

А.Е. БУКАТОВ. Л.В. ЧЕРКЕСОВ

Генерация внутренних волн придонными возмущениями

Исследуются внутренние волны, генерируемые в неоднородной жидкости периодическими колебаниями участка дна бассейна. Плотность жидкости экспоненциально возрастает с глубиной.

1.

И С Х О Д Я из линеаризованной системы уравнений движения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2\omega v = -\rho^{-1} \frac{\partial p}{\partial x}; \quad \frac{\partial v}{\partial t} + 2\omega u = -\rho^{-1} \frac{\partial p}{\partial y}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + g\rho^{-1}\rho_1 = -\rho^{-1} \frac{\partial p}{\partial z}; \quad \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial z} w = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

проведем исследование внутренних волн, генерируемых в непрерывно стратифицированной жидкости колебаниями участка дна бассейна происходящими с вертикальной скоростью

$$w^* = a f(x, y) \cos \sigma t. \quad (2)$$

Здесь ρ и ρ_1 - возмущения давления и плотности под влиянием движения; u, v, w - составляющие вектора скорости; 2ω - параметр Кориолиса.

Предположим, что в горизонтальных направлениях жидкость неограничена, а ее плотность в невозмущенном состоянии изменяется с глубиной бассейна по закону

$$\rho(z) = \rho_0 e^{\kappa z}. \quad (3)$$

Решение системы (1), удовлетворяющее граничным условиям

$$\rho_0 g \zeta - \rho(x, y, 0, t) = 0, \quad \zeta_t = w(x, y, 0, t)$$

на свободной поверхности ($z = \zeta$) и

$$w(x, y, -H, t) = w^*$$

на дне, найдем методом интегральных преобразований аналогично тому, как это проделано в работах [3, 4], где исследуются волны, генерируемые периодическими поверхностными давлениями. В результате этого для осесимметричных возмущений ($f(x, y) = f(R)$, $R = \sqrt{x^2 + y^2}$) при выполнении условий

$$\sigma^2 > \kappa g, \quad \sigma > 2\omega \quad (4)$$

находим

$$w = A(r_0, z) \sin \alpha_0, \quad \zeta = -A(r_0, 0) \sigma^{-1} \cos \alpha_0, \quad (5)$$

$$\rho = \sigma \rho(z) \eta^{-2}(r) A_{z_0}(r_0, z) \cos \alpha_0,$$

где

$$\eta = r\sigma / (\sigma^2 - 4\omega^2)^{1/2}, \quad \delta = \left[\frac{\kappa^2}{4} + \left(1 - \frac{\kappa g}{\sigma^2}\right) \eta^2 \right]^{1/2}, \quad \alpha_0 = r_0 R - \sigma t - \frac{\pi}{4},$$

$$A(r, z) = a_1 \beta \exp\left(\frac{\kappa z}{2}\right) \varphi(r, z) f(r) \varphi^{-1}(r, -H), \quad (6)$$

$$a_1 = -\alpha \sqrt{2\pi} \exp\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \quad \varepsilon = \kappa H, \quad \beta = \left(\frac{r}{R}\right)^{1/2},$$

$$\varphi(r, z) = \delta \operatorname{ch} \delta z - \left(\frac{\kappa}{2} - g \sigma^{-2} \eta^2\right) \operatorname{sh} \delta z,$$

$$f(r) = \int_0^\infty R f(R) J_0(rR) dR,$$

r_0 - единственный положительный корень уравнения

$$\left(\frac{\kappa}{2} - g \sigma^{-2} \eta^2\right) \operatorname{th} \delta H + \delta = 0,$$

а при условии

$$2\omega < \sigma < \sqrt{kg} \quad (7)$$

получаем

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} W_n, \quad \rho = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_n, \quad \zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta_n, \quad (8)$$

$$W_n = A(r_n, z) \sin \alpha_n, \quad \zeta = -A(r_n, 0) \sigma^{-1} \cos \alpha_n,$$

$$\rho_n = \sigma \rho(z) \eta^{-2}(r_n) A_z(r_n, z) \cos \alpha_n,$$

где

$$\delta = \left[\left(\frac{kg}{\sigma^2} - 1 \right) \eta^2 - \frac{k^2}{4} \right]^{1/2}, \quad \alpha_n = r_n R - \sigma t - \frac{\pi}{4}, \quad (9)$$

$$\psi(r, z) = \delta \cos \delta z - \left(\frac{k}{2} - g \sigma^{-2} \eta^2 \right) \sin \delta z,$$

A определяется по формуле (6); r_n - положительные корни уравнения

$$\left(\frac{k}{2} - g \sigma^{-2} \eta^2 \right) \operatorname{tg} \delta H + \delta = 0.$$

В плоском случае w , ζ и ρ будут определяться по формулам (5), (6) при условии (4) и по формулам (8), (9) при условии (7) с той, однако, разницей, что

$$\alpha_n = r_n x - \sigma t, \quad \delta = 1, \quad f(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-irx} dx.$$

Выражение для горизонтальной составляющей скорости имеет вид

$$u = r_0^{-1} A_z(r_0, z) \cos \alpha_0 \quad (10)$$

при выполнении условий (4), а при условии (7)

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n, \quad u_n = r_n^{-1} A_z(r_n, z) \cos \alpha_n. \quad (11)$$

Следует отметить, что если в выражениях (5), (10) положить

$$\alpha_1 = - \frac{\sqrt{2\pi} a}{\rho_0 \sigma} \eta^2 \frac{\operatorname{ch} \delta H}{\frac{k}{2} - g \sigma^{-2} \eta^2}, \quad (12)$$

а в выражениях (8), (11)

$$\alpha_1 = - \frac{\sqrt{2\pi} \alpha}{\rho_0 \sigma} \eta^2 \frac{\cos \delta H}{\frac{\kappa}{2} - g \sigma \eta^2}, \quad (13)$$

то получим формулы, описывающие волновое движение, генерируемое периодическими поверхностными давлениями.

2.

Из формул (5)-(11) видно, что при $\sigma^2 > \kappa g$, $\sigma > 2\omega$ периодические колебания дна бассейна генерируют в непрерывно стратифицированной жидкости только одну поверхностную волну. Амплитуда этой волны непрерывно убывает с глубиной, принимая максимальное значение на свободной поверхности. Анализ показал, что влияние неоднородности на элементы этой волны не превышает 1%.

При $2\omega < \sigma < \sqrt{\kappa g}$ периодические колебания дна бассейна генерируют в неоднородной жидкости бесконечный спектр волн-гармоник. Волна с номером $n = 0$ представляет собою обычную поверхностную волну, деформация элементов которой за счет неоднородности для $\kappa H < 10^{-2}$ меньше 1%. Волны с номерами $n \geq 1$ - чисто внутренние волны, обусловленные наличием плотностной стратификации. Эти волны отличаются от волн, генерируемых при аналогичных условиях периодическими давлениями только амплитудным множителем (13), не зависящим от z . Следовательно, зависимость w_n , u_n , ρ_n от z в случае периодических колебаний дна бассейна будет качественно такой же, как и в случае периодических поверхностных давлений. Для вертикальной составляющей скорости w_n при периодических поверхностных давлениях и $\rho(z)$ вида (3) эта зависимость исследована в работе [3]. Фазовые скорости ($v_n = \frac{\sigma}{\tau_n}$), так же как и длины внутренних волн ($\lambda_n = \frac{2\pi}{\tau_n}$), генерируемых указанными возмущениями, одинаковые.

На рис. 1 приведена зависимость длин внутренних волн λ_n первых четырех гармоник ($n = 1, 2, 3, 4$) от σ (сек⁻¹) при $7 \cdot 10^{-5} \leq \sigma \leq 2 \cdot 10^{-3}$, $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$ (рис. 1, а) и зависимость λ_n от ε при $0 \leq \varepsilon \leq 5 \cdot 10^{-3}$ для $\sigma = 2,9 \cdot 10^{-4}$ сек⁻¹ (рис. 1, б). Глубина бассейна и параметр Кориолиса принимались равными $H = 2080$ м, $2\omega = 6,6 \cdot 10^{-5}$ сек⁻¹. На рис. 1, а видно, что λ_n при фиксированном ε монотонно убывают с ростом σ . Причем с увеличением σ величина $|\partial \lambda_n / \partial \sigma|$

уменьшается. Кроме того, уменьшение λ_n с ростом σ тем сильнее, чем больше n . Отметим, что $\lambda_n \rightarrow 0$ при $\sigma \rightarrow \sqrt{kg}$. Для фиксированного σ (рис. 1, б) увеличение перепада плот-

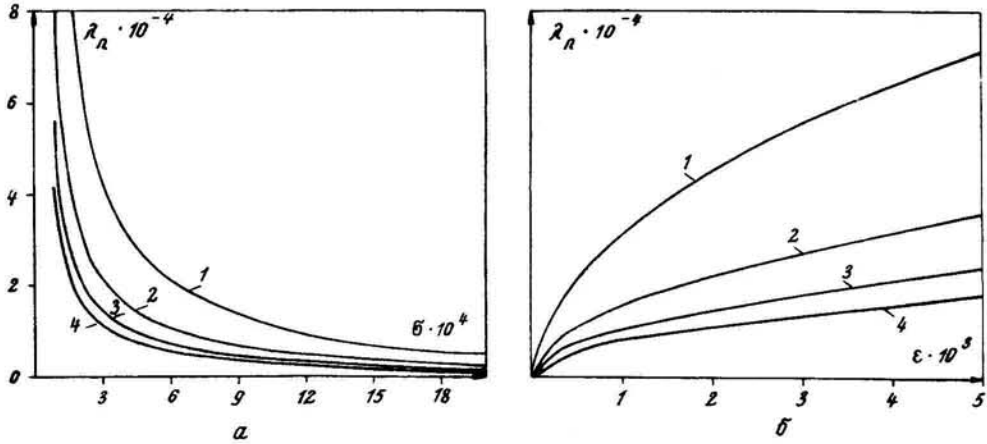


Рис. 1. Зависимость длин внутренних волн-гармоник от частоты колебаний и перепада плотности

ности ε приводит к значительному росту длин внутренних волн. При этом для одного и того же значения $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$ тангенс угла наклона прямой, проведенной из начала координат ($\varepsilon = 0, \lambda = 0$) в точку на кривой $\lambda_n(\varepsilon)$, уменьшается с увеличением номера n . Аналогично ведет себя и тангенс угла наклона касательной к кривой $\lambda_n(\varepsilon)$ при $\varepsilon = \bar{\varepsilon}$.

Для выяснения влияния неоднородности жидкости и частоты колебаний на распределение w, u и p плоских волн проводились численные расчеты по формулам (8), (11) для функции $f^0(x)$ вида

$$f^0(x) = \begin{cases} \cos^2 \frac{\pi x}{2\ell} & |x| \leq \ell \\ 0 & |x| > \ell \end{cases} \quad (14)$$

при $2\omega = 6,6 \cdot 10^{-5} \text{ сек}^{-1}$, $\ell = 10^4 \text{ м}$, $H = 2080 \text{ м}$, значениях σ (сек^{-1}) и ε , изменяющихся в пределах

$$7 \cdot 10^{-5} \leq \sigma \leq 5 \cdot 10^{-3}, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 5 \cdot 10^{-3}. \quad (15)$$

Вычислялись оценки максимальных значений вертикальной и горизонтальной составляющих скорости, а также давления p , справедливые на заданном горизонте при любом значении x . Эти величины обозначены соответственно через $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$. Зависимости $\bar{A}(z)$ и $\bar{B}(z)$ приведены с точностью

до множителя α на рис. 2 при $\bar{b} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ сек}^{-1}$, где линии с номерами 1, 2, ..., 6 отвечают значениям перепада плотности ε , равным соответственно 0 ; $5 \cdot 10^{-4}$; 10^{-3} ; $2 \cdot 10^{-3}$; $4 \cdot 10^{-3}$; $5 \cdot 10^{-3}$.

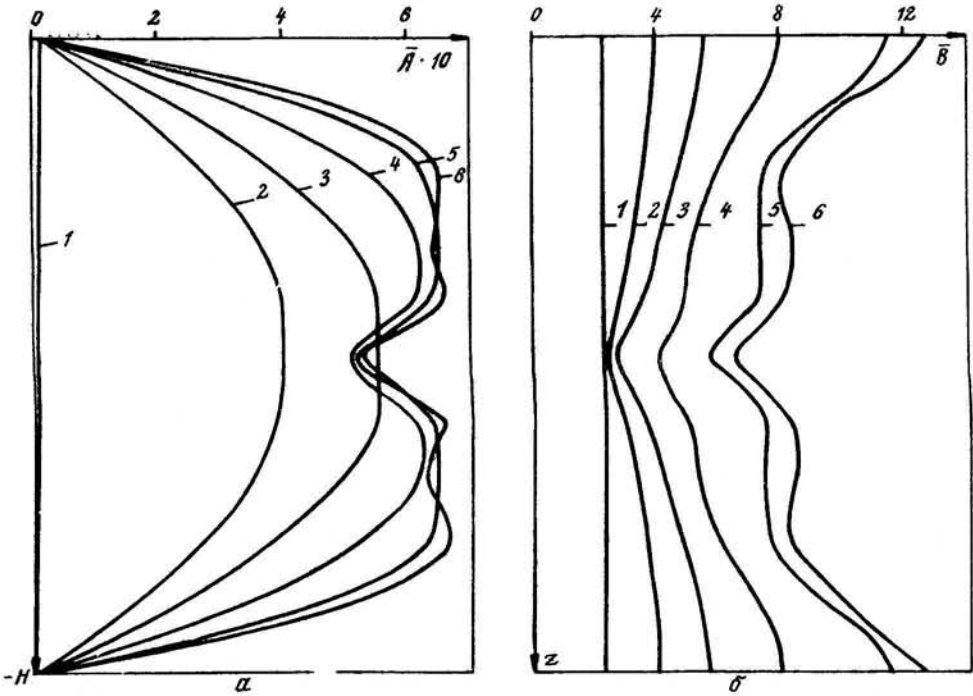


Рис. 2. Влияние изменения перепада плотности на распределение $\bar{A}(z)$ и $\bar{B}(z)$

На этом рисунке видно, что увеличение перепада плотности от 0 до $5 \cdot 10^{-3}$ при фиксированном \bar{b} приводит к увеличению $\max \bar{A}(z) = \bar{A}^*$ и $\max \bar{B}(z) = \bar{B}^*$ соответственно в 4,8 и 5,3 раза. Качественная картина распределения $\bar{A}(z)$ и $\bar{B}(z)$ для различных ε при $\bar{b} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ сек}^{-1}$ также различна. Если для $0 \leq \varepsilon \leq 10^{-3}$ функция $\bar{A}(z)$ принимает в окрестности середины глубины бассейна максимальное значение, то при $\varepsilon \geq 2 \cdot 10^{-3}$ в этой окрестности имеет место значительное уменьшение $\bar{A}(z)$. Кроме того, толщина слоя жидкости, где величина $\bar{A}(z)$ сравнима с \bar{A}^* , увеличивается с ростом ε .

Горизонтальная составляющая скорости, как видно на рис. 2, б, может принимать максимальное значение как у свободной поверхности, так и у дна. Минимальное же значение $\bar{B}(z)$ достигается в окрестности середины глубины.

При этом отношение $\bar{B}(0)/\bar{B}(-\frac{H}{2})$ возрастает в 1,9 раза при изменении ε от 0 до $5 \cdot 10^{-3}$.

Изменения в распределении $\bar{A}(z)$ и $\bar{B}(z)$, связанные с увеличением периода колебаний при фиксированном ε , качественно такие же, как и при увеличении ε для фиксированного \bar{b} .

На рис. 3-5 изображены с точностью до множителя α функции $A^*(\varepsilon)$, $B^*(\varepsilon)$ и функции $A^*(\bar{b})$, $B^*(\bar{b})$. Линии с номерами 1-5 на рис. 3, 4 отвечают значениям $\bar{b} \cdot 10^{-4}$ (сек⁻¹),

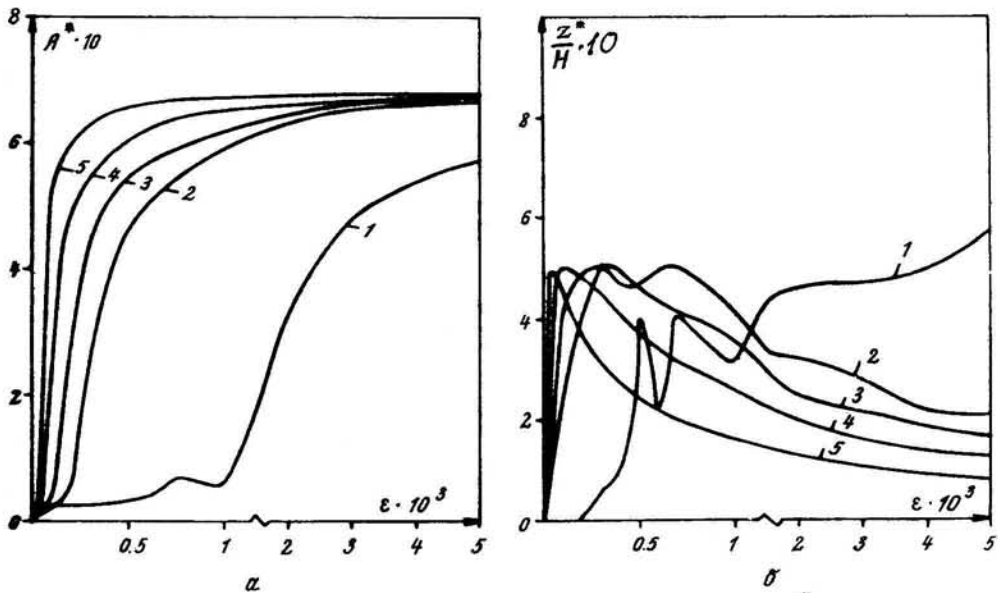


Рис. 3. Влияние изменения ε на величину A^* и глубину ее залегания

равным 8,7; 3,625; 2,9; 2,175; 1,45. На рис. 3,а видно, что неоднородность жидкости приводит к существенному увеличению A^* . В частности, для $\bar{b} = 8,7 \cdot 10^{-4}$ сек⁻¹ отношение $A^*(\varepsilon_1)/A^*(0)$, где $\varepsilon_1 = 5 \cdot 10^{-3}$, равно 18,8, а с уменьшением \bar{b} до $1,45 \cdot 10^{-4}$ сек⁻¹ оно возрастает до 168. При этом для каждого \bar{b} существует свое $\varepsilon = \varepsilon_2$, при котором производная $\partial A^*(\varepsilon)/\partial \varepsilon$ принимает максимальное значение. Величина ε_2 уменьшается с уменьшением \bar{b} . Кроме того, для фиксированного $\varepsilon > \varepsilon_2$ производная $\partial A^*(\varepsilon)/\partial \varepsilon$ тем меньше, чем меньше \bar{b} .

Значения $\max \bar{A}(z) = A^*$, изображенные на рис. 3,а, достигаются на глубинах z^* (рис. 3,б). Максимум функции $z^*(\varepsilon)$

примерно равен $\frac{H}{2}$ для частот $\sigma \leq 3,625 \cdot 10^{-4} \text{ сек}^{-1}$, но достигается он для каждого σ при различных значениях $\varepsilon = \varepsilon^*$. Меньшему значению σ соответствует меньшее ε^* . При $\varepsilon > \varepsilon^*$ функция z^* убывает. Следовательно, увеличение перепада плотности от ε^* до $5 \cdot 10^{-3}$ смещает положение Λ^* к свободной поверхности.

При фиксированном значении $\varepsilon \neq 0$ величина Λ^* значительно возрастает с уменьшением частоты колебаний в области (15), что иллюстрируется рисунком 5,а. Отметим при этом, что хотя внутренние волны (гармоники с номерами $n \geq 1$) генерируются при выполнении условия

$2\omega < \sigma < \sqrt{kg}$, но их вклад в волновое движение заметно сказывается лишь для периодов, значительно превышающих $\frac{2\pi}{N} (N = \sqrt{kg})$. Например, перепаду плотности

$\varepsilon = 5 \cdot 10^{-3}$ соответствует значение $N = 4,8 \cdot 10^{-3} \text{ сек}^{-1}$, а влияние неоднородности

начинает сказываться лишь при $\sigma < \sigma_1 = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ сек}^{-1}$ (рис. 5,а). Длина интервала $N - \sigma_1$ частотного спектра

укорачивается с уменьшением ε ($0 < \varepsilon \leq 5 \cdot 10^{-3}$). Величина

N/σ_1 , характеризующая размеры указанного интервала,

изменяется при этом от 1,38 до 1,92.

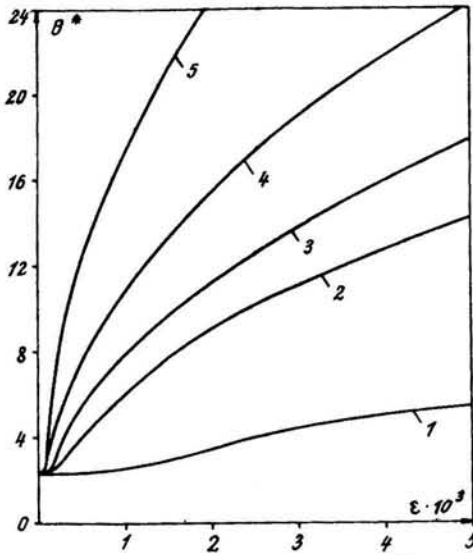


Рис. 4. Зависимость $\sigma^*(\varepsilon)$

на N/σ_1 , характеризующая размеры указанного интервала, изменяется при этом от 1,38 до 1,92.

Верхняя граница значений горизонтальной составляющей скорости σ^* при фиксированном σ (рис. 4) возрастает с увеличением ε . Причем в однородной жидкости значения σ^* для рассматриваемого диапазона частот σ примерно одинаковы. При изменении σ от $8,7 \cdot 10^{-4} \text{ сек}^{-1}$ до $1,45 \cdot 10^{-4} \text{ сек}^{-1}$ отношение $\sigma^*(\varepsilon)/\sigma^*(0)$, где $\varepsilon_1 = 5 \cdot 10^{-3}$, возрастает от 2,4 до 16,5.

На рис. 5,б изображена зависимость $\sigma^*(\sigma)$ для $\sigma < 10^{-3} \text{ сек}^{-1}$ и ряда значений ε . Отсюда видно, что большему периоду колебаний при $\varepsilon \neq 0$ соответствует большее значение σ^* . Наиболее сильные изменения функции $\sigma^*(\sigma)$ имеют место в области низких частот и в особенности в окрестности $\sigma = 2\omega$, где поведение $\sigma^*(\sigma)$ для

$\varepsilon \neq 0$ носит резонансный характер. При $\sigma > 2,5 \cdot 10^{-3}$ сек $^{-1}$ линии 1-6 на рис. 5, 6 совпадают, т.е. влияние неоднородности жидкости на таких частотах несущественно.

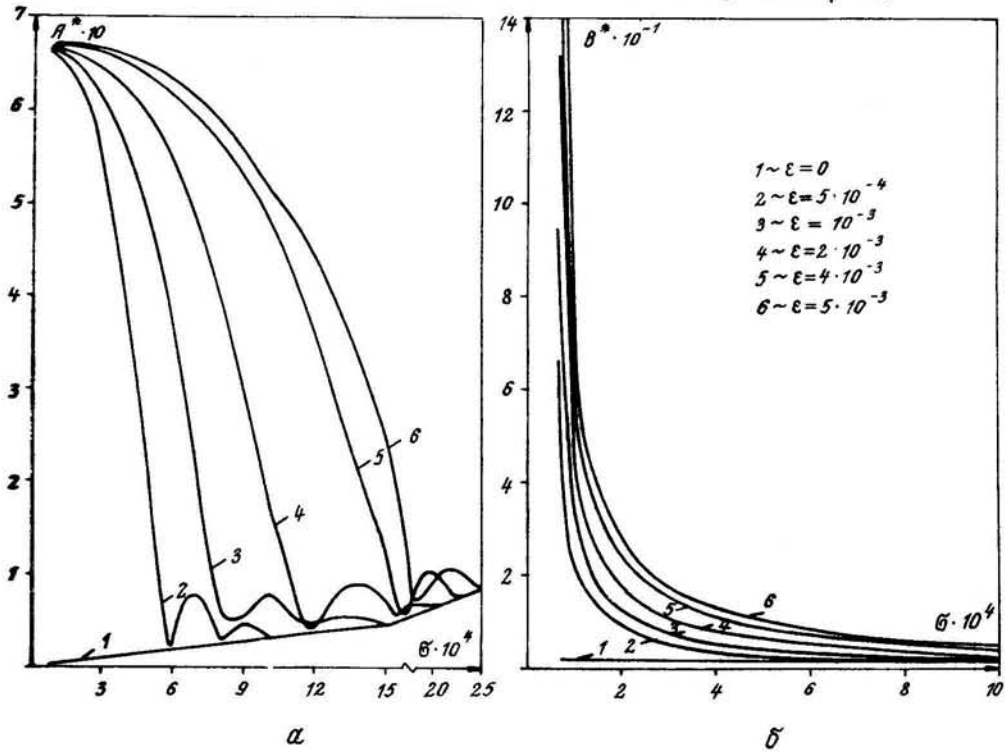


Рис. 5. Распределение A^* и B^* по частотному спектру

Что касается $\bar{C}(z)$, то на дне и на свободной поверхности эта функция, характеризующая собою оценку возмущенного давления, принимает примерно равные значения (C^*). При $0 < z < -0,5H$ функция $\bar{C}(z)$ монотонно убывает, а при $-0,5H < z < -H$ монотонно возрастает с глубиной. Однако при значениях параметров (15) уменьшение величины $\bar{C}(z)$ при изменении z от нуля до $-\frac{H}{2}$ не превосходит 9,5%. Причем отклонение $\bar{C}(-\frac{H}{2})$ от C^* уменьшается с ростом частоты колебаний и возрастает с увеличением перепада плотности. В таблице для иллюстрации даны в процентах величины этих отклонений для ряда значений ε и σ .

На рис. 6 приведена с точностью до множителя $\alpha \rho_0$ зависимость C^* от σ при $\varepsilon = 0$ (однородная жидкость) и $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-3}$. Для $0 < \varepsilon < 5 \cdot 10^{-3}$ функция $C^*(\sigma)$ принимает значения между кривыми 1 и 2. Отсюда видно, что как в

Таблица

Влияние изменения σ и ε на отклонение $\bar{c}(-\frac{H}{2})$ от c^*

$\sigma \cdot 10^4 \text{сек}^{-1}$ \ / $\varepsilon \cdot 10^3$	0,725	1,45	2,175	2,9	3,625
1	4,2	2,2	1,8	1,5	1,2
2	6,1	3,8	3,2	2,6	2,6
3	7,2	4,9	3,8	3,4	3,1
4	9,0	5,7	4,9	4,5	3,6
5	9,5	6,5	5,7	4,7	4,2

однородной, так и в неоднородной жидкости амплитуда возмущенного давления резко возрастает с изменением σ от $7,25 \cdot 10^{-5} \text{сек}^{-1}$ до $3 \cdot 10^{-4} \text{сек}^{-1}$. В частности, для $\varepsilon = 0$ величина $c^*(\sigma)$ возросла при этом более чем в 2,5 раза. На частотах $\sigma > 3 \cdot 10^{-4} \text{сек}^{-1}$ поведение $c^*(\sigma)$ близко к линейному. Неоднородность жидкости приводит к увеличению c^* . Это увеличение изменяется в пределах от 20% для

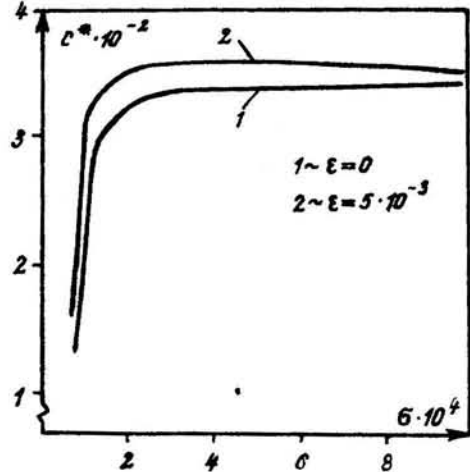


Рис. 6. Зависимость $c^*(\sigma)$

$\sigma = 7,25 \cdot 10^{-5} \text{сек}^{-1}$ до 2% при $\sigma = 10^{-3} \text{сек}^{-1}$. Отметим, что при $\sigma \geq 1,5 \cdot 10^{-3} \text{сек}^{-1}$ влияние неоднородности на c^* фактически не сказывается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Срегенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. ОНТИ, М., 1936.
2. Войт С.С. Волны на свободной поверхности и поверхности раздела от периодически действующего источника. Тр. МГИ АН УССР, 1960, т. 24.
3. Абрашина Н.Н., Черкесов Л.В. Внутренние волны от

- периодических поверхностных возмущений в жидкости с непрерывно меняющейся плотностью. - В кн.: "Морские гидрофизические исследования", 2(48). Севастополь, изд. МГИ АН УССР, 1970.
4. Букатов А.Е. О внутренних волнах в непрерывно стратифицированном океане. - В кн.: "Морские гидрофизические исследования", 6(56). Севастополь, изд. МГИ АН УССР, 1971.
5. Fjeldstad J.E. *Interne Wellen.-Geofys. Publ.*, Vol. 10, No. 6, 1933.

A.E.BUKATOV, L.V.CHERKESOV

GENERATION OF INTERNAL WAVES BY BOTTOM DISTURBANCES

Internal waves generated by periodic disturbances of a section of the basin bottom in a non-uniform fluid are investigated. The fluid density increases exponentially with depth.