

ОТЗЫВ
официального оппонента на диссертационную работу
Ложникова Михаила Андреевича
«О некоторых разностных схемах для уравнений газовой динамики»,
представленную на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук по специальности
01.01.07 — «Вычислительная математика»

Актуальность темы. Диссертация М.А. Ложникова посвящена построению и теоретическому исследованию разностных схем для уравнений газовой динамики, представляющих значительный теоретический и практический интерес. В диссертационной работе проведено теоретическое исследование предложенных разностных схем, выполнены численные эксперименты на стандартных модельных задачах для сравнения с другими схемами, а также проведено сравнение результатов одного из трехмерных расчетов с результатами натурного эксперимента.

В настоящее время для решения уравнений газовой динамики используются как правило явные разностные схемы. Для таких схем обычно нет обоснования существования решения «в целом», свойства решения исследуются только на следующем шаге по времени.

Для специальных неявных разностных схем в переменных Лагранжа в пространственно одномерном случае удается дать полное обоснование «в целом» по времени и по данным. Однако, для разностных схем в переменных Эйлера такой развитой теории нет. В работе автора предлагаются неявные разностные схемы в переменных Эйлера, гарантирующие положительность сеточной функции плотности. На неструктурированных треугольных сетках такие результаты получены впервые. Таким образом, результаты диссертационной работы представляют значительный интерес для теории разностных схем газовой динамики и вычислительной математики.

Отметим, что в диссертационной работе проведены не только численные эксперименты на модельных задачах, но и сравнение результатов численного моделирования с натурным экспериментом на реальном физическом объекте. Сравнение показало, что численный эксперимент с хорошей точностью совпадает с натурным экспериментом. Таким образом, предложенные алгоритмы показали эффективную работу на реальных областях для реальных физических устройств, что представляет большой практический интерес.

Краткая характеристика основного содержания работы

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Объем работы составляет 110 страниц. Список литературы включает 53 наименования.

Во **введении** приводится краткий обзор численных методов решения задач газовой динамики и дается краткое перечисление основных результатов диссертационной работы.

В **первой** главе вводятся основные обозначения сеточных множеств и сеточных операторов на одномерных и двумерных ортогональных сетках, а также на треугольных сетках и на тетраэдральных неструктурированных сетках. Затем приводится построение сеточных аналогов операторов дивергенции и градиента, согласованных между собой. В конце главы формулируется ряд известных утверждений, используемых далее в работе, а также доказывается вспомогательная теорема, необходимая для доказательства положительности сеточной функции плотности в предложенных разностных схемах.

Вторая глава посвящена построению и исследованию специальной разностной схемы для уравнений динамики вязкого баротропного газа в прямом канале с переменным во времени и по пространственной переменной сечением. Доказана положительность сеточной функции плотности, установлены сеточный аналог закона сохранения массы и энергетическое неравенство.

В **третьей** главе описывается метод ускорения численной стабилизации решения одномерных уравнений динамики вязкого баротропного газа к стационарному решению с помощью вариации начальных данных. В настоящее время существует значительное число работ по стабилизации уравнений Навье-Стокса к стационарному решению как в одномерных, так и в многомерных областях, однако для разностных аналогов нелинейных уравнений газовой динамики это делается впервые. Для решения поставленной задачи используется метод нулевого приближения, то есть искомое управление ищется для линеаризованной задачи на каждом шаге разностной схемы, а затем применяется для исходной нелинейной задачи. Для аппроксимации исходной задачи используются смещённые сетки В.И. Лебедева, поэтому решение линеаризованной задачи можно выписать явно при помощи метода Фурье. В данной главе исследован спектр линеаризованной задачи, доказана теорема о представлении решения линеаризованной задачи, а также выведены оценки на скорость сходимости линеаризованной задачи. В конце главы приведены результаты численных расчетов, подтверждающие работоспособность метода, исследована зависимость скорости стабилизации от числа вырезаемых гармоник, вязкости и шага по времени.

В **четвертой** главе предложена разностная схема для уравнений динамики баротропного газа на двумерных ортогональных сетках, а также на неструктурированных треугольных сетках, гарантирующая положительность сеточной функции плотности. Ранее были работы, в которых предлагались разностные схемы, обеспечивающие положительность сеточной функции плотности на одномерных ортогональных сетках, однако на треугольных сетках такой результат получен впервые. Для предложенных разностных схем доказаны не только положительность сеточной функции плотности, но и сеточный аналог закона сохранения массы и энергетическое неравенство в случае заданного на границе условия непротекания. В конце главы приведены одномерные и двумерные численные эксперименты на модельных задачах для предложенных разностных схем. Для двумерных экспериментов проведен контрольный расчет по методу адаптивной искусственной вязкости.

В пятой главе предложено обобщение метода адаптивной искусственной вязкости на тетраэдральных сетках на случай вязкого сжимаемого теплопроводного газа. В исходном методе адаптивной искусственной вязкости использовались поправки Лакса-Вендроффа для достижения второго порядка аппроксимации по времени, за счет чего уменьшалось число осцилляций сеточного решения. Однако поправки Лакса-Вендроффа неудобно использовать в случае вязкого газа, поскольку они получаются слишком громоздкими за счет наличия пространственных производных второго порядка. Для аппроксимации по времени второго порядка можно использовать метод Мак-Кормака, однако он приводит к семнадцатиточечной разностной схеме, которую трудно монотонизировать. В диссертационной работе автор предлагает использовать комбинацию поправок Лакса-Вендроффа и МакКормака, которая позволяет достаточно просто аппроксимировать вязкие слагаемые и в то же время частично монотонизировать разностную схему таким же способом, как и в исходном методе адаптивной искусственной вязкости. В конце главы приведено сравнение результатов расчетов с результатами натурного эксперимента по определению давления переключения струйного элемента, показавшее хорошую эффективность метода.

В заключении сформулированы основные результаты диссертации.

Научная новизна и основные результаты диссертации

1. Диссертация посвящена разработке разностных схем для уравнений газовой динамики. Особое внимание уделяется неявным разностным схемам, гарантирующим положительность сеточной функции плотности при любых шагах по времени и по пространству.
2. Работа содержит доказательства ряда свойств предложенных разностных схем таких как баланс масс на ячейке, положительность сеточной функции плотности, энергетическое неравенство. Перечисленные свойства доказаны для случая одномерного движения газа в прямом канале с переменным по пространству и во времени сечением, для пространственно двумерного случая как на ортогональных, так и на неструктурированных треугольных сетках. Кроме того, в работе получены теоретические оценки сходимости к стационарному решению линеаризованной полунеявной разностной схемы для уравнений движения одномерного газа.
3. Сформулированные и доказанные в диссертационной работе теоремы о разностных схемах, обеспечивающих положительность сеточной функции плотности могут послужить основой для построения новых разностных схем для задач газовой динамики.
4. Для предложенных разностных схем написан комплекс программ. В том числе реализованы параллельные алгоритмы расчетов, которые протестированы на С/К «Ломоносов».
5. Для предложенных разностных схем проведены численные эксперименты на модельных задачах. Кроме того, проведено сравнение результатов численного эксперимента с результатами натурного эксперимента. Результаты сравнения

показывают, что предложенные методы могут эффективно решать реальные физические задачи на реальных областях.

Новизна результатов диссертации не вызывает сомнений. Диссертационная работа написана ясным языком, теоретические результаты изложены в виде теорем. Справедливость основных результатов не вызывает сомнений.

К тексту диссертации есть несколько **замечаний**:

1. Обзор по разностным методам решения уравнения газовой динамики чрезмерно краток и не содержит ряда важных работ.
2. В теореме 5 главы 2 и в теореме 13 главы 4 о доказательстве существования решений разностных схем не вполне корректно используется теорема Лере-Шаудера. Используемые нелинейные операторы определены только на сеточных функциях с положительными значениями сеточной плотности, что препятствует непосредственному применению теоремы Лере-Шаудера.
3. В доказательстве теоремы 3 главы 2 следовало бы подчеркнуть, что из невырожденности матрицы следует не только неотрицательность элементов обратной матрицы, но и наличие в каждой из ее строк хотя бы одного положительного элемента.
4. Условие (2.3.10) при котором доказывается существование решения разностной схемы представляется чрезмерно ограничительным.
5. В тексте диссертации отсутствует мотивировка того, зачем нужно решать задачу, рассматриваемую в главе 3.
6. В разделе 4.9 тестирование проводится для задачи с некорректными граничными условиями для скорости и плотности.
7. Численные эксперименты, проведенные в разделе 4.9, не сопровождаются какими-либо комментариями. Что они демонстрируют?
8. В главе 5 граничные условия, поставленные на участке стока, представляются сомнительными.

Приведенные выше замечания не влияют на общую **положительную** оценку работы.

Заключение

Диссертационная работа М.А. Ложникова на тему «О некоторых разностных схемах для уравнений газовой динамики» представляет собой полноценное научное исследование, посвященное актуальным задачам. Результаты работы достоверны и являются новыми.

Результаты работы опубликованы в семи печатных изданиях, четыре из которых индексируются в Web of Science и Scopus.

Диссертация Ложникова Михаила Андреевича на тему «О некоторых разностных схемах для уравнений газовой динамики» отвечает требованиям, установленным Московским государственным университетом имени М.В. Ломоносова к кандидатским диссертациям. Содержание диссертации соответствует паспорту специальности 01.01.07 — «Вычислительная математика» (физико-математические науки), а также критериям, определенным пп. 2.1-2.5 Положения о присуждении ученых степеней в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова. Работа оформлена согласно приложениям № 5, 6 Положения о диссертационном совете Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Считаю, что соискатель Ложников Михаил Андреевич, безусловно, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.07 — «Вычислительная математика» (физико-математические науки).

Официальный оппонент:

доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой математического
моделирования Федерального государственного
бюджетного образовательного учреждения
высшего образования «Национальный
исследовательский университет «МЭИ»

Амосов Андрей Авенирович

27 сентября 2019 г.

Контактные данные:

тел. +7(495)362-77-74, e-mail: AmosovAA@mpei.ru

Специальность, по которой официальным оппонентом защищена
диссертация: 01.01.02 - «Дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление»

Адрес места работы:

111250, Москва, Красноказарменная ул., дом 14.

Подпись А.А. Амосова удостоверяю

Заместитель начальника управления
по работе с персоналом



Л.И. Полевая