Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова»

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 512.745

Шафаревич Антон Андреевич

Орбиты группы автоморфизмов аффинных орисферических многообразий

Специальность 01.01.06 —
«математическая логика, алгебра и теория чисел»

ДИССЕРТАЦИЯ
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук,
Гайфуллин Сергей Александрович

Москва — 2019

Содержание

Введение

Диссертация подготовлена на кафедре высшей алгебры механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова. В диссертации исследуются вопросы связанные с теорией инвариантов и алгебраических групп преобразований.

Актуальность темы.

В диссертации изучаются группы автоморфизмов аффинных алгебраических многообразий над алгебраически замкнутым полем характеристики ноль, которое мы будем на протяжении всей работы обозначать $\mathbb{K}$.

Несмотря на то, что сама группа автоморфизмов аффинного алгебраического многообразия может и не быть алгебраической группой, она содержит алгебраические подгруппы, то есть такие подгруппы, которые можно наделить струтурой аффинной алгебраической группы так, чтобы действие подгруппы на многообразии было регулярным. Отдельный интерес представляют одномерные связные алгебраические подгруппы, которые бывают двух типов. Обозначим через $\mathbb{G}_a$ аддитивную группу поля $\mathbb{K}$, а через $\mathbb{G}_m$ обозначим мультипликативную группу этого поля. Тогда каждая одномерная связная алгебраическая группа изоморфна либо $\mathbb{G}_a$, либо $\mathbb{G}_m$.

Одной из причин, по которой интересны группы $\mathbb{G}_a$ и $\mathbb{G}_m$, является то, что действия этих групп на аффинном многообразии можно описать с помощью алгебраических терминов. Действиям группы $\mathbb{G}_m$ соответствуют градуировки группой $\mathbb{Z}$ на алгебре регулярных функций на многообразии. А действиям группы $\mathbb{G}_a$ соответствуют локально нильпотентные дифференцирования на той же алгебре. Это такие дифференцирования, для которых для любого элемента алгебры найдется достаточно большая степень дифференцирования, которая будет равна нулю на этом элементе.

Иногда изучение алгебраических подгрупп в группе автоморфимзов приводит к полному пониманию, как устроена группа автоморфизмов многообразия. Такой подход продемонстрирован в работе [8] для описания группы автомфорфизмов поверхности, заданной триномом, в случае, когда на такой поверхности нет действий группы $\mathbb{G}_a$.

Бывают случаи, когда изучение алгебраических подгрупп помогает описать типичные орбиты группы автоморфизмов или даже все орбиты.

Назовем точку на многообразии гибкой, если касательное пространство к многообразию в этой точке порождено касательными векторами к орбитам всевозможных $\mathbb{G}_a$-действий на многообразии. Многообразие называется гибким, если каждая его гладкая точка гибкая.

Оказывается, что из гибкости аффинного алгебраического многообразия размерности большей двух следует, что группа автоморфизмов действует транзитивно на множестве гладких точек. Более того, имеет место следующий результат. Обозначим через $\mathrm{SAut}(X)$ подгруппу в группе автоморфизмов многообразия X, порожденную всеми одномерными подгруппами изоморфными $\mathbb{G}_a$. Как и вся группа автоморфизмов, эта группа не обязана быть алгебраической. Будем говорить, что действие некоторой группы на множестве является бесконечно транзитивным, если для любвых двух конечных упорядочых наборов одинаковой длины, состоящих из попарно различных элементов множества, существует элемент группы, который переводит первый упорядочный набор во второй. В работе [9] доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *([9, теорема 2.2]). Пусть X неприводимое аффинное многообразие размерности не меньше чем 2. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *Группа $\mathrm{SAut}(X)$ действует транзитивно на множестве гладких точек.*

2. *Группа $\mathrm{SAut}(X)$ действует бесконечно транзитивно на множестве гладких точек.*

3. Многообразие X гибкое.

На данный момент было доказано, что многие известные многообразия являются гибкими. Например, невырожденные торические многообразия и аффинные конуса над многообразиями флагов ([2]). В [5] доказано гибкость аффинных конусов над поверхностями дель Пеццо степени 4 и 5. Другие примеры гибких многообразий можно найти в [15].

При изучении свойств группы автоморфизмов алгебраических многообразий можно ограничиться каким-либо широким классом многообразий. Например, многообразиями, у которых априори группа автоморфизмов достаточно большая. Такими многообразиями являются квазиоднородные пространства — это многообразия, на которых действует алгебраическая группа с открытой в топологии Зарисского орбитой. Если потребовать более сильное условие, чтобы борелевская подгруппа действовала с открытой орбитой, то многообразие допускает удобное описание. Такие многообразия называются сферическими. Информацию о сферических многообразий можно найти в [18]. Описание сферических многообразий становится особенно удобным, если группа, которая действует на многообразии, является тором. Такие многообразия называются торическими. Торическим многообразиям посвящена книга [11].

В диссертации изучаются аффинные орисферические многообразия сложности ноль, известные также как S-многообразия. Это многообразия, на которых действует алгебраическая группа с открытой орбитой, причем стабилизатор некоторой точки из открытой орбиты содержит максимальную унипотентную подгруппу. Впервые они были введены в 1972 году в [4]. Далее мы будем называть аффинные орисферические многообразия сложности ноль просто аффинными орисферическими многообразиями.

Кратко опишем как устроено комбинаторное описане аффинных орисферических многообразий. Пусть X — аффинное орисферическое многообразие относительно действия алгебраической группы G. Легко видеть, что унипотентный радикал группы G действует тривиально на многообразии X. Поэтому можно считать, что группа G редуктивна. Пусть $x \in X$ — некоторая точка из открытой орбиты, стабилизатор которой содержит максимальную унипотентную подгруппу U в G. Зафиксируем борелевскую подгруппу B, содержащую U. Отображение $g \to g \cdot x$ определяет вложение алгебры регулярных функций на X в алгебру регулярных функций на G. Можно показать, что образ этого вложения распадется в прямую сумму весовых пространств относительно правого действия B на алгебре регулярных функций на G. Множество весов группы B, для которых соответствующее весовое пространство лежит в образе алгебры регулярных функций на X, образует полугруппу, которая содержится в полугруппе доминантных весов группы B. Отметим, что под полугруппой мы понимаем множество с ассоциативной бинарной операцией и с нейтральным элементом. Многообразие X однозначно определяется этой полугруппой с точностью до изоморфизма, перестановочного с действием группы G.

Обозначим через $\mathfrak{X}(B)$ решетку характеров группы B. Тогда в пространстве $\mathfrak{X}(B) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ можно рассмотреть конус, порожденный элементами полугруппы, соответствующей многообразию X. Существует биекция между G-орбитами на многообразии X и гранями этого конуса. При этой биекции идеал регулярных функций на X, равных нулю на замыкании G-орбиты, порождается функциями, лежащими в тех весовых пространствах группы B, для которых вес B не лежит в соответствующей грани конуса.

Аффинные орисферические мноогообразия являются сферическими. Аффинные конуса над многообразиями флагов, а также торические многообразия являются примерами аффинных орисферических многообразий.

Цель работы. Перечислим основные цели диссертации.

- Исследовать аффинные орисферические многообразия полупростых групп на гибкость.

- Исследовать нормальные аффинные орисферические многообразия произвольных групп на гибкость.

- Найти новые достаточные условия для гибкости аффинного многообразия.

- Найти новые достаточые условия для существования $\mathbb{G}_a$-действий на аффинном многообразии.
- Исследовать орбиты группы автоморфизмов торических многообразий.

Основные положения выносимые на защиту.

- Получено доказательство гибкости аффинных орисферических многообразий полупростых групп (глава 2).
- Было получено доказательство гибкости нормальных аффинных орисферических многообразий без обратимых функций отличных от констант (глава 3).
- Получено достаточное условие существования гибкой точки на многообразии, а также получено достаточное условие гибкости многообразия (раздел 3.2).
- Получено достаточное условие для существования $\mathbb{G}_a$-действий на многообразии (раздел 3.1).
- Получено геометрическое описание орбит связной компоненты единицы группы автоморфизмов аффинного торического нормального многообразия (глава 4).

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях:

- научно-исследовательском семинаре по алгебре (механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, 2018);
- на седьмой школе-конференции «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов» (факультет математики Самарского университета, 2018);

- на научном семинаре «Дифференциальная геометрия и приложения» под руководством академика А.Т. Фоменко (механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, 2019).

Основные методы исследования. В работе используются методы алгебры, теории инвариантов, теории представлений, алгебраической геометрии и комбинаторной алгебры.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты и методы настоящей работы могут найти применение в теории инвариантов и алгебраической геометрии.

Публикации. Результаты данной диссертации опубликованы в 3 статьях [19–21], из них 3 работы [19–21] опубликованы в научных журналах из списка, рекомендованного ВАК. Работы [19–21] соответствуют пункту 2.3. положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова.

Работа [21] написана в соавторстве с С.А. Гайфуллиным (Лично Шафаревичу А.А. принадлежит доказательство предложения 3 и лемма 3. С.А. Гайфуллину принадлежат предложение 4 и леммы 4 и 2. Теоремы 2 и 3, предложения 5,6,7 и следствия 1 и 2 получены совместно.) .

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы из 21 наименований. Общий объем диссертации составляет 89 страницы.

Краткое содержание диссертации.

Здесь будет кратко описана структура работы. Диссертация разбита на главы, а главы — на разделы. В главе 1 изложены ранее известные факты. Остальные главы посвящены результатам диссертации. Нумерация лемм, теорем, предложений, следствий и замечаний сквозная. В конце введения приведен список наиболее часто встречающихся обозначений.

В **Главе 1** приведены различные факты, которые требуются в дальнейшем.

В разделе 1.1 приводятся необходимые сведения о дифференцированиях алгебр, о связи дифференцирований алгебры регулярных функций аффинного многообразия и дифференцирований алгебры регулярных функций объемлющего аффинного пространства.

Раздел 1.2 посвящен локально нильпотентным дифференцированиям, связи локально нильпотентных дифференцирований и $\mathbb{G}_a$-действий, а также группе $\mathrm{SAut}(X)$ и гибкости. Здесь упоминается ключевая теорема 2, мотивирующая изучать гибкость аффинных многообразий. Также дается определение инварианта Макара-Лиманова и упоминается утверждение 1.

В разделе 1.3 дается определение и комбинаторное описание аффинных орисферических многообразий. В частности, обсуждается строение алгебры регулярных функций аффинных орисферических многообразий.

В разделе 1.4 рассматривается частный случай аффинных орисферических многообразий — торические многообразия. Также в этом разделе описываются $\mathbb{G}_a$-действия на торических многообразиях, нормализуемые тором. Дается определение корней Демазюра.

В разделе 1.5 дается определение дивизориальной алгебры и кольца Кокса. Вводятся AMDS многообразия и упоминается утверждение 3, которое связывает действия алгебраических групп на многообразии с действиями алгебраических групп на тотальном координатном пространстве.

В **главе 2** доказывается гибкость аффинных орисферических многообразий полупростых групп.

Результаты этой главы основаны на статье [19].

План доказательства следующий. Пусть G — полупростая группа, и X — аффинное орисферическое многообразие группы G. Согласно теореме 2 достаточно доказать, что группа $\mathrm{SAut}(X)$ действует транзитивно на множестве гладких точек. Множество гладких точек разбивается в объединение G-орбит. Так как полупростая группа порождается своими одномерными корневыми подгруппами, которые унипотентны, то все автоморфизмы многообразия X, соответствующие действиям элементов группы G, лежат в группе $\mathrm{SAut}(X)$. Отсюда следует, что точки многообразия X, лежащие в одной G-орбите, лежат в одной

$\mathrm{SAut}(X)$-орбите. Поэтому достаточно доказать, что у каждой G-орбиты, состоящей из гладких точек, есть точка, которую можно перевести с помощью автоморфизма из $\mathrm{SAut}(X)$ в точку из открытой G-орбиты. Для этого показывается, что для каждой неоткрытой G-орбиты, состоящей из гладких точек, есть автоморфизм из $\mathrm{SAut}(X)$, который переводит некоторую точку из этой орбиты, в точку, принадлежащую орбите большей размерности.

В разделе 2.1 дается определение алгебры, порожденной первым уровнем. Пусть X — аффинное орисферическое многообразие, $\mathfrak{F}$ — соответствующая полугруппа в решетке характеров борелевской подгруппы, а K — конус, порожденный этой полугруппой. Рассмотрим грань F этого конуса. Если выбрать какую-нибудь опорную гиперплоскость для грани F, то среди элементов $\mathfrak{F}$, не лежащих в F, можно выбрать те, что имеют наименьшее растояние до этой гиперповерхности. Алгебра, порожденная первым уровнем — это подалгебра в алгебре регулярных функций многообразия X, которая порождена весовыми пространствами, лежащими в F и в первом уровне. Далее доказываются некоторые технические свойства, которые будут использованы в дальнейшем.

В разделе 2.2 доказывается, что на алгебре, порожденной первым уровнем, существует локально нильпотентное дифференцирование, которое равно нулю на всех весовых пространствах, лежащих в F, а образ весовых пространств, лежащих в первом уровне, лежит в сумме весовых пространств, лежащих в грани F (теорема 5).

В разделе 2.3 показывается, что это локально нильпотентное дифференцирование продолжается на всю алгебру регулярных функций на многообразии (теорема 6).

Наконец, в разделе 2.4 доказывается основной результат этой главы — теорема 4 о том, что всякое аффинное орисферическое многообразие полупростой группы гибкое.

В **главе 3** доказывается, что если X — нормальное аффинное орисферическое многообразие связной алгебраической группы G, и в алгебре регулярных функций $\mathbb{K}[X]$ нет обратимых функций отличных от констант, то X гибкое.

В отличие от результата из предыдущей главы больше не требуется, чтобы группа G была полупростой, но зато требуется, чтобы многообразие X было нормальным.

Доказательство разбито на три части.

В разделе 3.1 мы доказываем предложение 2, которое говорит, что если на аффинном неприводимом нормальном многообразии X задано негиперболическое $\mathbb{G}_m$-действие, и множество неподвижных точек Z относительно этого $\mathbb{G}_m$-действия содержит гладкие точки, то касательное пространство к X в каждой гладкой точке, лежащий в Z, порождается касательным пространством к Z и касательными векторами к различным $\mathbb{G}_a$-действиям.

В разделе 3.2 доказывается утверждение 4 о том, что если на AMDS многообразии нет гибких точек, то есть простой дивизор инвариантный относительно подгруппы в группе автоморфизмов, порожденной некоторым тором и группой $\mathrm{SAut}(X)$. Отсюда вытекает, что если эта подгруппа действует транзитивно на множестве гладких точек, то многообразие является гибким.

Наконец, в разделе 3.3 с помощью результатов предыдущих параграфов доказывается теорема 9, которая говорит, что всякое нормальное аффинное орисферическое многообразие без обратимых функций отличных от констант гибкое.

В **главе** 4 дается описание орбит связной компоненты единицы группы автоморфизмов аффинных торических многообразий, используя размерности касательных пространств к точкам многообразия

В разделе 4.1 приводится формула

$$\dim T_F X = \dim O_F + |\mathcal{H}(\mathfrak{F}/\langle F\rangle)|,$$

которая позволяет найти размерность касательного пространства к аффинному торическому многообразию X в некоторой точке орбиты O_F, соответствующей грани F конуса этого многообразия, зная размерность орбиты O_F и число $|\mathcal{H}(\mathfrak{F}/\langle F\rangle)|$ — количество неприводимых элементов в полугруппе $\mathfrak{F}/\langle F\rangle$ (теорема 3). Здесь полугруппа $\mathfrak{F}/\langle F\rangle$ — это образ полугруппы $\mathfrak{F}$ при гомоморфизме факторизации группы характеров тора, по подгруппе, порожденной всеми весами, лежащими в грани F.

В разделе 4.2 доказывается теорема 10, которая отвечает на вопрос, как устроены орбиты связной компоненты единицы группы автоморфизмов на аффинном торическом многообразии.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научном руководителю Сергею Александровичу Гайфуллину за постановку задач и постоянное внимание к процессу работы. Также автор благодарит Ивана Владимирович Аржанцева за ценные обсуждения.

Обозначения.

- $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, т.е. множество положительных целых чисел;
- $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел;
- $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел;
- $\mathbb{Q}^+$ — множество неотрицательных рациональных чисел;
- $\mathbb{K}$ — основное поле, алгебраически замкнутое, характеристики ноль;
- $\mathbb{K}[X]$ — алгебра регулярных функций на многообразии X;
- $\mathbb{K}(X)$ — поле рациональных функций на многообразии X;
- $\mathrm{Aut}(X)$ — группа регулярных автоморфизмов алгебраического многообразия X;
- X^{reg} — множество гладких точек на многообразии X;
- $\mathbb{A}^n$ — аффинное пространство размерности n;
- $\mathbb{G}_a$ — аддитивная группа поля $\mathbb{K}$;
- $\mathbb{G}_m$ — мультипликативная группа поля $\mathbb{K}$.

Глава 1

Основные понятия

1.1 Дифференцирования алгебр

В этом разделе мы приведем некоторые известные свойства дифференцирований и локально нильпотентных дифференцирований, которые понадобятся нам в дальнейшем. Большую часть собранных в этом параграфе утверждений можно найти в [3] и [13].

Пусть A — коммутативная, ассоциативная алгебра без делителей нуля над полем $\mathbb{K}$.

Определение 1. *Дифференцированием алгебры A будем назвать такое линейное отображение $\partial\colon A \to A$, для которого выполнено тождество Лейбница, т.е.*

$$\partial(ab) = \partial(a)b + \partial(b)a,$$

для любых $a, b \in A$.

Все дифференцирования алгебры A образуют векторное пространство над полем $\mathbb{K}$.

Следующая лемма широко известна.

Лемма 1. *Возьмем произвольное $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$ — алгебра многочленов от n переменных. Тогда для произвольных $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$*

существует единственное дифференцирование $\partial\colon \mathbb{K}[X_1,\dots,X_n] \to \mathbb{K}[X_1,\dots X_n]$ *такое, что* $\partial(X_i) = x_i$.

Определение 2. *Пусть* A, B *— коммутативные алгебры без делителей нуля и* $\psi\colon A \to B$ *гомоморфизм алгебр. Тогда линейное отображение* $\partial\colon A \to B$ *называется* <u>*ψ-дифференцированием*</u> *алгебры* A *в алгебру* B, *если для него выполнено:*

$$\partial(ab) = \partial(a)\psi(b) + \partial(b)\psi(a),$$

для любых $a, b \in A$.

Все ψ-дифференцирования алгебры A образуют векторное пространство над $\mathbb{K}$.

Если $A \subseteq B$, и в качестве гомоморфизма ψ выбрано тождественное вложение A в B, то такие ψ-дифференцирования будем называть просто дифференцированиями.

Пусть $X \subset \mathbb{A}^n$ — аффинное алгебраическое многообразие, и $I = I(X)$ — идеал нулей X. Пусть ψ — гомоморфизм из алгебры $\mathbb{K}[\mathbb{A}^n]$ в алгебру $\mathbb{K}[X]$, определяемый формулой $\psi(f) = f|_X$. Тогда каждому дифференцированию ∂ алгебры $\mathbb{K}[X]$ можно сопоставить ψ-дифференцирование $\widetilde{\partial}$ на алгебре $\mathbb{K}[\mathbb{A}^n]$ по правилу:

$$\widetilde{\partial}(f) = \partial(\psi(f)).$$

Лемма 2. *Отображение* $\partial \mapsto \widetilde{\partial}$ *является изоморфизмом пространства дифференцирований алгебры* $\mathbb{K}[X]$ *на пространство ψ-дифференцирований алгебры* $\mathbb{K}[\mathbb{A}^n]$, *равных нулю на* $I(X)$.

Доказательство. Инъективность отображения $\partial \mapsto \widetilde{\partial}$ следует из сюръективности ψ. Для доказательства сюръективности отображения $\partial \mapsto \widetilde{\partial}$ возьмем произвольное ψ-дифференцирование γ алгебры $\mathbb{K}[\mathbb{A}^n]$, равное нулю на $I(X)$, и определим дифференцирование ∂_γ на алгебре $\mathbb{K}[X]$, которое на порождающих элементах $\psi(X_i)$ будет принимать значение $\partial_\gamma(\psi(X_i)) = \gamma(X_i)$. Читатель может легко убедиться, что это будет корректно определенное дифференцирование и $\gamma = \widetilde{\partial}_\gamma$.

$\square$

Пусть $f_1, \ldots, f_k$ — порождающие идеала $I = I(X)$. Обозначим через J матрицу Якоби $\dfrac{\partial(f_1, \ldots, f_k)}{\partial(X_1, \ldots, X_n)}$. Рассмотрим ψ-дифференцирование $\widetilde{\partial}$ на $\mathbb{K}[\mathbb{A}^n]$ и положим $x_i = \widetilde{\partial}(X_i)$.

Лемма 3. *Отображение $\widetilde{\partial}$ обращается в ноль на $I(X)$ тогда и только тогда, когда*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1}|_X & \frac{\partial f_1}{\partial X_2}|_X & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial X_n}|_X \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_1}|_X & \frac{\partial f_2}{\partial X_2}|_X & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial X_n}|_X \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial X_1}|_X & \frac{\partial f_k}{\partial X_2}|_X & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial X_n}|_X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0, \tag{1.1}$$

Доказательство. Легко убедиться, что

$$\widetilde{\partial}(f) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left.\frac{\partial f}{\partial X_i}\right|_X ,$$

для произвольного $f \in \mathbb{K}[\mathbb{A}^n]$. Отсюда следует импликация в одну сторону.

Импликация в другую сторону следует из того, что если $f \in I(X)$, то для произвольного g имеем

$$\widetilde{\partial}(fg) = \widetilde{\partial}(f)\psi(g) + \widetilde{\partial}(g)\psi(f) = \widetilde{\partial}(f)\psi(g).$$

Поэтому равенство нулю $\widetilde{\partial}$ на $I(X)$ достаточно проверить на образующих. $\square$

Следствие 1. *Отображение $\partial \mapsto \widetilde{\partial}$ устанавливает изоморфизм между пространством дифференцирований алгебры $\mathbb{K}[X]$ и пространством ψ-дифференцирований алгебры $\mathbb{K}[\mathbb{A}^n]$, удовлетворяющих системе (1.1).*

1.2 Группа $\mathrm{SAut}(X)$

Определение 3. *Дифференцирование ∂ называется локально нильпотентным, если для любого элемента $a \in A$ существует натуральное $n \in \mathbb{N}$, такое что $\partial^n(a) = 0$.*

Пусть X — аффинное алгебраическое многообразие над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{K}$ характеристики ноль. Пусть ∂ — локально нильпотентное дифференцирование на алгебре регулярных функций $\mathbb{K}[X]$. Тогда ему соответствует автоморфизм φ_∂^* алгебры $\mathbb{K}[X]$, который определяется следующим образом:

$$\varphi_\partial^*(f) = \exp(\partial)(f) = f + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\partial^i(f)}{i!}.$$

В свою очередь, автоморфизму алгебры $\mathbb{K}[X]$ соответствует автоморфизм φ_∂ многообразия X. Каждому локально нильпотентному дифференцированию ∂ на алгебре $\mathbb{K}[X]$ соответствует действие аддитивной группы поля $\mathbb{G}_a = (\mathbb{K}, +)$ на многообразии X, которое задается следующим образом: результатом действия элемента $t \in \mathbb{G}_a$ на точку $x \in X$ есть точка $\varphi_{t\partial}(x)$. Можно показать, что таким образом можно получить любое регулярное действие группы $\mathbb{G}_a$ на X (см. [13, раздел 1.5]).

Определение 4. *Группой специальных автоморфизмов многообразия X называется подгруппа в группе $\mathrm{Aut}(X)$, порожденная всеми возможными регулярными действиями группы $\mathbb{G}_a$ на многообразии X. Обозначается $\mathrm{SAut}(X)$.*

Определение 5. *Точка $x \in X^{reg}$ называется гибкой, если касательное пространство к многообразию X в точке x порождено касательными векторами к орбитам точки x при всевозможных действиях группы $\mathbb{G}_a$. Многообразие X называется гибким, если все его гладкие точки гибкие.*

Определение 6. *Пусть A — бесконечное множество и группа G действует на множестве A. Тогда действие группы G на A называется бесконечно* *транзитивным, если для любого натурального k и любых двух упорядоченных наборов $a_1, a_2, \ldots, a_k$, и $b_1, b_2, \ldots b_k$, состоящих из попарно различных элементов множества A, существует такой элемент $g \in G$, что $g \cdot a_i = b_i$ для любого $i = 1, \ldots k$.*

Теорема 2. *([9, теорема 2.2]). Пусть X неприводимое аффинное многообразие размерности не меньше чем 2. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *Группа $\mathrm{SAut}(X)$ действует транзитивно на X^{reg}.*
2. *Группа $\mathrm{SAut}(X)$ действует бесконечно транзитивно на X^{reg}.*
3. *Многообразие X гибкое.*

При изучении гибкости важную роль играют следующие объекты.

Определение 7. *Инвариантом Макара-Лиманова* $\mathrm{ML}(X)$ *аффинного алгебраического многообразия X называется пересечение ядер всех локально нильпотентных дифференцирований алгебры $\mathbb{K}[X]$. Иными словами,* $\mathrm{ML}(X)$ *— это подалгебра в $\mathbb{K}[X]$, состоящая из всех регулярных* $\mathrm{SAut}(X)$*-инвариантов.*

Подполе $\mathrm{FML}(X)$ *в $\mathbb{K}(X)$, состоящее из всех рациональных* $\mathrm{SAut}(X)$*-инвариантов, называется инвариантом Макара-Лиманова в поле.*

Утверждение 1. *[9, Proposition 5.1.] Пусть X — неприводимое аффинное алгебраическое многообразие. Следующие условия эквивалентны:*

1. *на X есть гибкая точка;*
2. *группа* $\mathrm{SAut}(X)$ *действует на X с открытой орибитой;*
3. $\mathrm{FML}(X) = \mathbb{K}$.

Следующая лемма хорошо известна (см., например [12]).

Лемма 4. *Пусть X — неприводимое нормальное аффинное многообразие. Предположим, что* $\mathrm{FML}(X) \neq \mathbb{K}$. *Тогда существует* $\mathrm{SAut}(X)$*-инвариантный простой дивизор $D \subseteq X$.*

Доказательство. Предположим, что $f \in \mathrm{FML}(X) \setminus \mathbb{K}$. Тогда $\operatorname{div}(f)$ — это $\mathrm{SAut}(X)$-инвариантный дивизор. Пусть $\operatorname{div}(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i D_i$, где D_i — простые дивизоры. Рассмотрим группу $\Omega \subseteq \mathrm{SAut}(X)$ изоморфную $\mathbb{G}_a$. Тогда каждое $\omega \in \Omega$ переставляет дивизоры D_i. Но так как группа Ω связна, то каждое ω переводит все D_i в себя. Значит, каждое D_i является Ω-инвариантным. Отсюда следует, что все D_i являются $\mathrm{SAut}(X)$-инвариантными. □

1.3 Аффинные орисферические многообразия

Все сведения приведенные в этом разделе можно найти в [4].

Пусть G — произвольная связная линейная алгебраическая группа, B — фиксированная в ней борелевская подгруппа. Тогда для $\Lambda \in \mathfrak{X}(B)$ положим

$$S_\Lambda = \{f \in \mathbb{K}[G] \mid f(gb) = \Lambda(b) f(g) \ \ \forall g \in G, \ b \in B\}.$$

Очевидно, что S_Λ является векторным пространством. Более того, представление группы G, индуцируемое в S_Λ, контрагредиентно неприводимому представлению со страшим весом Λ.

Известно, что множество

$$\mathfrak{X}^+(B) \doteqdot \{\Lambda \in \mathfrak{X}(B) \mid S_\Lambda \neq 0\}$$

совпадает с множеством старших весов неприводимых представлений группы G. Это множество также называют множеством доминантных весов группы G. Алгебра S группы G определяется так:

$$S = \bigoplus_{\Lambda \in \mathfrak{X}^+(B)} S_\Lambda.$$

При $\Lambda, M \in \mathfrak{X}^+(B)$ имеет место равенство $S_\Lambda \cdot S_M = S_{\Lambda+M}$ (см.[4]).

Определение 8. *Неприводимое аффинное многообразие X с регулярным действием на нем группы G называется <u>аффинными орисферическим многообра-</u>*

зием сложности ноль группы G, если одна из орбит этого действия открыта в X и стабилизатор любой точки этой орбиты содержит максимальную унипотентную подгруппу группы G. Аффинные орисферические многообразия также называются S-многообразиями.

Далее в тексте мы будем называть аффинные орисферические многообразия сложности ноль просто аффинными орисферическими многообразиями.

Для любого набора $\{\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k\}$ доминантыньх весов группы G можно рассмотреть неприводимые представления

$$R_i : G \times V_{\Lambda_i} \to V_{\Lambda_i}, \quad i = 1, \ldots, k$$

со старшими весами $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k$ соответственно. Обозначим через $v_1, \cdots, v_k$ старшие вектора этих представлений. Тогда для представления $R = \bigoplus R_i$ в пространстве $V = \bigoplus V_{\Lambda_i}$, возьмем вектор $v = v_1 + \ldots + v_k$. Замыкание орбиты O вектора v будет аффинным орисферическим многообразием группы G. Обозначим это многообразие $X(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k)$. В [4] доказывается, что так получается любое аффинное орисферическое многообразие группы G.

Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторое подмножество $\mathfrak{X}^+(B)$. Тогда положим

$$S_{\mathfrak{F}} = \bigoplus_{\Lambda \in \mathfrak{F}} S_\Lambda.$$

Если $\mathfrak{F}$ — полугруппа с нулем, то $S_{\mathfrak{F}}$ — подалгебра в $\mathbb{K}[G]$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *([4, теорема 6]) Имеет место G-эквивариантный изоморфизм $\mathbb{K}[X(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k)] \simeq S_{\mathfrak{F}}$, где $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{X}^+(B)$ — полугруппа с нулем, порожденная $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k$.*

Пусть $X = X(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k)$ — аффинное орисферическое многообразие группы G, и веса $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k$ порождают полугруппу $\mathfrak{F}$.

Отображения

$$G \xrightarrow{\tau} O \xrightarrow{\iota} X,$$

где $\tau(g) = g \cdot v$, а ι — тождественное вложение, порождают вложения

$$\mathbb{K}[X] \hookrightarrow \mathbb{K}[O] \hookrightarrow \mathbb{K}[G].$$

Эти вложения и индуцируют изоморфизм из теоремы 3. Далее будем везде отождествлять регулярные функции на многообразии X и соответствующие им регулярные функции на группе G.

Следствие 2. *Многообразия $X(\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k)$ и $X(M_1, \ldots, M_l)$ группы G являются G-эквивариантно изоморфными тогда и только тогда, когда совпадают полугруппы с нулем, порожденные множествами $\{\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k\}$ и $\{M_1, \ldots, M_k\}$.*

Определение 9. *Мы будем говорить, что аффинное орисферическое многообразие X соответствует полугруппе $\mathfrak{F}$, если $\mathbb{K}[X] = S_{\mathfrak{F}}$. В этом случае X будем обозначать $X_{\mathfrak{F}}$.*

Рассмотрим векторное пространство $\mathfrak{X}(B) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Для произвольной аддитивной полугруппы Γ в $\mathbb{Q}$ и подмножества $\mathfrak{P}$ пространства $\mathfrak{X}(B) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, будем обозначать через $\Gamma\mathfrak{P}$ совокупность линейных комбинаций элементов множества $\mathfrak{P}$ с коэффициентами из Γ.

Пусть $K = \mathbb{Q}^+\mathfrak{F}$. Тогда K будет выпуклым полиэдральным конусом.

Орбиты группы G на многообразии X находятся во взаимно однозначном соответствии с гранями конуса K. Более точно, для каждой грани F конуса K многообразие нулей идеала $S_{\mathfrak{F}\setminus(F\bigcap\mathfrak{F})} \lhd S_{\mathfrak{F}}$ является замыканием некоторой орбиты. Обозначим это многообразие X_F. Тогда X_F — это аффинное орисферическое многообразие, а $F\bigcap\mathfrak{F}$ — соответствующая ему полугруппа.

1.4 Торические многообразия и корни Демазюра

Торические многообразия являются частным случаем аффинных орисферических многообразий. Однако они обладают некоторыми свойствами, которых нет у произвольных аффинных орисферических многообразий. В этом разделе мы упомянем некоторые такие свойства.

Обозначим через T тор $(\mathbb{K}^*)^n$, где n — натуральное число. Рассмотрим решетку $N \cong \mathbb{Z}^n$ одно-параметрических подгрупп в T и обозначим через M двойственную ей решетку характеров T. Скобками $\langle\cdot,\cdot\rangle : M \times N \to \mathbb{Z}$ обозначим естественное спаривание элементов этих решеток. Обозначим $N_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} N,\ M_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M$.

Если m — элемент решетки M, то через χ^m будем обозначать соответствующий характер тора T. Тогда алгебра регулярных функций на торе T может быть отождествлена с алгеброй

$$\mathbb{K}[M] = \bigoplus_{m \in M} \mathbb{K}\chi^m.$$

Предположим, что T действует эффективно на нормальном аффинном алгебраическом многообразии X. Тогда X называется торическим многообразием, если в X есть открытая орбита относительно этого действия.

Пусть σ — полиэдральный конус в $N_{\mathbb{Q}}$, причем аффинная оболчка σ совпадает с пространством $N_{\mathbb{Q}}$. Через $\sigma^\vee$ мы будем обозначать двойственный конус в $M_{\mathbb{Q}}$, а именно

$$\sigma^\vee = \{w \in M_{\mathbb{Q}} | \forall v \in \sigma \ \ \langle w, v\rangle \geq 0\}.$$

Рассмотрим аффинное многообразие

$$X_\sigma = \operatorname{Spec} \bigoplus_{m \in \sigma^\vee \cap M} k\chi^m.$$

Тогда X_σ — аффинное торическое многообразие и любое аффиное торическое многообразие можно получить таким образом (см. [11] или [14]).

Пусть A и K — полидральные конусы. Тогда запись $A \preceq K$ будет означать, что A является гранью K. Для каждого ребра $\tau \preceq \sigma$ через v_τ обозначим примитивный вектор решетки N, принадлежащий τ.

Определение 10. *Элемент $e \in M$ называется корнем Демазюра конуса σ, если существует ребро $\tau \preceq \sigma$, такое что $\langle v_\tau, e\rangle = -1$ и $\langle v_{\tau'}, e\rangle \geq 0$ для любого другого ребра $\tau' \preceq \sigma$.*

Каждому корню Демазюра e соответствует локально нильпотентное дифференцирование ∂_e на алгебре $\mathbb{K}[X_\sigma]$, определяемое следующим правилом. Пусть τ — ребро конуса σ, на котором e равно -1. Если m — точка в M, лежащая в конусе $\sigma^\vee$, и χ^m — соответствующий характер, то положим $\partial_e(\chi^m) = \langle v_\tau, m\rangle\, \chi^{m+e}$. На остальных элементах алгебры $\mathbb{K}[X_\sigma]$ продолжим ∂_e по линейности. Полученное локальное нильпотентное дифференцирование определяет гомоморфизм из аддитивной группы поля $\mathbb{K}$ (которую обозначим $\mathbb{G}_a$) в группу автоморфизмов многообразия X_σ:

$$\alpha_e : \mathbb{G}_a \to \mathrm{Aut}(X_\sigma), \quad t \to \exp(t\partial_e).$$

Группу $\alpha_e(\mathbb{G}_a)$ обозначим H_e. Как подгруппа в группе автоморфизмов группа H_e действует на многообразии X_σ. Множество точек неподвижных относительно этого действия обозначим X^{H_e}.

Предложение 1. *[2, Proposition 2.1] Пусть e — корень Демазюра. Тогда H_e-орбита каждой точки $x \in X_\sigma \setminus X_\sigma^{H_e}$ пересекает ровно две T-орбиты O_1 и O_2. Более того, $O_2 \subseteq \overline{O_1}$ и $\dim O_1 = \dim O_2 + 1$.*

Пары T-орбит (O_1, O_2) из предложения 1 будем называть H_e-связными.

1.5 Кольцо Кокса

В этом разделе мы напомним определение и основные свойства кольца Кокса аффинного алгебраического многообразия. Более полную информацию о кольце Кокса можно найти в [7].

Пусть X — нормальное аффинное неприводимое алгебраическое многообразие. Напомним, что *простым дивизором* на X называется неприводимое замкнутое подмножетсво коразмерности 1. Рассмотрим группу $\mathrm{WDiv}(X)$ *дивизоров Вейля*, которая является свободной абелевой группой с простыми дивизорами в качестве образующих. Дивизор E является эффективным (мы будем обозначать это $E \geq 0$), если все коэффициенты при простых дивизорах неотрицательны. Каждой ненулевой рациональной функции на X соответствует дивизор $\mathrm{div}(f) \in \mathrm{WDiv}(X)$ — дивизор её нулей и полюсов. Такие дивизоры называются *главными*. Главные дивизоры образую подгруппу $\mathrm{PDiv}(X)$ в группе дивизоров Вейля. Фактор группа $\mathrm{Cl}(X) = \mathrm{WDiv}(X)/\mathrm{PDiv}(X)$ называется *группой классов дивизоров*.

Каждому дивизору Вейля D можно сопоставить векторное пространство ассоциированное с дивизором

$$H^0(X, D) = \{f \in \mathbb{K}(X) \setminus \{0\} \mid \mathrm{div}(f) + D \geq 0\} \cup \{0\}\,.$$

Заметим, что если взять функцию $f \in H^0\ (X, D)$ и умножить ее на регулярную функцию $g \in \mathbb{K}[X]$, то произведение также будет лежать в $H^0(X, D)$. Таким образом векторное пространство $H^0(X, D)$ является $\mathbb{K}[X]$ модулем.

Для каждой подгруппы $K \subseteq \mathrm{WDiv}(X)$ можно рассмотреть внешнюю прямую сумму модулей

$$\mathcal{S}_K = \bigoplus_{D \in K} \mathcal{S}_D, \quad \mathcal{S}_D = H^0(X, D).$$

Если $f_1 \in \mathcal{S}_{D_1}$ и $f_2 \in \mathcal{S}_{D_2}$ (D_1, D_2 принадлежат K), то определим их произведение в $\mathcal{S}_K$ как обычное произведение $f_1 f_2$ в $\mathbb{K}(X)$, рассматриваемое как элемент модуля $\mathcal{S}_{D_1+D_2}$. Далее можно определить умножение произвольных элементов из $\mathcal{S}_K$ согласно закону дистрибутивности.

Определенное выше умножение, определяет на $\mathcal{S}_K$ структуру алгебры над кольцом $\mathbb{K}[X]$. Эта алгебра имеет естественную градуировку группой K.

Определение 11. *Алгебра $\mathcal{S}_K$ называется <u>дивизориальной алгеброй</u>, ассоци-*

ированной с подгруппой K.

Градуировка конечно порожденной группой K на $\mathcal{S}_K$ определяет действие тора $T = \operatorname{Spec} \mathbb{K}[K]$ на $\mathcal{S}_K$. При этом действии множество неподвижных элементов алгебры $\mathcal{S}_K$ совпадает с $\mathcal{S}_0 \cong \mathbb{K}[X]$.

Определение 12. *Пусть X — нормальное многообразие без обратимых функций кроме констант и с конечно порожденной группой классов дивизоров* $\mathrm{Cl}(X)$. *Пусть K – конечно порожденная подгруппа в* $\mathrm{WDiv}(X)$, *такая что отображение $\pi\colon K \to$* $\mathrm{Cl}(X)$, *переводящее каждый дивизор $D \in K$ в его класс в группе* $\mathrm{Cl}(X)$, *сюръективно. Обозначим через K^0 ядро отображения π. Можно выбрать характер $\chi\colon K^0 \to \mathbb{K}(X)^{\times}$, т.е. гомоморфизм из группы K^0 в мультипликативную группу поля $\mathbb{K}(X)$, удовлетворяющий равенству*

$$\mathrm{div}(\chi(E)) = E,$$

для всех $E \in K^0$.

Пусть $\mathcal{S}_K$ — дивизориальная алгебра, ассоциированная с K. Обозначим через I идеал в $\mathcal{S}_K$, порожденный всеми функциями вида $1 - \chi(E)$, где 1 рассматривается как элемент $\mathcal{S}_0$, E — произвольный элемент из K^0 и $\chi(E)$ рассматриваются как элементы $\mathcal{S}_{-E}$. Тогда <u>кольцом Кокса</u> многообразия X называется факторкольцо $\mathcal{R}_{K,\chi} = \mathcal{S}_K/I$.

Можно показать, что определение кольца Кокса не зависит от выбора группы K и характера χ. Поэтому мы будем обозначать колько Кокса многообразия X просто как $\mathcal{R}(X)$.

Так как на алгебре $\mathcal{S}_K$ есть градуировка группой K, то на ней есть и градуировка группой $\mathrm{Cl}(X)$. *При этом идеал I однороден относительно этой градуировки. Поэтому кольцо Кокса $\mathcal{R}(X)$ также градуировано группой* $\mathrm{Cl}(X)$.

Определение 13. *Прямое произведение тора и конечной абелевой группы называется <u>квазитором</u>.*

Пусть X — нормальное аффинное многообразие без обратимых функций кроме констант. Предположим также, что группа классов дивизоров и кольцо Кокса многообразия X конечно порождены. Тогда можно рассмотреть тотальное координатное пространство $\overline{X} = \operatorname{Spec}\mathcal{R}(X)$. Это будет нормальное неприводимое аффинное многообразие. Так как $\mathcal{R}(X)$ градуировано группой $\operatorname{Cl}(X)$, то на $\overline{X}$ определено действие характеристического квазитора $N(X) = \operatorname{Spec}\mathbb{K}[\operatorname{Cl}(X)]$, причем многообразие X изоморфно категорному фактору $\overline{X}/\!/N(X)$. Морфизм факторизации $\pi\colon \overline{X} \to X$ называется *реализацией Кокса* многообразия X.

Напомним, что нормальное проективное многообразие с конечно порожденным кольцом Кокса называется *пространством мечты Мори*. По аналогии, мы будем называть *аффинным пространством мечты Мори* нормальное аффинное многообразие без обратимых функций, отличных от констант, с конечно порожденным кольцом Кокса. Мы будем сокращенно обозначать такие пространства английской аббревиатурой AMDS.

Утверждение 2. *[9, Theorem 4.3.1.5] Путь G — связная редуктивная алгебраическая группа и X — нормальное аффинное неприводимое унирациональное G-многообразие сложности $c(X) \leq 1$ без обратимых функций отличных от констант. Тогда группа классов дивизоров $\operatorname{Cl}(X)$ и кольцо Кокса $\mathcal{R}(X)$ являются конечно порожденными.*

Согласно [4, Теорема 13] любое аффинное орисферическое многообразие рационально. Следовательно, из предложения 2 следует, что любое аффинное орисферическое многообразие без обратимых функций отличных от констант является AMDS.

Определение 14. *[7, Definition 4.2.3.1] Пусть X — AMDS и $\pi\colon \overline{X} \to X$ — реализация Кокса многообразия X. Пусть G и G' — алгебраические группы, и задано действие $\mu\colon G \times X \to X$. Мы будем говорить, что конечный эпиморфизм $\varepsilon\colon G' \to G$ и действие $\mu'\colon G' \times \overline{X} \to \overline{X}$ поднимают действие группы G на реализацию Кокса, если выполнены следующие условия:*

1) действия G' и $N(X)$ на $\overline{X}$ перестановочны,

2) для любых $g' \in G'$ и $\overline{x} \in \overline{X}$ выполнено равенство $\pi(g' \cdot \overline{x}) = \varepsilon(g') \cdot \pi(\overline{x})$.

Мы также будем говорить, что пара (ε, μ') поднимает действие μ.

Нам также понадобится следующее утверждение, которое является частным случаем [7, Theorem 4.2.3.2].

Утверждение 3. *Пусть* X *— AMDS и* $\pi\colon \overline{X} \to X$ *— реализация Кокса* X*. Пусть связная аффинная алгебраическая группа* G *действует на* X*. Тогда*

1) Существует связная аффинная алгебраическая группа G'*, конечный эпиморфизм* $\varepsilon\colon G' \to G$ *и действие* $\mu'\colon G' \times \overline{X} \to \overline{X}$*, которые поднимают действие группы* G *на реализацию Кокса.*

2) Для данного конечного эпиморфизма $\varepsilon\colon G' \to G$ *и двух действий* G'*-действий* $\circ$ *и* $*$ *на* $\overline{X}$*, которые поднимают действие* G*, существует гомоморфизм* $\eta\colon G' \to N(X)$*, такой что* $g' * \overline{x} = \eta(g')(g' \circ \overline{x})$ *для всех* $g' \in G'$ *и* $\overline{x} \in \overline{X}$*.*

3) Если G *— односвязная полупростая группа, то существует поднятие* (id_G, μ') *действия группы* G *на реализацию Кокса.*

4) Если группа G *— тор, то существует поднятие* (ε, μ') *действия группы* G *на реализацию Кокса, при котором* $\varepsilon\colon G \to G$*,* $g \mapsto g^b$ *для некоторого* $b \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$*. Если при этом группа классов дивизоров многообразия* X *свободная, то в качестве* b *можно взять* 1*.*

Глава 2

Гибкость аффинных орисферических многообразий полупростых групп

В этой главе мы докажем следующую теорему.

Теорема 4. *Аффинное орисферическое многообразие полупростой группы гибкое.*

Результаты этой главы основаны на статье [19].

План доказательства следующий. Пусть G — полупростая группа, и X — аффинное орисферическое многообразие группы G. Согласно теореме 2 достаточно доказать, что группа $\mathrm{SAut}(X)$ действует транзитивно на множестве гладких точек. Множество гладких точек разбивается в объединение G-орбит. Так как полупростая группа порождается своими одномерными корневыми подгруппами, которые унипотентны, то все автоморфизмы многообразия X, соответствующие действию элементов группы G, лежат в группе $\mathrm{SAut}(X)$. Отсюда следует, что точки многообразия X, лежащие в одной G-орбите, лежат в одной $\mathrm{SAut}(X)$-орбите. Поэтому достаточно доказать, что у каждой G-орбиты, состоящей из гладких точек, есть точка, которую можно перевести с помощью автоморфизма из $\mathrm{SAut}(X)$ в точку из открытой G-орбиты. Для этого мы покажем, что для каждой неоткрытой G-орбиты, состоящей из гладких точек, есть автоморфизм из $\mathrm{SAut}(X)$, который переводит некоторую точку из этой орбиты, в точку, принадлежащую орбите большей размерности.

Для этой цели мы ищем локально нильпотентное дифференцирование, ядро которого содержит функции, лежащие в грани конуса, соответствующей рассматриваемой орбите. $\mathbb{G}_a$-действие, соответствующее такому локально нильпотентному дифференцированию, переводит точку из рассматриваемой орбиты в точку орбиты большей размерности (следствие 17). Сначала существование такого локально нильпотентного дифференцирования доказывается для некоторой подалгебры в $\mathbb{K}[X]$ (теорема 5), а уже потом показывается, что это дифференцирование можно продолжить на всю алгебру $\mathbb{K}[X]$ (теорема 6) с сохранением свойства локальной нильпотентности (лемма 14).

2.1 Полугруппа, порожденная первым уровнем

В этом параграфе мы построим некоторую вспомогательную конструкцию, а именно для каждой орбиты аффинного орисферического многообразия мы построим конечно порожденную подалгебру (неоднозначно заданную) в алгебре регулярных функций на аффинном орисферическом многообразии и рассмотрим соответствующее этой подалгебре многообразие. В последующих разделах мы докажем существование локально нильпотентного дифференцирования, автоморфизм которого переводит точку одной гладкой орбиты в точку другой. Сначала мы построим это локально нильпотентное дифференцирование на алгебре регулярных функций построенного многообразия, а потом докажем, что это дифференцирование продолжается на алгебру регулярных функций исходного многообразия, и обладает нужными нам свойствами. Зафиксируем некоторые обозначения, которых будем придерживаться до конца этой главы.

Пусть G — полупростая группа и B — борелевская подгруппа в ней. Обозначим через $\mathfrak{X}(B)$ решетку характеров группы B, а через $\mathfrak{X}^+(B)$ полугруппу доминантных весов. Зафиксируем некоторую полугруппу с нулем $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{X}^+(B)$. Обозначим через $X_{\mathfrak{F}}$ соответствующие ей аффинное орисферическое многообразие группы G, а через σ — конус $\mathbb{Q}^+\mathfrak{F}$.

Зафиксируем также собственную грань F конуса σ и обозначим через O_F соответствующую ей орбиту в $X_{\mathfrak{F}}$. Через I_F будем обозначать идеал нулей замыкания $\overline{O}_F$ в алгебре $S_{\mathfrak{F}}$, т.е. идеал $S_{\mathfrak{F}\setminus(F\cap\mathfrak{F})}$.

Алгебра $S_{\mathfrak{F}}$ имеет $\mathfrak{F}$-градуировку, и мы будем говорить об однородных функциях в смысле этой градуировки.

Далее, всегда говоря о гиперплоскостях, будем иметь ввиду гиперплоскости в пространстве $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathfrak{F} = \mathbb{Q}\mathfrak{F}$.

Зафиксируем в $\mathfrak{F}$ некоторую конечную систему порождающих.

Лемма 5. *Существует аффинная гиперплоскость P, удовлетворяющая следующим условиям.*

(1) P не пересекается с аффинной оболочкой грани F.

(2) P является аффинной оболочкой множества $\mathfrak{F}\cap P$.

(3) Все порождающие полугруппы $\mathfrak{F}$, принадлежащие грани F, лежат в одном открытом полупространстве относительно P, а все остальные — в дополнении к нему.

Доказательство. Доказательство будем вести индукцией по размерности аффинной оболочки множества $\mathfrak{F}\cap P$. А именно для любого i меньшего чем $\dim\mathbb{Q}\mathfrak{F}-1$ докажем, что если существует гиперплоскость P_i, у которой размерность аффинной оболочки множества $\mathfrak{F}\cap P_i$ не меньше чем i, и которая удовлетворяет свойствам (1) и (3) из формулировки леммы, то существует гиперплоскость P_{i+1}, которая также удовлетворяет условиям (1) и (3), и у которой размерность аффинной оболочки множества $\mathfrak{F}\cap P_{i+1}$ не меньше чем $i+1$.

Докажем базу индукции. Пусть P_0 такая гиперплоскость, что P_0 содержит F и всё множество $\sigma\setminus F$ лежит в одном открытом полупространстве относительно P_0. Проведем гиперплоскости параллельные P_0 через все порождающие полугруппы $\mathfrak{F}$, не лежащие в F, которых конечное число. Среди них будет ближайшая к F, то есть такая, что все порождающие $\mathfrak{F}$, не лежащие в F, лежат в одном замкнутом полупространстве относительно нее, а грань F лежит в другом открытом полупространстве. Обозначим эту гиперплоскость как P_1. Гиперплоскость P_1 удовлетворяет условиям (1) и (3), а размерность аффинной оболочки множества $\mathfrak{F} \cap P_1$ по крайней мере 1.

Докажем шаг индукции. Пусть C — аффинная оболочка множества $\mathfrak{F} \cap P_i$. Если C совпадает с P_i, то в качестве P_{i+1} можно взять P_i. В противном случае, дополним C до некоторого аффинного подпространства $C' \subseteq P_i$, имеющего в P_i коразмерность 1. Отметим, что C' параллельно аффинной оболочке грани F.

Пусть N — двумерное векторное пространство векторов, перпендикулярных к C'. Рассмотрим проекцию на N вдоль C'. Обозначим через $\widetilde{F}$ образ грани F (это будет одна точка, так как F параллельно C'), через $\widetilde{C}'$ образ C', а через $\widetilde{\Lambda}_1, \ldots, \widetilde{\Lambda}_d$ образы порождающих полугруппы $\mathfrak{F}$, не лежащих ни в грани F, ни в пространстве C'. Через $\widetilde{P}_i$ обозначим образ гиперплоскости P_i. Точки $\widetilde{\Lambda}_1, \ldots, \widetilde{\Lambda}_d$ лежат в одной полуплоскости в N относительно $\widetilde{P}_i$, а точка $\widetilde{F}$ в другой (см. рисунок 1). Рассмотрим в N конус

$$\widetilde{\sigma} = \widetilde{C}' + \{\lambda_1 \overrightarrow{\widetilde{C}'\widetilde{\Lambda}_1} + \cdots + \lambda_d \overrightarrow{\widetilde{C}'\widetilde{\Lambda}_d} | \lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{Q}^+\}.$$

Он целиком лежит в одной полуплоскости относительно $\widetilde{P}_i$. Не все точки $\widetilde{\Lambda}_i$ $(i = 1, \ldots d)$ лежат на прямой, проходящей через $\widetilde{F}$ и $\widetilde{C}'$, поскольку конус σ имеет полную размерность в $\mathbb{Q}\mathfrak{F}$. Поэтому среди ребер конуса $\widetilde{\sigma}$ найдется такое, что прямая, содержащее это ребро, не проходит через точку $\widetilde{F}$. Обозначим эту прямую $\widetilde{P}_{i+1}$.

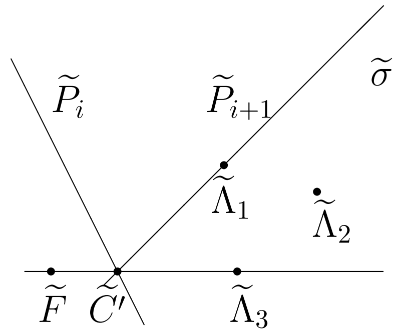

Рисунок 1

Прямая $\widetilde{P}_{i+1}$ обладает следующими свойствами. Во-первых, точка $\widetilde{F}$ лежит в одной открытой полуплоскости относительно $\widetilde{P}_{i+1}$, а точки $\widetilde{\Lambda}_1 \ldots, \widetilde{\Lambda}_d$ лежат в дополнении к ней. Во-вторых, эта прямая содержит точку $\widetilde{C}'$ и какую-то из точек $\widetilde{\Lambda}_1 \ldots, \widetilde{\Lambda}_s$. Обозначим через P_{i+1} прообраз прямой $\widetilde{P}_{i+1}$ при проекции на плоскость N параллельно C'. Гиперплоскость P_{i+1} разбивает пространство $\mathbb{Q}\mathfrak{F}$ на два полупространства, в одном из которых находятся элементы $\mathfrak{F} \cap F$, а в другом — все остальные элементы полугруппы $\mathfrak{F}$. Также гиперплоскость P_{i+1} параллельна F, так как содержит C' и не содержит F. Поэтому гиперплоскость P_{i+1} удовлетворяет условиям (1) и (3). Но размерность аффинного пространства, порожденного точками $P_{i+1} \cap \mathfrak{F}$ больше размерности C, которая в свою очередь не меньше чем i. Значит гиперплоскость P_{i+1} искомая, и мы доказали шаг индукции.

□

Определение 15. *Гиперплоскость P, удовлетворяющую условиям предыдущей леммы, будем называть* <u>*первым уровнем (относительно грани F)*</u>*. Про функции из алгебры $S_{\mathfrak{F}}$ мы будем говорить, что они лежат в* <u>*первом уровне,*</u> *если они принадлежат пространству $\bigoplus\limits_{\Lambda \in \mathfrak{F} \cap P} S_\Lambda$.*

Обозначим через $\mathfrak{F}'$ полугруппу, порожденную элементами из $\mathfrak{F} \cap F$ и $\mathfrak{F} \cap P$. Этого обозначения мы будем придерживаться до конца текста. В силу выбора P, пространство $\mathbb{Q}\mathfrak{F}'$ совпадает с $\mathbb{Q}\mathfrak{F}$.

Определение 16. *Полугруппу $\mathfrak{F}'$ будем называть* <u>*полугруппой, порожденной первым уровнем*</u>*.*

Пример 1. *Пусть для некоторого многообразия $X_{\mathfrak{F}}$ полугруппа $\mathfrak{F}$ порождена весами Λ_1, $2\Lambda_2$ и $\Lambda_1+\Lambda_2$, где Λ_1 и Λ_2 некоторые линейно независимые веса из $\mathfrak{X}^+(B)$. На рисунке 2 изображен конус σ. Жирными точками обозначены элементы из $\mathfrak{X}^+(B)$, которые принадлежат полугруппе $\mathfrak{F}$, а пустыми — которые не принадлежат $\mathfrak{F}$.*

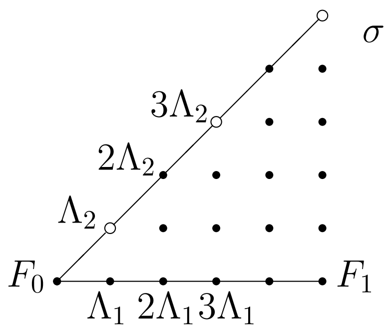

Рисунок 2

Пусть F_1 — грань конуса σ, которая является его нижней стороной. Идеал I_{F_1} равен сумме пространств S_Λ, где веса Λ соответствуют жирным точкам, лежащим выше грани F_1. В качестве первого уровня можно выбрать прямую P_1, изображенную на рисунке 3:

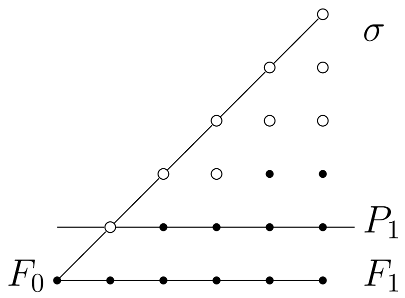

Рисунок 3

Здесь уже жирными точками отмечены те веса, что принадлежат полугруппе $\mathfrak{F}'$.

Если же рассмотреть грань F_0, которая является вершиной конуса σ, то для нее пространство первого уровня P_0 можно выбрать следующим образом (жирными точками опять обозначены элементы полугруппы, порожденной первым уровнем):

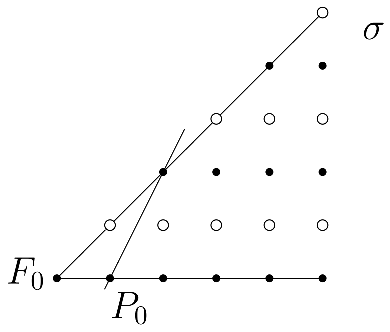

Рисунок 4

В силу определения полугруппы $\mathfrak{F}'$ в ней можно выбрать порождающие $\Lambda_1, \ldots, \ldots \Lambda_k$ так, чтобы только $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_s$ лежали в грани F $(s \leq k)$, а остальные $\Lambda_{s+1}, \ldots, \Lambda_k$ лежали в первом уровне.

Пусть $\vec{n}$ — целочисленный вектор нормали к плоскости первого уровня. Все скалярные произведения $(\vec{n}, \Lambda_i)$ равны нулю при $i = 1, \ldots, s$ и равны некоторому положительному числу p при $i = s+1, \ldots, k$. Так как $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k$ порождают полугруппу $\mathfrak{F}'$, то для любого другого $\Lambda \in \mathfrak{F}'$ скалярное произведение $(\vec{n}, \Lambda)$ равно qp, где q целое неотрицательное число.

Положим

$$A_i \doteqdot \{\Lambda \in \mathfrak{F}' \mid (\vec{n}, \Lambda) = ip\}.$$

Тогда

$$\mathfrak{F}' = \bigcup_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}} A_i,$$

причем $A_i \cap A_j = \emptyset$, при $i \neq j$.

Определение 17. *Подмножество A_i в полугруппе $\mathfrak{F}'$ будем называть <u>i-м уровнем</u>.*

Так в предыдущих двух примерах множества A_0, A_1, A_2 можно изобразить следующим образом:

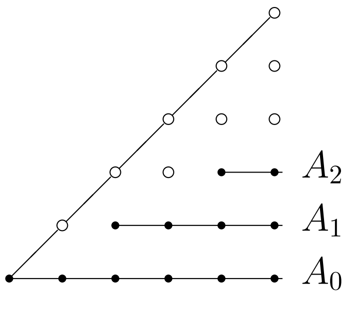

Рисунок 5

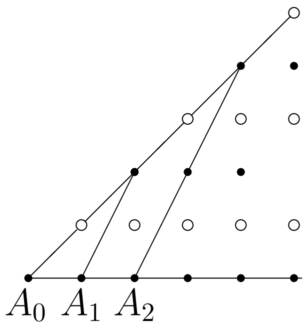

Рисунок 6

Рисунок 5 соответствует случаю, когда в качестве грани F была взята нижняя грань конуса σ, а рисунок 6 соответствует случаю, когда в качестве грани F была взята вершина σ.

Заметим, что первый уровень определен неоднозначно. Например, если в качестве полугруппы $\mathfrak{F}$ взять полугруппу порожденную весами $3\Lambda_1, 3\Lambda_2, \Lambda_1+\Lambda_2$, то для грани F_0, являющейся вершиной конуса, в качестве пространства первого уровня можно выбрать P и P' следующим образом:

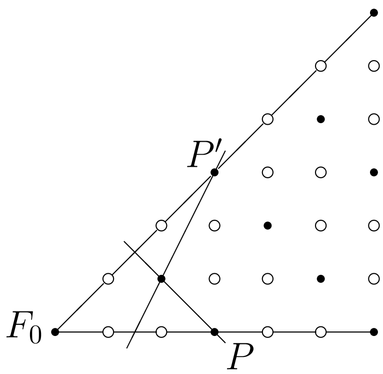

Рисунок 7

Зафиксируем первый уровень для грани F и, соответственно, полугруппу $\mathfrak{F}'$. Пусть $X_{\mathfrak{F}'}$ — аффинное орисферическое многообразие группы G, соответствующие полугруппе $\mathfrak{F}'$.

Далее мы докажем несколько лемм о свойствах многообразия $X_{\mathfrak{F}'}$.

Лемма 6. *Алгебра* $S_{\mathfrak{F}} = \mathbb{K}[X_{\mathfrak{F}}]$ *является алгебраическим расширением алгебры* $S_{\mathfrak{F}'} = \mathbb{K}[X_{\mathfrak{F}'}]$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный элемент M полугруппы $\mathfrak{F}$. Обозначим через σ' конус $\mathbb{Q}^+\mathfrak{F}'$.

Так как $\mathbb{Q}\mathfrak{F}' = \mathbb{Q}\mathfrak{F}$, то порождающие полугруппы $\mathfrak{F}'$ образуют полную систему векторов в $\mathbb{Q}\mathfrak{F}$ над $\mathbb{Q}$. Поэтому вектор M представляется как линейная комбинация порождающих полугруппы $\mathfrak{F}'$. Эта линейная комбинация есть сумма двух линейных комбинаций, у одной из которых все коэффициенты положительные, а у другой — отрицательные. Вектор, получившийся из первой линейной комбинации, обозначим через T_1 (он будет принадлежат конусу σ'), а вектор, противоположный вектору, получившемуся из второй линейной комбинации, обозначим через T_2. Он также будет принадлежать σ'. Таким образом

$$M = T_1 - T_2.$$

Найдется натуральное число c, для которого $cT_1, cT_2 \in \mathfrak{F}'$. Тогда

$$cM + cT_2 = cT_1.$$

Значит, для произвольной функции $g \in S_M$ найдутся такие функции $f_1 \in S_{cT_1}$ и $f_2 \in S_{cT_2}$, что

$$g^c f_2 = f_1.$$

Следовательно, все однородные элементы алгебры $S_{\mathfrak{F}}$ алгебраические над $S_{\mathfrak{F}'}$. Отсюда вытекает, что алгебра $S_{\mathfrak{F}}$ алгебраическое расширение алгебры $S_{\mathfrak{F}'}$.

$\square$

Множество F является гранью конуса $\sigma' = \mathbb{Q}^+\mathfrak{F}'$. Обозначим через O'_F орбиту в $X_{\mathfrak{F}'}$, соответствующую грани F. Заметим, что алгебры $\mathbb{K}[\overline{O'_F}]$ и $\mathbb{K}[\overline{O}_F]$ совпадают как подалгебры в алгебре S и являются алгеброй $S_{\mathfrak{F}\cap F}$, которую будем коротко обозначать S_F.

Выберем некоторую точку $a \in O_F$. Тогда обозначим через m_a максимальный идеал, соответствующий точке a в алгебре S_F.

Идеал $m_a \oplus I_F$ (напомним, что $I_F = S_{\mathfrak{F}\setminus(F\cap\mathfrak{F})}$) будет максимальным идеалом, соответствующим точке a в алгебре $\mathbb{K}[X_{\mathfrak{F}}]$. Тогда, как известно, размерность касательного пространства к многообразию $X_{\mathfrak{F}}$ в точке a будет равна:

$$\dim T_a X_{\mathfrak{F}} = \dim \left((m_a \oplus I_F)/(m_a \oplus I_F)^2\right)^* = \dim (m_a \oplus I_F)/(m_a \oplus I_F)^2.$$

Лемма 7. *Векторное пространство* $(m_a \oplus I_F)/(m_a \oplus I_F)^2$ *изоморфно прямой сумме:*

$$m_a/m_a^2 \oplus I_F/(m_a I_F + I_F^2).$$

Пространство $m_a I_F + I_F^2$ это векторное пространство, порожденное элементами вида $pg + q$, где $p \in m_a$, $g \in I_F$ и $q \in I_F^2$.

Доказательство. Следует из того, что $m_a^2 \subseteq m_a$, $m_a I_F + I_F^2 \subseteq I_F$ и $m_a \cap I_F = \{0\}$. □

Аналогично, если положить $I'_F = S_{\mathfrak{F}'} \setminus (F \cap \mathfrak{F}')$, то $m_a \oplus I'_F$ будет максимальным идеалом в $\mathbb{K}[X_{\mathfrak{F}'}]$, соответствующим некоторой точке орбиты O'_F, и векторное пространство $(m_a \oplus I'_F)/(m_a \oplus I'_F)^2$ будет изоморфно прямой сумме:

$$m_a/m_a^2 \oplus I'_F/(m_a I'_F + I'^2_F).$$

Пространства S_Λ задают $\mathfrak{F}$ -градуировку на алгебре $S_{\mathfrak{F}}$. Говоря об однородных функциях и идеалах из алгебры $S_{\mathfrak{F}}$, будем иметь ввиду эту $\mathfrak{F}$ -градуировку.

Лемма 8. *Пространство* I_F^2 *не содержит функций из первого уровня. Пространство* I'^2_F *не содержит функций из первого уровня и совпадает с пространством:*

$$\bigoplus_{\Lambda \in \mathfrak{F}' \setminus (P \cup F)} S_\Lambda.$$

Доказательство. Покажем, что если функция $f \in I_F^2$ принадлежит некоторому S_Λ, то все пространство S_Λ содержится в I_F^2, а вес Λ представляется в виде суммы таких весов M и N, что пространства S_M и S_N содержатся в I_F. Действительно, если

$$f = \sum_i g_i h_i,$$

где g_i, h_i — однородные функции из идеала I_F и $g_i \in S_{M_i}, h_i \in S_{N_i}$, то $\Lambda = M_i + N_i$ для некоторого i. Так как $S_{M_i}, S_{N_i} \subseteq I_F$ и $S_{M_i}S_{N_i} = S_\Lambda$ (обоснование этих свойств можно найти в [4]) , то получаем, что $S_\Lambda \subseteq I_F^2$.

В то же время I_F^2 порождается как векторное пространство элементами вида gh, где $g \in S_M, h \in S_N$ и $S_M, S_N \subseteq I_F$. Отсюда следует, что идеал I_F^2 однородный.

Проведем через грань F плоскость параллельную P и обозначим через $\vec{n}$ вектор нормали к этой плоскости, направленный в то полупространство, где лежит конус σ. Для любого $\Lambda \in \mathfrak{F}$ пространство S_Λ содержится в I_F тогда и только тогда, когда $(\Lambda, \vec{n}) > 0$. Те веса, что лежат в первом уровне, имеют минимальное скалярное произведение, среди весов из $\mathfrak{F} \setminus F$. Поэтому их нельзя представить в виде суммы двух других весов, имеющих положительное скалярное произведение с вектором $\vec{n}$. Поэтому пространство I_F^2 не содержит функций из первого уровня.

Проводя аналогичные рассуждения, получим, что идеал $I_F'^2$ однородный и не содержит функций из первого уровня.

Для веса $\Lambda \in \mathfrak{F}'$, не лежащего ни в P, ни в F, напротив, скалярное произведение больше минимального, и поэтому Λ раскладываются в сумму двух других весов из $\mathfrak{F}'$, имеющих положительное скалярное произведение с вектором $\vec{n}$. Поэтому для такого веса Λ, пространство S_Λ содержится в $I_F'^2$. Отсюда и следует утверждение леммы. □

Следствие 3. *В пространстве $I_{\mathfrak{F}'}$ в каждом смежном классе по $m_a I_F' + I_F'^2$ можно выбрать представитель, лежащий в первом уровне.*

Лемма 9. *Пусть функции $f_1, \ldots, f_t$, лежащие в первом уровне, таковы, что соответствующие им смежные классы по пространству $m_a I_F' + I_F'^2$ линейно независимы над полем $\mathbb{K}$. Тогда соответствующие им смежные классы по пространству $m_a I_F + I_F^2$ также линейно независимы.*

Доказательство. Предположим, что это не так. Тогда для некоторых $c_1, \ldots, c_t \in \mathbb{K}$ имеем:

$$c_1 f_1 + \cdots + c_t f_t \in m_a I_F + I_F^2,$$

что означает существование таких функций $p_i \in m_a$ и однородных функций $g_i \in I_F$ и $q_j \in I_F^2$, что:

$$c_1 f_1 + \dots + c_t f_t = \sum_i p_i g_i + \sum_j q_j.$$

Если функция g_i принадлежала первому уровню, то и функция $p_i g_i$ будет принадлежать первому уровню (так как плоскость P параллельна грани F). Если же функция g_i не принадлежала первому уровню, то и каждое однородное слагаемое функции $p_i g_i$ не будет принадлежать. В прямой сумме

$$\bigoplus_{\Lambda \in \mathfrak{F}} S_\Lambda$$

можно рассмотреть отображение проекции на сумму слагаемых, лежащих в первом уровне, параллельное сумме слагаемых, не лежащих в первом уровне.

Применяя это отображение к левой и правой части предыдущего равенства получаем:

$$c_1 f_1 + \dots + c_t f_t = \sum_{i \in \tau} p_i g_i,$$

где множество τ состоит из таких индексов i, что g_i лежат в первом уровне.

Но правая часть последнего равенства принадлежит $m_a I'_F$. Противоречие.

□

Из предыдущий леммы следует, что

$$\dim\, I_F/(m_a I_F + I_F^2) \geq \dim\, I'_F/(m_a I'_F + I'^2_F),$$

откуда следует

$$\dim\, (m_a \oplus I_F)/(m_a \oplus I_F)^2 \geq \dim\, (m_a \oplus I'_F)/(m_a \oplus I'_F)^2.$$

Если орбита O_F состоит из гладких точек, то

$$\dim\, (m_a \oplus I_F)/(m_a \oplus I_F)^2 = \dim\, X_{\mathfrak{F}}.$$

Однако, так как $\dim X_{\mathfrak{F}'} = \dim X_{\mathfrak{F}}$ (в силу того, что расширение алгебр $S_{\mathfrak{F}'} \subseteq S_{\mathfrak{F}}$ является алгебраическим по лемме 6) и

$$\dim\,(m_a \oplus I'_F)/(m_a \oplus I'_F)^2 \geq \dim\, X_{\mathfrak{F}'},$$

то получаем равенство:

$$\dim\, X_{\mathfrak{F}'} = \dim\,(m_a \oplus I'_F)/(m_a \oplus I'_F)^2.$$

Замечание. *Отсюда, в частности следует, что если орбита O_F гладкая в $X_{\mathfrak{F}}$, то орбита O'_F гладкая в $X_{\mathfrak{F}'}$.*

Следствие 4. *Пусть орбита O_F гладкая в $X_{\mathfrak{F}}$, и функции $f_1, \ldots, f_t \in S_{\mathfrak{F}' \cap P}$ такие, что их смежные классы по пространству $m_a {I'}_F + {I'}^2_F$ образуют базис в пространстве $I'_F/(m_a I'_F + I'^2_F)$. Тогда смежные классы многочленов $f_1, \ldots, f_t$ по пространству $m_a I_F + I_F^2$ образуют базис в пространстве $I_F/(m_a I_F + I_F^2)$.*

2.2 Существование локально нильпотентного дифференцирования алгебры $\mathbb{K}[X_{\mathfrak{F}'}]$

Пусть $X_{\mathfrak{F}}$ — аффинное орисферическое многообразие связной алгебраической группы G, соответствующее подполугруппе $\mathfrak{F}$ в решетке характеров борелевской подгруппы $B \subseteq G$. Пусть σ — конус $\mathbb{Q}^+\mathfrak{F}$, и F — его собственная грань. Наконец, пусть $\mathfrak{F}'$ — полугруппа, порожденная первым уровнем, и $X_{\mathfrak{F}'}$ — соответствующие ей многообразие.

Этот параграф посвящен доказательству существования локально нильпотентного дифференцирования (обладающего некоторыми свойствами) алгебры $\mathbb{K}[X_{\mathfrak{F}'}]$, соответствующей полугруппе, порожденной первым уровнем (теорема 5 и замечание 2.2). В следующем параграфе мы докажем, что это дифференцирование можно умножить на такой элемент из ядра, что оно останется локально нильпотентным, и его можно будет продолжить на всю алгебру регулярных функций на многообразии $X_{\mathfrak{F}}$ (см. теорему 6). Эти дифференцирования будут использоваться для доказательства транзитивности действия группы $\mathrm{SAut}(X_{\mathfrak{F}})$ на многообразии $X_{\mathfrak{F}}$.

Потом мы покажем, что домножив это дифференцирование на подходящий элемент его можно продолжить на всю алгебру $\mathbb{K}[X_{\mathfrak{F}}]$ регулярных функций на многообразии $X_{\mathfrak{F}}$ (см. теорему 6).

Теорема 5. *Пусть орбита O_F состоит из гладких в $X_{\mathfrak{F}}$ точек. Тогда существует ненулевое дифференцирование ∂ на алгебре $S_{\mathfrak{F}'} = \mathbb{K}[X_{\mathfrak{F}'}]$, удовлетворяющее следующим условиям.*

(1) $\partial(S_\Lambda) = 0$, при весах Λ, принадлежащих грани F.

(2) $\partial(S_\Lambda) \subset S_F = \mathbb{K}[\overline{O'_F}] = \mathbb{K}[\overline{O}_F]$, при весах Λ, принадлежащих первому уровню.

Доказательство. Как отмечалось выше, в полугруппе $\mathfrak{F}'$ можно выбрать порождающие $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k$ так, чтобы только $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_s$ лежали в грани F $(s \leq k)$, а остальные $\Lambda_{s+1}, \ldots, \Lambda_k$ лежали в первом уровне. Обозначим через V_{Λ_i} пространство неприводимого представления группы G с весом Λ_i. Тогда многообразие $X_{\mathfrak{F}'}$ вкладывается в пространство

$$V \doteqdot \bigoplus_{i=1}^{k} V_{\Lambda_i}$$

как замыкание орбиты суммы старших векторов. Имеется сюръективный гомоморфизм ограничения $\psi\colon \mathbb{K}[V] \to \mathbb{K}[X_{\mathfrak{F}'}]$.

Совокупность координатных функций $x_1, \ldots, x_n$ на пространствах $V_{\Lambda_1}, \ldots, V_{\Lambda_s}$ будем коротко обозначать через $\mathbf{x}$, а совокупность координатных функций $y_1, \ldots, y_m$ на пространствах $V_{\Lambda_{s+1}}, \ldots, V_{\Lambda_k}$ будем обозначать через $\mathbf{y}$.

При гомоморфизме ψ пространство $V^*_{\Lambda_i}$ изоморфно отображается на пространство S_{Λ_i} для любого i. В частности, образ каждой из координатных функции x_i при гомоморфизме ψ принадлежит некоторому пространству S_{Λ_j}. Аналогичное верно и для координатных функций из $\mathbf{y}$. Поэтому любой моном от переменных $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ при гомоморфизме ψ будет элементом некоторого пространства S_Λ, где Λ принадлежит $\mathfrak{F}'$.

Пространство многочленов из $\mathbb{K}[V]$, у которых образ каждого монома при гомоморфизме ψ принадлежит S_Λ, обозначим через W_Λ. Тогда

$$\mathbb{K}[V] = \sum_{\Lambda \in \mathfrak{F}'} W_\Lambda, \tag{2.1}$$

причем $W_{\Lambda_1'} \cdot W_{\Lambda_2'} \subseteq W_{\Lambda_1'+\Lambda_2'}$, для любых $\Lambda_1', \Lambda_2' \in \mathfrak{F}'$.

Покажем, что в равенстве (2.1) сумма на самом деле прямая. Рассмотрим стандартное разложение пространства $\mathbb{K}[V]$ в прямую сумму одномерных подпространств, порожденных мономами:

$$\mathbb{K}[V] = \bigoplus < x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n} y_1^{b_1} \dots y_m^{b_m} >_{\mathbb{K}},$$

где a_i и b_j пробегают все неотрицательные целые числа. Образ произвольного монома при гомоморфизме ψ не равен 0, так как образы всех x_i и y_j не равны нулю, а в алгебре $\mathbb{K}[X_{\mathfrak{F}'}]$ нет делителей нуля. Поэтому каждый моном принадлежит какому-то одному пространству W_Λ. Это означает, что разложение пространства $\mathbb{K}[V]$ на пространства W_Λ получается группировкой слагаемых из стандартного разложения $\mathbb{K}[V]$ в сумму одномерных подпространств, порожденных мономами. Поэтому пространства W_Λ образуют прямую сумму и задают $\mathfrak{F}'$-градуировку на $\mathbb{K}[V]$.

Будем говорить, что пространство W_Λ лежит в i-ом уровне, если вес Λ лежит в i-ом уровне.

Отметим также, что результат дифференцирования многочлена $f \in W_\Lambda$ по некоторой переменной $x_i \in (V_{\Lambda_j})^*$ будет многочленом из пространства $W_{\Lambda-\Lambda_j}$ (пространство $W_{\Lambda-\Lambda_j}$ определим равным нулевому пространству, если $\Lambda - \Lambda_j \notin \mathfrak{F}'$). Аналогичное верно и для дифференцирований по переменным y_i.

В частности, если функция f принадлежала пространству W_Λ из j-ого уровня, то её производная по любой переменной x_i будет принадлежать некоторому пространству $W_{\Lambda'}$ также из j-ого уровня, а производная по любой переменной из $\mathbf{y}$ будет лежать в $(j-1)$-ом уровне.

Обозначим через $I(X_{\mathfrak{F}'})$ идеал нулей многообразия $X_{\mathfrak{F}'}$ в $\mathbb{K}[V]$. Он однородный относительно выбранной нами $\mathfrak{F}'$-градуировки. Выберем $g_1, \ldots, g_r$ — однородные порождающие $I(X_{\mathfrak{F}'})$. Обозначим через J матрицу Якоби

$$\frac{\partial(g_1, \ldots, g_r)}{\partial(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)},$$

к элементам которой применили гомоморфизм ψ.

Пространство дифференцирований на алгебре $\mathbb{K}[X_{\mathfrak{F}'}]$ изоморфно пространству ψ-дифференцирований на алгебре $\mathbb{K}[V]$, обращающихся в ноль на $I(X_{\mathfrak{F}'})$ (см. лемму 2). Как уже отмечалось, пространства $V^*_{\Lambda_i}$ при гомоморфизме ψ изоморфно отображаются на S_{Λ_i}. Отсюда следует, что если некоторое ψ - дифференцирование η обращается в ноль на $I(X_{\mathfrak{F}'})$, $\eta(V^*_{\Lambda_i}) = 0$, при $i = 1, \ldots, s$, и $\eta(V^*_{\Lambda_i}) \subseteq S_F$, при $i = s+1, \ldots, k$, то соответствующие ему дифференцирование на алгебре $\mathbb{K}[X_{\mathfrak{F}'}]$ удовлетворяет условиям (1) и (2), указанных в формулировке теоремы.

Поэтому, для доказательства существования дифференцирования ∂ из условия теоремы, достаточно доказать существования ψ-дифференцирования η такого, что выполнено:

(1) $\eta(x_i) = 0$ при $i = 1, \ldots n$,

(2) $\alpha_j \doteqdot \eta(y_j)$ принадлежит пространству S_F при $j = 1, \ldots, m$,

(3) справедливо равенство

$$\begin{pmatrix} \psi\left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\right) & \psi\left(\frac{\partial g_1}{\partial x_2}\right) & \ldots & \psi\left(\frac{\partial g_1}{\partial x_n}\right) & \psi\left(\frac{\partial g_1}{\partial y_1}\right) & \ldots & \psi\left(\frac{\partial g_1}{\partial y_m}\right) \\ \psi\left(\frac{\partial g_2}{\partial x_1}\right) & \psi\left(\frac{\partial g_2}{\partial x_2}\right) & \ldots & \psi\left(\frac{\partial g_2}{\partial x_n}\right) & \psi\left(\frac{\partial g_2}{\partial y_1}\right) & \ldots & \psi\left(\frac{\partial g_2}{\partial y_m}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi\left(\frac{\partial g_r}{\partial x_1}\right) & \psi\left(\frac{\partial g_r}{\partial x_2}\right) & \ldots & \psi\left(\frac{\partial g_r}{\partial x_n}\right) & \psi\left(\frac{\partial g_r}{\partial y_1}\right) & \ldots & \psi\left(\frac{\partial g_r}{\partial y_m}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} = 0.$$

Последнее условие эквивалентно равенству нулю ψ-дифференцирования η на $I(X_{\mathfrak{F}'})$ (см. лемму 3).

Пусть среди многочленов $g_1, \ldots, g_r$ только первые $g_1, \ldots, g_t$ зависят только от переменных $\mathbf{x}$.

Тогда матрица J имеет вид:

$$J = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{cc} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \left[\begin{array}{c|c} J_x & \bigcirc \\ \hline \ast & J_y \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ t \\ r-t \end{array}$$

Рисунок 8

Здесь J_x обозначает матрицу Якоби $\dfrac{\partial(g_1, \ldots, g_t)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$, а J_y обозначает матрицу Якоби $\dfrac{\partial(g_{t+1}, \ldots, g_r)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)}$ (к коэффициентам обеих матриц применен гомоморфизм ψ). Символы $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$ указывают на то, что в соответствующей части матрицы столбцы отвечают дифференцированиям по некоторой координате x_i или y_j соответственно.

Достаточно доказать, что у системы строк матрицы J_y есть ненулевое решение в S_F.

Рассмотрим теперь некоторую точку $a \in O'_F$. Каждый из многочленов $g_{t+1}, \ldots, g_r$ имеет моном содержащий переменную из $\mathbf{y}$. Так как все y_i лежат в первом уровне, то этот моном, как и сам многочлен, лежит в пространстве ненулевого уровня. Как отмечалось выше, производная по любой из переменных $\mathbf{x}$ от такого многочлена лежит в том же уровне. Образы многочленов из ненулевого уровня при гомоморфизме ψ лежат в идеале I'_F (напомним, что I'_F — идеал нулей $\overline{O'_F}$). Поэтому при подстановке точки a в матрицу J в нижнем левом углу рисунка 8 будет нулевая матрица. Таким образом матрица $J(a)$ имеет вид:

$$
J(a)=\begin{array}{cc|c}
\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \\
\hline
J_x(a) & \bigcirc & t \\
\bigcirc & J_y(a) & r-t
\end{array}
$$

Рисунок 9

Коэффициенты матрицы $J(a)$ лежат в поле $\mathbb{K}$. Пусть в матрице $J(a)$ строки с номерами $i_1, \ldots, i_q$ образуют базис в системе строк $J(a)$ над полем $\mathbb{K}$. Тогда они образуют базис и над любым расширением поля $\mathbb{K}$. В частности, над полем $\mathbb{K}(X_{\mathfrak{F}'})$. По условию теоремы, орбита O_F состоит из гладких точек в $X_{\mathfrak{F}}$, а, согласно замечанию 2.1, и орбита O'_F состоит из гладких точек в $X_{\mathfrak{F}'}$. Следовательно, точка a гладкая, поэтому ранг матрицы $J(a)$ над полем $\mathbb{K}(X_{\mathfrak{F}'})$ равен рангу матрицы J над полем $\mathbb{K}(X_{\mathfrak{F}'})$. Следовательно, строки с номерами $i_1, \ldots, i_q$ будут базисными в системе строк матрицы J над полем $\mathbb{K}(X_{\mathfrak{F}'})$. Пусть среди индексов $i_1, \ldots, i_q$ только первые d не превосходят число t.

Лемма 10. *Строки с номерами $i_{d+1}, \ldots, i_q$ образуют базис в системе строк матрицы J_y над полем $\mathbb{K}(X_{\mathfrak{F}'})$.*

Доказательство. Линейная независимость строк $i_{d+1}, \ldots, i_q$ следует из их линейной независимости в матрице $J_y(a)$ над полем $\mathbb{K}(X_{\mathfrak{F}'})$. Полнота следует из полноты строк $i_1, \ldots, i_q$ в матрице J и того, что матрица J имеет блок нулей в правом верхнем углу. □

Для произвольного j от $d+1$ до q, многочлен g_{i_j} принадлежит пространству W_Λ, где вес Λ принадлежит первому уровню, или, что эквивалентно, g_{i_j} линеен по переменным $\mathbf{y}$. В противном случае производная от многочлена g_{i_j} по произвольной переменной из $\mathbf{y}$ лежала бы в ненулевом уровне, а значит, её образ при гомоморфизме ψ принадлежал бы идеалу I'_F. Все функции из I'_F равны нулю на $\overline{O'_F}$ и, в частности, равны нулю в точке a. А значит, i_j-ая строчка была бы нулевой в $J(a)$ и не могла бы быть базисной.

Отсюда следует, что производные от многочлена g_{i_j} по произвольной переменной из $\mathbf{y}$ лежат в W_M, где либо $W_M = \{0\}$, либо $M \in F$. Значит, $\psi\left(\frac{\partial g_{i_j}}{\partial y_l}\right) \in S_F$.

Таким образом, в матрице J_y можно выбрать в качестве базисных такие строки, у которых все элементы принадлежат алгебре S_F. Некоторый столбец будет решением однородной системы с матрицей J_y тогда и только тогда, когда он будет решением системы, составленной из базисных строк матрицы J_y. Если коэффициенты последней лежат в S_F, то существование решения не зависит от того, рассматриваем ли мы эту систему над S_F или над произвольным полем, содержащим S_F, а зависит только от ранга этой системы. Поэтому у системы строк J_y будет ненулевое решение в S_F тогда и только тогда, когда у нее будет ненулевое решение в $\mathbb{K}(X_{\mathfrak{F}'})$. Последнее равносильно тому, что ранг матрицы J_y над полем $\mathbb{K}(X_{\mathfrak{F}'})$ меньше m (напомним, что m равно количеству переменных y_i).

Предположим, что ранг J_y больше или равен m. Из леммы 10 следует, что тогда и ранг $J_y(a)$ больше или равен m. Имеем:

$$\dim X_{\mathfrak{F}'} = n + m - rank\ J = n + m - rank\ J(a) = \tag{2.2}$$

$$= n + m - rank\ J_x(a) - rank\ J_y(a) \leq$$

$$\leq n - rank\ J_x(a).$$

Лемма 11. *Число $n - rank\ J_x(a)$ совпадает с размерностью $\overline{O'_F}$.*

Доказательство. Идеал нулей многообразия $\overline{O'_F}$ порождается многочленами $g_1, \ldots, g_r$ и $y_1, \ldots, y_m$. Причем у многочленов $g_{t+1}, \ldots, g_r$ все мономы зависят от некоторых y_j-ых. Поэтому в качестве порождающих достаточно взять многочлены $g_1, \ldots, g_t, y_1, \ldots, y_m$. Пусть J' матрица Якоби $\dfrac{\partial(g_1, \ldots, g_t, y_1, \ldots, y_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)}$, к коэффициентам которой применили гомоморфизм ограничения на многообразие $\overline{O'_F}$. Тогда матрицы J' и $J'(a)$ имеют вид:

$$J' = \begin{array}{c|c|c|l} \multicolumn{1}{c}{\frac{\partial}{\partial x}} & \multicolumn{1}{c}{\frac{\partial}{\partial y}} & \\ \hline J_x & \bigcirc & t \\ \hline \bigcirc & E_m & m \\ \hline \end{array}$$

Рисунок 10

$$J'(a) = \begin{array}{c|c|c|l} \multicolumn{1}{c}{\frac{\partial}{\partial x}} & \multicolumn{1}{c}{\frac{\partial}{\partial y}} & \\ \hline J_x(a) & \bigcirc & t \\ \hline \bigcirc & E_m & m \\ \hline \end{array}$$

Рисунок 11

Здесь E_m обозначает единичную матрицу порядка m.

Так как a гладкая в $\overline{O'_F}$, то

$$\dim \overline{O'_F} = \dim T_a\overline{O'_F} = n + m - rank\ J'(a) = n - rank\ J_x(a).$$

$\square$

Из неравенства (2.2) и леммы 6 получаем, что

$$\dim X_{\mathfrak{F}} = \dim X_{\mathfrak{F}'} \leq \dim \overline{O'_F} = \dim \overline{O}_F.$$

Но $X_{\mathfrak{F}}$ и $\overline{O}_F$ неприводимы, и $\overline{O}_F \subseteq X_{\mathfrak{F}}$, а значит, в этом случае $X_{\mathfrak{F}} = \overline{O}_F$, что противоречит тому, что грань F собственная.

Следовательно, ранг J_y над полем $\mathbb{K}(X_{\mathfrak{F}'})$ меньше m, и у системы J_y будет ненулевое решение в S_F.

$\square$

Замечание. *Так как построенное дифференцирование локально нильпотентно на порождающих элементах алгебры $\mathbb{K}[X_{\mathfrak{F}'}]$, оно будет локально нильпотентным на всей алгебре $\mathbb{K}[X_{\mathfrak{F}'}]$.*

2.3 Продолжение дифференцирования на алгебру $\mathbb{K}[X]$

В этом пункте мы докажем, что если для гладкой орбиты аффинного орисферического многообразия существует локально нильпотентное дифференцирование, обладающие свойствами (1) и (2) теоремы 5 на алгебре, соответствующей первому уровню, то домножив это дифференцирование на подходящий элемент алгебры его можно продолжить на всю алгебру регулярных функций многообразия, сохраняя свойство локальной нильпотентности и свойства (1) и (2).

Пусть $X_{\mathfrak{F}}$ — аффинное орисферическое многообразие связной алгебраической группы G, соответствующие подполугруппе $\mathfrak{F}$ в решетке характеров борелевской подгруппы $B \subseteq G$. Пусть σ — конус $\mathbb{Q}^+\mathfrak{F}$ и F — его собственная грань, причем соответствующая ей орбита O_F состоит из гладких точек. Пусть P — фиксированное пространство первого уровня в $\mathbb{Q}\mathfrak{F}$, $\mathfrak{F}'$ — полугруппа, порожденная первым уровнем, и $X_{\mathfrak{F}'}$ — соответствующие ей многообразие.

Теорема 6. *Предположим, что дифференцирование ∂ алгебры $S_{\mathfrak{F}'}$ удовлетворяет условиям:*

(1) $\partial(S_\Lambda) = 0$, при весах Λ, принадлежащих грани F.

(2) $\partial(S_\Lambda) \subseteq S_F$, при весах Λ, принадлежащих первому уровню, т.е $P \cap \mathfrak{F}$.

Тогда существует такой элемент $h \in S_F$, что дифференцирование $h\partial$ продолжается до дифференцирования алгебры $S_{\mathfrak{F}}$.

Доказательство. Для доказательства мы воспользуемся следующей леммой. И хотя она хорошо известна (например, она сформулирована в [3] в качестве задачи), для удобства читателя мы приведем ее доказательство.

Лемма 12. *Пусть L — некоторое поле, содержащее $\mathbb{K}$ (и рассматриваемое как алгебра над $\mathbb{K}$). Пусть $B \subseteq L$ — подалгебра, кончено порожденная над некоторой своей подалгеброй A. Если B является алгебраическим расширением алгебры A, то всякое дифференцирование $\partial\colon A \to L$ однозначно продолжается до дифференцирования $B \to L$.*

Доказательство. Доказательство будем вести индукцией по минимальному количеству порождающих алгебры B над алгеброй A.

Докажем базу индукции. Пусть $B = A[u]$, где u — некоторый элемент B. Рассмотрим минимальный многочлен u над A. Обозначим его f. Тогда произвольное дифференцирование ∂ на B должно удовлетворять соотношению $\partial(f(u)) = 0$. Это равенство эквивалентно равенству

$$\partial(u)f'(u) + f^{\partial}(u) = 0, \tag{2.3}$$

где $f'(u)$ обозначает многочлен, полученный из $f(u)$ обычным дифференцированием по u, а $f^{\partial}(u)$ многочлен, полученный из $f(u)$ применением ко всем коэффициентам дифференцирования ∂. Так как f минимальный многочлен для u, и поле $\mathbb{K}$ обладает нулевой характеристикой, то $f'(u)$ не равно нулю, и значение $\partial(u)$ однозначно определяется из равенства 2.3:

$$\partial(u) = -\frac{f^{\partial}(u)}{f'(u)}. \tag{2.4}$$

Это доказывает однозначность продолжения.

Докажем существование продолжения дифференцирования. Положим значение дифференцирования ∂ на u как в равенстве 2.4, а на произвольном элементе $g(u)$ алгебры B положим $\partial(g(u)) = g^{\partial}(u)+g'(u)\partial(u)$, где элементы $g^{\partial}(u)$ и $g'(u)$ определяются аналогично тому, как определялись элементы $f^{\partial}(u)$ и $f'(u)$. Проверим корректность такого определения. Пусть g_1 и g_2 два различных многочлена и $g_1(u) = g_2(u)$. Но тогда $g_1 - g_2$ аннулирующий многочлен для u и $\partial(g_1 - g_2)(u) = 0$.

Линейность продолженного дифференцирования ∂ следует из линейности отображений $g \mapsto g^{\partial}$ и $g \mapsto g'$.

Докажем, что продолженное отображение удовлетворяет правилу Лейбница. Отображение $g \mapsto g'$ удовлетворяет правилу Лейбница. Легко убедиться, что и отображение $g \mapsto g^{\partial}$ удовлетворяет. Но тогда, если взять два произвольных элемента $g_1(u)$ и $g_2(u)$ алгебры B, то тогда получим:

$$\partial(g_1 g_2(u)) = (g_1 g_2)^{\partial} + (g_1 g_2)'(u)\partial(u) =$$

$$= (g_1)^{\partial} g_2(u) + g_2(g_1)^{\partial}(u) + (g_1)' g_2(u)\partial(u) + g_1(g_2)'\partial(u) =$$

$$= (g_1^{\partial}(u) + g_1'(u)\partial(u))g_2(u) + (g_2^{\partial}(u) + g_2'(u)\partial(u))g_1(u) =$$

$$= \partial(g_1(u))g_2(u) + \partial(g_2(u))g_1(u).$$

Докажем шаг индукции. Пусть алгебра $B = A[u_1, \ldots, u_i]$. Рассмотрим алгебру $C = A[u_1, \ldots, u_{i-1}]$. Она является кончено порожденной над A, а также является алгебраическим расширением A. По предположению индукции дифференцирование ∂ продолжается на C. Но $B = C[u_i]$, и B является конечно порожденной алгеброй над C, а также ее алгебраическим расширением. Повторяя доказательство для базы индукции, получаем, что дифференцирования ∂ продолжается на B.

Это завершает доказательство леммы 12.

$\square$

Мы применим лемму 12 взяв в качестве A алгебру $S_{\mathfrak{F}'} = \mathbb{K}[X_{\mathfrak{F}'}]$, в качестве B — алгебру $S_{\mathfrak{F}} = \mathbb{K}[X_{\mathfrak{F}}]$, а в качестве поля L — поле $\mathbb{K}(X_{\mathfrak{F}})$. Тогда существует продолжение дифференцирования ∂ на алгебру $S_{\mathfrak{F}}$, как отображение из алгебры $S_{\mathfrak{F}}$ в поле $\mathbb{K}(X_{\mathfrak{F}})$, которое будем обозначать $\tilde{\partial}$.

Нам нужно доказать, что существует такое $h \in S_F$, что дифференцирование $h\tilde{\partial}$ будет отображать алгебру $S_{\mathfrak{F}}$ в себя.

Проведем через грань F плоскость параллельную плоскости P и обозначим через $\vec{n}$ целочисленный вектор нормали к этой плоскости, направленную в то полупространство, где находится конус σ. Зафиксируем в качестве порождающих полугруппы $\mathfrak{F}$ элементы $\Lambda_0, \ldots, \Lambda_d$. Выберем некоторый Λ_0 — порождающий полугруппы $\mathfrak{F}$.

Доказательство будем вести индукцией по величине скалярного произведения $(\Lambda_0, \vec{n})$. А именно, пусть $(\Lambda_0, \vec{n}) = k$, где k некоторое натуральное число. Мы предположим, что существует $h_{k-1} \in S_F$ такое, что для всех порождающих $\Lambda_i \in \mathfrak{F}$ таких, что $(\Lambda_i, \vec{n}) \leq k$, выполнено $h_{k-1}\tilde{\partial}(S_{\Lambda_i}) \subseteq S_F$ (для простоты изложения будем вместо дифференцирования $h_{k-1}\tilde{\partial}$ писать просто $\tilde{\partial}$). Исходя из этого предположения докажем, что найдется такое $h_k \in S_F$, что $h_k\tilde{\partial}(S_{\Lambda_j}) \subseteq S_F$ для любого порождающего Λ_j, со скалярным произведением $(\Lambda_j, \vec{n}) = k$. При этом дифференцирование $h_k\tilde{\partial}$ будет удовлетворять условиям (1) и (2) из формулировки теоремы.

В качестве базы индукции можно рассмотреть случай, когда $(\Lambda_0, \vec{n}) = 0$, т.е. Λ_0 принадлежит грани F, и тогда $\partial(S_{\Lambda_0}) = 0$. Если же вес Λ_0 принадлежит первому уровню, то $\partial(S_{\Lambda_0}) \subseteq S_F \subseteq S_{\mathfrak{F}}$ по условию. Поэтому далее будем считать, что Λ_0 не принадлежит первому уровню.

Докажем шаг индукции.

Выберем функции $f_1, \ldots, f_t$ как в следствии 4.

Тогда для произвольной функции $f \in S_{\Lambda_0}$ найдутся константы $c_1, \ldots, c_t$, функции $p_i \in m_a$ и однородные функций $g_i \in I_F$ и $q_j \in I_F^2$ такие, что:

$$f = c_1 f_1 + \cdots + c_t f_t + \sum_i p_i g_i + \sum_j q_j. \tag{2.5}$$

Определим множество $R(\Lambda_0, F)$:

$$R(\Lambda_0, F) \doteqdot \{\Lambda \in \mathfrak{F} \mid \exists M_1, M_2 \in F \cap \mathfrak{F},\ \Lambda + M_1 = \Lambda_0 + M_2\}.$$

Обозначим через $S_{R(\Lambda_0,F)}$ пространство функций

$$\bigoplus_{\Lambda \in R(\Lambda_0,F)} S_\Lambda.$$

Пусть $p_i = \sum_s p_{si}$, где p_{si} — однородные функции. Тогда, если для некоторого s функция $p_{si} g_i$ лежит в пространстве $S_{R(\Lambda_0,F)}$, то и $p_i g_i$, g_i будут принадлежать пространству $S_{R(\Lambda_0,F)}$. И наоборот, если $p_i g_i$ принадлежит $S_{R(\Lambda_0,F)}$, то для любых s функции $p_{si} g_i$ и g_i будут принадлежать $S_{R(\Lambda_0,F)}$.

Спроектируем теперь равенство (2.5) на пространство $S_{R(\Lambda_0,F)}$ параллельно пространству

$$Q \doteqdot \bigoplus_{\Lambda \in \mathfrak{F} \setminus R(\Lambda_0,F)} S_\Lambda.$$

Функции $f_1, \ldots, f_t$ принадлежат первому уровню, который параллелен F. Поэтому $f_1, \ldots, f_t$ лежат в Q. Отсюда получаем:

$$f = \sum_{i \in \tau} p_i g_i + \sum_{j \in \tau'} q_j, \tag{2.6}$$

где τ и τ' такие подмножества индексов, что функции $p_i g_i$ и q_j принадлежат пространству $S_{R(\Lambda_0,F)}$ при $i \in \tau, j \in \tau'$.

Лемма 13. *Множество $R(\Lambda_0, F)$ содержит вес T, для которого $S_T \subseteq I_F^2$.*

Доказательство. Предположим противное, что множество $R(\Lambda_0, F)$ не содержит весов T, для которых $S_T \subseteq I_F^2$. Тогда, в равенстве (2.6) все q_j равны нулю.

Так как $p_i g_i$ принадлежат $S_{R(\Lambda_0,F)}$ при $i \in \tau$, то g_i принадлежат $S_{R(\Lambda_0,F)}$, и поэтому $p_i g_i$ принадлежат $m_a S_{R(\Lambda_0,F)}$. Это значит, что $f \in m_a S_{R(\Lambda_0,F)}$. Заметим, что разложение (2.6) справедливо для любой функции из любого пространства $S_{\Lambda'} \subseteq R(\Lambda_0, F)$. Отсюда следует, что $S_{R(\Lambda_0,F)} \subseteq m_a S_{R(\Lambda_0,F)}$. Покажем, что такого не может быть.

Действительно, рассмотрим полугруппу $\mathfrak{L}$, порожденную весами из $F \cap \mathfrak{F}$ и весами из множества $R(\Lambda_0, F)$. Через $X_{\mathfrak{L}}$ обозначим соответствующие ей аффинное орисферическое многообразие. Множество F будет гранью для конуса $\mathbb{Q}^+\mathfrak{L}$. Орбиту в многообразии $X_{\mathfrak{L}}$, соответствующую грани F, будем обозначать $O_{\mathfrak{L},F}$.

Идеал нулей подмногообразия $\overline{O}_{\mathfrak{L},F}$ в алгебре $\mathbb{K}[X_{\mathfrak{L}}]$ обозначим через $\tilde{I}_F$. Он порождается пространством $S_{R(\Lambda_0,F)}$. Поэтому $\tilde{I}_F = m_a \tilde{I}_F$ (так как $S_{R(\Lambda_0,F)} \subseteq m_a S_{R(\Lambda_0,F)}$).

Алгебра $\mathbb{K}[\overline{O}_{\mathfrak{L},F}] = \mathbb{K}[\overline{O}_F] = S_F$. Поэтому можно говорить, что максимальный идеал m_a является максимальным идеалом и в $\mathbb{K}[\overline{O}_{\mathfrak{L},F}]$, и задает некоторую точку $a' \in O_{\mathfrak{L},F}$. Тогда размерность касательного пространства в токе a' к многообразию $X_{\mathfrak{L}}$ будет равна

$$\dim\, T_{a'} X_{\mathfrak{L}} = \dim\, (m_{a'} \oplus \tilde{I}_F)/(m_{a'} \oplus \tilde{I}_F)^2 =$$

$$= \dim\, m_{a'}/(m_{a'})^2 + \dim\, \tilde{I}_F/(m_{a'}\tilde{I}_F + \tilde{I}_F^2) = \dim\, m_{a'}/(m_{a'})^2 = \dim\, \overline{O}_{\mathfrak{L},F}.$$

Но так как F собственная грань для конуса $\mathbb{Q}^+\mathfrak{L}$, то $\dim\, X_{\mathfrak{L}} > \dim\, \overline{O}_{\mathfrak{L},F} = \dim\, T_{a'} X_{\mathfrak{L}}$, чего, как известно, не бывает. Противоречие.

□

Рассмотрим вес T, удовлетворяющий условию леммы 13. Так как $S_T \subseteq I_F^2$, то найдутся $T_1,\ T_2 \in \mathfrak{F}$, такие, что $T = T_1 + T_2$ и $S_{T_i} \subseteq I_F$ для $i = 1, 2$. Тогда

$$0 < (T_i, \vec{n}) < (T, \vec{n}) = (\Lambda_0, \vec{n}).$$

А значит, по предположению индукции $\tilde{\partial}(S_{T_i}) \subseteq S_{\mathfrak{F}}$. Очевидно, что тогда и $\tilde{\partial}(S_T) \subseteq S_{\mathfrak{F}}$.

С другой стороны, существуют такие $M_1,\ M_2 \in F \cap \mathfrak{F}$, что $\Lambda_0 + M_1 = T + M_2$ (так как $T \in R(\Lambda_0, F)$). Тогда, для некоторых функций $r_i \in S_{M_2}, a_i \in S_T, b_f \in S_{M_1}$ имеем:

$$f \cdot b_f = \sum_i r_i a_i.$$

Применяя к этому равенству $\tilde{\partial}$ нетрудно получить:

$$\tilde{\partial}(f) = \frac{\sum_i (\tilde{\partial}(r_i) a_i + r_i \tilde{\partial}(a_i)) - \tilde{\partial}(b_f) f}{b_f}. \tag{2.7}$$

Заметим, что $b_f \tilde{\partial}(f) \in S_{\mathfrak{F}}$. Выбрав базисные элементы пространства S_{Λ_0} и взяв в качестве h_{Λ_0} произведение элементов b_f, соответствующих этому базису, получим, что $h_{\Lambda_0} \tilde{\partial}(S_{\Lambda_0}) \subseteq S_{\mathfrak{F}}$. Аналогичным образом подобрав h_{Λ_j} для всех таких Λ_j, что $(\Lambda_j, \vec{n}) = k$, положим

$$h_k = \prod_{\Lambda_j : (\Lambda_j, \vec{n}) = k} h_{\Lambda_j}.$$

Легко проверить, что дифференцирование $h_k \partial$ удовлетворяет условиям (1) и (2) из формулировки теоремы. Таким образом мы доказали шаг индукции.

Так как набор порождающих $\Lambda_0, \dots \Lambda_d$ конечен, то проводя рассуждения по индукции мы дойдем до такого k, что все скалярные произведения $(\Lambda_0, \vec{n}), \dots, (\Lambda_d, \vec{n})$ не превосходят k. Тогда в качестве элемента h из формулировки теоремы можно взять элемент h_k. Тем самым теорема 6 доказана.

$\square$

Лемма 14. *Дифференцирование $h\tilde{\partial}$ из теоремы 6 является локально нильпотентным.*

Доказательство. Как и выше, $\vec{n}$ — целочисленный вектор нормали к плоскости параллельной P, проведенной через $F \cap \mathfrak{F}$, направленный в то полупространство, где находится конус σ.

Достаточно доказать, что $h\tilde{\partial}$ будет локально нильпотентным на пространствах S_{Λ_0}, где Λ_0 — порождающий вес полугруппы $\mathfrak{F}$.

Опять воспользуемся индукцией по величине скалярного произведения $(\Lambda_0, \vec{n})$. Если вес Λ_0 принадлежит первому уровню или грани F, то утверждение очевидно.

Пусть для всех Λ таких, что $(\Lambda, \vec{n}) < (\Lambda_0, \vec{n})$ утверждение доказано.

Из леммы 13 следует, что существуют веса $M_1,\ M_2 \in \mathfrak{F} \cap F$ и вес $T \in \mathfrak{F}$, для которого $S_T \subseteq I_F^2$, такие, что $\Lambda_0 + M_1 = T + M_2$. Для любой функции $f \in S_{\Lambda_0}$ имеет место равенство (2.7). Таким образом:

$$h\tilde{\partial}(f) = h\frac{\sum_i(\tilde{\partial}(r_i)a_i + r_i\tilde{\partial}(a_i)) - \tilde{\partial}(b_f)f}{b_f} = \sum_i \frac{hr_i\tilde{\partial}(a_i)}{b_f},$$

где $r_i \in S_{M_2}, a_i \in S_T, b_f \in S_{M_1}$. Так как $S_T \subseteq I_F^2$, найдутся такие $T_1, T_2 \in I_F$, такие, что $T_1 + T_2 = T$. В частности, $(T_i, \vec{n}) < (\Lambda_0, \vec{n})$, при $i = 1, 2$. Следовательно, по предположению индукции, $h\tilde{\partial}$ локально нильпотентно на S_{T_i}, а значит, и на S_T.

Поэтому, существует такое натуральное число d, что для любого i будет выполнено: $(h\tilde{\partial})^d(a_i) = 0$. Так как $h\tilde{\partial}(r_i) = h\tilde{\partial}(b_f) = 0$, то

$$(h\tilde{\partial})^d(f) = \sum_i r_i \frac{(h\tilde{\partial})^d(a_i)}{b_f} = 0.$$

□

2.4 Доказательство гибкости аффинных орисферических многообразий полупростых групп

В этом параграфе будем придерживаться обозначений предыдущего пункта.

У полупростых групп нет нетривиальных характеров, а значит, нет одномерных представлений. Отсюда легко получить, что не бывает аффинных орисферических многообразий полупростых групп, размерности 1. Поэтому, мы находимся в области применения теоремы 2. А это значит, что для доказательства теоремы 4 достаточно доказать, что группа $\mathrm{SAut}(X_{\mathfrak{F}})$ действует транзитивно на множестве гладких точек многообразия $X_{\mathfrak{F}}$.

Лемма 15. *Пусть* $\partial\colon \mathbb{K}[X_{\mathfrak{F}}] \to \mathbb{K}[X_{\mathfrak{F}}]$ *— ненулевое локально нильпотентное дифференцирование алгебры* $\mathbb{K}[X_{\mathfrak{F}}]$*, удовлетворяющее условиям (1) и (2) из формулировки теоремы 5. Тогда соответствующей ему автоморфизм* φ_∂ *многообразия* $X_{\mathfrak{F}}$ *(см параграф 1.2) будет переводить некоторую точку* $y_0 \in \overline{O}_F$ *в некоторую точку множества* $X_{\mathfrak{F}} \setminus \overline{O}_F$*.*

Доказательство. Существует функция f, лежащая в первом уровне, такая, что $\partial(f) \neq 0$ (иначе, дифференцирование ∂ было бы нулевым). Тогда имеем:

$$\varphi_\partial^*(f) = f + \partial(f).$$

Функция $\partial(f) \in S_F$, а значит, существует точка $y_0 \in \overline{O}_F$ такая, что $\varphi_\partial^*(f)(y_0) = \partial(f)(y_0) \neq 0$ (первое равенство следует из того, что $f \in I(\overline{O}_F)$). Таким образом,

$$\varphi_\partial^*(f)(y_0) = f(\varphi_\partial(y_0)) \neq 0,$$

и следовательно $\varphi_\partial(y_0) \notin \overline{O}_F$.

□

Пусть O_E — орбита, соответствующая некоторой грани E конуса σ, не содержащей грань F. Тогда $\overline{O}_E$ не содержит O_F (см. [4, §3, теорема 8]). Следовательно, множество $\overline{O}_E \cap \overline{O}_F$ будет замкнутым собственным подмножеством в $\overline{O}_F$. В конусе σ конечное число граней. Поэтому, если обозначить через Z объединение замыканий всех орбит, соответствующих граням конуса σ, не содержащим грань F, то $Z \cap \overline{O}_F$ будет замкнутым собственным подмножеством в $\overline{O}_F$.

Лемма 16. *В условиях леммы 15, точку y_0 можно взять из $O_F \setminus Z$.*

Доказательство. Действительно, т.к. $\varphi_\partial(\overline{O}_F)$ не совпадает с $\overline{O}_F$, то и множество $\varphi_\partial^{-1}(\overline{O}_F) \cap \overline{O}_F$ будет собственным замкнутом подмножеством в $\overline{O}_F$. Орбита O_F плотна в $\overline{O}_F$, поэтому найдется точка из $O_F \setminus (Z \cup (\varphi_\partial^{-1}(\overline{O}_F) \cap \overline{O}_F))$. $\square$

Лемма 17. *Если орбита O_F состоит из гладких точек, то существует автоморфизм из группы $\mathrm{SAut}(X_{\mathfrak{F}})$, переводящий некоторую точку из O_F в точку из некоторой орбиты, содержащей O_F в своем замыкании.*

Доказательство. Как и всюду выше, $\mathfrak{F}'$ — полугруппа порожденная весами из $F \cap \mathfrak{F}$ и весами из первого уровня полугруппы $\mathfrak{F}$. Вложение $\mathbb{K}[X_{\mathfrak{F}'}] \hookrightarrow \mathbb{K}[X_{\mathfrak{F}}]$ порождает отображение из $X_{\mathfrak{F}}$ в $X_{\mathfrak{F}'}$. При этом отображении орбита O_F изоморфно отображается на некоторую орбиту в $X_{\mathfrak{F}'}$, которая тоже будет состоять из гладких точек в силу замечания 2.1. В силу теоремы 5, на алгебре $\mathbb{K}[X_{\mathfrak{F}'}]$ существует дифференцирование ∂ такое, что (1) $\partial(S_\Lambda) = 0$, при $\Lambda \in F$, и (2) $\partial(S_\Lambda) \subseteq S_F$, при $\Lambda \in \mathfrak{F} \cap P$.

В силу теоремы 6, найдется элемент из алгебры S_F, домножив на который дифференцирование ∂, мы получим дифференцирование, продолжающееся на всю алгебру $S_{\mathfrak{F}} = \mathbb{K}[X_{\mathfrak{F}}]$. Согласно лемме 14, это дифференцирование будет локально нильпотентным.

Для любого $t \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ дифференцирование $t\partial$ будет также удовлетворять условиям (1) и (2) теоремы 5.

Возьмем точку y_0 из условия леммы 16. Отображение $\tau \colon \mathbb{K} \to X_{\mathfrak{F}}$, заданное по правилу $\tau(t) = \varphi_{t\partial}(y_0)$, регулярно. Его образ есть неприводимое подмножество в $X_{\mathfrak{F}}$. Оно пересекается с некоторой орбитой, замыкание которой содержит

O_F. Иначе образ τ содержался бы в объединении Z и $\overline{O}_F$. Здесь, как и выше, Z обозначает объединение замыканий всех орбит, соответствующих граням конуса σ, не содержащим грань F. Но при этом образ не содержался бы ни в Z, ни в $\overline{O}_F$ целиком, а значит был бы приводим.

□

Замечание. *Пусть группа G полупростая. Тогда любую точку одной орбиты можно перевести в любую другую точку той же орбиты автоморфизмом из группы* $\mathrm{SAut}(X_{\mathfrak{F}})$. *Это следует из того, что полупростая группа порождена своими одномерными унипотентными подгруппами (на самом деле, верен даже более общий факт: любая связная алгебраическая подгруппа, не имеющая нетривиальных характеров, порождается одномерными унипотентными подгруппами (см. [16, Lemma 1.1])).*

Если орбита $O_{\tilde{F}}$ содержит гладкую орбиту O_F в своем замыкании, то орбита $O_{\tilde{F}}$ тоже гладкая. Применяя лемму 17 к орбите $O_{\tilde{F}}$ и продолжая рассуждения индукцией по размерности орбиты, получаем:

Теорема 7. *Пусть $X_{\mathfrak{F}}$ — аффинное орисферическое многообразие связной полупростой группы G, и F — такая собственная грань соответствующего этому многообразию конуса, что орбита O_F состоит из гладких точек.*

Тогда существует автоморфизм из группы $\mathrm{SAut}(X_{\mathfrak{F}})$, *переводящий некоторую точку из O_F в некоторую точку из O — открытой орбиты в многообразии $X_{\mathfrak{F}}$.*

Из замечания 2.4 и теоремы 7 следует теорема.

Теорема 8. *Группа* $\mathrm{SAut}(X_{\mathfrak{F}})$ *действует на множестве гладких точек* $(X_{\mathfrak{F}})^{\mathrm{reg}}$ *транзитивно.*

Как отмечалось выше, это завершает доказательство теоремы 4 о гибкости аффинных орисферических многообразий полупростых групп.

Глава 3

Гибкость нормальных аффинных орисферических многообразий

В этой главе мы докажем следующую теорему:

Теорема 9. *Пусть X — нормальное аффинное орисферическое многообразие связной алгебраической группы G и в $\mathbb{K}[X]$ нет обратимых функций отличных от констант. Тогда X гибкое.*

В отличие от теоремы 4 мы больше не требуем, чтобы группа G была полупростой, но зато требуем, чтобы многообразие X было нормальным.

Доказательство разбито на три части. В параграфе 3.1 мы доказываем утверждение 2, которое говорит, что при некоторых условиях из существования $\mathbb{G}_m$-действия на многообразии X следует существование $\mathbb{G}_a$-действий. Причем множество неподвижных точек относительно $\mathbb{G}_m$ не является инвариантным относительно $\mathbb{G}_a$-действий.

В параграфе 3.2 доказывается утверждение 4, которое также говорит о связи между $\mathbb{G}_m$-действиями с $\mathbb{G}_a$-действиями. Из него в частности следует, что для доказательства гибкости AMDS многообразия, достаточно доказать, что некоторая алгебраическая группа действует транзитивно на множестве гладких точек.

Наконец, в параграфе 3.3 с помощью результатов предыдущих параграфов доказывается теорема 9.

По результатам этой главы была опубликована работа [21].

3.1 Связь между негиперболическими действиями тора и локально нильпотентными дифференцированиями

Пусть X — нормальное неприводимое аффинное многообразие. Регулярное действие одномерного тора $\mathbb{G}_m = (\mathbb{K}^\times, \cdot)$ на X соответствует $\mathbb{Z}$-градуировке на алгебре $\mathbb{K}[X]$

$$\mathbb{K}[X] = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{K}[X]_i.$$

Действие группы $\mathbb{G}_m$ называется гиперболическим, если существует положительное целое i и отрицательное целое j, такие что однородные компоненты $\mathbb{K}[X]_i$ и $\mathbb{K}[X]_j$ ненулевые. Если $\mathbb{G}_m$-действие не является гиперболическим, то оно называется негиперболическим.

Пусть на многообразии X задано негиперболическое $\mathbb{G}_m$-действие. Можно считать, что все однородные компоненты $\mathbb{K}[X]_i$ с $i < 0$ равны нулю. Идеал $I = \bigoplus_{i>0} \mathbb{K}[X]_i$ в $\mathbb{K}[X]$ инвариантен относительно этого действия. Пусть Z — множество нулей идеала I. Тогда Z — это множество неподвижных точек для заданного $\mathbb{G}_m$-действия, и для каждой точки $x \in X$ существует предельная точка $\lim_{t\to 0} t \cdot x$, принадлежащая Z.

Предложение 2. *Пусть Z — множество неподвижных точек для некоторого негиперболического $\mathbb{G}_m$-действия на нормальном аффинном неприводимом многообразии X. Предположим, что $Z \cap X^{\mathrm{reg}} \neq \emptyset$. Тогда $Z^{\mathrm{reg}} \cap X^{\mathrm{reg}} \neq \emptyset$ и для каждой точки $z \in Z^{\mathrm{reg}} \cap X^{\mathrm{reg}}$ касательное пространство T_zX порожде-*

но пространством T_zZ и касательными векторами к орбитам всевозможных регулярных $\mathbb{G}_a$-действий на X.

Доказательство. Алгебра $\mathbb{K}[Z] \cong \mathbb{K}[X]_0$. Поэтому Z неприводимо. Множества $X^{\mathrm{reg}} \cap Z$ и Z^{reg} открыты в Z, и поэтому пересекаются.

Пусть z — точка в $Z^{\mathrm{reg}} \cap X^{\mathrm{reg}}$. Обозначим через $\mathfrak{m}_z$ максимальный идеал в $\mathbb{K}[X]_0 \cong \mathbb{K}[Z]$, соответствующий z. Тогда максимальный идеал в $\mathbb{K}[X]$, соответствующий z, это $\mathfrak{M}_z = \mathfrak{m}_z \oplus I(Z)$. Пусть $\dim Z = k$, $\dim X = k + n$. Поскольку точка z гладкая в Z, то $k = \dim Z = \dim(\mathfrak{m}_z/\mathfrak{m}_z^2)$. Пусть $h_1, \ldots, h_k \in \mathfrak{m}_z$ такие функции в $\mathbb{K}[Z]$, что их образы в $\mathfrak{m}_z/\mathfrak{m}_z^2$ образуют базис. Так как z гладкая точка в X, мы получаем

$$n + k = \dim X = \dim\left(\mathfrak{M}_z/\mathfrak{M}_z^2\right).$$

Мы имеем,

$$\mathfrak{M}_z/\mathfrak{M}_z^2 = (\mathfrak{m}_z \oplus I(Z))/(\mathfrak{m}_z \oplus I(Z))^2 = \mathfrak{m}_z/\mathfrak{m}_z^2 \oplus \left(I(Z)/(\mathfrak{m}_z I(Z) + I(Z)^2)\right).$$

Выберем $f_1, \ldots, f_n \in I(Z)$ так, чтобы образ множества $\{h_1, \ldots h_k, f_1, \ldots, f_n\}$ был базисом в $\mathfrak{M}_z/\mathfrak{M}_z^2$. Легко видеть, что функции $f_1, \ldots, f_n$ можно выбрать $\mathbb{Z}$-однородными. В таком случае $f_1, \ldots, f_n$ алгебраически независимы над $\mathbb{K}[X]_0$. Положим $\mathcal{A} = \mathbb{K}[X]_0[f_1, \ldots, f_n]$. Градуировка на алгебре $\mathbb{K}[X]$ индуцирует $\mathbb{Z}$-градуировку на $\mathcal{A}$.

Пусть δ — однородное локально нильпотентное дифференцирование на $\mathcal{A}$. Рассмотрим произвольный однородный элемент $a \in \mathcal{A}$, такой что $\delta(a) \neq 0$. Пусть a имеет степень d, а $\delta(a)$ имеет степень e. Тогда число $e - d$ называется степенью дифференцирования δ и обозначается $\deg(\delta)$. Можно показать, что определение степени не зависит от элемента a (см. [13]).

Лемма 18. *Пусть δ — однородное локально нильпотентное дифференцирование на $\mathcal{A}$, при этом $\deg(\delta) < 0$. Тогда существует $s \in \mathbb{K}[X]_0$, такое что локально нильпотентное дифференцирование $s\delta$ может быть продолжено на*

$\mathbb{K}[X]$, *оставаясь локально нильпотентным.*

Доказательство. Поскольку $\mathbb{K}[X]$ — алгебраическое расширение $\mathcal{A}$, дифференцирование δ можно продолжить до дифференцирования $\mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}(X)$ (см. [3, Section 2.3]).

Пусть $g_1, \ldots, g_m$ — однородные порождающие алгебры $\mathbb{K}[X]$. Мы докажем, что для каждого целого неотрицательного числа u найдется элемент $s_u \in \mathbb{K}[X]_0$, такой что $s_u\delta(g_i) \in \mathbb{K}[X]$ для всех g_i в $\mathbb{K}[X]_j$, где $j \leq u$. Мы будем вести доказательство с помощью индукции по $u \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

База индукции, $u = 0$. Если $g_i \in \mathbb{K}[X]_0$, то $\delta(g_i) = 0$. Тогда в качестве s_0 можно взять 1.

Шаг индукци. Положим $\rho = s_{u-1}\delta$. Если $g_i \in \mathbb{K}[X]_u \subseteq I(Z)$, то g_i можно представить следующим образом:

$$g_i = a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n + F_i + G_i, \tag{3.1}$$

где $a_j \in \mathbb{K}$, $F_i \in \mathfrak{m}_z I(Z)$, $G_i \in I(Z)^2$. Предположим, что $g_{i_1}, \ldots, g_{i_l}$ — это все g_i, лежащие в $\mathbb{K}[X]_u$. Тогда F_i можно представить, как

$$F_i = p_1 g_{i_1} + \ldots + p_l g_{i_l},$$

где $p_j \in \mathfrak{m}_z$. Используя равенство (3.1) при $i = i_l$, мы получаем

$$g_{i_l} = \frac{\sum_{j=1}^n a_j f_j + G_{i_l} + p_1 g_{i_1} + \ldots + p_{l-1} g_{i_{l-1}}}{1 - p_l}.$$

Рассмотрим локализацию $\mathcal{B} = \mathbb{K}[X]_{(\mathbb{K}[X]_0 \setminus \mathfrak{m}_z)}$. Мы получаем

$$g_{i_l} = \sum_{j=1}^n \tilde{a}_j f_j + \tilde{G}_{i_l} + \sum_{t=1}^{l-1} \tilde{p}_t g_{i_t},$$

где $\tilde{a}_j = \frac{a_j}{1-p_l} \in \mathcal{B}$, $\tilde{G}_{i_l} = \frac{G_{i_l}}{1-p_l} \in I(Z)^2_{(\mathbb{K}[X]_0 \setminus \mathfrak{m}_z)}$, $\tilde{p}_t = \frac{p_t}{1-p_l} \in \mathfrak{m}_{z(\mathbb{K}[X]_0 \setminus \mathfrak{m}_z)}$.

Теперь мы можем подставить, полученное выражение в выражение (3.1) для $g_{i_{l-1}}$, аналогично выразить $g_{i_{l-1}}$, уже не используя g_{i_l}, затем выразить $g_{i_{l-2}}$ и т.д., пока не получим выражение для g_{i_1} вида

$$g_{i_1} = \sum_{j=1}^{n} \widehat{a}_j f_j + \widehat{G},$$

где $\widehat{a}_j \in \mathcal{B}$, $\widehat{G} \in I(Z)^2_{(\mathbb{K}[X]_0 \setminus \mathfrak{m}_z)}$. Приводя выражение к общему знаменателю, получаем:

$$g_{i_1} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_j f_j + \overline{G}}{P},$$

где $\overline{a}_j \in \mathbb{K}[X]_0$, $\overline{G} \in I(Z)^2$, $P \in \mathbb{K}[X]_0 \setminus \mathfrak{m}_z$. Применим теперь дифференцирование ρ:

$$\rho(g_{i_1}) = \frac{\sum_{j=1}^{n} \overline{a}_j \rho(f_j) + \rho(\overline{G})}{P}.$$

Следовательно, $P\rho(g_{i_1}) \in \mathbb{K}[X]$. Рассуждая аналогично можно показать, что существуют $P_1 = P, P_2, \dots P_l$ из $\mathbb{K}[X]_0 \setminus \mathfrak{m}_z$, такие что $P_j \rho(g_{i_j}) \in \mathbb{K}[X]$. Тогда положим

$$s_u = \left(\prod_{j=1}^{l} P_j \right) s_{u-1}.$$

Так как число g_i конечно, мы можем взять

$$u_0 = \max\{u \mid \exists g_i \in \mathbb{K}[X]_u\}.$$

Тогда для $s = s_{u_0}$ существует дифференцирование ∂ алгебры $\mathbb{K}[X]$, которое продолжает $s\delta$. Легко видеть, что $\deg \partial = \deg \delta$. Поскольку $\deg \partial < 0$, дифференцирование ∂ локально нильпотентно. Лемма 18 доказана.

□

Рассмотрим n локально нильпотентных дифференцирований алгебры $\mathcal{A}$

$$\delta_1 = \frac{\partial}{\partial f_1}, \dots, \delta_n = \frac{\partial}{\partial f_n}.$$

Согласно лемме 18, мы имеем n локально нильпотентных дифференцирований $\partial_1, \ldots, \partial_n$ алгебры $\mathbb{K}[X]$, которые являются продолжениями дифференцирований $s_1\delta_1, \ldots, s_n\delta_n$ алгебры $\mathcal{A}$. Положим $\varphi_j(t) = \exp(t\partial_j)$. Получаем

$$T_zX \cong \left(\mathfrak{M}_z/\mathfrak{M}_z^2\right)^* = \langle h_1 + \mathfrak{M}_z^2, \ldots, h_k + \mathfrak{M}_z^2, f_1 + \mathfrak{M}_z^2, \ldots, f_n + \mathfrak{M}_z^2\rangle^*.$$

По определению $\partial_j(h_p) = 0$, $\partial_j(f_j) = s_j$, $\partial_j(f_i) = 0$ для всех $i \neq j$. Поскольку $s_j \in \mathbb{K}[X]_0 \setminus \mathfrak{m}_z$, мы получаем $\partial_j(h_p)(z) = 0$, $\partial_j(f_j)(z) \neq 0$, $\partial_j(f_i)(z) = 0$ для всех $i \neq j$.

Пусть $h^1, \ldots, h^k, f^1, \ldots, f^n$ — двойственный базис к базису

$$h_1 + \mathfrak{M}_z^2, \ldots, h_k + \mathfrak{M}_z^2, f_1 + \mathfrak{M}_z^2, \ldots, f_n + \mathfrak{M}_z^2$$

пространства $\mathfrak{M}_z/\mathfrak{M}_z^2$. Касательный вектор к орбите $\varphi_j(t) \cdot z$ пропорционален вектору f^j. Поэтому касательное пространство T_zX порождается касательными векторами $h^1, \ldots, h^k \in T_zZ$ и касательными векторами к $\mathbb{G}_a$-орбитам. Предложение 2 доказано.

□

Из предложения 2 вытекают следующие следствия.

Следствие 5. *В условиях предложения 2 множество Z не является* $\mathrm{SAut}(X)$*-инвариантным.*

Следствие 6. *В условиях предложения 2, предположим, что $z \in Z^{\mathrm{reg}} \cap X^{\mathrm{reg}}$. Если касательное пространство T_zZ порождено касательными векторами к $\mathbb{G}_a$-орбитам для алгебраических $\mathbb{G}_a$-действий на X, то точка z гибкая в X.*

3.2 Достаточное условие существования гибкой точки

В этом разделе мы выведем достаточное условие существования гибкой точки у многообразия, а также с помощью этого условия докажем гибкость нормальных аффинных орисферических многообразий.

Утверждение 4. *Предположим, что тор T действует на AMDS X. Обозначим через H подгруппу в $\mathrm{Aut}(X)$, порожденную T и $\mathrm{SAut}(X)$. Предположим, что на X нет гибких точек. Тогда существует H-инвариантный простой дивизор $D \subseteq X$.*

Доказательство. Поскольку $\mathcal{R}(X)$ конечно порождено, мы можем рассмотреть тотальное координатное пространство $\overline{X}$. Обозначим через $\widetilde{\mathrm{Aut}}(\overline{X})$ группу, состоящую из автоморфизмов многообразия $\overline{X}$, которые нормализуют подгруппу $N(X) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(\overline{X})$.

Согласно [1, Theorem 5.1] имеет место следующая точная последовательность:

$$1 \longrightarrow N(X) \xrightarrow{\alpha} \widetilde{\mathrm{Aut}}(\overline{X}) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Aut}(X) \longrightarrow 1 \tag{3.2}$$

Согласно предложению 3(4) существует действие тора T на $\overline{X}$, поднимающее действие T на X. Таким образом, есть подгруппа $S \cong T$ в $\beta^{-1}(T) \subset \widetilde{\mathrm{Aut}}(\overline{X})$.

Поскольку на X нет гибких точек, то по лемме 4 найдется простой $\mathrm{SAut}(X)$-инвариантный дивизор $D_0 \subseteq X$.

Случай 1. Пусть дивизор D_0 главный. Тогда $D_0 = \mathrm{div}(f)$, где f — $\mathrm{SAut}(X)$-полуинвариантная функция. Поскольку группа $\mathrm{SAut}(X)$ порождена унипотентными подгруппами, каждый $\mathrm{SAut}(X)$-полуинвариант является $\mathrm{SAut}(X)$-инвариантом. Таким образом $f \in \mathrm{ML}(X) \setminus \mathbb{K}$. Поскольку группа $\mathrm{SAut}(X)$ нормальна в $\mathrm{Aut}(X)$, то $\mathrm{ML}(X)$ является $\mathrm{Aut}(X)$-инвариантной подалгеброй, в частности $\mathrm{ML}(X)$ инвариантно относительно T. Отсюда следует, что $\mathrm{ML}(X)$ можно разложить в прямую сумму весовых подпространств относительно тора T. Следовательно, существует T-полуинвариант $p \in \mathrm{ML}(X) \setminus \mathbb{K}$. Тогда $\mathrm{div}(p)$ будет H-инвариантным дивизором, и в этом случае каждый простой дивизор в $\mathrm{Supp}(\mathrm{div}(g))$ будет H-инвариантым.

Случай 2. Дивизор D_0 не является главным. Рассмотрим конечно порожденную группу $K \subseteq \mathrm{WDiv}(X)$ из определения 12. Мы можем считать, что $D_0 \in K$. Рассмотрим

$$f = 1 \in \mathcal{L}(X, D_0).$$

Пусть $\overline{f}$ — образ f в $\mathcal{R}(X) = \mathbb{K}[\overline{X}]$. Так как D_0 не является главным, то $\overline{f} \notin \mathbb{K}$. Рассмотрим $\Gamma = \beta^{-1}(\mathrm{SAut}(X))$.

Лемма 19. *Элемент $\overline{f}$ является Γ-полуинвариантом.*

Доказательство. Каждый автоморфизм $\psi \in \mathrm{SAut}(X)$ определяет автоморфизм группы $\mathrm{WDiv}(X)$. Группа $\psi(K)$ конечно порождена, и отображение $\psi(K) \to \mathrm{Cl}(X)$ сюръективно. Для произвольного $D \in \mathrm{WDiv}(X)$ двойственное отображение ψ^* отображает пространство $\mathcal{L}(X, D)$ в пространство $\mathcal{L}(X, \psi(D))$. Таким образом мы получаем гомоморфизм алгебр $\mathcal{S}_K \to \mathcal{S}_{\psi(K)}$, переводящий f в себя. При этом на однородных элементах этот гомоморфизм совпадает с ψ^*.

Рассмотрим характер χ как в определении 12. Легко видеть, что отображение ψ^* определяет отображение колец Кокса $\mathcal{R}_{K,\chi}$ и $\mathcal{R}_{\psi(K),\chi\circ\psi^{-1}}$. При этом существует гомоморфизм алгебр $\mathcal{S}_{\psi(K)} \to \mathcal{S}_K$, тождественный на нулевой компонете, действующий умножением на константу на $\mathcal{L}(X, D_0)$, и индуцирующий изоморфизм τ колец $\mathcal{R}_{\psi(K),\chi\circ\psi^{-1}}$ и $\mathcal{R}_{K,\chi}$ (см. доказательство [7, Proposition 4.2.2]). Тогда автоморфизм $\tau \circ \psi$ кольца $\mathcal{R}_{K,\chi}$ умножает $\overline{f}$ на константу.

Легко видеть, что $\overline{f}$ полунвариантно относительно действия $N(X)$. Но из точной последовательности (3.2) следует, что любой автоморфизм из Γ, который лежит в прообразе ψ, отличается от ψ взятием композиции с элементом из $N(X)$. Поэтому $\overline{f}$ полуинвариантно относительно всех автоморфизмов из $\beta^{-1}(\psi)$. Отсюда следует, что $\overline{f}$ полуинвариантно относительно Γ.

□

Из леммы 19 следует, что $\mathcal{R}(X)^{(\Gamma)} \neq \mathbb{K}$. Обозначим $\mathcal{R}(X)_\xi$ подпростанство в $\mathcal{R}(X)$, состоящее из функций веса ξ относительно Γ.

Лемма 20. *Пространство $\mathcal{R}(X)_\xi$ инвариантно относительно S.*

Доказательство. Поскольку $\mathrm{SAut}(X)$ нормальна в $\mathrm{Aut}(X)$, то группа Γ нормальна в $\widetilde{\mathrm{Aut}}(\overline{X})$. Пусть $h \in R(X)_\xi$, $t \in T$, $g \in \Gamma$. Тогда

$$g\cdot(t\cdot h) = t\cdot(t^{-1}\cdot(g\cdot(t\cdot h))) = t\cdot((t^{-1}\cdot g\cdot t)\cdot h) = t\cdot\xi(t^{-1}\cdot g\cdot t)h = \xi(t^{-1}\cdot g\cdot t)(t\cdot h).$$

Таким образом, элемент $t \cdot h$ является Γ-полуинвариантным. Мы получаем отображение $T \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{X}(\Gamma))$. Поскольку T связно, то это отображение тривиально. $\square$

Действие группы S на $R(X)$ локально конечно и рационально. Таким образом, для любого веса ξ пространство $R(X)_\xi$ является прямой суммой весовых подпространств относительно действия S. Так как $R(X)^{(\Gamma)} \neq \mathbb{K}$, то найдется $q \in R(X) \setminus \mathbb{K}$, которое будет полуинвариантно и относительно действия Γ, и относительно действия T.

Дивизор $\mathrm{div}(q) \subseteq \overline{X}$является Γ-инвариантным. Следовательно, он $N(X)$-инвариантен. Таким образом, $\pi(\mathrm{supp}(\mathrm{div}(q)))$ — дивизор. Выберем простой дивизор $\overline{D}$ в $\mathrm{supp}(\mathrm{div}(q))$. Его образ $D = \pi(\overline{D})$ содержится в носители дивизора $\pi(\mathrm{supp}(\mathrm{div}(q)))$. Поскольку H порождено связными алгебраическими подгруппами, дивизор D является H-инвариантным.

Предложение 4 доказано.

$\square$

Следствие 7. *Пусть X — AMDS. Предположим, что H действует транзитивно на X^{reg}. Тогда X гибкое.*

Доказательство. Предположим, что в X нет гибких точек. Из предложения 4 следует, что в X найдется H-инвариантный простой дивизор D. Поскольку X нормально, $D \cap X^{\mathrm{reg}} \neq \emptyset$. Мы получаем противоречие.

Следовательно в X есть гибкая точка. Но так как H действует на X^{reg} транзитивно, мы получаем, что все точки в X^{reg} гибкие. $\square$

3.3 Доказательство гибкости нормальных аффинных орисферических многообразий

Утверждение 5. *Пусть X — AMDS. Предположим, что алгебраическая группа G действует на X. При этом для каждой орбиты $O \subseteq X$, состоящей из гладких точек, существует негиперболическое $\mathbb{G}_m$-действие Λ на X,* *такое что множество неподвижных точек относительно Λ лежит в замыкании $\overline{O}$ и содержит гладкую точку. Тогда X гибкое.*

Доказательство. Предположим, что в X нет гибких точек. Пусть T — максимальный тор в G. Обозначим через H группу, порожденную $\mathrm{SAut}(X)$ и T. Тогда по предложению 4 существует H-инвариантный простой дивизор D. Поскольку X нормально, коразмерность множества особых точек не более чем 2. Таким образом D содержит гладкую точку. Из того, что D инвариантно относительно группы H, следует, что D инвариантно относительно группы G. Значит, D содержит орбиту O, состоящую из гладких точек. Следовательно, есть негиперболическое $\mathbb{G}_m$-действие Λ, такое что множество неподвижных точек L относительно действия Λ лежит в замыкании $\overline{O}$ и содержит гладкую точку. Пусть $p \in L$ — гладкая точка. Все касательные векторы к $\mathbb{G}_a$-орбитам в точке p лежат в T_pD. Это противоречит предложению 2. Следовательно, в X есть гибкая точка.

Пусть U — множество всех гибких точек в X. Это открытое непустое подмножество в X (см. [9, Proposition 1.11]). Предположим, что есть гладкая точка $p \in X \setminus U$. Тогда $D = X \setminus U$ — собственное замкнутое $\mathrm{Aut}(X)$-инвариантное множество, содержащее гладкую точку. Проводя рассуждения аналогичные рассуждениям в первой части доказательства, получаем противоречие. Таким образом X — гибкое. □

Теперь мы готовы доказать теорему 9.

Доказательство. Переходя к односвязной накрывающей группы G, можно считать, что $G = T \times G'$, где T — тор и G' — связная полупростая группа.

Пусть P —подполугруппа в $\mathfrak{X}(B)^+$, соответствующая X, и σ — конус, порожденный P, в пространстве $V = \mathfrak{X}(B)^+ \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$.

Пусть $O \subseteq X$ — G-орбита, состоящая из гладких точек. Тогда O соответствует некоторой грани τ конуса σ. Существует линейная функция l на V, такая что $l \mid_\tau = 0$ и l принимает положительные целые значения на всех элементах

$P \setminus \tau$. Рассмотрим $\mathbb{Z}$-градуировку на $\mathbb{K}[X]$, заданную l, то есть

$$\mathbb{K}[X]_i = \bigoplus_{p \in P, l(p)=i} S_p.$$

Мы имеем $I(\overline{O}) = \bigoplus_{i>0} \mathbb{K}[X]_i$. Эта $\mathbb{Z}$-градуировка соответствует негиперболическому $\mathbb{G}_m$-действию на X. Множество $\mathbb{G}_m$-неподвижных точек совпадает с множеством нулей идеала $\bigoplus_{i>0} \mathbb{K}[X]_i$, то есть с $\overline{O}$. Как отмечалось в параграфе 1.5, любое аффинное орисферическое многообразие без обратимых функций отличных от констант является AMDS. Из предложения 5 вытекает, что X гибкое.

□

Глава 4

Геометрическое описание орбит группы автоморфизмов аффинного торического многообразия

В предыдущих двух главах мы доказали гибкость аффинных орисферических многообразий полупростых групп, а также нормальных аффинных орисферических многообразий. Из гибкости многообразия следует, что группа автоморфизмов многообразия действует транзитивно на множестве гладких точек. То есть множество гладких точек образует одну орбиту относительно действия группы автоморфизмов. Естественно попытаться описать другие орбиты группы автоморфизмов. В данном разделе мы дадим описание орбит группы автоморфизмов аффинного торического многообразия. Точнее, мы дадим описание орбит связной компоненты единицы группы автоморфизов в смысле определения, данного в работе [17].

Данной теме уже были посвящены работы других авторов. Пусть X — алгебраическое многообразие, $\mathrm{Aut}(X)$ — группа автоморфизмов, $\mathrm{Aut}^0(X)$ — связная компонента единицы группы автоморфизмов. В [10] дано описание $\mathrm{Aut}^0(X)$-орбит в случае, когда X полное торическое многообразие. А именно, каждой точке x полного торического многообразие ставится в соответствие полугруппа в группе классов дивизоров на X, и $\mathrm{Aut}^0(X)$-орбиты точек совпадают тогда и только тогда, когда соответствующие полугруппы совпадают. В [6] дано аналогичное описание $\mathrm{Aut}^0(X)$-орбит для аффинных торических многообразий.

В этой главе мы дадим другое описание $\mathrm{Aut}^0(X)$-орбит аффинных торических многообразий, используя размерности касательных пространств к точкам многообразия X (теорема 10), а также предложим формулу для нахождения размерности касательного пространства (предложение 3).

4.1 Формула для размерности касательного пространства

Пусть T — тор, N — решетка однопараметрических подгрупп T, M — двойственная решетка характеров, X — аффинное торическое многообразие относительно эффективного действия тора T на X (напомним, что мы предполагаем, что торическое многообразие всегда нормально), σ — соответствующий конус в $N_{\mathbb{Q}}$ и $\sigma^{\vee}$ — двойственный конус в $M_{\mathbb{Q}}$. Обозначим через $\mathfrak{F}$ полугруппу $M \cap \sigma^{\vee}$.

Напомним, что полугруппа $S \subseteq M$ называется насыщенной, если для любого $m \in M$, из того, что $km \in \mathfrak{F}$ для некотрого $k \in \mathbb{N}$, следует, что $m \in \mathfrak{F}$. Легко видеть, что полугруппа $\mathfrak{F}$ насыщена.

Если F — грань конуса $\sigma^{\vee}$, то через $\langle F \rangle$ мы будем обозначать подгруппу в M, порожденную множеством $\mathfrak{F} \cap F$. Рассмотрим гомоморфизм факторизации $M \to M/\langle F \rangle$ и обозначим через $\mathfrak{F}/\langle F \rangle$ образ полугруппы $\mathfrak{F}$ при этом гомоморфизме.

Лемма 21. *Группа $M/\langle F \rangle$ ялвяется свободной конечнопорожденной абелевой группой. Полугруппа $\mathfrak{F}/\langle F \rangle$ насыщена, порождает $M/\langle F \rangle$, конченопорождена и не имеет обратимых элементов отличных от нуля.*

Доказательство. Легко видеть, что $M \cap F = \mathfrak{F} \cap F$. Мы докажем, что в группе $M/\langle F \rangle$ нет элементов конечного порядка. Предположим, что существует

$a \in M$, такое что $la \in \langle F \rangle$ для некоторого $l \in \mathbb{N}$. Тогда есть такие $x, y \in \mathfrak{F} \cap F$, что $la = x - y$. Элемент $la + ly = x + (l-1)y$ принадлежит $\mathfrak{F} \cap F$. Следовательно $a + y \in F \cap M$. Значит $a + y \in \mathfrak{F} \cap F$. Получаем, что $a \in \langle F \rangle$.

Таким образом $M / \langle F \rangle$ — свободная конченопорожденная абелева группа. Полугруппа $\mathfrak{F} / \langle F \rangle$ является конечнопоржденной и порождает $M / \langle F \rangle$, так как $\mathfrak{F}$ конечнопорожденная и порождает M.

Теперь мы докажем, что $\mathfrak{F} / \langle F \rangle$ — насыщенная полугруппа. Рассмотрим произвольный элемент $b \in M / \langle F \rangle$, который лежит в конусе, порожденным $\mathfrak{F} / \langle F \rangle$. Тогда существует $l \in \mathbb{N}$, такое что $lb \in \mathfrak{F} / \langle F \rangle$. Обозначим через c какой-нибудь из прообразов lb в $\mathfrak{F}$. Гомоморфизм $M \to M / \langle F \rangle$ продолжается до линейного отображения $M_{\mathbb{Q}} \to M / \langle F \rangle_{\mathbb{Q}}$, которое обозначим ψ. Тогда $\psi(\frac{c}{l}) = b$. С другой стороны найдется элемент $d \in M$, такой что $\psi(d) = b$. Тогда d можно представить как $d = \frac{c}{l} + t_+ - t_-$, где t_+, t_- — рациональные точки из грани F. Найдется такая целочисленная точка $t \in F$, что $t - t_- \in M \cap F$. Тогда $d + t = \frac{c}{l} + t_+ + (t - t_-)$ — целочисленная точка, лежащая в конусе, порожденным $\mathfrak{F}$, и её образ есть b. Значит полугруппа $\mathfrak{F} / \langle F \rangle$ — насыщена.

Осталось доказать, что в $\mathfrak{F} / \langle F \rangle$ нет обратимых элементов отличных от нуля. Предположим, что есть такие ненулевые $a, b \in \mathfrak{F} / \langle F \rangle$, что $a + b = 0$. Пусть a' и b' прообразы этих элементов в $\mathfrak{F}$. Они не лежат в грани F. Тогда $a' + b' \in \langle F \rangle$. Но сумма элементов внутри конуса, которые не принадлежат грани, не может принадлежать грани. Противоречие.

□

Если $\mathfrak{P}$ — полугруппа, то через $\mathcal{H}(\mathfrak{P})$ мы будм обозначать множество всех неприводимых элементов в $\mathfrak{P}$, а через $|\mathcal{H}(\mathfrak{P})|$ количество элементов в этом множестве.

Предложение 3. *Пусть $T_F X$ — касательное пространство к X в произвольной точке обиты O_F. Тогда справедливо следующее равенство*

$$\dim T_F X = \dim O_F + |\mathcal{H}(\mathfrak{F} / \langle F \rangle)|.$$

Доказательство. Группа $M / \langle F \rangle$ — свободная конечнопорожденная абелева группа, поэтому мы можем рассмотреть группу $M/\langle F\rangle$ как решетку характеров тора Spec $\mathbb{K}[M/\langle F\rangle]$. Обозначим через $\tau^\vee$ конус в пространстве $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} M/\langle F\rangle$, порожденный $\mathfrak{F}/\langle F\rangle$, а через τ двойственный ему конус в двойственном пространстве. Соответствующее многообразие обозначим через X_τ.

Согласно лемме 21 полугруппа $\mathfrak{F}/\langle F\rangle$ насыщена, поэтому

$$M/\langle F\rangle\cap\tau^\vee=\mathfrak{F}/\langle F\rangle\cap\tau^\vee.$$

Отсюда следует, что $\mathbb{K}[X_\tau]=\mathbb{K}[\mathfrak{F}/\langle F\rangle]$.

Естественный гомоморфизм полугрупп $\mathfrak{F}\to\mathfrak{F}/\langle F\rangle$ может быть продолжен до гомоморфизма алгебр

$$\mathbb{K}[\mathfrak{F}]=\mathbb{K}[X]\to\mathbb{K}[\mathfrak{F}/\langle F\rangle]=\mathbb{K}[X_\tau].$$

Этот гомоморфизм сюръективен, и мы получаем вложение

$$\rho_1: X_\tau\hookrightarrow X.$$

Таким образом мы можем отождествить X_τ с подмногообразием в X.

Пусть $m_1, m_2,\dots m_r$ — конечный набор порождающих $\mathfrak{F}$. Тогда элементы $t^{m_1}, t^{m_2},\dots t^{m_r}$ — соответствующие характеры тора T. Мы получаем волжение

$$\rho_2: X\hookrightarrow\mathbb{A}^r$$

и мы можем отождествить X с подмногообразием в $\mathbb{A}^r$. Будем считать, что среди элементов $m_1, m_2,\dots,m_r$ только первые k лежат в грани F.

Рассмотрим точку

$$z=(\underbrace{1,1,\dots,1,}_{k}0,\dots,0)\in\mathbb{A}^r.$$

Мы докажем, что z принадлежит $X_\tau\cap O_F$.

Сначала докажем, что z принадлежит X. Пусть $x_1,\dots,x_r$ — координатные функции на $\mathbb{A}^r$. Многообразие X задано в $\mathbb{A}^r$ равенствами:

$$x_1^{a_1}x_2^{a_2}\dots x_r^{a_r} = x_1^{b_1}x_2^{b_2}\dots x_r^{b_r} \tag{4.1}$$

где $a_1,\dots,a_r,b_1,\dots,b_r \in \mathbb{N}\cup\{0\}$, и

$$a_1m_1 + a_2m_2 + \dots + a_rm_r = b_1m_1 + b_2m_2 + \dots b_rm_r.$$

В последнем равенстве в левой части есть ненулевые слагаемые a_im_i с $i > k$ тогда и только тогда, когда в правой части есть ненулевые слагаемые b_im_i с $i > k$. Иначе, в одной части равенства будет элемент из F, а в другой нет. Отсюда видно, что z удовлетворяет равенствам (4.1), и поэтому принадлежит X.

Теперь докажем, что точка z принадлежит O_F. Для каждой грани P конуса $\sigma^\vee$ замыкание соответствующей орбиты O_P можно задать в X уравнениями $t^{m_i} = 0$ для всех i, таких что m_i не принадлежит P. Так как $\rho_2^*(x_i) = t^{m_i}$, то $0 = x_i(z) = t^{m_i}(z)$ для всех $i > k$. Значит, $z \in \overline{O_F}$. Но $1 = x_i(z) = t^{m_i}(z)$ при всех $i \le k$. Это означает, что z не принадлежит никакой орбите $O_{F'}$, такой что $O_{F'} \subset \overline{O_F}$ и $O_{F'} \neq O_F$. Поэтому $z \in O_F$.

Наконец, докажем, что $z \in X_\tau$. В полугруппе $\mathfrak{F}/\langle F\rangle$ нет обратимых элементов, кроме нуля. Поэтому конус $\tau^\vee$ острый.

Рассмотрим неподвижную точку $z' \in X_\tau$. Тогда $t^{m_i}(\rho_1(z')) = \rho_1^*(t^{m_i})(z')$. Поэтому $t^{m_i}(\rho_1(z'))$ равно нулю при всех $i > k$ и равно 1 при $i \le k$. Поэтому $\rho_1(z') = z$. Значит, $z \in X_\tau$.

Орбита O_F содержится в аффинном пространстве

$$U_1 = \{(x_1, x_2, \dots, x_r) \in \mathbb{A}^r | x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_r = 0\}.$$

Для каждой точки $x \in X_\tau$ и любого $i = 1,\dots,r$ мы имеем

$$x_i(\rho_2(\rho_1(x))) = \rho_1^*(\rho_2^*(x_i))(x) = \rho_1^*(t^{m_i})(x).$$

Так как $\rho_1^*(t^{m_i}) = 1$ при $i = 1,\dots,k$ многообразие X_τ, содержится в аффинном пространстве

$$U_2 = \{(x_1, x_2, \dots, x_r) \in \mathbb{A}^r | x_1 = x_2 = \dots = x_k = 1\}.$$

Пересечение пространств U_1 и U_2 состоит из точки z. Таким образом, если мы отождествим T_zX с векторным подпространством в пространсве ассоциированным с $\mathbb{A}^r$ мы получим, что касательное пространство T_zO_F содержится в пространстве ассоциированном с U_1 и векторное пространство T_zX_τ содержится в векторном пространстве, ассоциированным с U_2. Таким образом их пересечение тривиально.

Размерность пространства T_zX_τ равна $|\mathcal{H}(\mathfrak{F}/\langle F\rangle)|$ (см. [11, Lemma 1.3.10]), а $\dim T_zO_F = \dim O_F$. Поэтому мы получаем неравенство

$$\dim T_zX \geq \dim O_F + |\mathcal{H}(\mathfrak{F}/\langle F\rangle)|.$$

Докажем, что

$$\dim T_zX \leq \dim O_F + |\mathcal{H}(\mathfrak{F}/\langle F\rangle)|.$$

Пусть $l = |\mathcal{H}(\mathfrak{F}/\langle F\rangle)|$ и пусть $p_1, \dots p_l$ — все неприводимые элементы в $\mathfrak{F}/\langle F\rangle$. Так как естественный гомоморфизм $\mathfrak{F} \to \mathfrak{F}/\langle F\rangle$ сюръективный и элементы $m_1, \dots m_k$ порождают $\mathfrak{F}$ их образы порождают $\mathfrak{F}/\langle F\rangle$. Но в $\mathfrak{F}/\langle F\rangle$ нет обратимых элементов кроме нуля (лемма 21), поэтому любой набор порождающих в $\mathfrak{F}/\langle F\rangle$ должен содержать $\mathcal{H}(\mathfrak{F}/\langle F\rangle)$.Так как $m_1, \dots m_k$ переходят в ноль, мы получаем, что есть l элементов среди $m_{k+1}, \dots, m_r$, чьи образы есть все неприводимые элементы в $\mathfrak{F}/\langle F\rangle$. Мы будем считать, что эти элементы — $m_{k+1}, \dots, m_{k+l}$.

Мы покажем, что для проивольной функции $f \in \mathbb{K}[X]$ ее дифференциал df в точке a есть линейная комбинация дифференциалов

$$dt^{m_1}, dt^{m_2}, \dots, dt^{m_k}, dt^{m_{k+1}}, dt^{m_{k+2}}, \dots, dt^{m_{k+l}}.$$

Достаточно доказать это, для функций t^{m_i} при $i > k + l$. Рассмотрим m_i с

$i > k+l$. Так как образы элементов $m_{k+1}, \dots m_{k+l}$ порождают $\mathfrak{F}/\langle F\rangle$ и $m_1, \dots m_k$ порождают $\langle F\rangle$ как группу, мы имеем

$$m_i = a_1m_1 + \ldots + a_km_k + b_1m_{k+1} + \ldots b_{l-k}m_{k+l}$$

где $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{Z}$ и $b_1, \dots, b_{l-k} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Поэтому

$$t^{m_i} = t^{a_1m_1} \dots t^{a_km_k} t^{b_1m_{k+1}} \dots t^{b_{l-k}m_{k+l}}.$$

В точке z функции t^{m_j} равны 1 при $j \leq k$ и равны нулю при $j > k$. Значит, если сумма $b_1 + \ldots + b_{l-k}$ больше 1, то

$$dt^{m_i} = d(t^{a_1m_1} \dots t^{a_km_k} t^{b_1m_{k+1}} \dots t^{b_{l-k}m_l}) = 0.$$

Если сумма $b_1 + \ldots + b_{l-k}$ равна 1, мы можем считать, что $b_1 = 1$ и $b_2 = \ldots = b_{l-k} = 0$. Тогда

$$dt^{m_i} = d(t^{a_1m_1} \dots t^{a_km_k} t^{m_{k+1}}) = t^{a_1m_1} \dots t^{a_km_k}(a) \cdot d(t^{m_{k+1}}) = d(t^{m_{k+1}}).$$

Если же сумма $b_1 + \ldots + b_{l-k}$ равна нулю, то $m_i \in F$ и $i \in \{1, \dots k\}$. Мы получили, что все dt^{m_i} при $i > l$ линейно зависимы с

$$dt^{m_1}, \dots, dt^{m_{k+l}}.$$

Размерность линейно оболочки дифференциалов $dt^{m_1}, \dots, dt^{m_k}$ равна размерности O_F. Поэтому размерность пространства

$$(T_zX)^* = \langle dt^{m_1}, \dots, dt^{m_{k+l}}\rangle$$

не больше, чем $\dim O_F + l$. Это завершает доказательство.

$\square$

Обозначим через W векторное пространство $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M/\langle F\rangle$. Естественный гомоморфизм $M \to M/\langle F\rangle$ можно продолжить до линейного отображения из $M_{\mathbb{Q}}$ в W. Обозначим это отображение через φ. Так как образ $\mathfrak{F}$ — это $\mathfrak{F}/\langle F\rangle$, то образом конуса $\sigma^\vee$ при линейном отображении φ будет $\tau^\vee$.

Лемма 22. *φ отображает грани конуса $\sigma^\vee$, содержащие F, на грани конуса $\tau^\vee$. Соответствие между множеством граней конуса $\sigma^\vee$, содержащих F, и множеством граней конуса $\tau^\vee$, определяемое φ, биективно.*

Доказательство. Мы имеем линейное отображение

$$\varphi^* : W^* \to {M_{\mathbb{Q}}}^*$$

и образ этого отображения состоит из всех линейных функций в $M_{\mathbb{Q}}^*$, у которых ядро содержит подпространство в $M_{\mathbb{Q}}$, порожденное элементами из $\langle F\rangle$.

Пусть G — грань $\sigma^\vee$, содержащая F. Тогда существует линейная функция $l \in M_{\mathbb{Q}}^*$, такая что $\ker l \cap \sigma^\vee = G$ и l неотрицательна на $\sigma^\vee$. Поскольку G содержит F, ядро l содержит $\langle F\rangle$. Поэтому существует линейная функция $l' \in W^*$, такая что $\varphi^*(l') = l$. Так как $\varphi(\sigma^\vee) = \tau^\vee$, то линейная функция l' неотрицательна на $\tau^\vee$. Поэтому $\ker\ l \cap \tau^\vee$ является гранью $\tau^\vee$. Обозначим эту грань G'.

Пусть $v \in G$. Тогда $l'(\varphi(v)) = l(v) = 0$. Поэтому $\varphi(v) \in G'$. Значит, $\varphi(G)$ содержится в G'. Пусть $w \in G'$. Существует $w' \in \sigma^\vee$, такое что $\varphi(w') = w$. Тогда

$$l(w') = \varphi^*(l')(w') = l'(\varphi(w')) = l'(w) = 0.$$

Следовательно, $w' \in G$. Таким образом, $\varphi(G) = G'$. Легко видеть, что полученое соответствие между гранями $\sigma^\vee$, содержащими F, и гранями конуса $\tau^\vee$ является биекцией.

□

Как и в предложении 3 для произвольной грани F конуса σ или $\sigma^\vee$ мы будем обозначать через $T_F X$ касательное пространство к X в некоторой точке орбиты O_F. Если Y — T-инвариантное подмногообразие в X, содержащее O_F, то через

$T_F Y$ мы обозначим касательное пространство к Y в некоторой точке орбиты O_F.

Следствие 8. *Пусть* $F_1 \preceq F_2 \preceq F_3 \preceq \sigma^\vee$ *и* $\dim T_{F_1} X = \dim T_{F_2} X$. *Тогда* $\dim T_{F_1}\overline{O_{F_3}} = \dim T_{F_2}\overline{O_{F_3}}$.

Доказательство. Так как $O_{F_1} \subseteq \overline{O_{F_2}}$, то $\dim T_{F_1}\overline{O_{F_3}} \geq \dim T_{F_2}\overline{O_{F_3}}$. Предположим, что

$$\dim T_{F_1}\overline{O_{F_3}} > \dim T_{F_2}\overline{O_{F_3}}.$$

Многообразие $\overline{O_{F_3}}$ торическое. Мы можем применить предложение 3. Значит,

$$\dim T_{F_1}\overline{O_{F_3}} = \dim O_{F_1} + |\mathcal{H}(\mathfrak{F} \cap F_3/\langle F_1\rangle)|,$$

$$\dim T_{F_2}\overline{O_{F_3}} = \dim O_{F_2} + |\mathcal{H}(\mathfrak{F} \cap F_3/\langle F_2\rangle)|,$$

и мы имеем

$$\dim O_{F_1} + |\mathcal{H}(\mathfrak{F} \cap F_3/\langle F_1\rangle)| > \dim O_{F_2} + |\mathcal{H}(\mathfrak{F} \cap F_3/\langle F_2\rangle)|.$$

Поскольку $\langle F_1\rangle$ — подгруппа в $\langle F_2\rangle$, мы имеем естественный гомоморфизм из $\mathfrak{F}/\langle F_1\rangle$ в $\mathfrak{F}/\langle F_2\rangle$. Полугруппы $\mathfrak{F}/\langle F_1\rangle$ и $\mathfrak{F}/\langle F_2\rangle$ не имеют обратимых элементов отличных от нуля. Поэтому они порождаются множествами своих неприводимых элементов и любые наборы порождающих элементов содрежат все неприводимые элементы. Аналогичное верно относительно полугрупп $\mathfrak{F} \cap F_3/\langle F_1\rangle$ и $\mathfrak{F} \cap F_3/\langle F_2\rangle$. Пусть $\{p_1, \dots p_k\}$ — множество всех неприводимых элементов в $\mathfrak{F} \cap F_3/\langle F_1\rangle$. Пусть $p'_1, \dots, p'_k$ — образы $p_1, \dots, p_k$ в $\mathfrak{F} \cap F_3/\langle F_2\rangle$. Мы будем предполагать, что $p'_1, \dots, p'_r$ неприводимы, а $p'_{r+1}, \dots, p'_k$ — нет. Поскольку

$$|\mathcal{H}(\mathfrak{F} \cap F_3/\langle F_1\rangle)| - |\mathcal{H}(\mathfrak{F} \cap F_3/\langle F_2\rangle)| > \dim O_{F_2} - \dim O_{F_1}$$

то $k - r > \dim O_{F_2} - \dim O_{F_1}$.

Пусть $W = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} M/\langle F_1\rangle$. Мы имеем линейное отображение $\varphi : M_{\mathbb{Q}} \to W$, которое является продолжением естественного гомоморфизма $M \to M/\langle F_1\rangle$.

Обозначим через $\tau^\vee$ конус в W, порожденный $\mathfrak{F}/\langle F_1\rangle$. Обозначим через F_3' образ $\varphi(F_3)$. Это грань конуса $\tau^\vee$ в силу леммы 22. Полугруппа $\mathfrak{F}\cap F_3/\langle F_1\rangle$ состоит из всех точек в решетке $M/\langle F_1\rangle$, которые принадлежат F_3' (см. лемму 21). Поэтому каждый неприводимый элемент в $\mathfrak{F}\cap F_3/\langle F_1\rangle$ неприводим в $\mathfrak{F}/\langle F_1\rangle$. Значит, $p_1,\dots,p_k$ неприводимы в $\mathfrak{F}/\langle F_1\rangle$.

Элементы $p'_{r+1},\dots,p'_k$ не неприводимы в $\mathfrak{F}\cap F_3/\langle F_2\rangle$, поэтому они не неприводимы в $\mathfrak{F}/\langle F_2\rangle$. Элементы $p_{r+1},\dots p_k$ неприводимы в $\mathfrak{F}/\langle F_1\rangle$, но их образы в $\mathfrak{F}/\langle F_2\rangle$ — нет. Но образ множества всех неприводимых элементов в $\mathfrak{F}/\langle F_1\rangle$ содержит множество неприводимых элементов в $\mathfrak{F}/\langle F_2\rangle$. Поэтому мы получаем

$$|\mathcal{H}(\mathfrak{F}/\langle F_1\rangle)|-|\mathcal{H}(\mathfrak{F}/\langle F_2\rangle)|\geq k-r>\dim O_{F_2}-\dim O_{F_1}.$$

Но $\dim T_{F_1}X=\dim T_{F_2}X$ и

$$\dim O_{F_1}+|\mathcal{H}(\mathfrak{F}/\langle F_1\rangle)|=\dim O_{F_2}+|\mathcal{H}(\mathfrak{F}\langle F_2\rangle)|.$$

Противоречие.

$\square$

4.2 Орбиты группы автоморфизмов торических многообразий

Теперь мы переходим к доказательству основных результатов данной главы.

Мы оставляем в силе обозначения предыдущего параграфа и положим $\dim X=n$.

Предложение 4. *Рассмотрим две орбиты O_{F_1} и O_{F_2} тора T на многообразии X, такие что $O_{F_1}\subseteq\overline{O_{F_2}}$ и $\dim O_{F_2}=\dim O_{F_1}+1$. Предположим, что следущие условия выполнены:*

(i) Есть только одна орбита O_F размерности $n-1$, такая что $O_{F_1}\subseteq\overline{O_F}$ и $O_{F_2}\nsubseteq\overline{O_F}$;

(ii) Для каждой орбиты O_F, такой что $O_{F_1} \subseteq \overline{O_F}$, существует орбита $O_{F'}$, такая что $O_F \subseteq \overline{O_{F'}}$, $O_{F_2} \subseteq \overline{O_{F'}}$ и $\dim T_{F'}X = \dim T_F X$.

Тогда орбиты O_{F_1} и O_{F_2} являются H_e-связными для некоторого корня Демазюра e. Обратно, если O_{F_1} и O_{F_2} являются H_e-связными, то условия (i) и (ii) выполнены.

Доказательство. Сначала докажем первое утверждение из формулировки теоремы. Рассмотрим случай, когда $\dim O_{F_1} = 0$ и $\dim O_{F_2} = 1$. Из условия (i) следует, что все ребра конуса $\sigma^\vee$ кроме F_2 принадлежат подпространству в $M_\mathbb{Q}$ коразмерности 1. Обозначим через U это подпространство. Поскольку $\dim O_{F_1} = 0$, то у $\sigma^\vee$ есть грань размерности 0. Значит, конус $\sigma^\vee$ острый. Тогда есть последовательность граней

$$F_1 = G_1 \preceq G_2 \preceq G_3 \ldots \preceq G_n,$$

такая, что $\dim G_i = i-1$ и $G_i \subseteq U$ при $i = 1, \ldots n$. Поскольку F_2 — единственное ребро $\sigma^\vee$, которое не содержится в U, для каждой грани $P \preceq \sigma^\vee$, которая содержится в U , конус, порожденный F_2 и P, будет гранью конуса $\sigma^\vee$ на единичку большей размерности. Обозначим через $G'_1, \ldots, G'_n$ соответствующие грани для граней $G_1, \ldots G_n$.

Мы докажем, что существует базис $e_1, \ldots e_n$ в M, такой что $e_1 \in F_2$ и $e_i \in G_i$ при $i = 2, \ldots, n$. Возьмем примитивный вектор на F_2 в качестве e_1. Предположим, что мы нашли вектора $e_1, \ldots, e_i$, такие что $e_j \in G_j$ при $j = 2, \ldots, i$, и векторы $e_1, \ldots e_j$ порождают группу $\langle G'_j \rangle$ при всех $j \leq i$.

Согласно условию (ii), мы имеем грань F', такую что $F_2, G_i \prec F'$ и $\dim T_{F'}X = \dim T_{G_i}X$. Поскольку G_i и F_2 — грани F', то G'_i тоже грань F'. Поэтому $\dim T_{G'_i}X \geq \dim T_{F'}X = \dim T_{G_i}X$. Но G_i — грань G'_i. Поэтому $\dim T_{G'_i}X \leq \dim T_{G_i}X$. Значит, мы получаем, что $\dim T_{G'_i}X = \dim T_{G_i}X$.

Согласно следствию 8 выполнено равенство

$$\dim T_{G'_i}\, \overline{O_{G'_{i+1}}} = \dim T_{G_i}\, \overline{O_{G'_{i+1}}}.$$

Обозначим через $\mathfrak{F}'$ полугруппу $\mathfrak{F} \cap G'_{i+1}$. Поскольку $\dim G'_{i+1} = i+1$ и $\dim G'_i = i$, то конус, порожденный полугруппой $\mathfrak{F}'/\langle G'_i \rangle$, имеет размерность 1. Поэтому есть только один неприводимый элемент в $\mathfrak{F}'/\langle G'_i \rangle$. Мы получаем:

$$\dim O_{G_i} + |\mathcal{H}(\mathfrak{F}'/\langle G_i \rangle)| = \dim O_{G'_i} + |\mathcal{H}(\mathfrak{F}'/\langle G'_i \rangle)| = i + 1.$$

Так как $\dim O_{G_i} = i - 1$, то число неприводимых элементов в $\mathfrak{F}'/\langle G_i \rangle$ равно двум. Обозначим через $\tau^\vee$ конус, порожденный полугруппой $\mathfrak{F}'/\langle G_i \rangle$. У конуса $\tau^\vee$ размерность 2. Значит, полугруппа $\mathfrak{F}'/\langle G_i \rangle$ порождается примитивными векторами на ребрах $\tau^\vee$. Обозначим эти вектора как a и b.

Согласно лемме 22, грани конуса $\tau^\vee$ — образы граней конуса G'_{i+1}, содержащих G_i. Грань G'_{i+1} отображается на конус $\tau^\vee$, грань G_i отображается в вершину $\tau^\vee$, и грани G'_i и G_{i+1} отображаются на ребра конуса $\tau^\vee$. Поэтому найдутся такие $a' \in G'_i$ и $b' \in G_{i+1}$, что их образами будут a и b соответственно. Поскольку элементы a и b порождают образ группы $\langle \mathfrak{F}' \rangle$, то a', b' и $\langle G_i \rangle$ порождают $\langle \mathfrak{F}' \rangle$. Элементы a' и все элементы в $\langle G_i \rangle$ принадлежат группе, порожденной $e_1, \ldots e_i$. Поэтому, если мы положим $e_{i+1} = b'$, то элементы $e_1, \ldots e_{i+1}$ будут порождать группу $\langle \mathfrak{F}' \rangle$, которая совпадает с $\left\langle G'_{i+1} \right\rangle$, так как $\mathfrak{F}$ насыщена.

Продолжая таким образом, мы получим элементы $e_1, \ldots e_n$, которые порождают группу $\langle \mathfrak{F} \rangle = M$. Поэтому $e_1, \ldots e_n$ — искомый базис. В этом базисе грань F_2 порождена вектором $(1, 0, \ldots, 0)$, а остальные ребра конуса $\sigma^\vee$ лежат в плоскости $x_1 = 0$. Двойственный конус будет иметь такой же вид. А значит элемент решетки M, который в базисе $e_1, \ldots, e_n$ имеет координаты $(-1, 0, \ldots, 0)$ — искомый корень Демазюра.

Теперь рассмотрим произвольный случай. Орбиты O_{F_1} и O_{F_2} являются H_e-связными тогда и только тогда, когда $e|_{F_1^\perp} \leq 0$ и $F_2^\perp$ — грань конуса $F_1^\perp$, задаваемая равенством $\langle v, e \rangle = 0$, где $F_1^\perp$ и $F_2^\perp$ — грани конуса σ двойственные к F_1 и F_2 соответственно (см. [2, Lemma 2.2]). Группа гомоморфизмов из $M/\langle F_1 \rangle$ в $\mathbb{Z}$ изоморфна подгруппе в N, состоящей из гомоморфизмов из M в $\mathbb{Z}$, у которых ядро содержит $\langle F_1 \rangle$. Последняя группа есть $\left\langle F_1^\perp \right\rangle$. Поэтому решетки $M/\langle F_1 \rangle$ и $\left\langle F_1^\perp \right\rangle$ двойственны. Обозначим через N' решетку $\left\langle F_1^\perp \right\rangle$ и через M'

решетку $M/\langle F_1\rangle$. Рассмотрим грань $F_1^\perp$ как конус в $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} N'$. Обозначим этот конус τ. Через τ' обозначим образ конуса $\sigma^\vee$ в $\mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} M/\langle F_1\rangle$.

Лемма 23. *Конус τ' дуальный к τ.*

Доказательство. Если $l\in\tau$, тогда l неотрицатильно на $\sigma^\vee$, поэтому l неотрицательно на τ'. Следодвательно, $\tau'\subseteq\tau^\vee$.

Докажем, что $\tau^\vee\subseteq\tau'$. Предположим, что смежный класс $v+\langle F_1\rangle$ принадлежит $\tau^\vee$, где $v\in M_{\mathbb{Q}}$. Тогда для каждого $l\in\tau$ мы имеем $\langle l, v+\langle F_1\rangle\rangle\geq 0$. Обозначим через $\rho_1,\ldots,\rho_r$ ребра конуса σ. Будем считать, что $\rho_i\in F_1^\perp$ только при $i\leq k$, где k — некоторое натуральное число. Рассмотрим ρ_i при $r\geq i>k$. Поскольку ρ_i не принадлежит $F_1^\perp$, то F_1 не содержится в $\rho_i^\perp$. Существует элемент $v_i\in F_1\cap M$, такой что $\langle\rho_i, v_i\rangle>0$. Положим $v'=v_{k+1}+\ldots+v_r\in F_1$. Тогда найдется натруальное s, такое что $\langle\rho_j, v+sv'\rangle\geq 0$, где $j=1,\ldots r$. Мы получаем, что $v+sv'\in\mathfrak{F}$. Следовательно, $v+\langle F_1\rangle\in\tau'$. Значит $\tau^\vee\subseteq\tau'$.

□

Обозначим через P_1 и P_2 грани $\tau^\vee$ дуальные к граням $F_1^\perp$ и $F_2^\perp$. Рассмотрим торическое многообоазие X_τ, которое соответствует конусу τ. Легко проверить, что орбиты O_{P_1}, O_{P_2} удовлетворяют условиям (i) и (ii) из формулировки теоремы, а также $\dim O_{P_1}=0$ и $\dim O_{P_2}=1$. Поэтому мы можем применить первую часть доказательства теоремы. Поэтому существует корень Демазюра $e'\in M'$, такой что $e'|_{F_1^\perp}\geq 0$ и $F_2^\perp$ является гранью $F_1^\perp$, заданной уравнением $\langle v, e\rangle=0$. Можно продолжить функцию e' как $\mathbb{Z}$-линейную функцию из N' в $\mathbb{Z}$ на N так, чтобы e' было положительна на ребрах конуса σ, которые не принадлежат грани $F_1^\perp$. Тогда мы получаем, что орбиты O_{F_2} и O_{F_1} $H_{e'}$-связны.

Теперь докажем вторую часть утверждения теоремы. Пусть есть корень Демазюра e, такой что $e|_{F_1^\perp}\leq 0$ и $F_2^\perp$ задано в $F_1^\perp$ уравнением $\langle v, e\rangle=0$.

Предположим, что условие (i) не выполнено и есть две грани $Q_1, Q_2\preceq\sigma^\vee$, такие что $\dim Q_1=\dim Q_2=n-1$, $F_1\preceq Q_1, Q_2$ и $F_2\not\preceq Q_1, Q_2$. Ребра $Q_1^\perp, Q_2^\perp$ содержаться в $F_1^\perp$ но не содержаться в $F_2^\perp$. Поэтому e отрицательно и на $Q_1^\perp$, и на $Q_2^\perp$. Но любой корень Демазюра отрицателен только на одном ребре конуса σ.

Теперь предположим, что условие (ii) не выполнено, и есть грань F, такая что $F_1 \preceq F$ но нет грани F', такой, что $F_2, F \preceq F'$ и $\dim T_{F'}X = \dim T_F X$. Предположим, что грань F имеет максимальную размерность среди всех граней, удовлетворяющих этому свойству. Пусть $m = \dim T_F X$. Тогда мы можем рассмотреть замкнутое множество $A_m = \{x \in X | \dim T_x X \geq m\}$. Множество A_m является объединением некоторых орбит в X и $O_{F_1} \subset A_m$. Докажем, что $\overline{O_F}$ является неприводимой компонентой множества A_m.

Множество $\overline{O_F}$ неприводимо, и следовательно содержится в некторой неприводимой компоненте A_m. Обозначим эту компоненту Y. Предположим, что в Y есть другие орбиты кроме O_F. Тогда среди них есть орбита, которая содержит остальные в своем замыкании. Инчае Y не было бы неприводимо. Обозначим эту орбиту $O_{F'}$. Так как $O_F \subseteq \overline{O_{F'}}$, то $\dim T_{F'}X \leq m$, а так как $O_{F'} \subseteq A_m$, то $\dim T_{F'}X = m$. Если $F_2 \preceq F'$, то F удовлетворяло бы условию (ii). Если $F_2 \npreceq F'$, то мы получаем противоречие с максимальностью размерности F. Значит, $Y = \overline{O_F}$.

Множество A_m инвариантно при любом автоморфизме многообразия X. Рассмотрим действие $\alpha_e : \mathbb{G}_a \to \mathrm{Aut}(X)$, которое соответствует корню Демазюра e. Так как $\mathbb{G}_a$ — связная группа, то каждая неприводимая компонента A_m инвариантна относительно этого действия. Поэтому $\overline{O}_F$ инвариантно. Но $O_{F_2} \nsubseteq \overline{O}_F$. Противоречие.

$\square$

Теорема 10. *Пусть O_1 и O_2 — орбиты тора T на многообразии X, и пусть $x_1 \in O_1$ и $x_2 \in O_2$. Тогда $\mathrm{Aut}^0(X)$-орбиты точек x_1 и x_2 совпадают тогда и только тогда, когда существует последовательность орбит*

$$O_1 = O'_1, O'_2, \ldots O'_k, \ldots O'_m = O_2,$$

такая, что размерности соседних орбит отличаются на единицу, $O'_i \subseteq \overline{O'_{i+1}}$ при $i < k$ и $O'_{i+1} \subseteq \overline{O'_i}$ при $i \geq k$, и для любой пары соседних орбит O'_i и O'_{i+1} выполнены следующие условия:

(i) Есть только одна орбита коразмерности 1 в X, которая содержит в

своем замыкании одну из орбит O'_i и O'_{i+1} и не содержит другую;

(ii) Для каждой орбиты U тора T, которая содержит в своем замыкании одну из орбит O'_i и O'_{i+1}, существует орбита U', которая содержит в своем замыкании обе орбиты O'_i и O'_{i+1}, и размерность касательного пространства в произвольной точке орбиты U совпадает с размерностью касательного пространства в произвольной точке U'.

Доказательство. Рассмотрим подгруппу $\mathrm{AT}(X)$ группы $\mathrm{Aut}(X)^0$, порожденную T и подгруппами H_e для всех корней Демазюра e. Тогда $\mathrm{AT}(X)$-орбиты совпадают с $\mathrm{Aut}(X)^0$-орбитами (смотри теорему 1, предложение 7 и предложение 3 в [6]). Но точки x и x' принадлежат одной $\mathrm{AT}(X)$-орбите тогда и только тогда, когда есть последовательность орбит

$$O_F = O_{F_1}, \ldots, O_{F_m} = O_{F'}$$

в X, такая что соседние элементы H_e-связны для некоторого корня Демазюра e. Тогда размерности соседних элементов в последовательности

$$F = F_1, \ldots, F_m = F'$$

отличаются на 1 и по предложению 4 они удовлетворяют условиям (i) и (ii). $\square$

Заключение

Подводя итоги, отметим, что основными результатами данной диссертации являются:

- доказательство гибкости аффинных орисферических многообразий полупростых групп (теорема 4);
- доказательство гибкости нормальных аффинных орисферических многообразий без обратимых функций отличных от констант (теорема 9);
- описание орбит связной компоненты единицы группы автоморфизмов торических многообразий, используя размерности касательных пространств в точках многообразия (теорема 10).

Помимо этого, можно выделить следующие результаты:

- получено достаточное условие существования $\mathbb{G}_a$-действия на многообразии, допускающем негиперболическое действие тора (предложение 2);
- полеучено достаточное условие гибкости AMDS многообразий (следствие 7);
- получена формула для подсчета размерности касательного пространства в точке торического многообразия (предложение 3).

В качестве основных направлений для дальнейших исследований можно выделить следующие задачи.

- Описать гибкие (ненормальные) аффинные орисферические многообразия.

- Описать гибкие аффинное сферическое многообразия.
- Описать орбиты группы автоморфизмов торических многообразий, не предполагая, что они нормальные.
- Описать орбиты группы автоморфизмов аффинных орисферических многообразий. Описать те (не открыте) орбиты, на которых $\mathrm{SAut}(X)$ действует бесконечно транзитивно.

Список литературы

[1] Аржанцев И.В., Гайфуллин С.А., *Кольца Кокса, полугруппы и автоморфизмы аффинных многообразий*, Математический сборник, **201**:1 (2010), 3-24.

[2] Аржанцев И.В., Зайденберг М.Г., Куюмжиян К.Г., *Многообразия флагов, торические многообразия и надстройки: три примера бесконечной транзитивности*, Математический сборник, **203**:7 (2012), 3–30.

[3] Винберг Э.Б., Онищик А.Л., *Семинар по группам Ли и алгебраическим группам*, Москва "Наука" Главная редакция физико-математической литературы, (1988).

[4] Винберг Э.Б., Попов В.Л., *Об одном классе квазиоднородных аффинных многообразий*, Известия Академии Наук СССР. Серия математическая, **36** (1972), 749-764.

[5] Перепечко А. Ю., *Гибкость аффинных конусов над поверхностями дель Пеццо степени 4 и 5*, Функциональный анализ и его приложения, **47**:4 (2013), 45–52.

[6] Arzhantsev I., Bazhov I., *On orbits of the automorphism group on an affine toric variety,* Open Mathematics **11**:10, (2013), 1713-1724.

[7] Arzhantsev I., Derenthal U., Hausen J., Laface A., *Cox rings*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press. **144**, New York, (2015).

[8] Arzhantsev I., Gaifullin S., *The automothism group of a rigid variety*, Mathematische Nachrichten, **290**:5-6, (2017), 662-671.

[9] Arzhantsev I., Flenner H., Kaliman S., Kutzschebauch F., Zaidenberg M., *Flexible varieties and automorphism groups*, Duke Mathematical Journal, **162**:4, (2013), 767-823.

[10] Bazhov I., *On orbits of the automorphism group on a complete toric variety*, Beitrage zur Algebra und Geometrie, **54**:2, (2013), 471-481.

[11] Cox D., Little J., Schenck H., *Toric Varieties*, American Mathematical Society. Graduate Studies in Mathematics, **124**, (2011).

[12] Donzelli F., *Makar-Limanov invariants, Derksen invariants, flexible points.* arXiv:1107.3340, (2011).

[13] Freudenburg G. *Algebraic Theory of Locally Nilpotent Derivations*, Springer, **136**, (2006).

[14] Fulton W., *Introduction to toric varieties,* Annals of Mathematics Studies, **131**, Princeton, (1993).

[15] Michalek M., Perepechko A., Hendrik S., *Flexible affine cones and flexible coverings*, Mathematische Zeitschrift, **209**:3-4, (2018), 1457-1478.

[16] Popov V., *On the Makar-Limanov, Derksen invariants, and finite automorphism groups of algebraic varieties*, Affine Algebraic Geometry: The Russell Festschrif. Centre de Recherches Mathematiques. CRM Proceedings and Lecture Notes, **54**, (2011), 289-312.

[17] Ramanujam C., *A note on automorphism groups of algebraic varieties,* Mathematische Annalen, **156**:1 (1964), 25–33.

[18] Timashev D., *Homogeneous spaces and equivariant embeddings*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, **138**, (2011).

Работы автора по теме диссертации.

Статьи в рецензируемых научных изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности 01.01.06.

[19] Шафаревич А.А. *Гибкость S-многообразий полупростых групп*, Математический сборник, **208**:2, (2017), 121-148.

[20] *Шафаревич А.А. Геометрическое описание орбит группы автоморфизмов аффинного торического многообразия*, Вестник Московского Университета, **79**:5, (2019), 55-58.

[21] Gaifullin S., Shafarevich A. *Flexibility of normal affine horospherical varities*, Proceedings of American Mathematical Society, **147**, (2019), 3317-3330. (Лично Шафаревичу А.А. принадлежит доказательство предложения 3 и лемма 3. С.А. Гайфуллину принадлежат предложение 4 и леммы 4 и 2. Теоремы 2 и 3, предложения 5,6,7 и следствия 1 и 2 получены совместно.)