

ОТЗЫВ

официального оппонента на диссертацию Надежды Александровны
Стрижовой «Гамильтонова геометрия уравнений ассоциативности»,
представленной на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук
по специальности 01.01.04 — геометрия и топология

Уравнения ассоциативности (или WDVV-уравнения) впервые возникли в начале 1990-х годов в работах Р. Виттена в связи с исследованием двумерной гравитации и Р. Дайкхраафа, Г. и Э. Верлинде при вычислении корреляционных функций в минимальных топологических теориях поля. Вскоре выяснилось, что эти уравнения имеют многочисленные приложения в самых разных областях математики и математической физики — суперсимметричной двумерной теории Янга–Миллса, теории Зайберга–Виттена, уравнениях Уизема, в интегрируемых системах с бесконечным числом степеней свободы. Б. Дубровин построил геометрическую теорию WDVV-уравнений, введя понятие фробениусова многообразия, а О. Мохов обратил внимание на тесную и плодотворную связь этих уравнений с системами гидродинамического типа. Исследованию некоторых аспектов этой связи и посвящена диссертация Н.А. Стрижовой.

Работа состоит из введения, четырёх глав основного текста, заключения и списка литературы, включающего в себя 36 наименований.

Во *введении* дана общая характеристика работы, обосновывается её актуальность, значимость и новизна, сформулированы цели и задачи диссертационного исследования и дана краткая характеристика его структуры.

В *первой главе*, носящей обзорный характер, обсуждаются известные определения, результаты и конструкции, необходимые для изложения и понимания основного материала глав 2–4. Сюда относятся общие сведения об уравнениях ассоциативности и системах гидродинамического типа и связях между ними. Описывается критерий Богоявленского–Рейнольдса, на который опираются некоторые доказательства гл. 2, процедура гамильтоновой редукции эволюционного потока на множество стационарных точек интеграла (по О. Мохову), играющая ключевую роль в конструкциях третьей главы.

Глава 2 содержит классификацию уравнений ассоциативности с тремя примарными полями (т.е. с тремя независимыми переменными) относительно линейных замен переменных t^2 и t^3 . Основной результат этой классификации дан в теореме 2.3.3 (с. 36–37). С помощью полученной классификации дан полный ответ на вопрос, какие уравнения ассоциа-

тивности сводятся к гамильтоновым (типа Дубровина–Новикова) системам гидродинамического типа. При этом используется критерий Богоявленского–Рейнольдса. Описаны соответствующие гамильтоновы структуры и гамильтонианы.

В *третьей главе* изучаются гамильтоновы редукции уравнений ассоциативности. Рассмотрен случай антидиагональной матрицы η для уравнений с тремя и четырьмя примарными полями. Основываясь на подходе О. Мохова и классической схеме Ленарда–Магри, автор получает следующие основные результаты:

- найдены интегралы соответствующей системы гидродинамического типа (§ 3.1);
- описана гамильтонова редукция на стационарные точки невырожденного интеграла (§ 3.2);
- показано, что в случае трёх примарных полей полученная редукция интегрируема по Лиувиллю (теорема 3.3.3 на с. 58);
- исследованы и описаны гамильтоновы редукции для случая четырёх примарных полей, найдены их гамильтонианы и показана инволютивность последних (теорема 3.5.1, с. 65).

Четвёртая глава является приложением к двум предыдущим и содержит вычислительные результаты, которые нецелесообразно включать в основной текст из-за из громоздкости.

В *заключении* подводятся итог полученным результатам и намечаются перспективы дальнейших исследований.

Конечно, текст не лишён некоторых *недостатков*:

1. Моё первое замечание относится не к содержанию, а к форме изложения — точнее, к его языку. Вот, например, предпоследний абзац на с. 6: он состоит из единственного предложения и содержит 64 (шестьдесят четыре слова). Когда его кончаешь читать, забываешь, что было в начале. Подобных примеров в тексте, к сожалению, немало.
2. Не слишком хороша формулировка «Классификация уравнений ассоциативности относительно наличия гамильтонова оператора...» (с. 6 и во многих других местах). Всё-таки классифицируют обычно относительно действия какой-то группы (что, собственно в диссертации и сделано).

3. Значительная часть работы посвящена изучению уравнений ассоциативности с антидиагональной матрицей η , но нигде (я, по крайней мере, этого не нашёл) не сказано, почему этот случай особенно важен и интересен. Хотелось бы большей ясности.
4. Мне кажется, что-то не в порядке с обозначениями в § 1.5: сначала, очевидно, нижний индекс в $u_{(r)}^i$ является мультииндексом (с. 27), но потом автор с ним обращается как с целым числом ($u_{(i-1)}^k$ в формуле (1.27)), никак это не поясняя. Тем не менее, в основной части работы (гл. 3) обозначения корректны.
5. На мой взгляд, не вполне корректно говорить об *эквивалентности* уравнений WDVV и соответствующих систем гидродинамического типа (хотя, конечно, связь между ними очень тесная). Всё-таки исходная функция f зависит от A, B, C, D нелокально — мы же не говорим, что уравнение КдФ эквивалентно его потенциальному аналогу!
6. Из формулировки и доказательства теоремы 2.3.3 не ясно, являются ли уравнения, которые принадлежат одному классу из четырёх указанных, попарно неэквивалентными при разных значениях параметров λ и μ ?
7. При использовании схемы Ленарда–Магри (с. 51 и далее) следует дать релевантную ссылку.
8. На с. 24, видимо, имеются в виду *шестикомпонентные*, а не *шестимерные* системы.
9. И, наконец, последнее. В примерах 1.3.1 (с. 19) и 1.3.4 (с. 22) рассматривается одно и то же уравнение ассоциативности с антидиагональной трёхмерной матрицей η , и функция $F(t^1, t^2, t^3) = \frac{1}{2}(t^1)^2 t^3 + \frac{1}{2} t^1 (t^2)^2 + f(t^2, t^3)$ в этих примерах, естественно, одинакова. Почему же тогда различаются уравнения (1.6) и (1.13)?

Сделанные замечания не умаляют достоинств работы и не влияют на общее благоприятное впечатление, которое она производит.

На основании сказанного выше могу с уверенностью утверждать, что диссертация Надежды Александровны Стрижовой является законченным научным исследованием, выносимые на защиту результаты получены автором самостоятельно, интересны и, насколько я могу судить, новы. Все они опубликованы рецензируемых научных журналах, индексируемых в Web of Science и Scopus. Доказательства разумно полны и

корректны. Автореферат соответствует тексту диссертации и адекватно отражает её содержание и полученные в ней результаты.

Считаю, что работа удовлетворяет всем критериям, сформулированным в пп. 2.1–2.5 «Положения о присуждении учёных степеней в Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова», предъявляемым к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.04 — геометрия и топология. Текст работы оформлен в соответствии с приложениями № 5 и 6 «Положения о диссертационном совете Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова». Диссертация соответствует паспорту специальности 01.01.04 – Геометрия и топология по направлению «Симплектическая, контактная и пуассонова геометрия», а её автор Надежда Александровна Стрижова несомненно заслуживает искомой степени.

Официальный оппонент
главный научный сотрудник
Института проблем управления РАН,
д.ф.-м.н., профессор
+74953348910; dan@ipu.ru; 117997, Москва, ул. Профсоюзная, д. 65

И.С. Красильщик

9 октября 2019 г.

Подпись Красильщика И.С. заверяю

Подпись *Красильщика И.С.*

ЗАВЕРЯЮ

ВЕД.ИНЖЕНЕР

Жукова Н.И.

