*

1. $\nu_h(\alpha) < 0$, $\nu_h(\alpha') \le 0$, $\nu_h(\alpha - \alpha') < 0$ *и* $\alpha + \alpha' \in k[h^{-1}]$.
2. α *разлагается в периодическую непрерывную дробь вида* $\left[C_0, \overline{C_1, \ldots, C_w,}\right]$ *с* $C_i \in k[h^{-1}]$, $C_0 \ne C_w$, $\nu_h(C_0) < 0$ *и* $C_i = C_{w-i}$, *для* $i = 1, \ldots, w-1$.

При выполнении условий выше имеют место симметрии $\alpha + \alpha' = 2C_0 - C_w$.

Откуда легко получить следствие.

***Следствие* 3.** *Элемент вида* $\alpha_{d,s} = \frac{\sqrt{f}}{dh^s}$ *для делителя* d *многочлена* f *и* $s \ne 0 \in \mathbb{Z}$ *квазипериодичен тогда и только тогда, когда он периодичен. Если его разложение периодично, то оно имеет вид* $\left[\frac{1}{2}C_w, \overline{C_1, \ldots, C_w,}\right]$ *при* $s > 0$ *и* $\left[0, \frac{1}{2}C_w, \overline{C_1, \ldots, C_w,}\right]$ *при* $s < 0$. *Причем* $C_i = C_{w-i}$, *для* $i = 1, \ldots, w-1$.

Пусть бесконечное нормирование поля $k(x)$ обладает одним продолжением на поле L (например, если $\deg f = 2g + 1$), тогда положим S — множество, состоящее из одного из двух продолжений конечного нормирования и бесконечного нормирования. А в более общем случае без ограничений на количество продолжений бесконечного нормирования положим S_h — множество, состоящее только из двух продолжений конечного нормирования. Обратимые элементы

[29] *Schmidt W. M.* On continued fractions and Diophantine approximation in power series fields // Acta arithmetica. 2000. Vol. 95, no. 2. P. 139—166.

кольца S-целых (соответственно S_h-целых), образуют мультипликативную группу и называются S-единицами (S_h-единицами). Указанная группа, если она нетривиальна, изоморфна произведению $k \setminus \{0\}$ и бесконечной циклической группы. Образующая бесконечной циклической группы называется фундаментальной S-единицей (соответственно, S_h-единицей).

В параграфе §1.2.4 описаны основные факты и понятия, касающиеся S-единиц и S_h-единиц, введено понятие степени S и S_h-единицы, а также установлена связь между периодичностью ключевого элемента, наличием нетривиальных S и S_h-единиц и нетривиальностью группы кручения якобиана гиперэллиптического поля $k(x)(\sqrt{f})$.

***Определение* 1.** *Степенью S-единицы $u = \mu_1 + \mu_2\sqrt{f}$, $\mu_1, \mu_2 \in k(x)$, называется число* $\deg u = m$*, где m — показатель степени многочлена h в норменном уравнении $N(u) = \mu_1^2 - \mu_2^2 f = bh^m$, $b \in k \setminus \{0\}$.*

***Определение* 2.** *Степенью S_h-единицы $u = \frac{\mu_1+\mu_2\sqrt{f}}{h^m}$, $\mu_1, \mu_2 \in k[x]$, НОД$(\mu_1, \mu_2) \in k$, называется число* $\deg u = m$*, где m — показатель степени многочлена h в знаменателе u.*

В параграфе §1.2.4 показана корректность вышеприведенных определений.

***Предложение* 1.** *Пусть* $\deg h = 1$*. Следующие три утверждения эквивалентны:*

1. *Выполнено соотношение $\mu_1^2 - \mu_2^2 f = bh^m$ для некоторого целого m и подходящих $\mu_1, \mu_2 \neq 0 \in k[x]$, $b \in k \setminus \{0\}$, $\nu_h(\mu_2) = 0$, а* $\max\{2\deg\mu_1, 2\deg\mu_2 + \deg f\} = m \in \mathbb{Z}$*. Если m — чётное, то обозначим $m' = m/2$, и $m = m'$ в противном случае.*
2. *Существуют $Z, Y \in k[h^{-1}]$, $Z \neq 0$ и $b \in k \setminus \{0\}$, $m' = -\nu_h(Y)$ такие, что*
$$Y^2 - Z^2\frac{f}{h^{2g+2}} = b. \qquad (3)$$
3. *Существует нетривиальная S_h-единица степени m'.*

Если дополнительно известно, что бесконечное нормирование имеет одно продолжение на поле L, то условия выше равносильны следующему

4. *Существует нетривиальная S-единица степени m'.*

Рассмотрим аффинную кривую, заданную уравнением $y^2 = f(x)$. Ей соответствует гладкая проективная гиперэллиптическая кривая C с полем рациональных функций $L = k(x)(\sqrt{f})$. Пусть $\Delta^\circ(C)$ — группа классов дивизоров степени ноль гиперэллиптической кривой C. В записи дивизора для упрощения обозначений будем плейс, соответствующий нормированию, обозначать тем же символом, что и нормирование. Имеет место следующая связь S и S_h-единиц гиперэллиптического поля L и проблемы кручения в якобиане соответствующей кривой C.

***Предложение* 2.** *Пусть h — неприводимый многочлен произвольной степени такой, что ν_h имеет два продолжения на поле L: ν_h^+ и ν_h^-. Поле L обладает фундаментальной S_h-единицей степени n тогда и только тогда, когда класс дивизора $\nu_h^+ - \nu_h^-$ имеет конечный порядок n в $\Delta^\circ(C)$.*

В случае, когда бесконечное нормирование имеет одно продолжение на гиперэллиптическое поле, аналогичное утверждение верно и для S-единиц.

***Предложение* 3.** *Пусть h — неприводимый многочлен произвольной степени такой, что ν_h имеет два продолжения на поле L: ν_h^+ и ν_h^-. Тогда поле L обладает фундаментальной S-единицей степени n тогда и только тогда, когда класс дивизора $\nu_h^+ - \deg h\,\nu_\infty$ имеет конечный порядок n в $\Delta^\circ(C)$. Более того, имеет место соотношение $\nu_h^+ - \nu_h^- \sim 2(\nu_h^+ - \deg h\,\nu_\infty)$.*

В случае функциональных непрерывных дробей в $k((1/x))$ ключевым с точки зрения исследования периодичности и квазипериодичности является элемент $\sqrt{f}$. Этот элемент периодичен в случае, когда поле $L = k(x)(\sqrt{f})$ содержит периодические элементы, однако в случае непрерывных дробей в $k((h))$ даже наличие в поле L периодических элементов не гарантирует периодичность разложения $\sqrt{f}$. Более того, компьютерные вычисления показывают, что даже при наличии периодических элементов в поле L периодичность разложения $\sqrt{f}$ — сравнительно редкое явление. Параграф §1.3 посвящен вопросу изучения периодичности $\sqrt{f}$ и, более общо, изучению периодичности элементов вида $\frac{\sqrt{f}}{dh^s}$, где d — делитель многочлена f (в том числе при $d = 1$), а s — целое число. Его итогом является следующая теорема.

***Теорема* 3.** *Пусть $s \in \mathbb{Z}$, $f \in k[x]$ — свободный от квадратов многочлен произвольной степени, $d \in k[x]$ — делитель многочлена f, и $h \in k[x]$ — линейный многочлен. Квазипериодичность разложения в функциональную непрерывную дробь элементов вида $\frac{\sqrt{f}}{dh^s}$ в $k((h))$, в т.ч. элемента $\sqrt{f}$, равносильна их периодичности.*

Следующий критерий позволяет эффективно проверять на квазипериодичность разложения в непрерывную дробь элементов вида $\sqrt{f}/h^s$.

***Теорема* 4.** *Пусть f — бесквадратный многочлен. Элемент $\alpha = \frac{\sqrt{f}}{h^s}$, $s \in \mathbb{Z}$ квазипериодичен тогда и только тогда, когда существует такая пара Y, Z, являющаяся решением уравнения (3), где $Z = Z'h^{-l}$ и $Y,Z' \in k[h^{-1}]$, $l = \max\{s - \lceil \frac{\deg f}{2} \rceil, \lfloor \frac{\deg f}{2} \rfloor - s\}$.*

Более того, если $\deg f = 2g+1$, то достаточно рассматривать только решение уравнения (3) с максимальным значением $\nu_h(Y) < 0$. Такое решение соответствует фундаментальной S-единице чётной степени или квадрату фундаментальной S-единицы нечётной степени.

В частности, теорема 4 даёт критерий квазипериодичности $\sqrt{f}$. Он квазипериодичен тогда и только тогда, когда найдётся решение с $-l \geq g+1$ в случае, если $\deg f = 2g+2$, или решение с $-l \geq g$ в случае, если $\deg f = 2g+1$.

Над полем $\mathbb{Q}$ для $\deg f = 3$ из ограниченности числа нетривиальных периодических элементов $\sqrt{f}$ и теоремы 4 следует, что квазипериодических элементов с $\sqrt{f}/h^s$ с $s < 0$ или $s > \deg f$ не существует. Кроме того, даже с использованием компьютерных вычислений автору не удалось построить примеры таких элементов для $\deg f > 3$. Автору неизвестны такие примеры и автор полагает, что, вероятно, их не удастся найти. Теорема 4 показывает, что если элемент $\sqrt{f}/h^s$ квазипериодичен для некоторого $s = s_0 \leq \frac{\deg f}{2}$, то он периодичен для всех s из диапазона $s_0 \leq s \leq \frac{\deg f}{2}$. Вышесказанное дополнительно мотивирует к изучению элементов с “пограничным” значением $s = 0$.

Если для конечного поля констант в функциональном случае, как и в числовом случае, всякая квадратичная иррациональность периодична, то поиск примеров многочленов f с периодическим разложением $\sqrt{f}$ в непрерывную дробь для числового поля констант в функциональном случае — трудная задача. Теорема позволяет построить примеры многочленов f с периодичным разложением $\sqrt{f}$ в непрерывную дробь в $k((h))$. В настоящей диссертации построено два таких примера для $k = \mathbb{Q}$ и $h = x$: “тривиальная” серия для $f = ax^w + 1$, где $w \in \mathbb{N}$, и нетривиальный пример для $g = 2$, полученный с использованием высокопроизводительных компьютерных вычислений, связанных с применением эффективных алгоритмов построения фундаментальной S-единицы и результатов диссертации: $f = 4x^5 - 8x^4 + 12x^3 - 16x^2 + 20x + 25$.

Доказательство теоремы 3 требует нескольких вспомогательных утверждений. Выше мы видели, что методами параграфа §1.2.3 удается доказать, что для делителя d многочлена f всякий квазипериодический элемент вида $\frac{\sqrt{f}}{dh^s}$ для $s \neq 0$ является периодическим. Однако эти методы неприменимы к элементу $\sqrt{f}$, и доказательство периодичности квазипериодического $\sqrt{f}$ в общем случае требует иного подхода, изложенного в §1.3. Ключевую роль в доказательстве этого факта играет следующее свойство многочлена $L_n = h^{2s}P_n^2 - Q_n^2 f$, $b \in k \setminus \{0\}$, где P_n/Q_n — n-ая подходящая дробь к $\sqrt{f}/h^s$, для случая $s = 0$.

***Лемма* 1.** *Пусть многочлен $f \in k[x]$ свободен от квадратов, а нормирование ν_h поля $k(x)$ имеет два продолжения на L, и пусть $\sqrt{f} \in k((h))$ квазипериодичен. Тогда существует делитель d многочлена f такой, что для некоторого n выполнено $L_n = bdh^w$, причём $w + \deg d = \deg f$, $b \in k \setminus \{0\}$, а $0 \leq \deg d < \deg f$.*

Обозначим через $\{\alpha\} = \sum_1^\infty b_j h^j$ — сумму членов с положительными, показателями степени h разложения α в ряд Лорана. С помощью леммы удаётся доказать теорему:

***Теорема* 5.** *Пусть многочлен f свободен от квадратов, нормирование ν_h поля $k(x)$ имеет два продолжения на $k(x)(\sqrt{f})$, а $\alpha = \sqrt{f}$ квазипериодичен. Тогда* *существует делитель d многочлена f, такой что $\{\alpha_{n+1}\} = b\{\frac{\sqrt{f}}{dh^w}\}$, где $\deg d = t$, $0 \le \deg d < \deg f$, $w = \deg f - t$, а $b \in k \setminus \{0\}$.*

Из теоремы 5 вытекает следствие о периодичности $\sqrt{f}$, которое завершает доказательство теоремы 3 в общем случае:

***Следствие* 4.** *В условиях теоремы 5 пусть $\sqrt{f}$ квазипериодичен. Тогда $\sqrt{f}$ — периодичен.*

Теорема 5 позволяет также сделать вывод о симметриях в разложении $\sqrt{f}$ в непрерывную дробь:

***Следствие* 5.** *В условиях теоремы 5 выполнено $\sqrt{f} = [A_0, \dots, A_{n+1}, \overline{B_1, \dots, B_N}]$, где $B_i = B_{N-i}$, для $i = 1, \dots, N-1$.*

Вторая глава посвящена случаю $\deg f = 2g + 1$ и $\deg h = 1$. Пусть многочлен f свободен от квадратов, а нормирование ν_h поля $k(x)$ имеет два продолжения: ν_h^+, ν_h^- на $L = k(x)(\sqrt{f})$. Положим множество S состоит из ν_h^+ и бесконечного нормирования. Основным результатом главы является установление связи между степенью фундаментальной S-единицы и периодом разложения в непрерывную дробь ключевого элемента $\sqrt{f}/h^{g+1}$. Помимо этого доказаны и другие полезные для понимания этого случая факты. В частности, утверждения из параграфа §1.3, для многочлена f нечётной степени могут быть обобщены на более широкий класс элементов, что и сделано в параграфе §2.1. А именно, доказаны следующие два утверждения.

***Лемма* 2.** *Пусть $s > 0$, $\deg f = 2g+1$ или $\deg f = 2g+2$ и элемент $\alpha = \sqrt{f}/h^s$ — квазипериодичен. Тогда найдется такой номер n, для которого выполнено $L_n = bh^{2s}$, $b \in k \setminus \{0\}$.*

Пусть теперь $\deg f = 2g + 1$, $s \ge 0$, элемент $\alpha = \sqrt{f}/h^s$ квазипериодичен и дополнительно известно, что поле L обладает нетривиальной S-единицей нечётной степени. Тогда найдется такой номер n, для которого выполнено $L_n = bh^{2g+1}$, $b \in k \setminus \{0\}$.

Лемма позволяет в случае поля L, обладающего S-единицей нечётной степени, обобщить результат теоремы 5 на более широкий класс элементов.

***Теорема* 6.** *Пусть $0 \le s \le g$, $\deg f = 2g + 1$ и $\alpha = \sqrt{f}/h^s$ — квазипериодичен, и пусть поле L обладает S-единицей нечётной степени. Тогда существует n такое, что $b\{\alpha_{n+1}\} = \{\sqrt{f}/h^{2g+1-s}\}$, где $b \in k \setminus \{0\}$.*

Теорема 6 позволила построить пример, демонстрирующий существенное различие между случаями существования в поле L фундаментальной S-единицы чётной и нечётной степени. Отметим, что для f нечётной степени $2g + 1$ при наличии нетривиальной S-единицы элементы $\sqrt{f}/h^g$ и $\sqrt{f}/h^{g+1}$ периодичны всегда. Построенный в настоящей диссертации пример показывает, что для полей, содержащих S-единицы только четных степеней утверждение теоремы 6 вообще говоря не верно.

В параграфе §2.1 также получено обобщение утверждения о симметриях разложения $\sqrt{f}$ в непрерывную дробь в $k((h))$ и построены примеры иллюстрирующие следующее следствие.

***Следствие* 6.** *В условиях теоремы 6 для* $\alpha = \sqrt{f} = [A_0, A_1, \ldots]$ *выполняется* $A_{n+1} = 2/b[\sqrt{f}/h^{2g+1}]$. *Более того,* $\sqrt{f} = \left[A_0, \ldots, A_n, \overline{B_1, \ldots, B_N}\right]$, *где* $B_i = B_{N+2-i}$, *для* $i = 2, \ldots, N$.

Как отмечалось выше, квазипериодические, но не периодические элементы существенно отличают случай функциональных непрерывных дробей над произвольным полем констант от случая числовых непрерывных дробей. Параграф §2.2 посвящен таким элементам. Несмотря на то, что каждая непрерывная дробь сходится к некоторому элементу из $k((h))$, автору неизвестны примеры в литературе явного вида элементов, обладающих квазипериодическим, но не периодическим разложением в функциональную непрерывную дробь.

Обозначим для $B = b_0 + b_{-1}h^{-1} + \cdots + b_{-n}h^{-n} \in k[h^{-1}]$ значение свободного коэффициента за $\mathrm{fc}(B) = b_0$. В параграфе §2.2 найдены необходимые условия на то, что чистоквазипериодический, но не периодический элемент лежит в поле L, определённом многочленом нечётной степени, а также построены элементы, разлагающиеся в чистоквазипериодические, но не периодические функциональные непрерывные дроби малых квазипериодов.

***Теорема* 7.** *Квазипериодический, но не периодический, элемент* $\alpha = [\overline{A_0, A_1, \ldots, A_{2m-1}}^{c}]$, $c \in k \setminus \{0\}$, $A_i \in k[h^{-1}]$, *лежит в* $k(x)(\sqrt{f})$ *для некоторого многочлена* f *нечётной степени только, если* $\mathrm{fc}(Q_{2m-2}) + c\,\mathrm{fc}(P_{2m-1}) = \pm 2\sqrt{c}$, *где* P_i/Q_i — i*-ая подходящая дробь к* α.

Отсюда, в частности, следует, что коэффициент квазипериодичности c для элементов гиперэллиптического поля, определённого многочленом нечётной степени, может быть только полным квадратом в k.

В параграфе §2.3 приводится теорема В. П. Платонова и В.В. Беняш-Кривеца для произвольного поля k характеристики отличной от 2, сформулированная в оригинале для случая конечного поля констант.

В параграфе §2.4 рассмотрено разложение в непрерывную дробь ключевого с точки зрения периодичности в гиперэллиптическом поле элемента $\sqrt{f}/h^{g+1}$ и его связь с S-единицами, и $\deg f = 2g + 1$. В параграфе §2.4 показано, что отличие от классического случая, где фундаментальная единица может быть найдена по многочлену L_{n-1}, где n — длина квазипериода, в рассматриваемом нами случае это не всегда так. Напомним, что фундаментальной единицей называется образующий элемент группы обратимых элементов кольца S_∞-целых, где S_∞ — множество, состоящее из двух продолжений на поле L бесконечного нормирования поля $k(x)$.

***Предложение* 4.** *Пусть* $\deg f = 2g+1$, *и* $n \geq 0$ *такое число, при котором* $L_n = bh^r$, $b \in k \setminus \{0\}$.

Тогда $r = 2g+1$ *в том и только том случае, когда степень* S*-единицы поля* $k(x)(\sqrt{f})$ *является нечетным числом* m, *и* $r = 2g+2$ *в противном случае.*

Для случая $\deg f = 2g+2$ построен контрпример к указанному предложению.

***Теорема* 8.** *Пусть* $\deg f = 2g+1$, *и* $\alpha = \sqrt{f}/h^{g+1}$. *Фундаментальная* S*-единица поля* $k(x)(\sqrt{f})$ *существует тогда и только тогда, когда разложение* α *в непрерывную дробь периодично. Пусть фундаментальная* S*-единица существует и ее степень равна* m, *и пусть* $n \geq 1$ *— минимальное такое число, при котором* $\deg L_{n-1} = \nu_h(L_{n-1})$. *Возможны два случая:*

1. m *является четным числом, тогда* $\deg L_{n-1} = 2g+2$. *При этом длина квазипериода равна* n, *а длина периода в этом случае равна либо* n *либо* $2n$,
2. m *является нечетным числом, тогда* $\deg L_{n-1} = 2g+1$. *При этом длина периода совпадает с длиной квазипериода и равна* $2n$.

В диссертации показано, что разложение $\sqrt{f}/h^{g+1}$ в непрерывную дробь обладает симметриями, а также уточнены оценки[30], связывающие степень фундаментальной S-единицы (как следствие, и порядок некоторой точки кручения якобиана соответствующей гиперэллиптической кривой) и длину периода ключевого элемента.

***Следствие* 7.** *Пусть* $\deg f = 2g+1$, *и пусть* $k(x)(\sqrt{f})$ *обладает фундаментальной* S*-единицей степени* m. *И пусть* N *— длина квазипериода разложения* α *в непрерывную дробь, а* $\delta = -\nu_h(A_1)$. *Тогда*

$$N + 2g - 1 \leq m \leq (g + 2 + \delta)N.$$

Более того, если m *— нечётное число, то выполнено соотношение*

$$N + 2g - 1 \leq m \leq (g + 2 + \delta)N/2,$$

иначе выполнено

$$2(N + g) \leq m \leq (g + 2 + \delta)N.$$

Завершают параграф §2.4 примеры, показывающие, что границы приведённых в следствии оценок достижимы.

<u>**Третья глава**</u> посвящена построению S-единиц больших степеней в гиперэллиптических полях рода 2 над полем рациональных чисел, и основным её результатом является построение фундаментальных S-единиц степеней

[30] *Платонов В. П., Федоров Г. В.* S-единицы и периодичность непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // Доклады Академии наук. 2015. Т. 465, № 5. С. 537—541.

$20, 21\ldots, 30$ и $32, 34, 36, 39, 40, 48$, откуда по предложению 3 следует существование $\mathbb{Q}$-точек кручения соответствующих порядков в якобианах кривых рода 2.

Для случая линейного нормирования в настоящий момент наилучшими с точки зрения вычислительной сложности являются алгоритмы поиска и построения S-единиц, основанные на подходе с использованием непрерывных дробей. В параграфе §3.1 приводятся такие алгоритмы, а также способы их оптимизации. В частности, приводится алгоритм с фиксированным количеством операций на каждом шаге. С помощью программной реализации упомянутых алгоритмов, оптимизированной для исполнения на гетерогенном программно-аппаратном вычислительном комплексе, были построены S-единицы больших степеней для гиперэллиптических полей рода 2 с полем рациональных чисел в качестве поля констант.

Пусть

$$
\begin{aligned}
f_{20} &= \left(4\,x^4-2\,x+1\right)(2\,x+1), & h_{20} &= x-1;\\
f_{21} &= 8\,x^5-7\,x^4+6\,x^3-x^2+2\,x+1, & h_{21} &= x-1;\\
f_{22} &= \left(16\,x^4-16\,x^3+x+1\right)(x+1), & h_{22} &= x-1;\\
f_{23} &= -24\,x^5+153\,x^4-36\,x^3-8\,x^2-8\,x+4, & h_{23} &= x-1;\\
f_{24} &= \left(8\,x^4-5\,x^3+14\,x^2-12\,x+8\right)(3\,x+2), & h_{24} &= x-2;\\
f_{25} &= 972\,x^5+900\,x^4-900\,x^3+165\,x^2+30\,x+1, & h_{25} &= x-\frac{1}{3};\\
f_{26} &= -\left(4\,x^4-21\,x^3+24\,x^2+9\,x-18\right)(3\,x+2), & h_{26} &= x-2;\\
f_{27} &= 16\,x^5+57\,x^4+70\,x^3+39\,x^2+10\,x+1, & h_{27} &= x;\\
f_{28} &= \left(9\,x^3-8\,x^2+20\,x+16\right)\left(4\,x^2+x+4\right), & h_{28} &= x-\frac{4}{3};\\
f_{29} &= 32\,x^5-47\,x^4+20\,x^3+2\,x^2-4\,x+1, & h_{29} &= x-1;\\
f_{30} &= -\left(32\,x^4-33\,x^3-123\,x^2-63\,x-9\right)(x+1), & h_{30} &= x+\frac{3}{4};\\
f_{32} &= -\left(16\,x^4-99\,x^3-228\,x^2-135\,x-18\right)(3\,x+2), & h_{32} &= x;\\
f_{34} &= -\left(32\,x^3-59\,x^2+28\,x-4\right)\left(27\,x^2-20\,x+4\right), & h_{34} &= x;\\
f_{36} &= \left(3\,x^4+28\,x^3-8\,x^2-8\,x+12\right)(4\,x+3), & h_{36} &= x+2;\\
f_{39} &= 192\,x^5+337\,x^4-1056\,x^3+852\,x^2-288\,x+36, & h_{39} &= x-\frac{3}{4};
\end{aligned}
$$

тогда выполнена следующая теорема.

Теорема 9. *Пусть $S_j=\{\nu^+_{h_j},\nu_\infty\}$, тогда для $j=20,\ldots,30,32,34,36,39$ поле $L_j=\mathbb{Q}(x)(\sqrt{f_j})$ обладает фундаментальной S_j-единицей, степень которой равна j и совпадает с порядком соответствующей $\mathbb{Q}$-точки якобиана J_{f_j}.*

Метод непрерывных дробей является эффективным методом вычисления S-единиц для S, указанного выше вида. Однако, как отмечалось В. П. Платоновым и В. В. Беняш-Кривцем, он эффективно работает только в случае $\deg h = 1$. Следовательно, для некоторых гиперэллиптических полей непосредственное его применение не позволяет построить фундаментальную S-единицу. Для более общего случая в параграфе §3.2.1 использован метод матричной линеаризации. Точно также как и в случае метода непрерывных дробей авторами метода в оригинальной работы были доказаны результаты для случая конечного поля констант. В параграфе §3.2.1 приведены основные результаты, относящиеся к данному методу для случая поля $\mathbb{Q}$ в качестве поля констант и сформулирован алгоритм. Программная реализация и оптимизация алгоритма позволили построить фундаментальные S-единицы степеней 40 и 48. Пусть

$$f_{40} = -\left(64\,x^4 - 125\,x^3 - 250\,x^2 - 160\,x - 32\right)(5\,x + 2), \qquad h_{40} = x^2 - \frac{14}{5}\,x - \frac{8}{5};$$

$$f_{48} = \left(64\,x^4 + 225\,x^3 + 264\,x^2 + 117\,x + 18\right)(x + 2), \qquad h_{48} = x^2 + \frac{1}{4}\,x - \frac{3}{2};$$

тогда выполнена следующая теорема

***Теорема* 10.** *Пусть $S_j = \{\nu^+_{h_j}, \nu_\infty\}$, тогда для $j = 40, 48$ поле $L_j = \mathbb{Q}(x)(\sqrt{f_j})$ обладает фундаментальной S_j-единицей, степень которой равна j и совпадает с порядком соответствующей $\mathbb{Q}$-точки якобиана J_{f_j}.*

Таким образом, в качестве следствия из существования S-единиц больших степеней получено новое доказательство существования $\mathbb{Q}$-точек кручения порядков $20, 21 \ldots, 30$ и $32, 34, 36, 39, 40, 48$ в якобианах кривых рода 2.

Заключение.

В диссертации были получены результаты о периодичности разложений в непрерывную дробь ключевых элементов, связанных с элементом $\sqrt{f}$, где многочлен f определяет гиперэллиптическое поле, а k — поле характеристики отличной от 2. Показано, что эти элементы играют важную роль при изучении квазипериодических непрерывных дробей в гиперэллиптических полях. Доказана периодичность квазипериодических разложений в непрерывную дробь элементов вышеуказанного типа. Для S, состоящего из конечного и бесконечного нормирования, получены оценки, связывающие степень фундаментальной S-единицы гиперэллиптического поля и квазипериод разложения в непрерывную дробь некоторого элемента гиперэллиптического поля. Отметим, что степень S-единицы связана с порядком некоторой точки кручения якобиана соответствующей гиперэллиптической кривой. Исследование свойств разложения этого элемента в непрерывную дробь позволяет ответить на вопрос о существовании S-единиц в гиперэллиптическом поле. В диссертационной работе получили развитие алгоритмы В. П. Платонова и В. В. Беняш-Кривеца поиска и построения фундаментальных S-единиц в гиперэллиптических полях. Была разработана массивно-параллельная программная реализация указанных алгоритмов, показавшую свою эффективность в получении фундаментальных S-единиц новых степеней. Полученные S-единицы позволили построить $\mathbb{Q}$-точки кручения соответствующих больших порядков в якобианах кривых рода 2.

Благодарности

Соискатель искренне благодарит научного руководителя, академика РАН, профессора В. П. Платонова за постановку задач, многочисленные научные идеи, полезные и вдохновляющие советы, терпение и поддержку. Соискатель выражает благодарность коллективу отдела теоретической и прикладной алгебры и теории чисел ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН за замечательную научную и рабочую атмосферу.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности

1. *Петрунин М. М., Платонов В. П.* Группы S-единиц и проблема периодичности непрерывных дробей в гиперэллиптических полях // Тр. МИАН. — 2018. — Т. 302. — С. 354—376. — (импакт-фактор WoS — 0,700).
2. *Петрунин М. М.* S-единицы и периодичность квадратного корня в гиперэллиптических полях // Доклады Академии наук. — 2017. — Т. 474, № 2. — С. 155—158. — (импакт-фактор WoS — 0,625).
3. *Петрунин М. М., Платонов В. П.* S-единицы в гиперэллиптических полях и периодичность непрерывных дробей // Доклады Академии наук. — 2016. — Т. 470, № 3. — С. 260—265. — (импакт-фактор WoS — 0,625).
4. *Петрунин М. М.* Вычисление фундаментальных S-единиц в гиперэллиптических полях рода 2 и проблема кручения в якобианах гиперэллиптических кривых // Чебышевский Сборник. — 2015. — Т. 16, № 4. — С. 250—283. — (импакт-фактор РИНЦ — 0,564).

В прочих изданиях

5. *Петрунин М. М.* Квазипериодические, но не периодические функциональные непрерывные дроби малых квазипериодов // Труды Научно-Исследовательского Института Системных Исследований Российской Академии Наук. — 2017. — Т. 7, № 3. — С. 14—20. — (импакт-фактор РИНЦ — 0,167).