МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Асфандияров Данил Гамилевич

Численное моделирование пристенной турбулентности на основе схемы КАБАРЕ

Специальность: 05.13.18 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2019

Работа выполнена в отделе перспективных исследований и математического моделирования Института проблем безопасного развития атомной энергетики Российской академии наук.

Научный руководитель – *Головизнин Василий Михайлович - доктор физико-математических наук, профессор*

Официальные оппоненты – *Исаев Сергей Александрович - доктор физико-математических наук, профессор, Санкт-Петербургский государственный университет гражданской авиации, заведующий лабораторией фундаментальных исследований*

Титарев Владимир Александрович - доктор физико-математических наук, Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской Академии Наук (ФИЦ ИУ РАН), ведущий научный сотрудник, отдел 24 «Механика»

Козубская Татьяна Константиновна - доктор физико-математических наук, Федеральное государственное учреждение "Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук", главный научный сотрудник, Отдел 16

Защита диссертации состоится «20» ноября 2019г. в 15.00 часов на заседании диссертационного совета МГУ.01.09 при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, д. 1, стр. 52, 2-й учебный корпус, ВМК.

E-mail: ilgova@cs.msu.su

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27), и на сайте ИАС «ИСТИНА»: http://istina.msu.ru/dissertations/...

Автореферат разослан «__»_____2019г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук, профессор Е.В. Захаров

Общая характеристика работы

Актуальность темы

В настоящее время моделирование турбулентности является одной из фундаментальных проблем, имеющей не только важное научное значение, но и огромное количество инженерных приложений. Наиболее полное описание турбулентных течений может быть получено в рамках прямого численного моделирования (Direct Numerical Simulation, DNS), основанного на разрешении полного спектра турбулентных пульсаций. На современном этапе возможности для прямого моделирования турбулентности ограничены мощностями существующих суперкомпьютеров и вычислительной эффективностью разработанных алгоритмов. Поэтому существенные усилия уделяются разработке и обоснованию алгоритмов в рамках моделирования методом крупных вихрей (Large Eddy Simulation, LES), который является компромиссным вариантом между полнотой физического описания и объёмом вычислительной работы, которую необходимо выполнить для решения уравнений Навье-Стокса.

Опыт применения LES свидетельствует о хорошей точности расчета не только средних, но и пульсационных характеристик потока для широкого круга задач. Наиболее трудной задачей для LES моделирования является расчет течения в пристенной области. Течения в области стенки не являются однородными и изотропными. В непосредственной близости от твердой границы масштабы крупных энергосодержащих и мелких диссипативных вихрей перекрываются, а генерация турбулентной энергии происходит на масштабах, сравнимых с расстоянием от стенки. Пространственные и временные шаги, требуемые для LES, вблизи стенки уменьшаются до величин, характерных для DNS.

Разработка новых эффективных LES-алгоритмов, корректно отражающих сложную динамику пристенного слоя, является одной из основных задач LES моделирования. Перспективным направлением в данной области является использование неявных LES-алгоритмов (ILES), базирующихся на схемах высокой разрешающей способности. В таких схемах диссипативный механизм (сглаживающий фильтр) содержится в операторе, аппроксимирующем конвективные слагаемые. Необходимое количество диссипации вводится за счет процедуры нелинейной коррекции потоков.

К числу таких схем относится схема КАБАРЕ [1], отличающаяся простотой и вычислительной эффективностью. Схема определена на компактном шаблоне и имеет второй порядок аппроксимации, как по времени, так и по пространству, обладает улучшенными диссипативными и дисперсионными свойствами, и допускает введение нелинейной коррекции потоков на основе принципа максимума.

В диссертационной работе схема КАБАРЕ взята за основу построения вычислительного алгоритма для прямого численного моделирования и моделирования методом крупных вихрей одного из канонических пристенных течений – течения в плоском канале.

Основной целью диссертационной работы является

Исследование применимости и вычислительной эффективности математического моделирования турбулентного течения в плоском канале на основе схемы КАБАРЕ при полном и неполном разрешении спектра турбулентных пульсаций.

Методология исследования

Течения вязкой несжимаемой жидкости описываются уравнениями Навье-Стокса, которые можно отнести к гиперболическим системам только относительно компонент скорости, если рассматривать давление как параметрическое поле, обеспечивающее выполнение условия несжимаемости. При такой трактовке уравнений, алгоритм их численного решения можно разбить на два этапа: вычисление предварительных значений компонент скорости на последующем временном слое без учета давления, и корректировку найденного поля скоростей с целью придания ему свойства соленоидальности.

Явная аппроксимация конвективных потоков проводится по схеме КАБАРЕ. Схема КАБАРЕ оперирует двумя типами переменных – потоковыми (в центрах граней расчетных ячеек) и консервативными (в центрах расчетных ячеек). Для выполнения условия несжимаемости требуется решать два сеточных уравнения Пуассона для давления (на каждый тип переменных). Для решения данных уравнений большой размерности на многопроцессорных вычислительных системах реализован блочно-параллельный быстрый прямой метод (БПМ) [2,3].

Для исследования эффективности построенного вычислительного алгоритма для расчета пристенных течений выбрана задача о течении в плоском канале. Данная задача является классической в исследовании пристенных течений, и хорошо изучена, как посредством прямого численного моделирования, так и экспериментально, в широком диапазоне чисел Рейнольдса.

Проводимые исследования можно условно разделить на две части. Первая заключалась в построении вычислительно алгоритма на основе схемы КАБАРЕ для расчета течения в плоском канале и воспроизведении результатов прямого численного моделирования ведущих расчетных групп. Вторая - в разработке ILES-алгоритма для расчета сдвиговых пристенных турбулентных течений на основе схемы КАБАРЕ.

Научная новизна

Систематическое исследование особенностей математического моделирования пристенной турбулентности на основе схемы КАБАРЕ проведено впервые.

Научная и практическая значимость

Данная работа носит методический характер. В работе проведено комплексное исследование и дано обоснование возможности применения методики КАБАРЕ для расчета пристенных турбулентных течений, как

посредством прямого численного моделирования, так и на основе неявного LES-алгоритма. Показана возможность объединения неявного и явного LES подходов для повышения точности и вычислительной эффективности расчетов, связанных с пристеночным моделированием.

Положения, выносимые на защиту

1. Предлагается новый вычислительный алгоритм для расчета течения вязкой несжимаемой жидкости в канале на основе явной аппроксимации конвективных потоков по схеме КАБАРЕ и решении двух сеточных уравнений эллиптического типа для обеспечения условия несжимаемости. Для решения этих уравнений большой размерности используется быстрый прямой метод, допускающий эффективное распараллеливание.
2. Численный код для моделирования течения вязкой несжимаемой жидкости в двоякопериодическом плоском канале на основе предложенного вычислительного алгоритма. (**Регистрационный номер РИД:** 614120920046. Программа для прямого численного моделирования пристенной турбулентности в плоском канале. Сокращенное название - «DUCT3D»)
3. На основе проведенной серии трехмерных расчетов задачи о течении в плоском канале в широком диапазоне чисел Рейнольдса показывается возможность использования методики КАБАРЕ для прямого численного моделирования турбулентных пристенных течений.
4. Предлагаются искусственные граничные условия, позволяющие с высокой точностью моделировать поток импульса на стенки при неполном разрешении спектра турбулентных пульсаций вблизи границы.

Личный вклад автора

Все научные результаты, вынесенные на защиту, получены лично автором. Цели, задачи, основные идеи и результаты работы детально обсуждались с научным руководителем профессором В.М. Головизниным.

Апробация работы

Основные результаты работы докладывались и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях:

1. XII научная школа молодых ученых ИБРАЭ РАН, доклад на тему «Организация параллельного вычисления задачи течения вязкой несжимаемой жидкости по схеме «Кабаре» в плоском канале», Москва, ИБРАЭ РАН, 28-29 апреля 2011г.
2. XIII научная школа молодых ученых ИБРАЭ РАН, доклад на тему «Предварительные расчеты классической задачи турбулентности в плоском канале на суперкомпьютерах «Ломоносов» и «Чебышев»», Москва, ИБРАЭ РАН, 26-27 апреля 2012г.
3. XIV научная школа молодых ученых ИБРАЭ РАН, доклад на тему «Прямое численное моделирование турбулентного течения вязкой

несжимаемой жидкости по схеме Кабаре в плоском канале при Re = 5600», Москва, ИБРАЭ РАН, 25-26 апреля 2013г.

4. XV Всероссийская конференция-школа молодых исследователей с международным участием "Современные проблемы математического моделирования", доклад на тему: «Прямое численное моделирование турбулентного течения вязкой несжимаемой жидкости по схеме Кабаре в плоском канале при Re_m = 5600», Абрау-Дюрсо 16-21 сентября 2013.
5. Тихоновские чтения 2013, доклад на тему «Прямое численное моделирование турбулентного течения вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале по схеме КАБАРЕ». Москва, МГУ, 28-31 октября 2013.
6. XVI Всероссийская конференция-школа молодых исследователей с международным участием "Современные проблемы математического моделирования", доклад на тему: «Прямое численное моделирование пристенной турбулентности в плоском канале до Re_m = 21900», Абрау-Дюрсо 14-19 сентября 2015.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. В конце каждой главы приведены выводы. Общий объем диссертации составляет 137 страниц. Список литературы содержит 107 наименований.

Основное содержание работы

В **первой главе** приводится краткий обзор работ по вихреразрешающему моделированию турбулентных течений, существенное влияние на которые оказывает наличие твердой границы. Представлен обзор работ по прямому численному моделированию одного из канонических пристенных течений – течения в плоском канале. Данная задача является наиболее популярной при исследовании течения возле твердой гладкой стенки из-за возможности использования ортогональных сеток и применения схем высокого (вплоть до спектрального) порядка. Рассмотренные работы дают представление о современном состоянии теории турбулентности и инструментах изучения динамики пристенных течений. Представлены различные аспекты LES-моделирования турбулентных течений возле твердой границы. Одной из главных проблем LES моделирования в этом случае является вопрос о влиянии «грубости» сеток вблизи стенки на мгновенные и средние характеристики расчитываемого течения. Описаны различные подходы к решению данной проблемы, связаные с разработкой специальных подсеточных моделей, учитывающих особенности течения вблизи стенки, и т.н. «зональные» методы, в которых используются модельные представления о динамике пристенного слоя. Рассматриваются различные LES-алгоритмы, учитывающие особенности физики пристенных течений, проблемы постановки корректных граничных условий, различные пристеночные модели, а также некоторые особенности гибридного RANS-LES моделирования.

Во **второй главе** описывается вычислительный метод на основе схемы Кабаре для моделирования течения вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале при полном и неполном разрешении спектра турбулентных пульсаций, допускающий эффективное распараллеливание. Рассматривается задача о течении жидкости в плоском канале, описывающая вынужденное течение жидкости между двух бесконечных плоских гладких пластин (рис. 1). Область решения представляет собой параллелепипед конечного размера с двоякопериодическими граничными условиями. На пластинах ставится условие прилипания (все три компоненты скорости равны нулю).

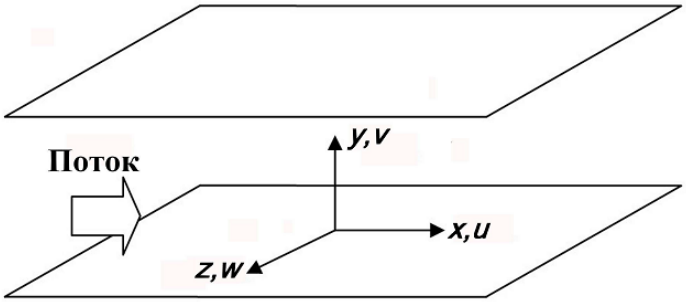


Рис. 1. Схематическое изображение плоского канала.

Схема Кабаре оперирует двумя типами переменных: консервативными, относящимися к центрам ячеек (средними по ячейке), и потоковыми, которые относятся к центрам граней и определяют потоки. Алгоритм численного решения системы уравнений Навье-Стокса удобно представить в виде последовательности трех фаз [1]:

I. Фаза 1. Вычисление предварительных значений консервативных переменных скорости на половинном временном слое.
   Фаза 1а. Дивергенизация вычисленных скоростей.
II. Фаза 2. Расчет предварительных значений потоковых переменных скорости на новом временном слое и их нелинейная коррекция на основе принципа максимума.
   Фаза 2а. Дивергенизация откорректированных потоковых скоростей
III. Фаза 3. Вычисление значений консервативных переменных скорости на новом временном слое.

На каждом временном слое необходимо дважды (в *фазе 1а* и *фазе 2а*) решать уравнение Пуассона относительно давления. Давление при дивергенизации консервативных скоростей, относится к узлам расчетной сетки, при дивергенизации потоковых - к центрам ячеек. В первом случае, сеточный шаблон представляет собой «косой крест» (27-точечный шаблон) с граничными условиями прилипания на стенках. Во втором случае - «прямой крест» (7-ми точечный шаблон) с условием Неймана на твердых границах. На остальных границах используются периодические граничные условия.

Для решения сеточных уравнений на давление предложена модификация быстрого прямого метода (БПМ), изложенного в работах [2,3], пригодная как

для периодических граничных условий, так и для твердых стенок. В диссертации расширены возможности метода на случай вырожденных задач, когда ядро оператора имеет достаточно большую размерность, что имеет место при использовании сеточного шаблона типа «косой крест».

Общую идею этого метода проиллюстрируем на примере двух пространственных измерений, когда давление задается в узлах сетки.

Систему линейных алгебраических уравнений представим в операторном виде:

$$Ap = f, \tag{1}$$

где A разностный оператор Лапласа.

Разобьём прямоугольник Π вертикальными линиями на q непересекающихся подобластей $\Pi_k, k = 1,\ldots,q$. Для простоты рассмотрим задачу при q = 2. Соответствующие области обозначим Π_1 и Π_2, а линию разреза s. Нахождение полного решения задачи сводится к следующим процедурам:

1. Ищется решение двух задач в подобластях Π_1 и Π_2, с нулевыми граничными условиями на общей границе. Пусть это будут задачи:

$$A^{(1)}p^{(1)} = f^{(1)}, \quad A^{(2)}p^{(2)} = f^{(2)}, \tag{2}$$

   где $A^{(1)}, A^{(2)}$ разностные операторы Лапласа в подобластях Π_1 и Π_2, $f^{(1)} = f$ в Π_1, $f^{(2)} = f$ в Π_2. Решения $p^{(1)}$ и $p^{(2)}$ не совпадают с p в соответствующих подобластях. Обозначим через $\tilde{p}$ сеточную функцию, равную $p^{(1)}$ и $p^{(2)}$ в Π_1 и Π_2 соответственно, и равную нулю на линии s. Невязка $r = A(p - \tilde{p})$ будет отлична от нуля только на линии s. Для нахождения невязки r достаточно знать правую часть f на линии s и значения $\tilde{p}$ на ближайших сеточных линиях в подобластях Π_1 и Π_2 (согласно выбранному разностному шаблону для оператора Лапласа).
2. После нахождения невязки на линии разреза, решается, так называемая, «частичная задача»:

$$Aw = r, \tag{3}$$

   где $w = p - \tilde{p}$. В этой задаче правая часть уравнения отлична от нуля только на линии s (количество ненулевых компонентов много меньше их общего числа), и решение требуется найти лишь на заданной сеточной линии. Способы решения такого рода задач описаны в [2] и требуют *O(N)* действий, где N – число узлов в расчетной области Π.
3. После решения частичной задачи, исходная задача разбивается на две независимые задачи для подобластей Π_1 и Π_2 с неоднородными условиями Дирихле на общей границе s. Очевидно, что решения p_1 и p_2 этих задач совпадают с p (искомым решением) в своих подобластях.

При таком подходе полное количество арифметических операций определяется их числом при двукратном решении задачи в подобластях Π_1 и Π_2 с условием Дирихле на общей границе и числом O(N) при решении «частичной задачи» (п.2). Если подобласти Π_1 и Π_2 еще достаточно велики, то для них можно рекурсивно применить описанную процедуру разбиения на меньшие подобласти. С учетом рекурсии общая оценка числа арифметических операций при реализации БПМ составляет $O(N \ln N)$. Данный метод можно использовать на неравномерной прямоугольной сетке.

Остановимся подробнее на решении «частичной задачи» (п.2), составляющем основу метода БПМ. Решение частичных задач (равно как и задач в подобластях) основано на возможности представления оператора Лапласа в виде:

$$A = A_1 \otimes K_2 + K_1 \otimes A_2, \tag{4}$$

где $A_i \left(i = 1,2\right)$ - симметричные трехдиагональные положительно полуопределенные матрицы порядка n_i, а K_i - симметричные трехдиагональные (или диагональные) положительно определенные (или полуопределенные) матрицы того же порядка n_i, где n_i - число узлов по i-му направлению с учетом типа граничных условий. В случае периодических граничных условий A_i и K_i - 3-х диагональные циклические матрицы.

Рассмотрим обобщенную проблему собственных значений:

$$A_1 z = \lambda K_1 z \tag{5}$$

Пусть $0 \le \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_{n_1}$ (ввиду свойств матриц A_i и K_i) собственные числа задачи (5), а $z_1, \cdots, z_{n_1}$ соответствующие им K_1- ортонормированные собственные векторы, и:

$$\Lambda = diag\left\{\lambda_1, \cdots, \lambda_{n_1}\right\}, \quad Z = \left[z_1, \cdots, z_{n_1}\right]. \tag{6}$$

С учетом (4), умножив систему (3) на матрицу $Z^T \otimes I_2$, и делая замену $y = \left(Z^{-1} \otimes I_2\right) w$, получим систему:

$$\left(\Lambda \otimes K_2 + I_1 \otimes A_2\right) y = \left(Z^T \otimes I_2\right) r, \tag{7}$$

где I_1 и I_2 единичные матрицы порядка n_1 и n_2 соответственно. Эта система распадается на n_1 независимых подсистем порядка n_2:

$$\left(A_2 + \lambda_i K_2\right) \psi_i = \hat{r}_i, \quad i = 1, \cdots, n_1, \tag{8}$$

где

$$\hat{r}_i = z_{is} r_s. \tag{9}$$

Здесь r_s невязка на линии s, а z_{is} – s-я компонента собственного вектора z_i.

Решение w_s на линии s вычисляется по формуле:

$$w_{sj} = \sum_{i=1}^{n_1} z_{is}\psi_{ji},\ j = 1,\ldots,n_2. \qquad (10)$$

Здесь w_{sj} - j-я компонента вектора w_s. Таким образом, если известны все собственные числа и векторы задачи (5), то вычисление вектора w_s сводится к нахождению векторов $\hat{r}_i$ по формуле (9), затем к решению n_1 трехдиагональных систем вида (8) и реализации формулы (10). Все это требует выполнения $O(n_1 n_2)$ арифметических операций.

Представленный алгоритм БПМ легко распространяется на трехмерные области. В этом случае параллелепипед разрезается на несколько подобластей плоскостями, а при решении трехмерных частичных задач используется двумерный аналог данного метода.

На основе описанных алгоритмов были созданы программы для решения разностных уравнений Пуассона на двух различных вычислительных шаблонах, получающихся при «дивергенизации» консервативных и потоковых скоростей в схеме КАБАРЕ. Эти программы, как и весь программный комплекс, разработаны с использованием библиотеки MPI для многопроцессорных вычислительных комплексов с распределенной памятью. На трехмерных задачах показана хорошая (почти линейная) масштабируемость алгоритма при использовании до 2048 процессоров.

Распределение памяти между процессами проводится по геометрическому принципу, т.е. параллелепипед с числом шагов сетки n_1, n_2, n_3 разбивается на равные (по числу узлов) подобласти сеточными плоскостями, перпендикулярными осям x_1, x_2, x_3 соответственно. Одновременно с узлами области распределяются и все данные, которые связанны с узлами и ячейками (скорость и давление). В программе используется трехмерный декартовый коммуникатор с числом процессов q_1, q_2, q_3 по осям x_1, x_2, x_3 соответственно. Для лучшей синхронизации вычислительного процесса q_i выбирается кратным n_i, i = 1,2,3. В каждом процессе массивы с данными, определенными в узлах ячеек, имеют размерности $0:n_1/q_1, 0:n_2/q_2, 0:n_3/q_3$. Предполагается, что данные на границах массивов дублируются в соседних процессорах.

В **третьей главе** обсуждается постановка задачи, и приводятся результаты прямого численного моделирования течения вязкой жидкости в двоякопериодическом плоском канале. Расчеты выполнены по представленной во второй главе вычислительной методике.

Для того, чтобы постановка задачи была корректной необходимо выполнение двух условий [5,6].

Первое условие связанно с оправданностью применения периодических граничных условий. Периодические граничные условия не будут негативно сказываться на результатах расчетов, если размеры расчетной области

позволяют корректно описывать динамику крупномасштабных возмущений. С математической точки зрения, это означает, что флуктуации скорости вдоль продольного *OX* и поперечного *OZ* направления на расстоянии половины периода не должны коррелировать. Для проверки этого условия вычисляются функции двухточечной корреляции скоростей на половине периода:

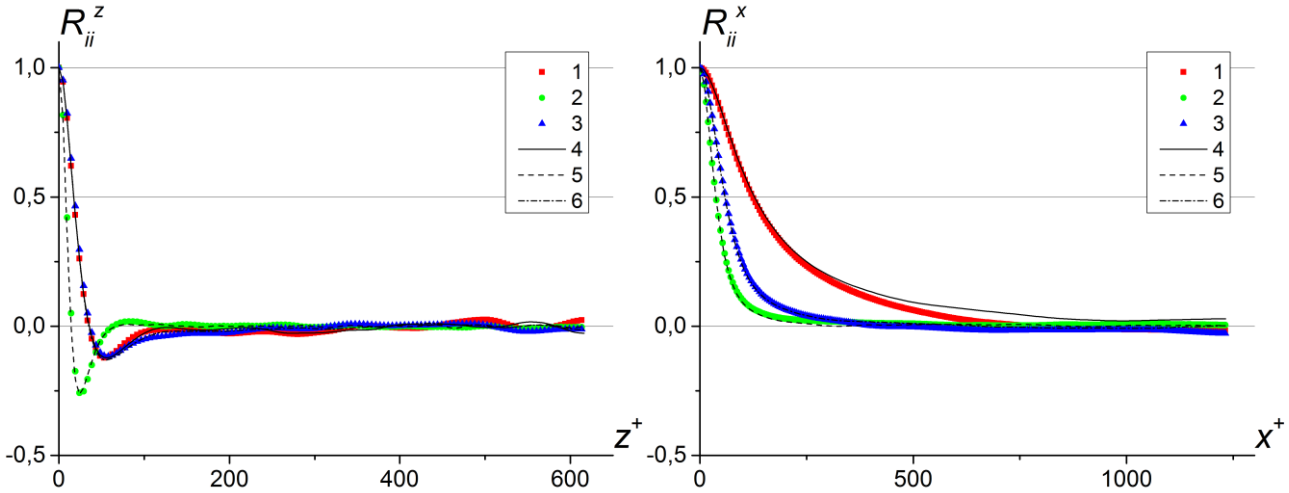
$$R_{ij}^{x}\left(\Delta x, y\right)=\left\langle u_i'\left(t,x,y,z\right)u_j'\left(t,x+\Delta x,y,z\right)\right\rangle_{t,z} \tag{11}$$

$$R_{ij}^{z}\left(\Delta z, y\right)=\left\langle u_i'\left(t,x,y,z\right)u_j'\left(t,x,y,z+\Delta z\right)\right\rangle_{t,x} \tag{12}$$

Для удобства сравнения результатов данные функции обычно нормируются на $\left\langle u_i'u_j'\right\rangle$.

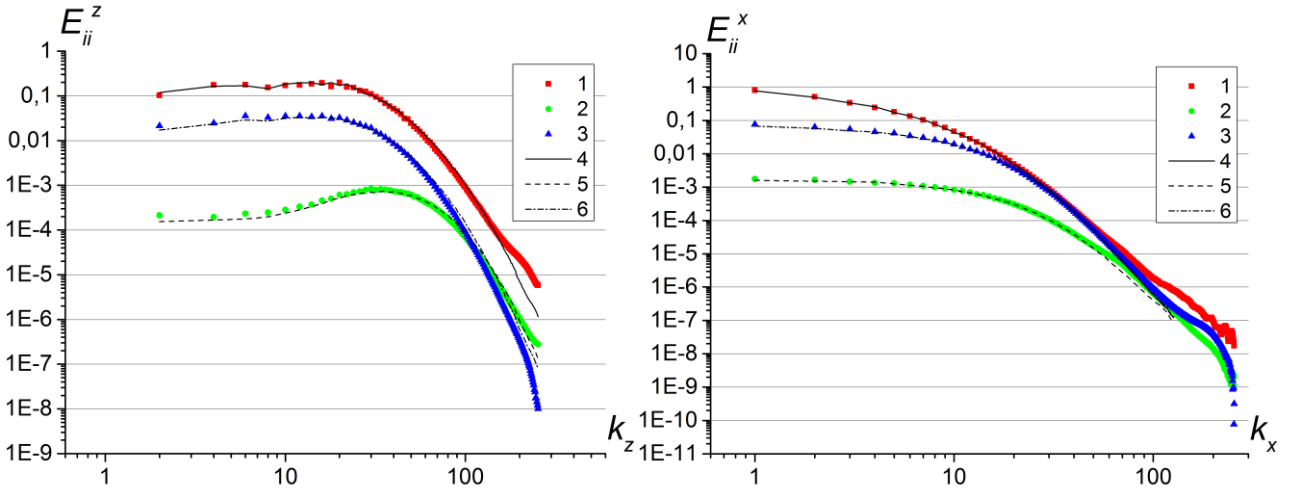
Второе условие накладывается на расчетные сетки. При прямом численном моделировании должен корректно разрешаться спектр турбулентных пульсаций вплоть до диссипативного интервала, не приводя к избыточной спектральной плотности в области наибольших волновых чисел. В качестве спектральных характеристик используются одномерные пространственные спектры энергии, которые представляют собой удвоенное значение дискретного преобразования Фурье соответствующих автокорреляционных (i=j) функций (11) и (12) [7].

Прямое численное моделирование течения в плоском канале проводилось при числах Рейнольдса Re_m = 5600, 13750, 21900. Число Рейнольдса $\mathrm{Re}_m = 2\delta u_m/\nu$ определяется по высоте канала 2δ, средней скорости в потоке u_m и кинематической вязкости ν. Соответствующие корреляционные и спектральные зависимости в пристенной области для числа Рейнольдса Re_m = 13750 представлены на рисунках 2, 3. Спектры нормированы на квадрат динамической скорости u_τ.



а) б)

Рис. 2. Нормированные двухточечные корреляции флуктуации скорости в пристенной области (y^+ = 5.15). Re_m = 13750. а) – в поперечном направлении, б) – в продольном направлении. 1 – R_{uu}^z, 2 - R_{vv}^z, 3 - R_{ww}^z, 4,5,6 – соответствующие расчеты по псевдоспектральному методу [6].



а) б)

Рис. 3. Одномерные спектры энергии в пристенной области (y^+ = 5.15). Re_m = 13750. а) – в поперечном направлении, б) – в продольном направлении. 1 – R_{uu}^z, 2 - R_{vv}^z, 3 - R_{ww}^z, 4,5,6 – соответствующие расчеты по псевдоспектральному методу [6].

Исследуются первые и вторые моменты, вклад различных компонент в перенос турбулентной кинетической энергии, интегральная величина коэффициента сопротивления (КС). Для исследуемых чисел Рейнольдса профили средней скорости, нормальных турбулентных напряжений и турбулентной кинетической энергии представлены на рисунке 4.

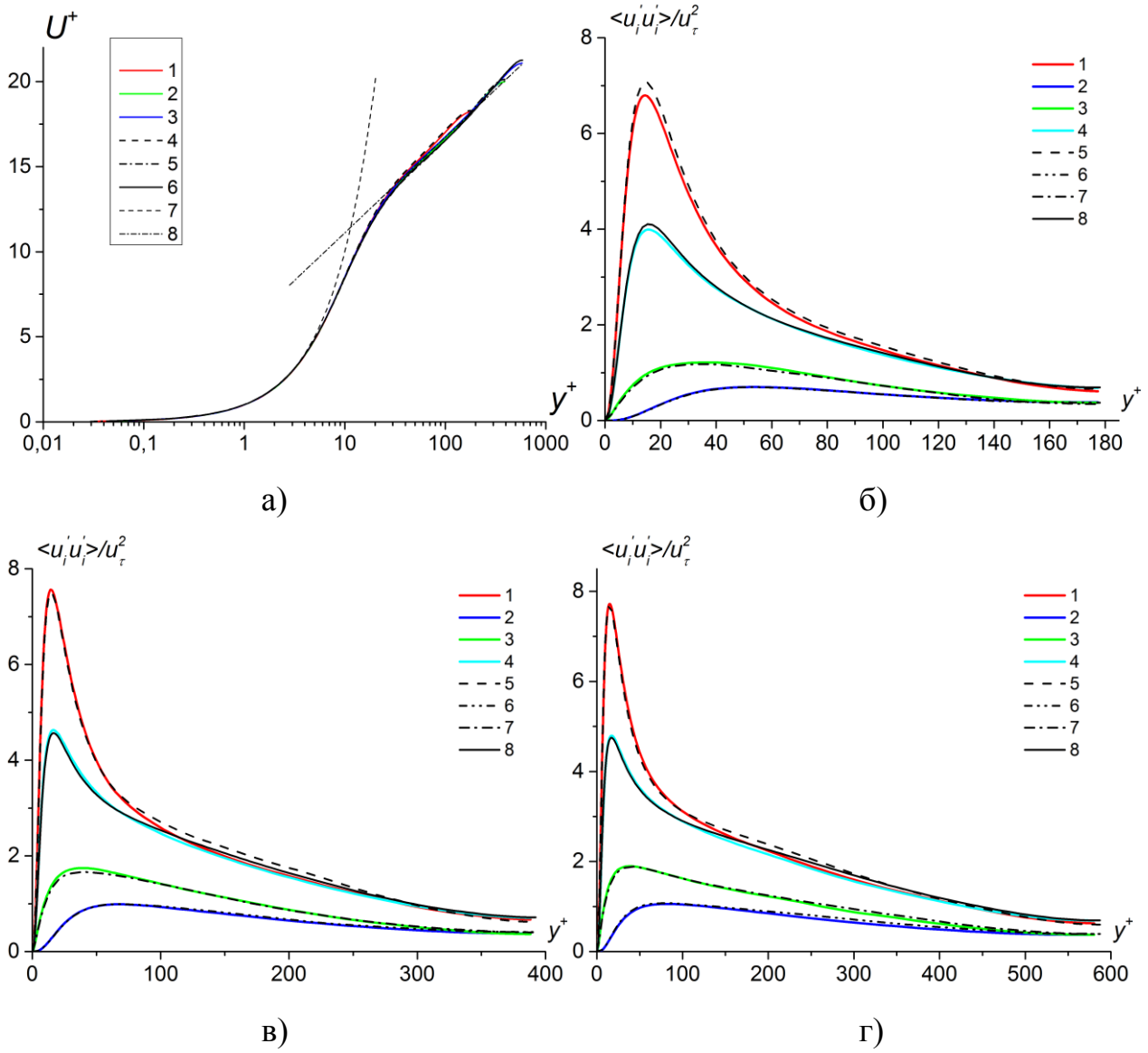


Рис. 4. а) Профили средней скорости. 1 - Re_m = 5600; 2 - Re_m = 13760; 3 - Re_m = 21900; 4,5,6 – соответствующие профили, рассчитанные по псевдоспектральному методу [6]; 7 – $u^+ = y^+$; 8 – $u^+ = (1/0.41)\ln(y^+)+5.5$. б),в),г) Профили нормальных турбулентных напряжений $\overline{u'^2}$, $\overline{v'^2}$ и $\overline{w'^2}$ и турбулентной кинетической энергии K^+ при Re_m = 5600, 13760, 21900 соответственно: 1,2,3,4 – рассчитанные профили по схеме КАБАРЕ; 5,6,7,8 – соответствующие результаты по псевдоспектральному методу [6].

Схема КАБАРЕ, обладающая только вторым порядком аппроксимации, как по пространству, так и по времени, позволяет уверенно воспроизводить результаты прямого численного моделирования, полученные посредствам псевдоспектрального метода. Для достижения той же точности в определении характеристик турбулентного течения, что и в псевдоспектральном методе количество узлов сетки по каждому из направлений должно быть в ≈1.5-2 раза больше.

На основе Q и Δ-критериев [8] визуализируются когерентные вихревые структуры, образующиеся в турбулентном погранслое. Демонстрируется

образование «шпилькообразных» вихревых структур. На рисунке 5 представлена трехмерная визуализация вихревого пакета в плоском канале на основе Q-критерия. Масштабы длины представлены в пристенных единицах.

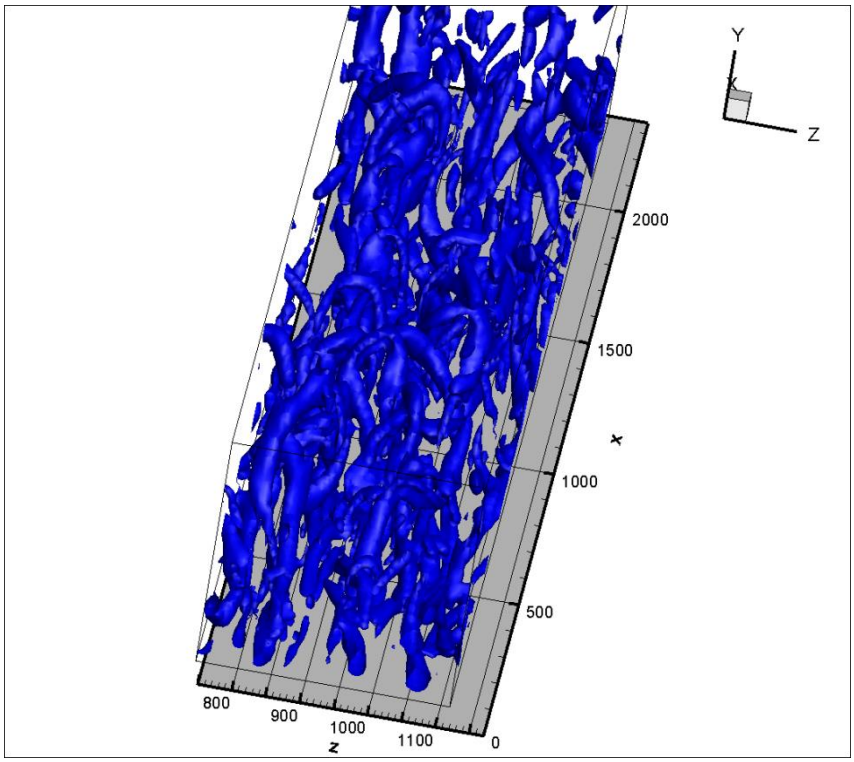


Рис. 5. Вихревой пакет. Изображены изоповерхности $Q^{+}>0.005$.

В **четвертой главе** для корректного учета подсеточных напряжений в области вблизи стенки вводятся специальные искуственные граничные условия. Применение искусственных граничных условий основано на введении в первый слой расчетных ячеек явной подсеточной модели вихревой вязкости, рассчитанной на учет особенностей сдвиговых течений вблизи стенки. В остальном алгорим вычислений полностью совпадает с вычислительным алгоритмом, описанном во второй главе.

Исходной для построения модели искусственных граничных условий является система «отфильтрованных» в прилегающем слое уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости в классической LES постановке с замыканием в виде модели вихревой вязкости:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0,$$
$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial \left(u_i u_j\right)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \nabla^2 u_i + \frac{\partial \left(2\nu_T S_{ij}\right)}{\partial x_j}. \qquad (13)$$

Здесь, $S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$ - тензор скоростей деформации. Вихревая вязкость ν_T принимается равной нулю всюду, кроме первого слоя ячеек вблизи

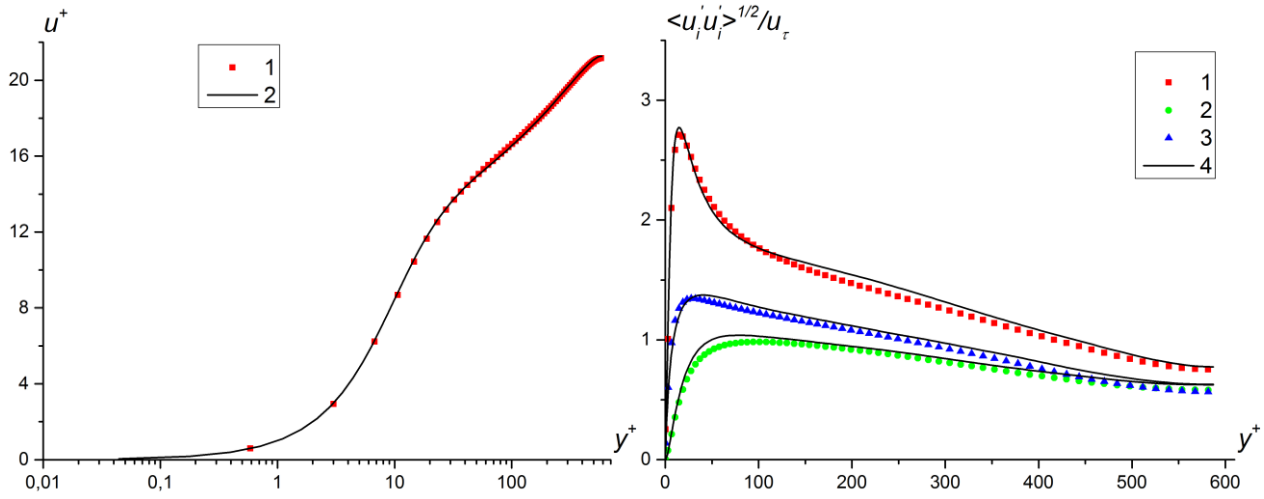
стенки. На самой стенке она также равна нулю. В остальной области в качестве подсеточной модели работает численная диссипация, обусловленная коррекцией потоков на основе принципа максимума.

В пристенном слое ячеек вихревая вязкость определяется по формуле:

$$\nu_T(\mathbf{x},t) = \left(C_s\Delta\right)^2\left(\left|S(\mathbf{x},t)\right| - \left|\left\langle S(\mathbf{x},t)\right\rangle\right|\right) \qquad (14)$$

Прямые скобки $|...|$ определяют выражение - $|S| = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$, а треугольные $\langle ... \rangle$ подразумевает осреднение по ансамблю реализаций [9]. В работе используется осреднение по определенным интервалам времени. Модель позволяет учитывать вклад в перенос энергии на подсеточный масштаб, как за счет турбулентных пульсаций сеточного масштаба, так и за счет среднего градиента скорости.

Исследование методики проводится в широком диапазоне чисел Рейнольдса (Re_m = 13760, 21900, 40000). Приводится сравнение результатов моделирования по предложенной методике с результатами моделирования без применения искусственных граничных условий, а также результатами других расчетных групп. На рисунке 6 приведены сравнения профилей средней скорости и среднеквадратичных пульсаций скорости по предложенной методике и DNS расчету [6] для числа Рейнольдса 21900.



а) б)

Рис. 6. Re_m=21900. а) - профиль средней скорости, б) среднеквадратичные флуктуации скорости. Символами обозначены результаты расчета по ILES-алгоритму с применением искусственных граничных условий. Сплошной линией результаты DNS расчета по псевдоспектральному методу [6].

При использовании предложенной модификации, на характерных для LES моделирования сетках, удалось улучшить получаемые результаты по сравнению с базовым алгоритмом. Так, ошибка при вычислении КГС для исследуемого течения была снижена с ≈ 5% до <1% в исследуемом диапазоне чисел Рейнольдса, а поведение вторых моментов в большей степени соответствует результатам прямого численного моделирования. Полученные

результаты также хорошо соотносятся с другими работами по LES моделированию течения в плоском канале.

Основные результаты работы

1. Предложен вычислительный алгоритм для расчета течения вязкой несжимаемой жидкости в канале на основе явной аппроксимации конвективных потоков по схеме КАБАРЕ и решении двух сеточных уравнений эллиптического типа для обеспечения условия несжимаемости. Для решения данных уравнений большой размерности на многопроцессорных вычислительных системах реализован блочно-параллельный быстрый прямой метод (БПМ).
2. Проведена оптимизация расчетных сеток и размеров области для прямого численного моделирования турбулентного течения в плоском канале методом КАБАРЕ в широком диапазоне чисел Рейнольдса. Показано, что схема КАБАРЕ, имеющая второй порядок точности, позволяет уверенно воспроизводить результаты, получаемые с использованием псевдоспектрального метода.
3. Предложен способ повышения точности получаемых результатов на относительно грубых расчетных сетках за счет введения искусственных граничных условий, учитывающих сдвиговые эффекты в пристеночном слое.

Публикации по теме диссертации

- *Научные статьи, опубликованные в журналах Scopus, WoS, RSCI, а также в изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности:*

1. Асфандияров Д.Г., Головизнин В.М., Финогенов С.А. Беспараметрический метод расчета турбулентного течения в плоском канале в широком диапазоне чисел Рейнольдса. Журнал вычислительной математики и математической физики, 2015, том 55, № 9, с. 67 - 80. DOI: 10.7868/S0044466915090021 (импакт-фактор WoS: 0.774)
2. Асфандияров Д.Г. Искусственные граничные условия при ILES моделировании течения в плоском канале по схеме КАБАРЕ. Вычислительные методы и программирование. 2019. Т. 20. С. 12-20. DOI: 10.26089/NumMet.v20r102 (импакт-фактор РИНЦ: 0.462)
3. Асфандияров Д.Г. Математическое моделирование турбулентного течения в плоском канале на основе схемы КАБАРЕ. Вычислительные методы и программирование. 2019. Т. 20. С. 356-362. DOI: 10.26089/NumMet.v20r431 (импакт-фактор РИНЦ: 0.462)

- *Научные статьи, опубликованные в журналах, входящих в перечень изданий, рекомендованных ВАК при Минобрнауки России:*

4. Асфандияров Д.Г., Березин Б.И., Финогенов С.А. Прямое численное моделирование турбулентного течения вязкой несжимаемой жидкости по схеме КАБАРЕ в плоском канале // ВАНТ, сер. мат. мод. физ. проц. 2013. вып. 4. С. 57-62.

5. Асфандияров Д.Г., Головизнин В.М., Финогенов С.А. Прямое численное моделирование пристенной турбулентности в плоском канале в широком диапазоне чисел Рейнольдса // ВАНТ. Серия: Математическое моделирование физических процессов. – 2016. - №2. – С. 48-58.

- *Иные публикации:*

6. Асфандияров Д.Г. Организация параллельного вычисления задачи течения вязкой несжимаемой жидкости по схеме «Кабаре» в плоском канале // Сборник трудов XII научной школы молодых ученых ИБРАЭ РАН. Препринт № IBRAE-2011-03. – М. ИБРАЭ РАН, 2011. – 166 с.
7. Асфандияров Д.Г. Предварительные расчеты классической задачи турбулентности в плоском канале на суперкомпьютерах «Ломоносов» и «Чебышев» // Сборник трудов XIII научной школы молодых ученых ИБРАЭ РАН. Препринт № IBRAE-2012-02. – М. ИБРАЭ РАН, 2012. – 146 с.
8. Асфандияров Д.Г. Прямое численное моделирование турбулентного течения вязкой несжимаемой жидкости по схеме Кабаре в плоском канале при Re = 5600 // Сборник трудов XIV научной школы молодых ученых ИБРАЭ РАН. Препринт № IBRAE-2013-03. – М. ИБРАЭ РАН, 2013. – 181 с.
9. Асфандияров Д.Г. Прямое численное моделирование турбулентного течения вязкой несжимаемой жидкости по схеме Кабаре в плоском канале при Re_m = 5600. Современные проблемы математического моделирования: сборник трудов XV Всероссийской конференции молодых исследователей. Ростов-на-Дону, издательство Южного федерального университета, 2013. Стр. 26-30.
10. Асфандияров Д.Г. Прямое численное моделирование пристенной турбулентности в плоском канале до Re_m = 21900. Современные проблемы математического моделирования: сборник трудов XVI Всероссийской конференции молодых исследователей; Южный федеральный университет. Ростов-на-Дону: издательство Южного федерального университета, 2015. Материалы на с. 8-12.

Соавторы:

Головизнин В.М. (*науч. рук.*). Постановка задачи, обсуждение результатов работы.

Финогенов С.А. Консультирование по вопросам реализации блочно-параллельного быстрого прямого метода решения уравнения Пуассона для расчета на суперкомпьютере.

Березин Б.И. Обсуждение результатов работы.

Литература

1. Головизнин В.М., Зайцев М.А., Карабасов С.А., Короткин И.А. Новые алгоритмы вычислительной гидродинамики для многопроцессорных вычислительных комплексов. Издательство Московского университета, 2013 г.

2. Кузнецов Ю.А. Вычислительные методы в подпространствах // Вычислительные процессы и системы. 1985. Вып. 2. 265-350.
3. Finogenov S.A., Kuznetsov Yu. A. Two-stage fictitious components method for solving the Dirichlet boundary value problem, Sov. J. Numer. Anal.Math.Modelling. 1988. 3, N 4. 301-323.
4. Акимова Е.Н., Белоусов Д.В. Параллельные алгоритмы решения СЛАУ с блочно-трехдиагональными матрицами на многопроцессорных вычислителях // Вестник УГАТУ. 2011. 15, № 5. 87-93.
5. Kim J., Moin P., Moser R. D. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number // J. Fluid Mech. 1987. 177. 133-166.
6. Moser R.D., Kim J., Mansour N.N. Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to $Re_\tau = 590$ // Phys. Fluids. 1999. 11, N 4. 943-945.
7. Pope S. B. Turbulent Flows. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.
8. Bernard P., Wallace J. Turbulent Flow: Analysis, Measurement and Prediction. John Wiley & Sons, 2002.
9. Leveque E., Toschi F., Shao L., Bertoglio J.-P. Shear-improved Smagorinsky model for large-eddy simulation of wall-bounded turbulent flows // J. Fluid Mech. 2007. 570. 491-502.

Асфандияров Данил Гамилевич
ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ПРИСТЕННОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ
НА ОСНОВЕ СХЕМЫ КАБАРЕ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Подписано в печать _____.
Формат $60\times84^{1}/_{16}$. Усл. печ. л. 1.0.

Тираж _____ экз.
Отпечатано в ИБРАЭ РАН.
115191, Москва, ул. Большая Тульская, д.52.