



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. ЛОМОНОСОВА

НИИ механики МГУ

На правах рукописи

Голуб Андрей Петрович

Динамика двухзвенного аэродинамического маятника

Специальность 01.02.01 - теоретическая механика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научные руководители:
доктор физико-математических наук,
профессор В. А. Самсонов,
кандидат физико-математических наук,
доцент Ю. Д. Селюцкий

Москва-2019

	стр.
Введение	3
1. Математическая модель системы	
<i>1.1 Постановка задачи. Описание аэродинамического воздействия</i>	17
<i>1.2 Уравнения движения</i>	20
<i>1.3 Устойчивость положения равновесия «по потоку»</i>	23
2. Результаты численного моделирования. Исследование циклов	
<i>2.1 Эволюция корней характеристического полинома</i>	28
<i>2.2 Исследование периодических режимов</i>	30
<i>2.3 Влияние жёсткости пружин</i>	41
3. Экспериментальное исследование	
<i>3.1 Описание аэродинамической трубы</i>	46
<i>3.2 Влияние угла наклона камеры на выходные данные</i>	49
<i>3.3 Экспериментальная модель</i>	51
<i>3.4 Случай без пружин</i>	60
<i>3.5 Влияние пружин</i>	64
<i>3.6 Сравнение эксперимента с численным моделированием</i>	76
Заключение	92
Литература	94

Введение.

Актуальность темы.

Твёрдые тела, взаимодействующие с потоком среды при наличии сил упругости (аэроупругие системы), представляют большой интерес с точки зрения фундаментальных исследований и приложений. Существенная нелинейность аэродинамических сил приводит к трудностям при моделировании таких систем. Известно, что в них наблюдаются различные типы движений: периодические колебания, хаос.

Одно из возможных практических применений таких систем – их использование в качестве элемента ветро(гидро)энергетических установок (ВЭУ). Помимо широко распространённых горизонтально-осевых и вертикально-осевых ВЭУ, есть другой тип установок – это ВЭУ колебательного типа. В таких установках рабочий элемент совершает не вращательное, а колебательное движение. Их преимущество заключается в том, что они могут работать при малых скоростях ветра. ВЭУ колебательного типа активно исследуются в последнее время.

Обычно в литературе исследуются аэроупругие системы, в которых одна из двух степеней свободы поступательная. В данной работе рассматривается упруго-закреплённый двухзвенный маятник с крылом на втором звене – это аэроупругая система, которая имеет две вращательные степени свободы. Нелинейность аэродинамических сил позволяет ожидать, что найдётся такое установившееся движение двухзвенного аэродинамического маятника, при котором возможно будет применять его в качестве преобразователя энергии потока.

В настоящей работе исследуются некоторые особенности поведения упруго-закреплённого двухзвенного аэродинамического маятника.

Цель работы.

Исследовать динамику двухзвенного аэродинамического маятника в упругом закреплении. Изучить вопрос о существовании притягивающих периодических режимов в этой системе. Проанализировать зависимость амплитуд и частот колебаний звеньев маятника от параметров системы (моментов инерции, положения лопасти на втором звене, жёсткости пружин, скорости ветра).

Провести экспериментальное исследование данной системы. Проанализировать влияние параметров на движение маятника. Сопоставить результаты эксперимента и численного моделирования. Дать качественную и количественную оценку их соответствия. Оценить область применимости квазистатического подхода при описании аэродинамического воздействия для двухзвенного аэродинамического маятника.

Научная новизна.

В работе поставлена и решена задача поиска периодических решений в аэроупругой системе, представляющей собой двухзвенный аэродинамический маятник в упругом закреплении. Найдено, что в такой системе могут существовать одновременно два притягивающих цикла.

Существует положение равновесия «по потоку». Показано, что устойчивость положения равновесия «по потоку» теряется при уменьшении расстояния от межзвенного шарнира до центра крыла. Наличие пружины в межзвенном шарнире, приводит к уменьшению амплитуд колебаний. Найден диапазон значений жёсткости пружины на первом звене, при которых теряется устойчивость. Даны оценки значений параметров, при которых амплитуды и частота колебаний двухзвенного аэродинамического маятника будут наибольшими. Наличие пружин в шарнирах является отличием от многих работ касающихся динамики двухзвенного аэродинамического маятника. Основные результаты, полученные в

диссертационной работе, и положения, выносимые на защиту, являются новыми.

Методы исследования.

Исследование выполнено с использованием известных аналитических методов теоретической механики, теории устойчивости движения, а также с помощью численных методов. Для описания аэродинамического воздействия на систему используется квазистатический подход. Для составления полной системы уравнений применяется формализм Лагранжа. Система уравнений выписана в безразмерном виде. Используются методы малого параметра, в частности, рассмотрен случай, когда значение коэффициента лобового сопротивления (при малых углах атаки) мало. Проведено экспериментальное исследование в аэродинамической трубе А-6 НИИ механики МГУ. В ходе экспериментов изменялось скорость набегающего потока, положение крыла и жесткость пружин крепления в первом шарнире. Проведен сравнительный анализ результатов экспериментов с результатами, полученными численно и аналитически.

Теоретическая и практическая значимость.

Диссертация носит теоретический и прикладной характер. Полученные результаты могут найти применение при создании ветроприёмных устройств колебательного типа. В работе показано, что квазистатический подход применим для задач данного типа. Для качественного соответствия численного моделирования и эксперимента не требуется вносить существенных корректировок в модель системы. Для количественного соответствия достаточно учитывать сопротивление элементов конструкции маятника. Показано, что для двухзвенного аэродинамического маятника одновременно существуют два притягивающих цикла. Цикл I типа связан с бифуркацией Андронова-Хопфа, цикл II-го типа имеет более широкую область существования и более высокую частоту автоколебаний. Квазистатическая модель

достаточно хорошо подходит для описания циклов I-го типа. Показаны основные преимущества ветроэнергетической установки на основе двухзвенного маятника: работа при малых скоростях набегающего потока (в численном моделировании) и при разных направлениях ветра.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Если крыло расположено достаточно далеко от шарнира между звеньями, то положение равновесия вдоль потока асимптотически устойчиво как с пружинами крепления, так и без них.

2. Если крыло расположено достаточно близко к шарниру между звеньями, и при этом момент инерции первого звена достаточно велик, то существует диапазон значений коэффициента жесткости пружины в первом шарнире, для которого пружина дестабилизирует положение равновесия по потоку (устойчивое без пружины). Увеличение жесткости пружины в шарнире между звеньями приводит к уменьшению области значений параметров, для которых имеет место неустойчивость положения равновесия по потоку.

3. Если крыло расположено достаточно близко к шарниру между звеньями, то в системе существуют притягивающие циклы, по крайней мере, двух типов. Для циклов первого типа характерны сравнительно большие амплитуды колебаний первого звена при малых амплитудах колебаний второго. Для циклов второго типа характерны достаточно большие амплитуды колебаний обоих звеньев. Результаты эксперимента в аэродинамической трубе (при разных скоростях потока, разных положениях крыла на втором звене и разных значениях коэффициента жесткости пружины на первом шарнире) подтверждают наличие двух типов циклов.

Достоверность результатов.

Основные результаты диссертации получены с помощью корректных аналитических методов, основанных на общих положениях теоретической

механики, и стандартных численных методов. Полученные результаты качественно и в некоторых случаях количественно подтверждаются данными экспериментов.

Апробация работы.

Результаты, представленные в диссертации, докладывались соискателем на следующих научных конференциях и семинарах:

- Conference on Dynamical Systems: Theory and Applications (DSTA 2017), Lodz, (2017)
- XIV Международная научная конференция «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления», ИПУ РАН, Россия, (2018)
- XXIX Международная научная конференция Математические Методы в Технике и Технологиях ММТТ-29, (2016)
- Конференция-конкурс молодых ученых НИИ механики МГУ, (2016-2018)
- Ломоносовские чтения, МГУ имени М.В. Ломоносова, (2016-2018)
- Семинар по аналитической механике и теории устойчивости имени В.В. Румянцева (2019)

Публикации соискателя по теме диссертации.

Основные результаты диссертации изложены в девяти печатных работах, четыре из которых опубликованы в рецензируемых журналах, индексируемых в международных базах Scopus, WoS, RSCI. В этих работах научными руководителями были предложены постановка задачи и методы её исследования. Соавторы публикаций принимали участие в проведении экспериментов и в обсуждении полученных результатов.

Научные статьи, опубликованные в рецензируемых журналах, индексируемых в международных базах Scopus, WoS, RSCI:

1. Selyutskiy Y.D., Holub A.P., Dosaev M.Z. Elastically Mounted Double Aerodynamic Pendulum // International Journal of Structural Stability and Dynamics. 2019. V. 19. No. 5. P. 1-13. (Импакт-фактор: 2,082)

2. Голуб А.П., Селюцкий Ю.Д. О влиянии жёсткости крепления на динамику двухзвенного аэродинамического маятника // Доклады Академии наук. 2018. Т. 481. №. 3. С. 254-257. (Импакт-фактор: 0,558)

3. Голуб А.П., Селюцкий Ю.Д. Двухзвенный маятник в упругом подвесе // Мехатроника, автоматизация, управление. 2018. Т. 19. № 6. С. 380-386. (Импакт-фактор РИНЦ: 0,494)

4. Голуб А.П., Селюцкий Ю.Д. О влиянии упругого крепления на колебания двухзвенного аэродинамического маятника // Труды МФТИ. 2017. Т. 9. № 3. С. 8-13. (Импакт-фактор РИНЦ: 0,214)

Иные публикации:

5. Holub A.P., Hwang S.S., Lin C.H. How stiffness affects on the dynamics of a double-link aerodynamic pendulum // Proceedings of 14th International Conference “Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems”. 2018. P. 1-3.

6. Голуб А.П., Селюцкий Ю.Д., Hwang S.S., Lin Ch.H. Анализ поведения упругозакреплённого двухзвенного аэродинамического маятника // Проблемы механики и управления: Материалы Международной конференции. 2018. С. 127-128.

7. Selyutskiy Y.D., Holub A.P., Dosaev M.Z., Garziera R. Elastically mounted double pendulum in flow // Proceedings of 14th Conference on Dynamical Systems. 2017. Vol. 3. P. 501-510.

8. Голуб А.П., Селюцкий Ю.Д., Hwang S.-S., Lin Ch.-H. О поведении двухзвенного аэродинамического маятника // «Аналитическая механика, устойчивость и управление». Труды XI Международной Четаевской конференции. 2017. Т. 2. С. 99-105.

9. Голуб А.П. Динамика двухзвенного аэродинамического маятника в упругом закреплении // Труды конференции-конкурса молодых ученых НИИ механики МГУ. 2018. С. 103-107.

Обзор литературы

Аэроупругие системы – это системы которые движутся под действием сил упругости и аэродинамической (или гидродинамической) нагрузки. Они представляют большой интерес с точки зрения фундаментальных исследований и приложений (в частности, в области авиастроения и гражданского строительства). Активные исследования таких систем начались в 30-х годах прошлого века, но даже сейчас они ещё далеки от завершения, что связано с достаточно сложной природой и нелинейным характером сил, действующих на тело со стороны среды.

В большинстве работ рассматривается тело (имеющее крыловидную форму или плохообтекаемое), которое на упругом креплении устанавливается в потоке таким образом, что оно имеет одну вращательную и одну поступательную степень свободы. В такой системе влияние упругих и аэродинамических сил при определенных обстоятельствах может привести к появлению колебаний (регулярных или близких к хаотическим). Некоторые вопросы описания и управления такими колебаниями обсуждаются в [1-3]. Кроме того, изучается динамика обтекаемых тел в течениях, в частности, в [4-5].

Вообще говоря, такое движение считается нежелательным, поскольку может привести к разрушению объекта. С другой стороны, наличие таких колебаний, означает, что данная система может использоваться для преобразования энергии потока в полезную энергию.

Принимая во внимание непрерывное увеличение нагрузки на экосистемы, наблюдающееся в большинстве стран мира, необходимо расширять сферу использования возобновляемой энергии, в частности, энергии движущихся сред, чтобы преобразовывать ее в электричество или

другие виды полезной энергии. Это стимулирует поиск новых вариантов устройств, подходящих для этой цели.

Наиболее распространённые ветро- и гидроэлектростанции преобразуют движение воздуха или воды во вращение рабочего элемента (вертикально или горизонтально установленная турбина).

Самыми распространёнными являются горизонтально-осевые ВЭУ [6-14], в том числе и двухпропеллерные с обратным вращением [15-18]. Они занимают более 80% рынка ветроэнергетики. Популярность горизонтально осевых установок объясняется их высокой эффективностью, то есть отношением выработанной энергии к энергии ветра. При достаточно больших скоростях ветра это значение может быть гораздо больше, чем у остальных типов ВЭУ. Для горизонтально-осевых ветряков этот показатель может достигать до 45%. Это и есть самое большое преимущество горизонтально осевых установок, потому что конечное значение энергии, которое мы получим на выходе с генератора и является главной целью ветроэнергетики. Но установки такого типа имеют и недостатки. Одним из них является то, что горизонтально-осевые ВЭУ должны быть ориентированы «по потоку», то есть чтобы ветер дул прямо на них. Иначе они будут использовать не всю энергию ветра и станут менее эффективными. Для решения этой проблемы они оснащаются дополнительным элементом («хвостом») и могут вращаться вокруг своей оси, чтобы быть ориентированными в нужном направлении. Но в таком случае такая установка будет обладать меньшей надёжностью и при ветре, который будет достаточно часто менять направление, она может не успевать поворачиваться. При этом, потребуется наличие поворачивающего элемента, который увеличивает стоимость установки и её эксплуатации. Также установки с горизонтальной осью симметрии не эффективно работают при низких скоростях ветра. Малогабаритные горизонтально-осевые ВЭУ [19-25], начинают работать обычно от 5 м/с, а для эффективной работы требуется скорость от 8-10 м/с, в зависимости от габаритов

установки. Таким образом горизонтально осевые ВЭУ хорошо подходят в местах, где ветер имеет постоянное направление и высокую скорость в течении всего года.

Второй тип по распространённости - вертикально осевые ВЭУ [26-33]. Они могут работать при любом направлении ветра, в чём их весомое преимущество перед ВЭУ с горизонтальной осью симметрии. Но эффективность их существенно ниже, чем у горизонтально осевых установок. Первоначально ветряки такого типа использовали только силу сопротивления, как, например, ВЭУ типа Савониус [34-42]. Ветряки такого типа малоэффективны, так как они «забирают» лишь до 20% энергии ветра. Такой ветряк использует только силу сопротивления ветра и скорость конца его лопасти не может превышать скорости ветра, что создавало ещё и проблему преобразования в электрическую энергию, так как для генераторов необходима большая угловая скорость на генераторе, а применение механических передач приводит к потере энергии. Считалось, что у вертикальных ВЭУ быстроходность (отношение линейной скорости конца лопасти к скорости ветра) не может существенно превышать 1. Но были придуманы ВЭУ с вертикальной осью симметрии, которые используют и подъёмную силу, например ветряк Дарье [43-50]. Как было показано в [51-59], такие ветряки довольно эффективны и могут вырабатывать существенное количество электрической энергии. Выяснилось, что у таких ВЭУ отношение скоростей конца лопасти и набегающего потока достигает значения 5:1, что значительно улучшает преобразование механической энергии в электрическую для таких установок. В различных модификациях установок такого типа, увеличивается и эффективность отбора энергии от потока, которая может достигать до 40%, что делает их вполне конкурентными с горизонтально-осевыми ВЭУ, что подтверждает увеличение доли таких ветряков в последние годы. Также такие установки могут работать при невысоких скоростях ветра 3-5 м/с. Это увеличивает их диапазон применения, так как

на суше вдали от побережья господствуют в основном ветра с небольшой скоростью. К недостаткам таких ВЭУ, помимо меньшей эффективности, относится шум, который вызывают такие установки. Выяснилось, что от них может исходить и инфразвук, приводящий к вибрациям в окрестности. Также минус таких установок, что они используют малую часть энергии от потока.

В последнее время различные группы исследователей разрабатывают и другие типы устройств, для преобразования энергии потока. В установках из [60-62] рабочий элемент совершает не вращательное, а колебательное движение. Важной задачей при разработке таких систем преобразования энергии является выбор и анализ механических систем, которые могут использоваться в качестве рабочих элементов. Работы [63-64] рассматривают в качестве ветроприёмного элемента крыло. В [65-66] показано, как ветроприёмный элемент колебательного типа используется на ветромобиле. В работах [67-70] представлен механизм на основе антипараллелограмма. В качестве рабочего элемента используется выпуклая пластина с определённым радиусом кривизны. Использование обычной пластины в качестве ветроприёмного элемента показано в работах [70-71]. Случай использования кривошипно-шатунного механизма для установок такого типа приведён в работе [72].

Известно, что двухзвенный маятник, находящийся в поле силы тяжести, демонстрирует широкий спектр колебательных режимов, включая хаотические (например, [73-75]). Аэродинамические силы нелинейно зависят от фазовых координат системы. Это позволяет ожидать, что найдутся такие типы движений, чтобы этот объект можно было использовать в качестве преобразователя энергии потока. В настоящей работе исследуются некоторые особенности его поведения.

В работах [76-77] исследуется движение двухзвенного маятника без пружин. В отличие от [76-77] в рассматриваемой системе в шарнирах

маятника имеются пружины. Исследуется влияние положения крыла на втором звене, а также коэффициентов жесткости пружин крепления на характер устойчивости положения равновесия, в котором оба звена ориентированы по потоку.

Структура диссертации

В работе поставлена и решена задача поиска периодических решений в аэроупругой системе, представляющей собой двухзвенный аэродинамический маятник в упругом креплении. Показано, что в такой системе может существовать одновременно два притягивающих цикла.

Существует положение равновесия «по потоку». Показано, что теряется устойчивость положения равновесия «по потоку» при уменьшении расстояния от межзвенного шарнира до центра крыла, а наличие пружины на втором звене, приводит к уменьшению амплитуд колебаний и стабилизирует положение равновесия «по потоку». Найден диапазон значений жёсткости пружины на первом звене, при которых теряется устойчивость. Даны оценки значений параметров, при которых амплитуды и частота колебаний двухзвенного аэродинамического маятника будут наибольшими. Наличие упругого крепления в двухзвенном аэродинамическом маятнике является отличием от многих работ по данной тематике. Основные результаты, полученные в диссертационной работе, и положения, выносимые на защиту, являются новыми.

Исследование выполнено с использованием известных аналитических методов теоретической механики, теории устойчивости движения, а также с помощью численных методов. Для описания аэродинамического воздействия на систему используется квазистатический подход. Применялся формализм Лагранжа для составления полной системы уравнений. Система уравнений выписана в безразмерном виде. Использовались методы малого параметра, например, отдельно был рассмотрен случай, когда значение коэффициента лобового сопротивления (при малых углах атаки) мало, в этом случае корни характеристического уравнения были разложены по

соответствующему малому параметру и было проведено их аналитическое исследование. Для оценки применимости квазистатического подхода, проведено экспериментальное исследование в аэродинамической трубе А-6 НИИ механики МГУ.

Диссертация носит теоретический и прикладной характер. Полученные результаты могут найти применение при создании ветроприёмных устройств колебательного типа. В работе показано, что квазистатический подход применим для задач данного типа. Для качественного соответствия численного моделирования и эксперимента не требуется вносить существенных корректировок в модель системы. Для количественного соответствия достаточно учитывать сопротивление элементов конструкции маятника. Показано, что для двухзвенного аэродинамического маятника одновременно существует два притягивающих цикла. Один из циклов рождается из бифуркации типа Андронова-Хопфа (цикл I-го типа), цикл II-го типа имеет более широкую область существования и более высокую частоту автоколебаний. Квазистатическая модель достаточно хорошо подходит для описания циклов I-го типа. Показаны основные преимущества ветроэнергетической установки на основе двухзвенного маятника: работа при малых скоростях набегающего потока (в численном моделировании) и при разных направлениях ветра.

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы. Во введении даётся краткий исторический обзор, актуальность темы, её новизна и краткое содержание диссертации.

В первой главе описывается математическая модель исследуемой системы. Аэродинамическое воздействие на систему описывается в рамках квазистатического подхода [78]. Исследуется устойчивость тривиального положения равновесия и влияние пружин на характер устойчивости. Было проанализировано влияние жёсткости пружин на устойчивость. Оказалось, что наличие пружины на втором звене ведёт к стабилизации системы. Наличие же пружины на первом звене может сделать асимптотически

устойчивое (в отсутствие пружин) положение равновесия неустойчивым. Показано, что при любых положениях крыла на втором звене, найдётся такая жёсткость пружины на первом звене, что положение равновесия будет неустойчиво.

Во второй главе показаны результаты численного моделирования в среде Maple. Изучаются предельные циклы, возникающие в системе при определённых значениях параметров. Проанализирована зависимость амплитуды колебаний от пружин и различных положений крыла на втором звене. Показаны общие тенденции поведения системы при различных значениях параметров. В результате численного интегрирования (для определённых значений параметров) было получено два типа циклов. При наличии пружины на первом звене увеличивается область неустойчивости (например, при параметрах, для которых наблюдалась асимптотическая устойчивость, положение равновесия становится неустойчивым). Увеличение жёсткости первой пружины (в некотором диапазоне) приводит к значительному увеличению амплитуды колебаний маятника. Вторая пружина стабилизирует систему. Подтверждён ожидаемый факт, что увеличение жёсткости пружин, приводит к увеличению частоты автоколебаний.

В третьей главе приводятся экспериментальные данные, полученные в ходе серии экспериментов на аэродинамической трубе А-6 НИИ механики МГУ. Описана экспериментальная модель системы. Разработана система получения и обработки данных. В ходе испытаний были определены характеристики колебательных режимов для разных скоростей ветра, разной жёсткости пружин и различных положений крыла на втором звене. Получено два типа циклов, как и в численном моделировании. Было проведено несколько серий экспериментов. Проводилось измерение при различных скоростях набегающего потока. Затем положение крыла менялось, и эксперимент повторялся для такого же диапазона скоростей

ветра. Расстояние от второго шарнира до середины крыла менялось от 8 см до 15 см (с шагом 1 см). Скорость ветра изменялась от 5 м/с до 15 м/с (с шагом 2 м/с). Эксперименты проводились как в отсутствие пружин крепления, так и при различных значениях коэффициента жёсткости пружины на первом звене. Пружина на втором звене отсутствовала.

Определены зависимости амплитуд и частот колебаний от скорости ветра, положения лопасти на втором звене и от жёсткости пружин. Численное интегрирование, проведённое во второй главе, показало общие тенденции поведения системы: при наличии пружины на первом звене увеличивается область неустойчивости (например, при параметрах, для которых наблюдалась асимптотическая устойчивость, положение равновесия становится неустойчивым). Увеличение жёсткости первой пружины (в некотором диапазоне) приводит к значительному увеличению амплитуды колебаний маятника. Вторая пружина стабилизирует систему. Увеличение жёсткости пружин, приводит к увеличению частоты автоколебаний. Одновременно может существовать два притягивающих цикла.

Продемонстрировано количественное соответствие результатов моделирования и эксперимента. Для этого численное моделирование было проведено для таких же физических параметров, как и в эксперименте.

В заключении приведены основные результаты работы. Показано, как положение крыла и упругое крепление влияют на характер устойчивости. Сделаны выводы о применимости квазистатического подхода в данной задаче.

Глава 1

Математическая модель системы ¹

1.1. Постановка задачи. Описание аэродинамического воздействия

Рассмотрим механическую систему, которая представляет собой двухзвенный маятник (рис. 1.1(а, б)), второе звено которого несет тонкое крыло с симметричным аэродинамическим профилем. Вся система помещается в поток с постоянной скоростью V и монтируется таким образом, что обе оси маятника вертикальны. В отличие от [44], мы предполагаем, что оба звена маятника снабжены линейными спиральными пружинами.

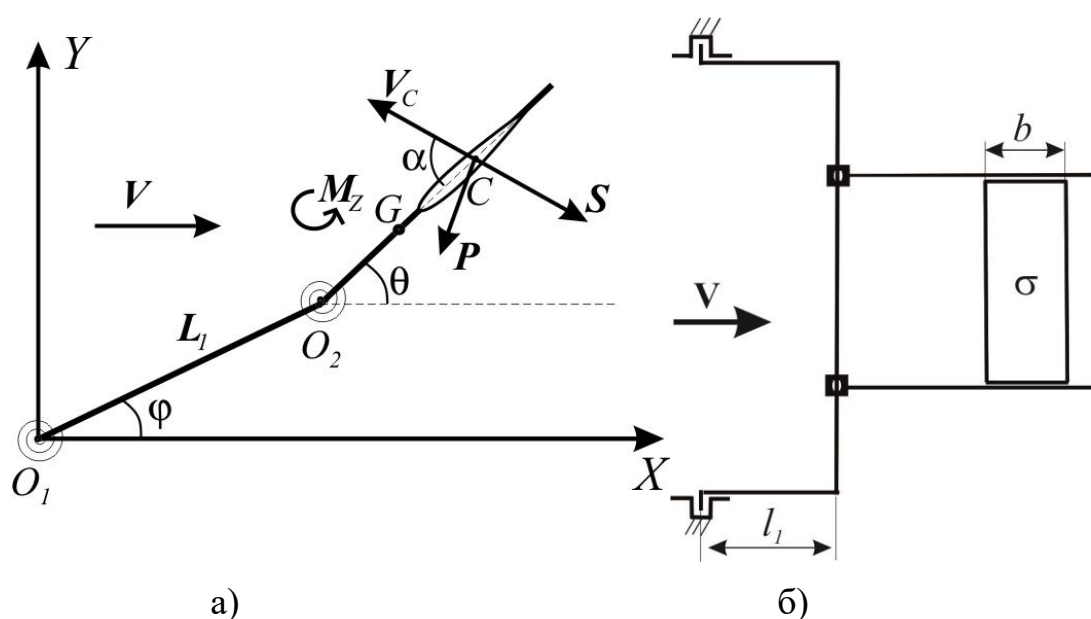


Рис.1.1(а, б). Двухзвенный аэродинамический маятник в упругом закреплении (а – вид сверху, б – вид сбоку).

Введём систему отсчета O_1XY , по оси абсцисс которой направлена скорость ветра. Выберем угол φ между этой осью и первым звеном и угол θ между этой осью и вторым звеном в качестве обобщенных координат.

¹ Отдельные положения данной главы изложены на основании публикаций: [79-83], [87]. В этих работах научными руководителями были предложены постановка задачи и методы её исследования. Соавторы публикаций принимали участие в проведении экспериментов и в обсуждении полученных результатов.

Предположим, что пружины находятся в ненапряжённом состоянии, когда оба этих угла равны нулю, т. е. звенья ориентированы «вдоль потока».

Чтобы описать аэродинамическую нагрузку на крыло, воспользуемся квазистатическим подходом, в рамках которого предполагается, что аэродинамическая нагрузка на крыло зависит только от мгновенного состояния движения системы. Эту нагрузку можно разложить на силу лобового сопротивления S и подъёмную силу P , приложенные в середине C хорды крыла, а также аэродинамический момент M_z вокруг вертикальной оси проходящей через эту точку. Сила сопротивления направлена в противоположном направлении воздушной скорости V_c точки C , а подъёмная сила перпендикулярна ей. Тогда указанные компоненты аэродинамической нагрузки могут быть представлены в следующем виде:

$$S = \frac{1}{2} \rho \sigma V_c^2 C_d(\alpha), P = \frac{1}{2} \rho \sigma V_c^2 C_l(\alpha), M_z = \frac{1}{2} \rho \sigma b V_c^2 C_m(\alpha) \quad (1)$$

Здесь ρ – плотность воздуха, σ – характерная площадь лопасти, b – хорда лопасти, α – угол между хордой крыла и воздушной скоростью V_c . $C_d(\alpha)$ рис. 1.2(а) и $C_l(\alpha)$ рис. 1.2(б), безразмерные коэффициенты силы сопротивления и подъёмной силы, соответственно, $C_m(\alpha)$ рис. 1.2(в), безразмерный коэффициент аэродинамического момента. Для моделирования был выбран симметричный профиль NACA0015 [88]. Поскольку профиль крыла симметричный, то выполнены следующие условия:

$$C_d(\alpha) = C_d(-\alpha), C_l(\alpha) = -C_l(-\alpha), C_m(\alpha) = -C_m(-\alpha)$$

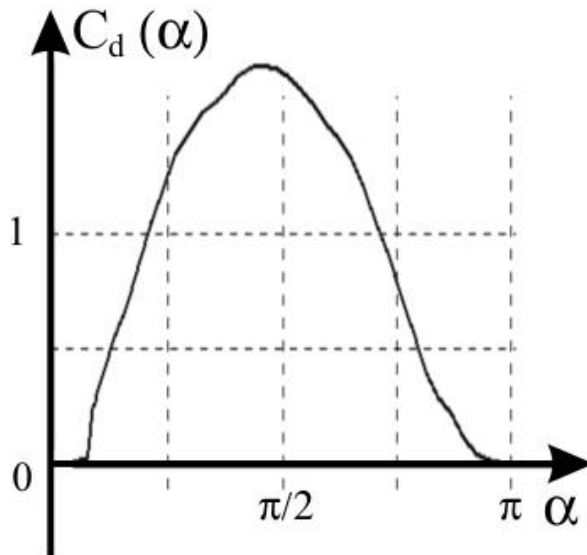


Рис. 1.2(а) Зависимость безразмерного коэффициента аэродинамической силы сопротивления от α

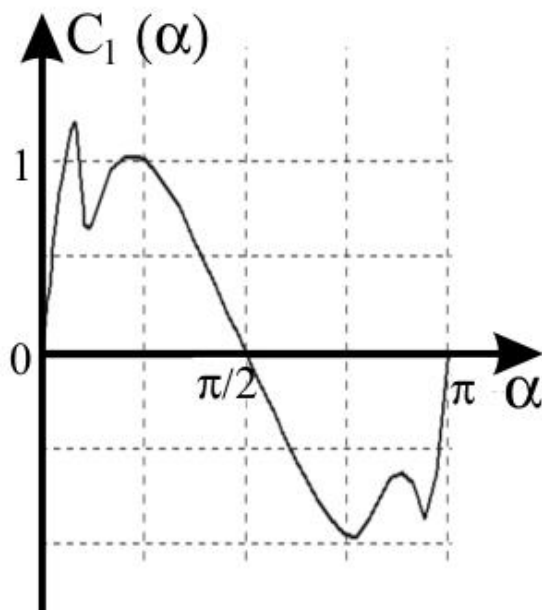


Рис. 1.2(б) Зависимость безразмерного коэффициента аэродинамической подъёмной силы от α

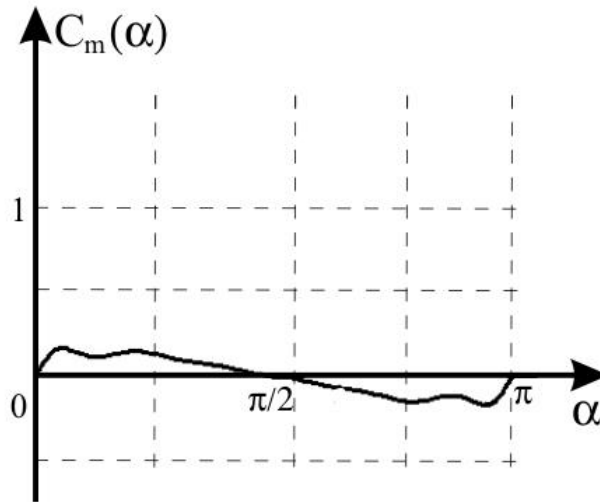


Рис. 1.2(в) Зависимость безразмерного коэффициента аэродинамического момента от α

Угол атаки и V_c определяются из следующих кинематических соотношений:

$$V_c \cos \alpha = V \cos \theta + L_1 \dot{\varphi} \sin(\varphi - \theta) \quad (2)$$

$$V_c \sin \alpha = V \sin \theta + L_1 \dot{\varphi} \cos(\varphi - \theta) + R \dot{\theta}$$

Здесь R – расстояние между точкой O_2 и точкой C (расстояние от шарнира между первым и вторым звеньями и центром крыла), L_1 – длина первого звена $O_1 O_2$ (см. Рис 1.1).

1.2. Уравнения движения

Запишем уравнения движения двухзвенного маятника в виде уравнений Лагранжа второго рода:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = Q_\theta \end{cases}$$

Кинетическая энергия системы:

$$T = \frac{J_1 \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{J_2 \dot{\theta}^2}{2} + \frac{M V_c^2}{2} = \frac{(J_1 + m L_1^2) \dot{\varphi}^2}{2} + \frac{(J_2 + M L_2^2) \dot{\theta}^2}{2} + M L_1 L_2 \cos(\theta - \varphi) \dot{\theta} \dot{\varphi}$$

Здесь J_1 – момент инерции первого звена относительно неподвижной оси, J_2 – центральный момент инерции второго звена, M – масса второго звена, L_1 – длина первого звена, L_2 – расстояние от шарнира между первым и вторым звеньями и центром масс второго звена.

Элементарная работа активных сил:

$$\sum_v (\vec{F}_v, d\vec{r}_v) = (\vec{S} + \vec{P} + \vec{F}_{\text{пр}}, \delta\vec{r}_c),$$

где $\delta\vec{r}_c = (\delta x, \delta y) = (-L_1 \sin\varphi \delta\varphi - R \sin\theta \delta\theta, L_1 \cos\varphi \delta\varphi + R \cos\theta \delta\theta)$

Обобщённые силы:

$$Q_\varphi = -C_d(\alpha) \frac{\rho\sigma V_c L_1}{2} [V \sin\varphi + l_1 \dot{\varphi} + r \cos(\varphi - \theta) \dot{\theta}] + C_l(\alpha) \frac{\rho\sigma V_c L_1}{2} [-V \cos\varphi + R \sin(\theta - \varphi) \dot{\theta}] - K_1 \varphi + K_2(\varphi - \theta)$$

$$Q_\theta = -C_d(\alpha) \frac{\rho\sigma V_c R}{2} [V \sin\theta + R \dot{\theta} + L_1 \cos(\varphi - \theta) \dot{\varphi}] + C_l(\alpha) \frac{\rho\sigma V_c R}{2} [-V \cos\theta + L_1 \sin(\theta - \varphi) \dot{\varphi}] - K_2(\theta - \varphi)$$

Здесь $K_{1,2}$ – коэффициенты жёсткости пружин, установленных в местах соединения звеньев.

Учитывая вышесказанное, уравнения движения принимают следующий вид:

$$(J_1 + ML_1^2)\ddot{\varphi} + ML_1 L_2 \cos(\theta - \varphi) \ddot{\theta} - ML_1 L_2 \sin(\theta - \varphi) \dot{\theta}^2 = -\frac{\rho\sigma V_c L_1}{2} C_d(\alpha) (V \sin\varphi + L_1 \dot{\varphi} + R \cos(\theta - \varphi) \dot{\theta}) + \frac{\rho\sigma V_c L_1}{2} C_l(\alpha) (-V \cos\varphi + R \sin(\theta - \varphi) \dot{\theta}) - K_1 \varphi + K_2(\theta - \varphi) \quad (3)$$

$$(J_2 + ML_2^2)\ddot{\theta} + Ml_1 l_2 \cos(\theta - \varphi) \ddot{\varphi} + ML_1 L_2 \sin(\theta - \varphi) \dot{\varphi}^2 = -\frac{\rho\sigma V_c R}{2} C_d(\alpha) (V \sin\theta + R \dot{\theta} + L_1 \cos(\theta - \varphi) \dot{\varphi}) +$$

$$+ \frac{\rho\sigma V_c R}{2} C_l(\alpha)(-V\cos\theta + L_1\sin(\theta - \varphi)\dot{\varphi}) + \frac{\rho\sigma V_c^2 b}{2} C_m(\alpha) - K_2(\theta - \varphi)$$

Здесь J_1 – момент инерции первого звена относительно неподвижной оси, J_2 – центральный момент инерции второго звена, M – масса второго звена, L_1 – длина первого звена, L_2 – расстояние от шарнира между первым и вторым звеньями и центром масс второго звена, R – расстояние от шарнира между первым и вторым звеньями и центром крыла. $K_{1,2}$ – коэффициенты жёсткости пружин, установленных в местах соединения звеньев.

Обезразмерим систему, введя безразмерное время $\tau = V_0 t / b$ (где V_0 – некоторая характерная скорость) и введём безразмерные параметры:

$$u = \frac{V}{V_0}, u_c = \frac{V_c}{V_0}, j_{1,2} = \frac{2J_{1,2}}{\rho s b^3}, m = \frac{2M}{\rho s b}, l_{1,2} = \frac{L_{1,2}}{b}, r = \frac{R}{b}, k_{1,2} = \frac{2K_{1,2}}{\rho s V_0^2 b}$$

Уравнения (2) и (3) примут следующий вид:

$$u_c \cos\alpha = u \cos\theta + l_1 \dot{\varphi} \sin(\varphi - \theta) \quad (4)$$

$$u_c \sin\alpha = u \sin\theta + l_1 \dot{\varphi} \cos(\theta - \varphi) + r \dot{\theta}$$

$$\begin{aligned} (j_1 + m l_1^2) \ddot{\varphi} + m l_1 l_2 \ddot{\theta} \cos(\theta - \varphi) - m l_1 l_2 \dot{\theta}^2 \sin(\theta - \varphi) = \\ = -u_c l_1 C_d(\alpha) (u \sin\varphi + l_1 \dot{\varphi} + r \dot{\theta} \cos(\theta - \varphi)) + \\ + u_c l_1 C_l(\alpha) (-u \cos\varphi + r \dot{\theta} \sin(\theta - \varphi)) - k_1 \varphi + k_2(\theta - \varphi) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} (j_2 + m l_2^2) \ddot{\theta} + m l_1 l_2 \ddot{\varphi} \cos(\theta - \varphi) + m l_1 l_2 \dot{\varphi}^2 \sin(\theta - \varphi) = \\ = -u_c r C_d(\alpha) (u \sin\theta + r \dot{\theta} + l_1 \dot{\varphi} \cos(\theta - \varphi)) + \\ + u_c r C_l(\alpha) (-u \cos\theta + l_1 \dot{\varphi} \sin(\theta - \varphi)) + u_c^2 C_m(\alpha) - k_2(\theta - \varphi) \end{aligned}$$

Уравнения (4)-(5) образуют замкнутую систему уравнений для описания движения маятника.

1.3. Устойчивость положения равновесия «по потоку»

Поскольку крыло симметрично, имеется тривиальное положение равновесия: $\varphi \equiv 0, \theta \equiv 0$. Это ситуация, когда оба звена направлены «по потоку». Заметим, что система уравнений (4)-(5) может, вообще говоря, иметь и другие неподвижные точки, которые соответствуют «косым» положениям равновесия. Число таких положений возрастает с уменьшением жёсткости пружин или с увеличением скорости ветра. Однако здесь мы ограничимся анализом положения равновесия «вдоль потока».

Уравнения движения, линеаризованные в окрестности этого положения равновесия, выглядят следующим образом:

$$(j_1 + ml_1^2)\ddot{\varphi} + ml_1l_2\ddot{\theta} = -ul_1C_{d0}(u\varphi + l_1\dot{\varphi} + r\dot{\theta}) - ul_1C_l^\alpha(u\theta + l_1\dot{\varphi} + r\dot{\theta}) - k_1\varphi + k_2(\theta - \varphi)$$

$$(j_2 + ml_2^2)\ddot{\theta} + ml_1l_2\ddot{\varphi} = -u(r - r_0)(C_l^\alpha + C_{d0})(u\theta + l_1\dot{\varphi} + r\dot{\theta}) - k_2(\theta - \varphi)$$

Здесь $C_{d0} = C_d(0)$, $C_l^\alpha = C_l'(\alpha)|_{\alpha=0}$, $C_m^\alpha = C_m'(\alpha)|_{\alpha=0}$, r_0 – расстояние от передней кромки крыла до переднего фокуса (точка, в которой приложена подъёмная сила аэродинамических сил, при малых углах атаки $r = O_2C > r_0$): $r_0 = C_m^\alpha / (C_l^\alpha + C_{d0})$.

Характеристический полином имеет вид:

$$P = a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0, \text{ где}$$

$$a_0 = j_1j_2 + j_1\mu l_2^2 + j_2\mu l_1^2 > 0$$

$$a_1 = u(C_l^\alpha + C_{d0})(j_2 + j_1r(r - r_0) + \mu(l_2 - r)(l_2 - r + r_0)) > 0$$

$$a_2 = u^2C_l^\alpha(j_1r + \mu(r - l_2)) + u^2C_{d0}((j_1 + \mu l_1^2)(r - r_0) + l_1(j_2 + \mu l_2^2)) + k_2(\mu(l_1 + l_2)^2 + j_1 + j_2) + k_1(j_2 + \mu l_2^2)$$

$$a_3 = u(C_l^\alpha + C_{d0})(k_1r(r - r_0) + k_2(l_1 + r)^2 + u^2(r - r_0)(l_1 + r)C_{x0}) > 0$$

$$a_4 = k_1k_2 + k_2l_1u^2(C_y^\alpha + C_{x0}) + u^2(C_y^\alpha + C_{x0})(r - r_0)(k_1 + k_2 + u^2l_1C_{x0}) > 0$$

Все a_i , кроме a_2 , положительны при $r > r_0$ и значениях остальных параметров, имеющих физический смысл. Отметим, что при $k_2 = 0$ для $r < r_0$ имеет место статическая неустойчивость.

Положение равновесия будет асимптотически устойчивым, если все коэффициенты характеристического уравнения и главные миноры матрицы Гурвица будут положительны. Ввиду того, что все a_i кроме a_2 больше нуля, то устойчивость положения «вдоль потока» определяется знаком выражения

$$\Delta = a_1 a_2 a_3 - a_0 a_3^2 - a_1^2 a_4$$

Это выражение достаточно громоздко. Поэтому обсудим более подробно некоторые частные случаи.

Предположим, что крыло достаточно тонкое. В этом случае, как известно из статических экспериментов, коэффициент лобового сопротивления при малых углах атаки мал: $C_{d0} \ll 1$. Вначале рассмотрим маятник без пружин: $k_1 = k_2 = 0$.

Тогда для двух корней характеристического полинома можно записать следующие приближенные выражения:

$$\lambda_{1,2} = \pm iu \sqrt{\frac{C_{d0}(r-r_0)}{j_1(r-r_0) - ml_1^2(l_2 - r + r_0)}} - \\ -u(r-r_0)l_1 \frac{j_1(r-r_0) - j_2l_1 - ml_1(l_2 + l_1)(l_2 - r + r_0)}{(j_1(r-r_0) - ml_1^2(l_2 - r + r_0))^2} C_{d0} + O(C_{d0}^{3/2})$$

Другие два корня вычисляются из следующего уравнения с точностью до $o(1)$:

$$(j_1 ml_2^2 + j_2 ml_1^2 + j_1 j_2) \lambda_{3,4}^2 + \\ + u C_l^\alpha (ml_1^2(l_2 - r)(l_2 - r + r_0) + j_1 r(r - r_0) + j_2 l_1^2) \lambda_{3,4} + \\ + u^2 C_l^\alpha (j_1(r - r_0) - ml_1^2(l_2 - r + r_0)) = 0$$

Пусть выполнено неравенство:

$$j_1(r - r_0) - j_2 l_1 - m l_1 (l_2 + l_1)(l_2 - r + r_0) > 0 \quad (6)$$

Тогда нетрудно показать, что действительные части всех корней характеристического многочлена отрицательны, и рассматриваемое равновесие асимптотически устойчиво. И наоборот, если имеет место неравенство противоположное неравенству (6), то такое равновесие неустойчиво.

Условие (6) заведомо выполнено, если крыло установлено достаточно далеко от шарнира между звеньями. В этом случае равновесие «вдоль потока» асимптотически устойчиво. В то же время, неравенство (6) нарушается, когда крыло находится достаточно близко к шарниру между звеньями. При этом имеет место неустойчивость.

Проанализируем влияние жёсткости пружин на характер устойчивости.

Выражение для третьего минора матрицы Гурвица можно структурно представить в следующем виде:

$$\Delta = A_4 r^4 + A_3 r^3 + A_2 r^2 + A_1 r + A_0 \quad (8)$$

Рассмотрим случай, когда вторая пружина отсутствует (т.е. $k_2 = 0$). Тогда корни уравнения (8) с точностью до $o(1)$ определяются следующими формулами:

$$r_1 = r_0, r_2 = r_0 + \frac{j_2 + m l_2^2}{m l_2},$$

$$r_{3,4} = \frac{k_1(j_2 + m l_2^2) + 2m l_2 l_1^2 u^2 C_y^\alpha + u^2 C_y^\alpha r_0(j_1 + m l_1^2) \pm \sqrt{A}}{2(k_1 m l_2 + u^2 C_y^\alpha(j_1 + m l_1^2))}$$

где

$$A = \left(k_1(j_2 + m l_2^2) + C_y^\alpha u^2 r_0(j_1 + m l_1^2) \right)^2 -$$

$$-4u^2 C_y^\alpha l_1^2 (u^2 C_y^\alpha (mj_2 + j_1 j_2 + ml^2 j_1) + k_1 r_0 m^2 l_2^2).$$

Как было отмечено выше, при $r < r_0$ имеет место неустойчивость, поскольку свободный член характеристического полинома отрицателен.

Если r_0 достаточно мало (т.е. выполнено неравенство $r_0 < 2l_1 \sqrt{j_1 ml_2^2 + j_2 ml_1^2 + j_1 j_2 (j_1 + ml_1^2)}^{-1}$, то существует некоторое критическое значение k_* жёсткости пружины в первом шарнире, такое, что при $k_1 < k_*$ величина A отрицательна, а при $k_1 > k_*$ – положительна. Область неустойчивости (на рис. 1.3 выделена серой заливкой) уменьшается при увеличении жёсткости, что представляется естественным.

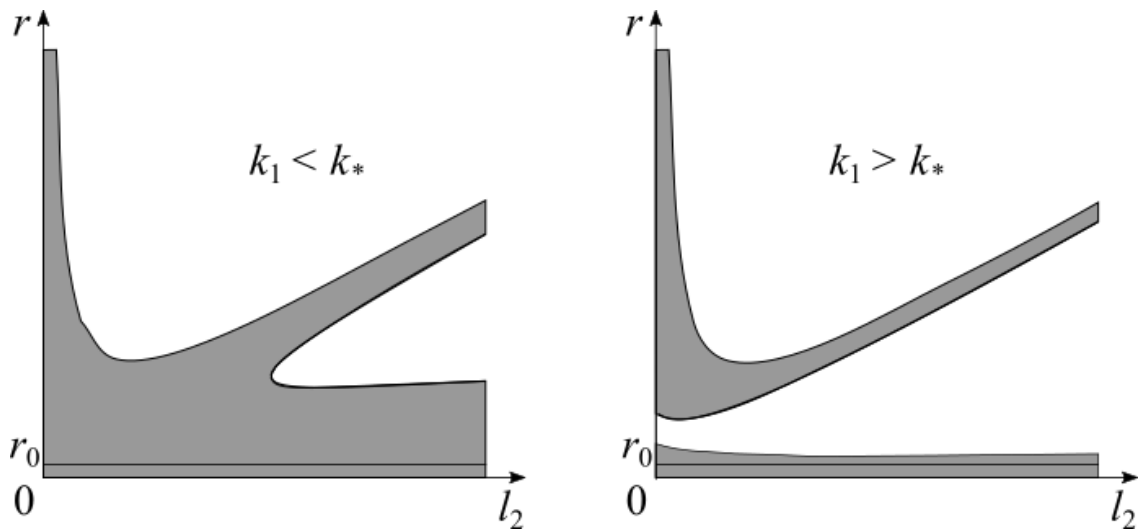


Рис. 1.3. Области неустойчивости положения равновесия «по потоку» в зависимости от параметров системы (пружина на втором звене отсутствует)

С другой стороны, третий минор матрицы Гурвица можно представить в следующем виде:

$$D(k_1 - k_{11})(k_1 - k_{12}) = 0 \quad (7)$$

Здесь:

$$D = (C_l^\alpha)^2 u^2 l_1^2 r (r - r_0) (j_2 + ml_2 (l_2 - r)) (j_2 + ml_2 (l_2 - r + r_0))$$

$$\begin{aligned}
k_{11} &= \frac{C_{d0}(j_1(r-r_0) - j_2l_1 - ml_1(l_1+l_2)(l_2-r+r_0))}{(j_2 + ml_2(l_2-r+r_0))} + \\
&+ \frac{k_2(l_1+r-r_0)(j_1(r-r_0) - j_2l_1 - ml_1(l_1+l_2)(l_2-r+r_0))}{l_1(r-r_0)(j_2 + ml_2(l_2-r+r_0))} + o(C_{d0}) \\
k_{12} &= \frac{C_l^\alpha u^2(j_1r(r-r_0) + j_2l_1^2 + ml_1^2(l_2-r)(l_2-r+r_0))}{r(j_2 + ml_2(l_2-r))} + \\
&+ \frac{k_2(l_1+r)(j_1r - j_2l_1 - ml_1(l_1+l_2)(l_2-r))}{l_1r(j_2 + ml_2(l_2-r))} + O(C_{d0})
\end{aligned}$$

При $r > j_2/ml_2 + l_2 + r_0$ величины k_{11} и k_{12} отрицательны, $D > 0$, поэтому асимптотическая устойчивость имеет место для любых физически осмысленных значений коэффициентов жёсткости. При $j_2/ml_2 + l_2 < r < j_2/ml_2 + l_2 + r_0$ коэффициент D отрицателен. Это означает, что (7) будет меньше нуля при достаточно больших k_1 (для любых значений k_2), и рассматриваемое положение равновесия будет неустойчивым.

Рассмотрим теперь случай $r_0 < r < j_2/\mu l_2 + l_2$. В этой ситуации величина D положительна. Если при этом момент инерции первого звена достаточно велик, т.е. $j_1 > (j_2l_1 + ml_1(l_2+l_1)(l_2-r+r_0))/(r-r_0) > 0$, то величины k_{11} и k_{12} положительны. Это означает, что рассматриваемое положение равновесия асимптотически устойчиво в отсутствие пружин, а в диапазоне $k_1 \in (k_{11}, k_{12})$ имеет место неустойчивость. Таким образом, установка пружины на первом звене может привести к потере устойчивости положения равновесия «вдоль потока».

Если величины j_1 и k_2 достаточно малы, то в указанном диапазоне r положение равновесия неустойчиво.

Глава 2

Результаты численного моделирования. Исследование циклов²

Чтобы исследовать периодические режимы и влияние параметров на движение маятника, было проведено численное моделирование, которое показало некоторые тенденции поведения системы в зависимости от параметров маятника.

2.1. Эволюция корней характеристического полинома

Для численного моделирования выберем следующие значения параметров: $j_1 = 150$, $j_2 = 20$, $m = 100$, $l_1 = 1.5$, $l_2 = 2$, $u = 1$. Такие параметры выбраны, как примерно соответствующие значениям реальной модели. Вначале рассмотрим случай, когда маятник закреплён без пружин: $k_1 = 0$, $k_2 = 0$. Изучалось влияние расстояния r на корни характеристического многочлена. Была написана программа, которая численно решала систему уравнений. Для линеаризованных уравнений были найдены корни характеристического полинома. Зависимость вещественных и мнимых частей от r представлена на Рис.2.1(а, б). При $r > 1.95$ имеется две пары комплексно сопряжённых корней с отрицательными действительными частями. Соответственно, в этом диапазоне тривиальное положение асимптотически устойчиво. При $r \approx 1.9$ знак действительной части одной из пар корней меняет знак и становится положительным. Можно ожидать рождения цикла по типу бифуркации Андронова-Хопфа. Аналитическая проверка этого предположения связана с громоздкими вычислениями. В интервале $1.4 < r < 1.9$ (область 1–2 на Рис. 2.1(б)) имеется две пары комплексно сопряжённых корней с разными знаками действительных частей. При значении $r \approx 1.6$ имеет место резонанс, но он, по видимому, не

² Отдельные положения данной главы изложены на основании публикаций: [79-82], [86-87]. В этих работах научными руководителями были предложены постановка задачи и методы её исследования. Соавторы публикаций принимали участие в проведении экспериментов и в обсуждении полученных результатов.

связан с потерей устойчивости. При $r \approx 1.4$ остаётся одна пара комплексно сопряжённых корней с положительной действительной частью и два действительных корня, а при $0.3 < r < 1.3$ (область 2–3 на Рис. 2.1) имеется четыре действительных корня. В интервале $0 < r < 0.3$ существуют два действительных корня и пара комплексно сопряжённых с отрицательной действительной частью.

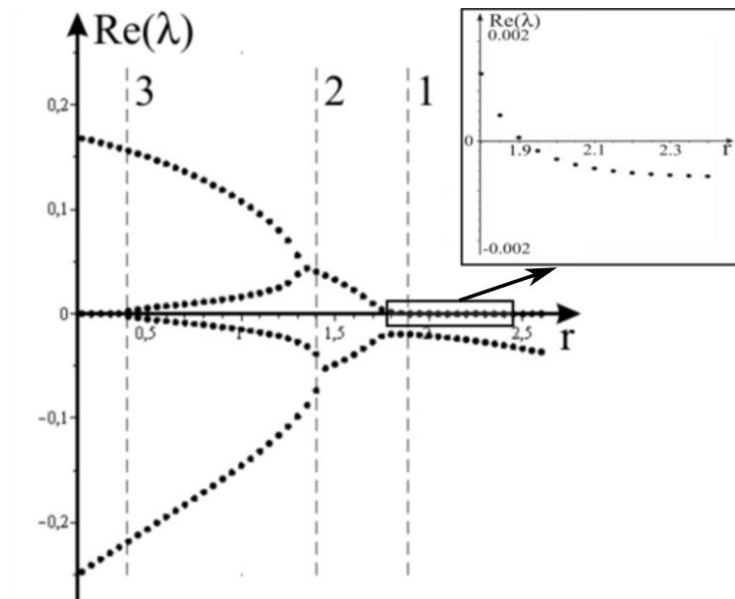


Рис.2.1(a) Вещественная часть корней характеристического многочлена в зависимости от r

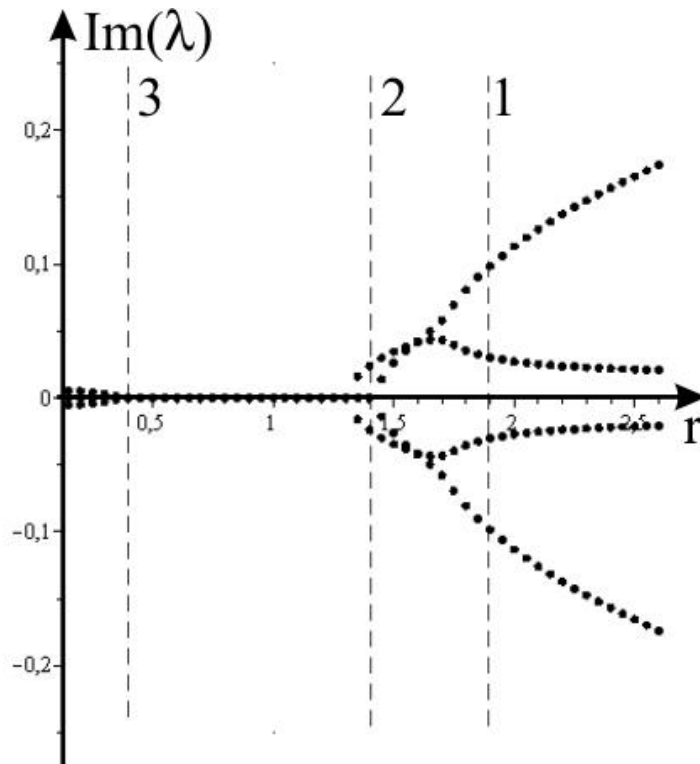


Рис.2.1(б) Вещественная и мнимая часть корней характеристического многочлена в зависимости от Γ

2.2. Исследование периодических режимов

Для исследования системы, проводилось интегрирование полной системы уравнений (4-5).

На Рис. 2.2 показано, как происходит затухание, при $r=1.95$. Видно, что амплитуда по θ досаточно быстро уменьшается. Отметим, что с определённого момента, затухание по каждому из углов происходит практически синхронно (разница между φ и θ очень мала). Это связано с тем, что $|\text{Re}\lambda_1|$ близка к нулю, а $|\text{Re}\lambda_2|$ существенно больше, чем $|\text{Re}\lambda_1|$ (см. Рис.2.1.а)

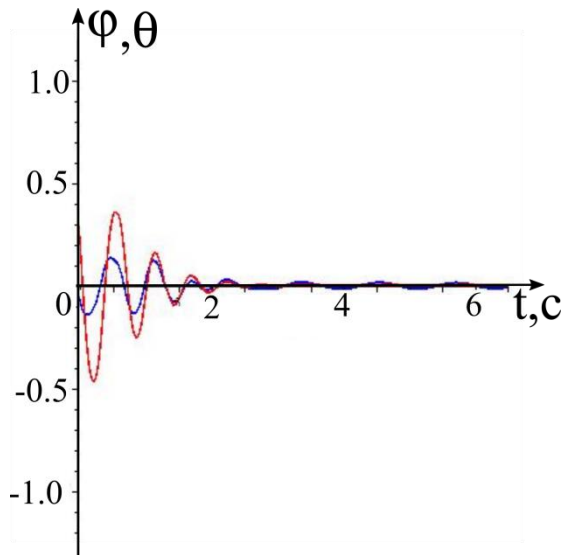


Рис. 2.2 Затухающие колебания, полученные при $r = 1.95$

В результате численного моделирования было обнаружено два типа циклов. Для циклов I типа характерна маленькая амплитуда колебаний второго звена. Для II типа – амплитуда колебаний второго звена достаточно велика.

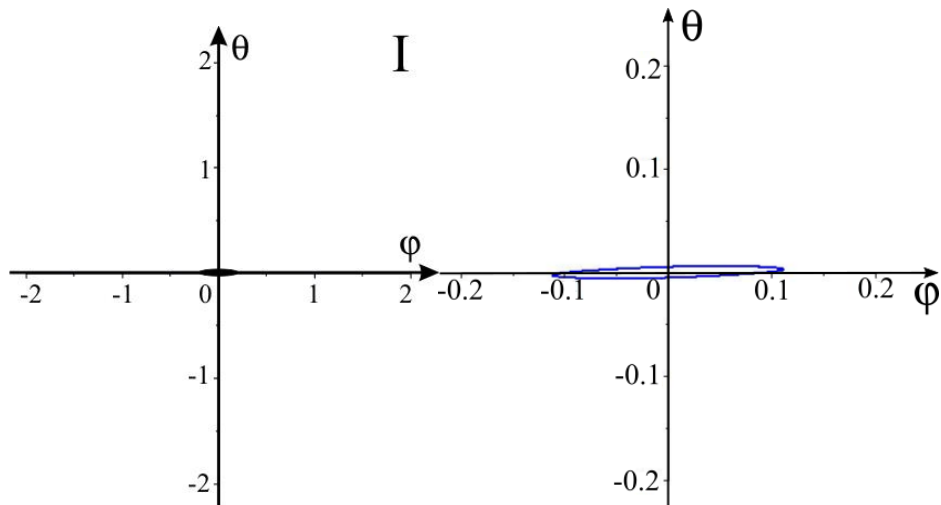


Рис. 2.3 Цикл I типа, полученный при $r = 1.9$

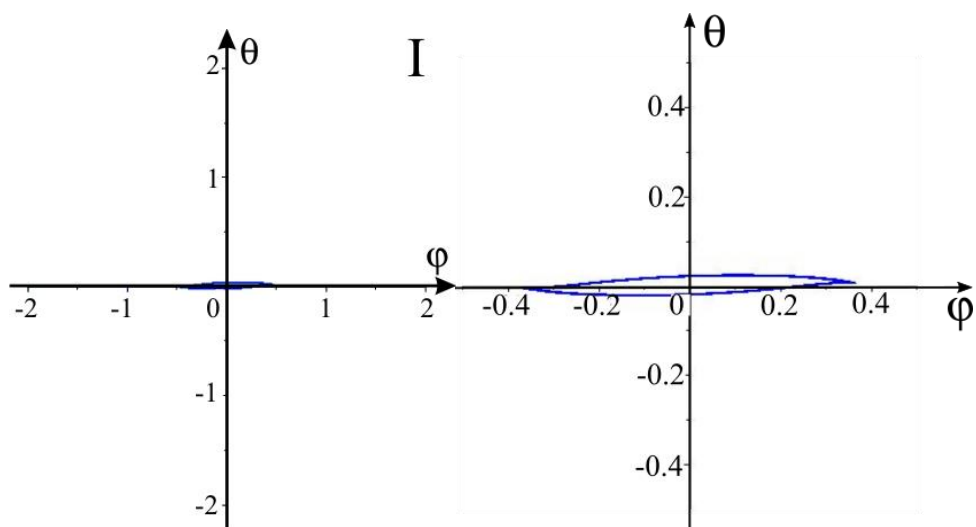


Рис. 2.4 Цикл I типа, полученный при $r = 1.85$

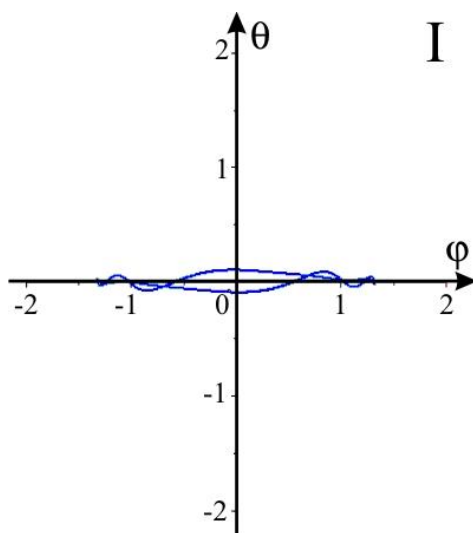


Рис. 2.5 Цикл I типа, полученный при $r = 1.8$

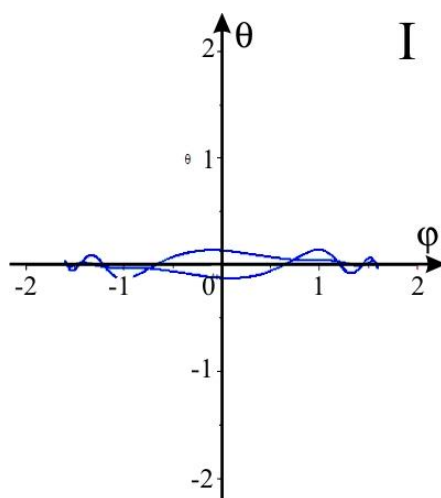


Рис. 2.6 Цикл I типа, полученный при $r = 1.75$

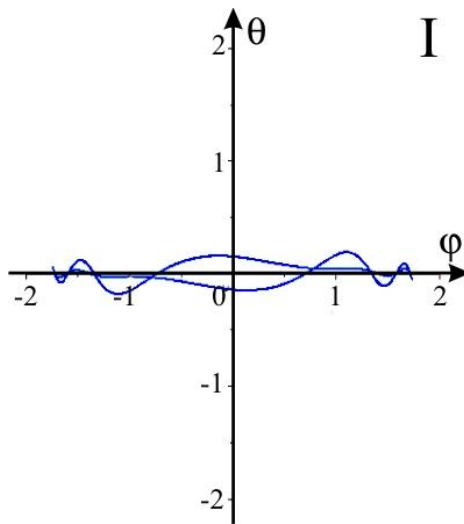


Рис. 2.7 Цикл I типа, полученный при $r=1.7$

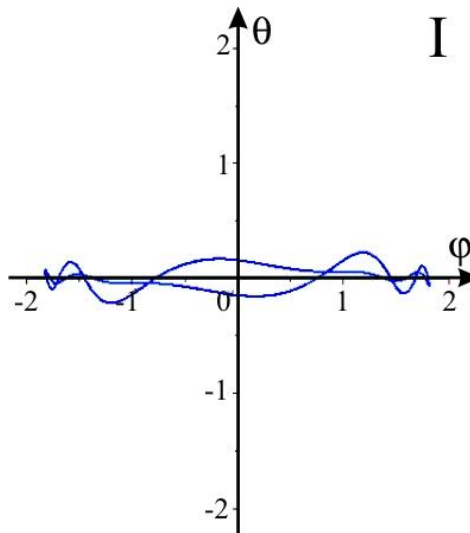


Рис. 2.8 Цикл I типа, полученный при $r=1.65$

На Рис. 2.3 – 2.8, показано, как меняется цикл I типа, при изменении r . Цикл рождается из точки $\varphi = 0, \theta = 0$. С уменьшением r амплитуды колебаний увеличиваются. Видно, что для данного типа циклов амплитуда по φ заметно больше, чем амплитуда по θ . При $r = 1.6$ цикл первого типа исчезает.

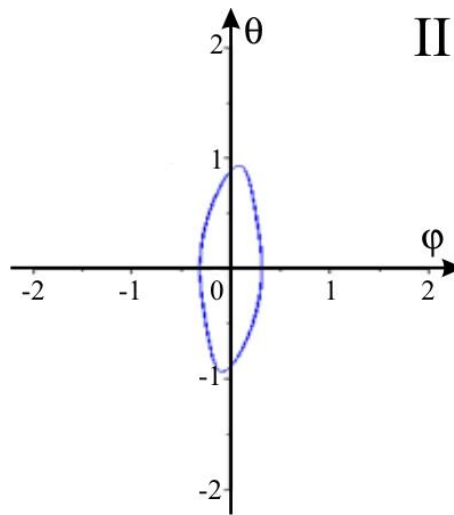


Рис. 2.9 Цикл II типа, полученный при $r=1.9$

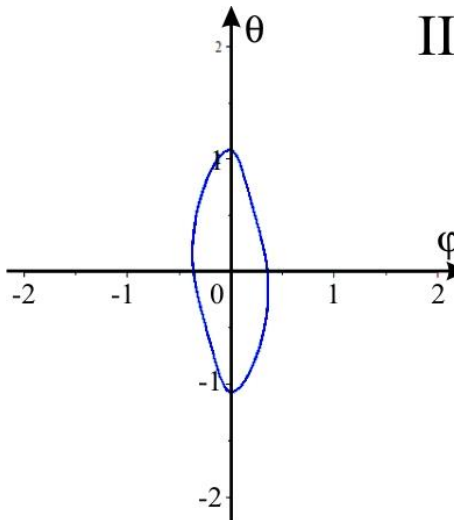


Рис. 2.10 Цикл II типа, полученный при $r=1.85$

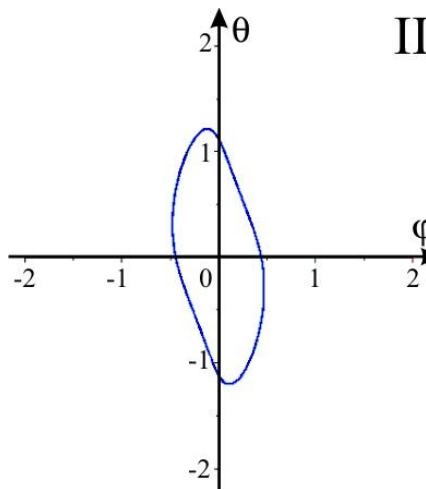


Рис. 2.11 Цикл II типа, полученный при $r=1.8$

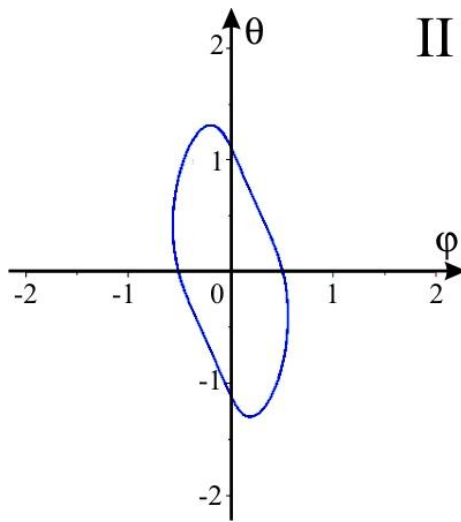


Рис. 2.12 Цикл II типа, полученный при $r=1.75$

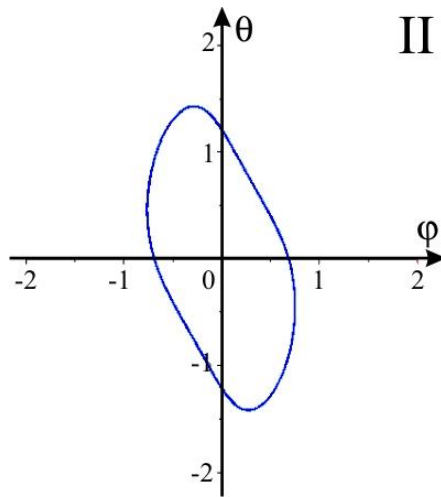


Рис. 2.13 Цикл II типа, полученный при $r=1.7$

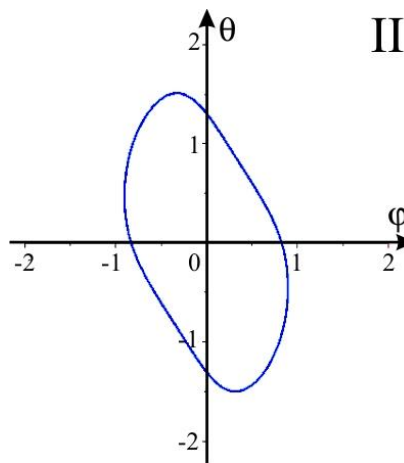


Рис. 2.14 Цикл II типа, полученный при $r=1.65$

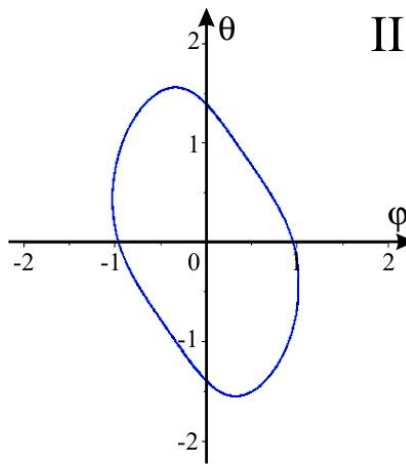


Рис. 2.15 Цикл II типа, полученный при $r=1.6$

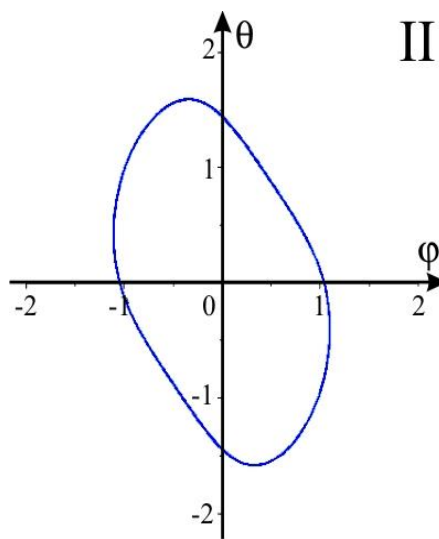


Рис. 2.16 Цикл II типа, полученный при $r=1.55$

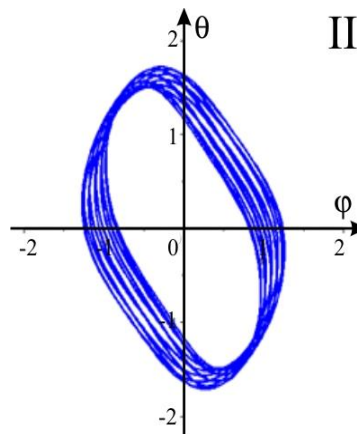


Рис. 2.17 Цикл II типа, полученный при $r=1.5$

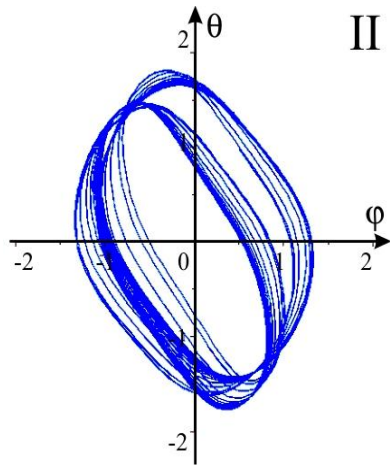


Рис. 2.18 Цикл II типа, полученный при $r=1.46$

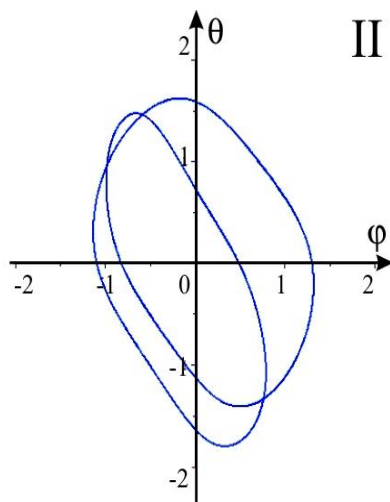


Рис. 2.19 Цикл II типа, полученный при $r=1.45$

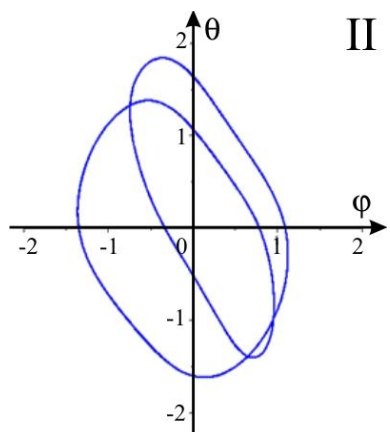


Рис. 2.20 Цикл II типа, полученный при $r=1.4$

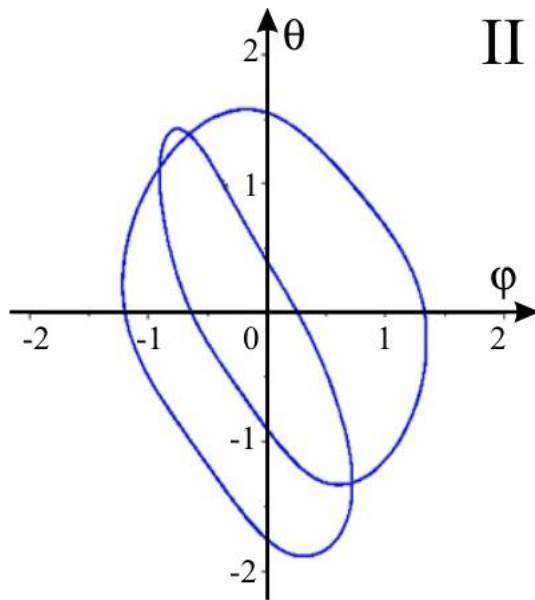


Рис. 2.21 Цикл II типа, полученный при $r=1.35$

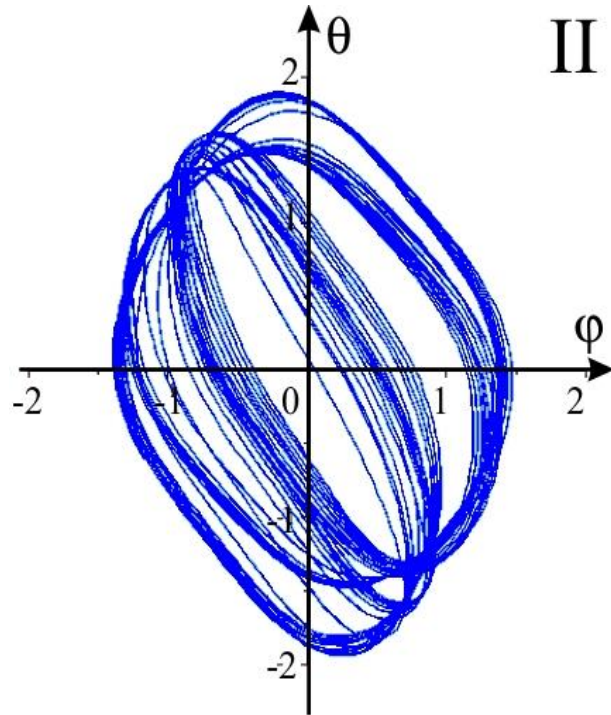


Рис. 2.22 Цикл II типа, полученный при $r=1.33$

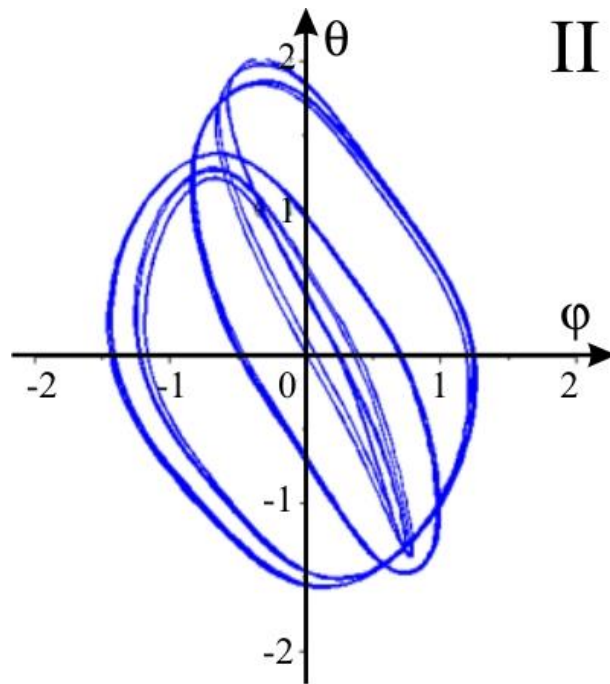


Рис. 2.23 Цикл II типа, полученный при $r=1.3$

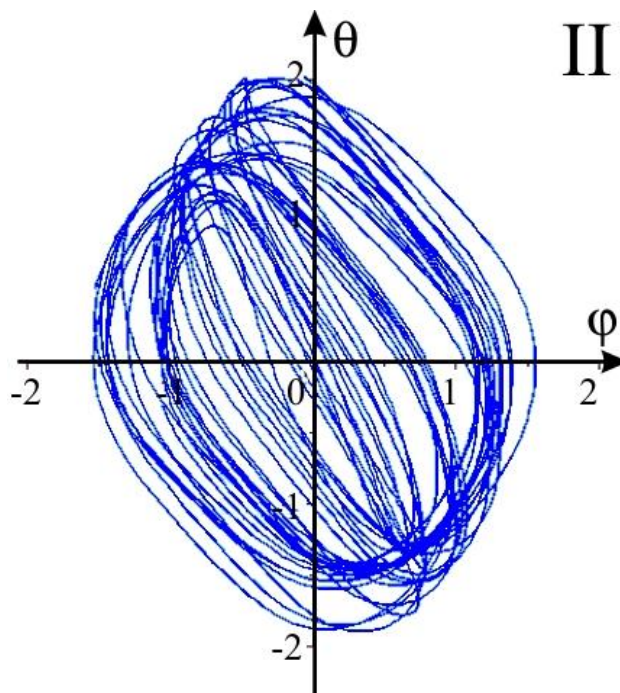


Рис. 2.24 Цикл II типа, полученный при $r=1.25$

Для циклов второго типа (Рис.2.9 – 2.24) амплитуда по θ , примерно в одном диапазоне с амплитудой по φ . Амплитуды по φ и θ увеличиваются при уменьшении r . При $r = 1.6$ амплитуды по обоим углам достаточно велики. Когда $r = 1.5$, цикл становится длиннопериодическим и при

$r = 1.45$ цикл имеет достаточно сложную структуру. При дальнейшем уменьшении r цикл вновь становится длиннопериодическим.

В численном моделировании найдено два типа циклов, у каждого из которых своя область притяжения.

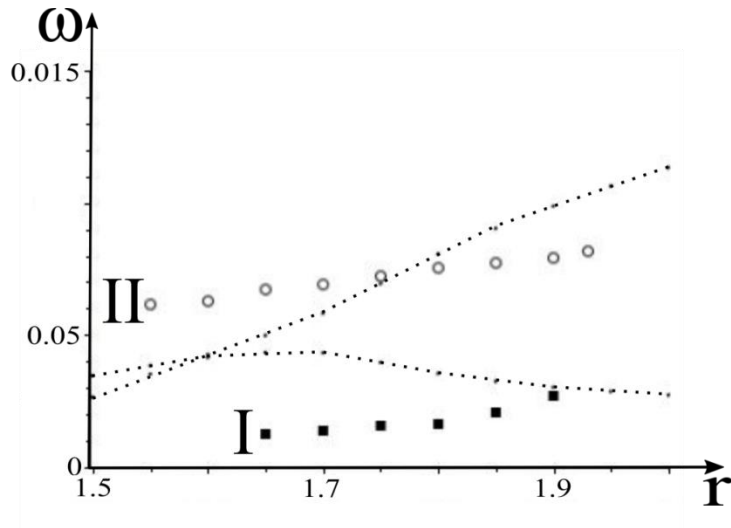


Рис. 2.25 Частоты автоколебаний (квадраты-цикл I типа, круги-цикл II типа) и мнимые части корней характеристического многочлена (пунктирная линия)

На Рис.2.25 показана зависимость мнимых частей полинома и частот автоколебаний от r . Как видно, цикл I типа рождается при том значении r , при котором ожидалась бифуркация Андронова-Хопфа.

Первый тип цикла, для которого характерна низкая частота колебаний, большая амплитуда по φ и маленькая по θ , имел следующие особенности области притяжения:

вблизи «нулевого положения», при небольших значениях $\dot{\varphi}$ и $\dot{\theta}$;

при большом φ , малых θ , $\dot{\varphi}$ и $\dot{\theta}$.

Второй тип цикла, для которого характерна высокая частота колебаний и большие амплитуды по обоим звеньям, имел особенности области притяжения:

большое отклонение по θ , либо большие $\dot{\varphi}$ или $\dot{\theta}$.

С точки зрения применимости двухзвенного маятника в качестве ветроприёмного устройства, есть основания полагать, что более «выгоден» такой режим, у которого амплитуда и частота колебаний первого звена будут наибольшими, так как электрогенератор технически целесообразно соединять именно с первым звеном. И если оценивать энергию, которую можно будет извлечь с потока, то в первую очередь важны амплитуда и частота колебаний первого звена. Расположение генератора на ось вращения второго звена труднореализуемо на практике. В связи с этим, меньшая амплитуда колебаний второго звена желательна с точки зрения безопасности. Как видно из Рис.2.26(а), амплитуда колебаний первого звена больше у циклов первого типа, но частота колебаний меньше (Рис.2.26(в)). Амплитуда колебаний второго звена в цикле I типа существенно меньше амплитуды колебаний второго звена при II типе цикла (Рис. 2.26(б)), поэтому с точки зрения более длительного использования установки, первый тип циклов предпочтительнее.

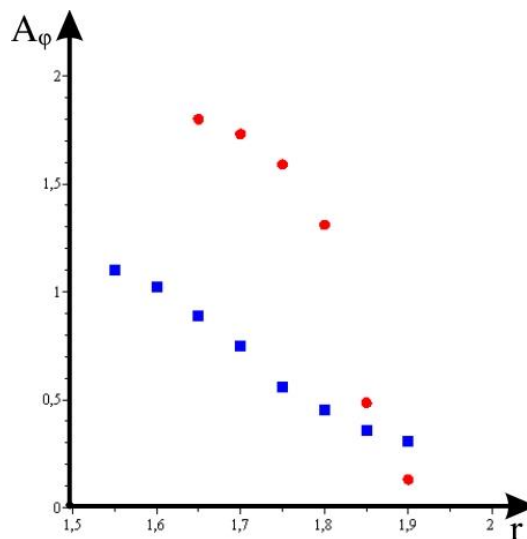


Рис.2.26(а) Зависимость амплитуды колебаний первого звена от r (круг – цикл 1-го типа, квадрат – цикл 2-го типа). Без пружин

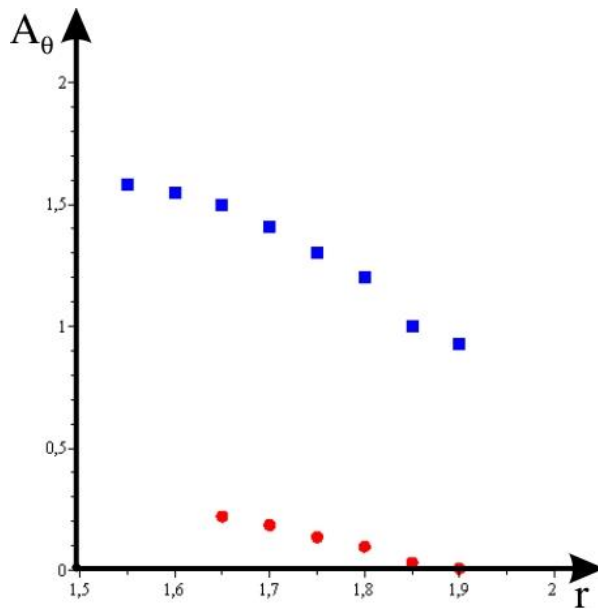


Рис.2.26(б) Зависимость амплитуды колебаний второго звена от Γ (круг – цикл 1-го типа, квадрат – цикл 2-го типа). Без пружин

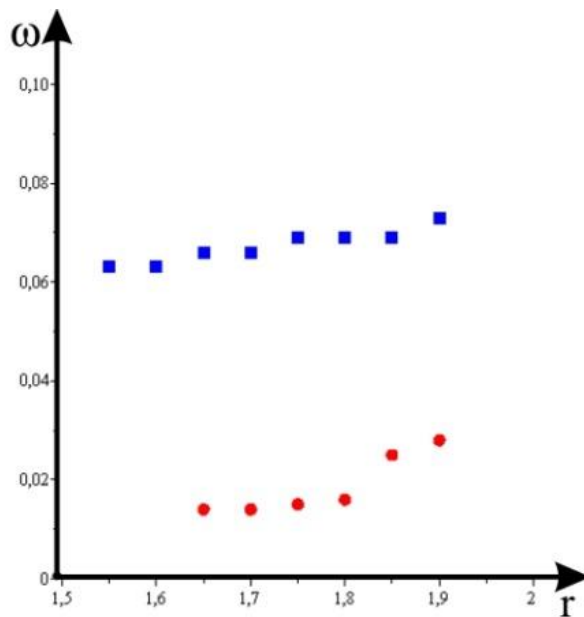


Рис.2.26(в) Зависимость частоты колебаний от Γ (круг – цикл 1-го типа, квадрат – цикл 2-го типа). Без пружин

Таким образом, дать оценку какой режим лучше с точки зрения наибольшего преобразования энергии нельзя, но с точки зрения безопасности первый режим предпочтительнее. Как видно из Рис. 2.26(а,б), цикл первого типа рождается из положения «по потоку» ($\varphi = 0, \theta = 0$).

2.3. Влияние жёсткости пружин

На Рис.2.27(а, б) показаны зависимости амплитуд A_φ , A_θ первого и второго звеньев, соответственно, от коэффициентов жёсткости. Было выбрано $u = 1$, $r = 2$, при котором в отсутствие пружин положение равновесия асимптотически устойчиво.

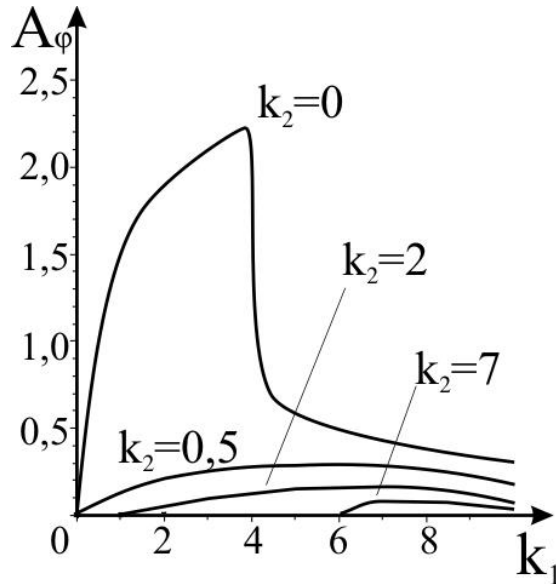


Рис. 2.27(а) Амплитуда колебаний первого звена, в зависимости от коэффициентов жёсткости.

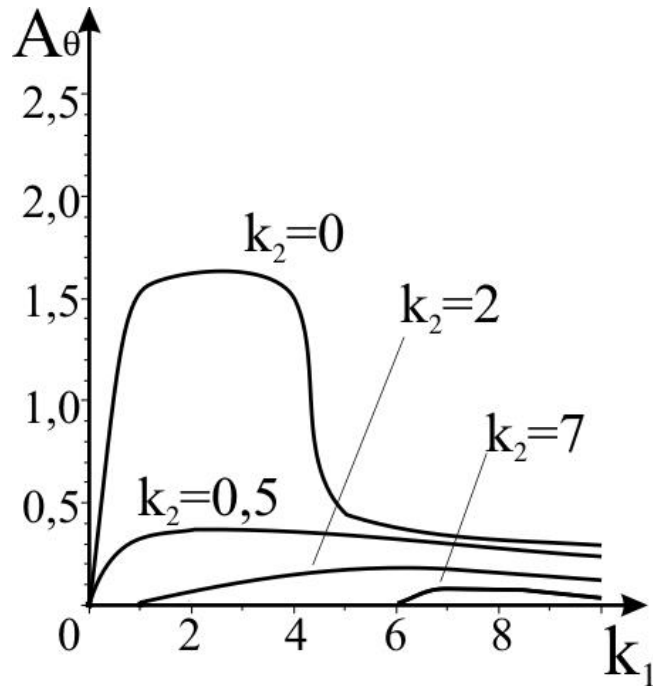


Рис. 2.27(б) Амплитуда колебаний второго звена, в зависимости от коэффициентов жёсткости.

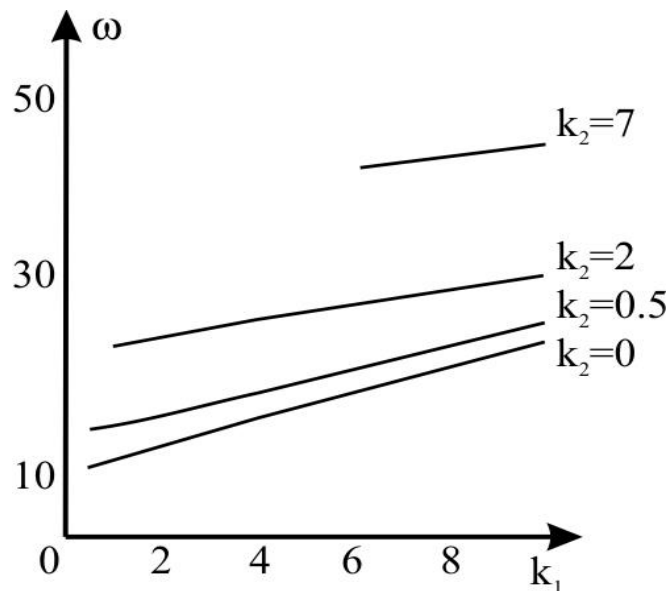


Рис. 2.27(в) Частота колебаний маятника, в зависимости от коэффициентов жёсткости.

При наличии пружины на первом звене, положение равновесия становится неустойчивым, а увеличение её жесткости (в некотором диапазоне) приводит к значительному увеличению амплитуды колебаний маятника. Вторая пружина оказывает стабилизирующее воздействие на систему. Как видно из Рис. 2.27(а, б), увеличение жёсткости пружины на втором звене, приводит к увеличению зоны асимптотической устойчивости. Из Рис. 2.27(а, б) видно, что амплитуды колебаний также уменьшаются при увеличении жёсткости пружины на втором звене. Что касается частот автоколебаний, то они, как и следовало ожидать, возрастают при увеличении жёсткости любой из пружин. Это видно из Рис. 2.27(в), где приведена зависимость частот автоколебаний от жёсткости пружины на первом звене при разных значениях жёсткости пружины на втором звене. Видно, что зависимость частот автоколебаний от жёсткости на первом звене практически линейная в рассматриваемом диапазоне значений жёсткости пружины на первом звене.

Как было указано выше, при увеличении k_2 область устойчивости увеличивается. И для достаточно больших k_2 тривиальное положение равновесия будет асимптотически устойчивым при любых значениях

жёсткости пружины на первом звене. При $k_2 \rightarrow \infty$ это случай однозвенного маятника с лопастью, закреплённой вдоль звена. Устойчивость тривиального положения равновесия такой системы показана в работе [89].

Численное моделирование выявило следующие тенденции:

Существование, как минимум, двух типов цикла одновременно, у каждого из которых своя область устойчивости.

Уменьшение амплитуды и возрастание частоты колебаний при увеличении r . Устойчивость положения «по потоку» при больших r .

Увеличение амплитуды и частоты колебаний, при наличии пружины на первом звене (в некотором диапазоне), а также потеря устойчивости положения «по потоку».

Глава 3

Экспериментальное исследование³

Экспериментальное исследование с двухзвенным аэродинамическим маятником проводилось в аэродинамической трубе А-6 НИИ механики МГУ. Была разработана и изготовлена модель двухзвенного маятника, в которой могло меняться положение крыла на втором звене.

3.1. Описание аэродинамической трубы

Эксперименты проводились в НИИ механики МГУ на аэродинамической трубе А-6. Для описания характеристик аэродинамической трубы А-6, использовался материал с сайта Института механики МГУ. Труба А-6 — замкнутая, одноканальная с открытой рабочей частью эллиптического сечения. Размеры рабочей части трубы: длина — 4 м, большая ось эллипса — 4 м, малая ось — 2,34 м, площадь поперечного сечения рабочей части — $7,32 \text{ м}^2$, степень поджатия сопла $n = 5,09$.

Приводом трубы служит шестилопастный вентилятор диаметром 4,4 м, вращаемый двигателем постоянного тока мощностью 2 МВт. Изменение скорости потока в рабочей части достигается изменением числа оборотов двигателя в пределах от 0 до 750 оборотов в минуту, осуществляемым по схеме Леонардо.

Скорость потока в рабочей части трубы, при наличии модели, может достигать 50 м/с.

Качество потока в рабочей части характеризуется следующими величинами:

- 1) неравномерность величины скорости не более $\pm 0,5 \%$;
- 2) скос потока в вертикальной и горизонтальной плоскостях не более $\pm 0,25^\circ$;

³ Отдельные положения данной главы изложены на основании публикаций: [79-87]. В этих работах научными руководителями были предложены постановка задачи и методы её исследования. Соавторы публикаций принимали участие в проведении экспериментов и в обсуждении полученных результатов.

- 3) градиент статического давления вдоль оси трубы — $0,002 \text{ м}^{-1}$;
- 4) критическое число Рейнольдса для шара диаметром 150 мм — 375000;
- 5) продольная составляющая интенсивности турбулентности в пустой рабочей части не более 0,2 %.

Маятник крепится на срезе трубы А-6, как показано на Рис. 3.1.



Рис.3.1 Двухзвенный маятник в аэродинамической трубе

Для регистрации движения маятника была создана измерительная система, позволяющая измерять углы поворота первого и второго звеньев. Для этого под маятником был горизонтально установлен специальный чёрный плоский экран. На концах каждого звена были установлены лазеры (на Рис.1 M_3 и m_3) так, что их лучи направлены вертикально вниз на экран. Весь эксперимент снимался на высокоскоростную камеру. Съёмка производилась со скоростью 300 кадров в секунду. Пример получаемых кадров такой съёмки показан на Рис.3.2.

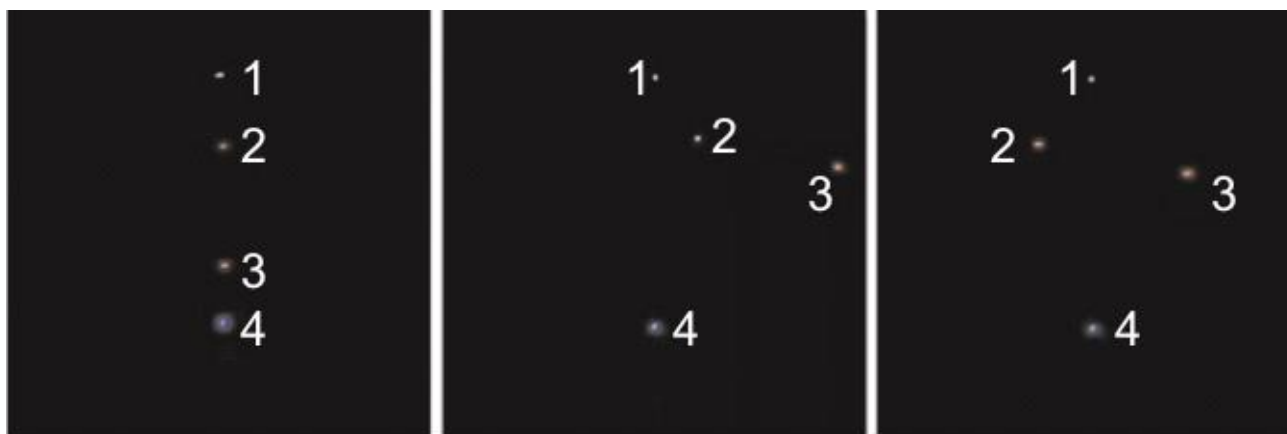


Рис.3.2 Кадры высокоскоростной съёмки

Для идентификации углов требуется отметить ось трубы (направление потока воздуха). Это было сделано с помощью диодов, установленных на экране (на Рис.3.7 точки 1 и 4). Один из диодов выставлен в точке, которая находится на оси вращения первого звена (точка 1 на Рис.3.7), а другой (точка 4 на Рис.3.7), таким образом, что прямая, проходящая через точки 1 и 4 (Рис. 3.7) совпадала с направлением ветра.

Таким образом, при движении маятника, имеется ось O_1X , параллельная направлению ветра, и две «бегающие» точки (на Рис.3.7 точки 2 и 3), которые показывают положение концов первого и второго звена. Следовательно, мы можем определить углы φ и θ в любой момент времени.

Была написана специальная программа, которая обрабатывала изображения с камеры и выполняла следующие операции:

- 1) Определяла точку начала координат.
- 2) Обеспечивала определение направления оси потока.
- 3) Идентифицировала точки, маркирующие положение шарнира между звеньями и конца второго звена.

На основе найденных программой координат всех четырех точек-маркеров определялись величины углов φ и θ при текущем положении звеньев маятника.

3.2. Влияние угла наклона камеры на выходные данные

Камера располагается в вертикальной плоскости содержащей ось трубы, как показано на Рис.3.8 (а). Существенным параметром является угол наклона камеры к горизонтальной плоскости. Идеальным расположением является то, когда оптическая ось камеры вертикальна, потому что тогда никаких корректировок по снимаемым параметрам вводить не требуется. Но при этом точки на экране перекрываются элементами конструкции. Поэтому камеру необходимо устанавливать под иным углом. В проводимом эксперименте камера крепилась под углом 25° к вертикали, как показано на Рис.3.3(а).

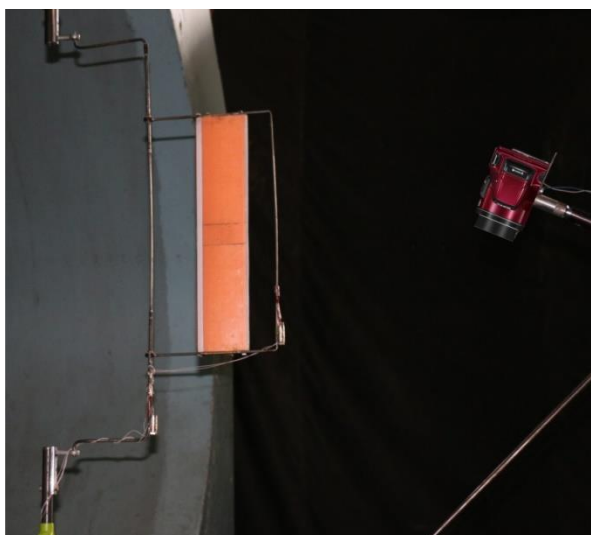


Рис.3.3(а). Крепление камеры в трубе

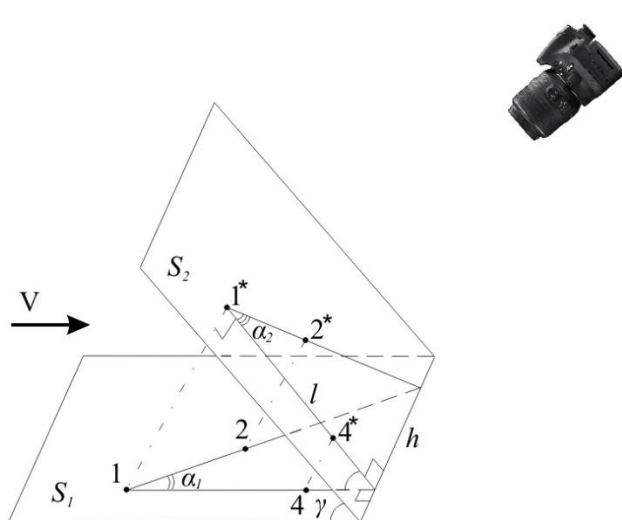


Рис.3.3(б). Влияние угла наклона камеры на получаемые углы

Определим влияние угла установки камеры на результаты измерений. Камера передаёт изображение, в котором плоскость образа экрана перпендикулярна оптической оси камеры. На Рис.3.3 (б) показано, как угол с горизонтальной плоскости S_1 будет спроецирован на плоскость S_2 . Тогда из геометрических соотношений имеем следующее:

$$h = l \cdot \operatorname{tg} \alpha_2 = l / \cos \gamma \cdot \operatorname{tg} \alpha_1,$$

откуда получаем соотношение углов

$$\alpha_1 = \operatorname{arctg}(\cos \gamma \cdot \operatorname{tg} \alpha_2)$$

Таким образом, эта формула даёт связь между реальным углом α_1 , углом наклона γ камеры и углом α_2 , получаемого с камеры. Для нашего случая угол γ равен 25° . На Рис.3.4 показана зависимость получаемого угла φ с камеры от фактического угла β^* . Сплошной линией изображён случай, когда камера расположена перпендикулярно к плоскости экрана. В этом случае значение угла, измеренного на изображении с камеры, будет в точности совпадать с реальным углом. Штрихом показана зависимость при угле наклона камеры 25° к вертикали, как в эксперименте.

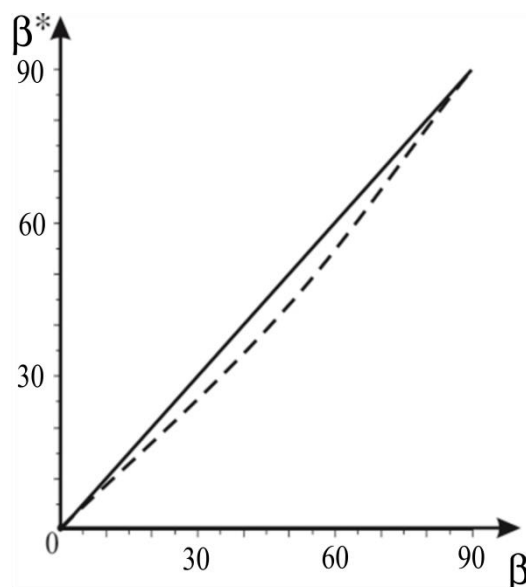


Рис.3.4 Зависимость реальных значений угла, от получаемых, при разных наклонах камеры (сплошной 0° градусов, пунктирная 25°)

Как видно из Рис. 3.9 β^* и β совпадают при $\beta = 0^\circ$ и 90° , а самое большое отличие при $\beta = 45^\circ$ примерно 5° . Это относительно небольшое различие всё равно учитывалось, при обработке эксперимента.

3.3. Экспериментальная модель

На Рис.3.5 представлена схема двухзвенного маятника. Его ось вращения вертикальна. Модель маятника представляет собой конструкцию, сделанную из стальных стержней. Для жёсткости конструкции крепление обоих звеньев происходит сверху и снизу. Первое звено представляет собой два прутка (на Рис.3.5 элементы 1 и 3), параллельных друг другу и скреплённых стержнем (на Рис.3.1 элемент 2), который им перпендикулярен. К этому стержню с помощью двух цилиндрических шарниров (на Рис.3.5 элементы ШЗ и Ш4) крепится и второе звено маятника, которое также состоит из двух параллельных прутков (на Рис.3.5 элементы 4 и 6) и перпендикулярному им стержню (на Рис.3.5 элемент 5), который их соединяет. На втором звене крепится симметричное крыло (на Рис.3.5 элемент 7). Ось крыла параллельна соединяющим стержням маятника. Крепление крыла может осуществляться в различных точках. Таким образом, для маятника без пружин имеем: первое звено может свободно вращаться вокруг неподвижной оси, а второе звено может свободно вращаться вокруг стержня 2. Маятник имеет следующие физические характеристики:

Масса стержней 1 и 3 (M_1)	35 г.
Масса стержня 2, (M_2)	132 г.
Масса лазера на стержне 2 (M_3)	15 г.
Масса стержней 4 и 6 (m_1)	28 г.
Масса стержня 5 (m_2)	25 г.
Масса лазера на стержне 5 (m_3)	15 г.

Масса лопасти 7 (m_7)	75 г.
Длина стержней 1 и 3 (L)	160 мм.
Длина стержней 4 и 6 (l)	230 мм.
Расстояние l_d	8 мм.

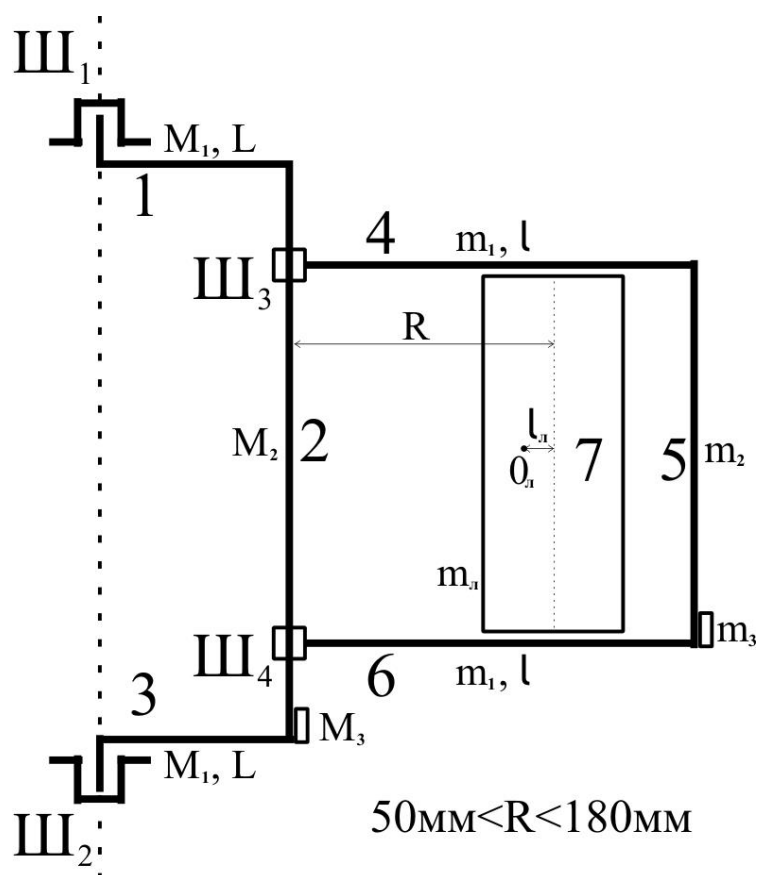


Рис.3.5 Схема двухзвенного маятника

Крыло имеет симметричный профиль НАСА0015. Длина хорды – 100 мм, высота крыла – 400 мм. Это позволяет использовать для него аэродинамические характеристики, полученные в ([47]). Крыло изготовлено из пенопласта высокой плотности (50 кг/м^3). Чтобы избежать деформации при больших нагрузках, крыло обтянуто высокопрочной бронеплёнкой.

К первому звену маятника могут крепиться пружины. Для эксперимента использовались линейные пружины различной жёсткости. Схема крепления пружин представлен на Рис.3.6.

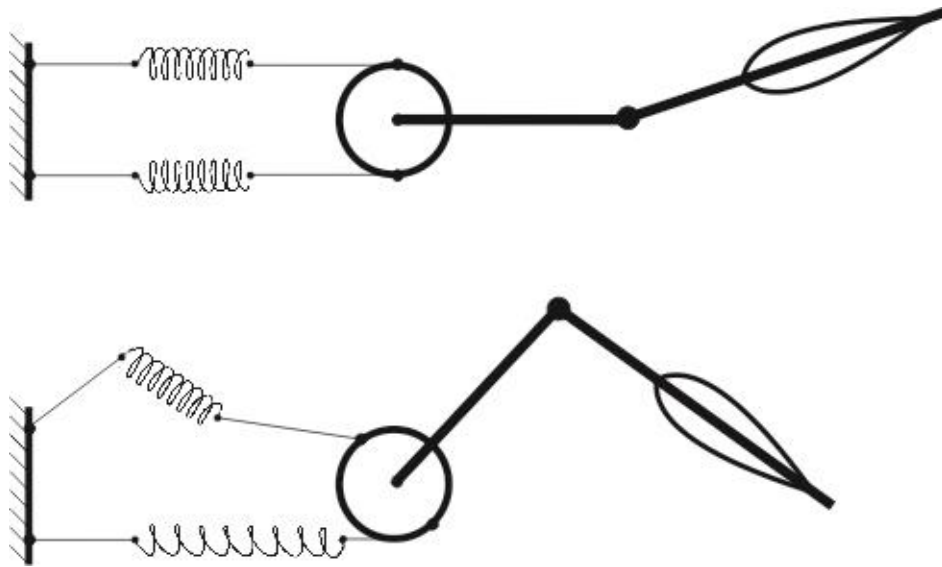


Рис.3.6 Схема упругого крепления двухзвенного маятника (вид сверху)

К первому звену жёстко крепится диск. Центр диска, совпадает с неподвижной осью вращения маятника. Плоскость диска перпендикулярна оси вращения. На концах пружин закреплены нерастяжимые стальные нити. Один конец нити крепится к диску, другой к неподвижной плоскости. Обе пружины закреплены симметрично относительно оси трубы. При повороте маятника в какую-либо сторону работает только одна пружина, причем на растяжение. Вторая пружина в этот момент находится в «провисшем состоянии» и практически не влияет на движение маятника. На Рис. 3.6 показано, что происходит с пружинами во время движения маятника.

Для эксперимента были подобрано несколько пар одинаковых линейных пружин. Было проведено измерение жёсткости пружин. Графики зависимости растяжения пружин от нагрузки приведены на Рис 3.7–3.9

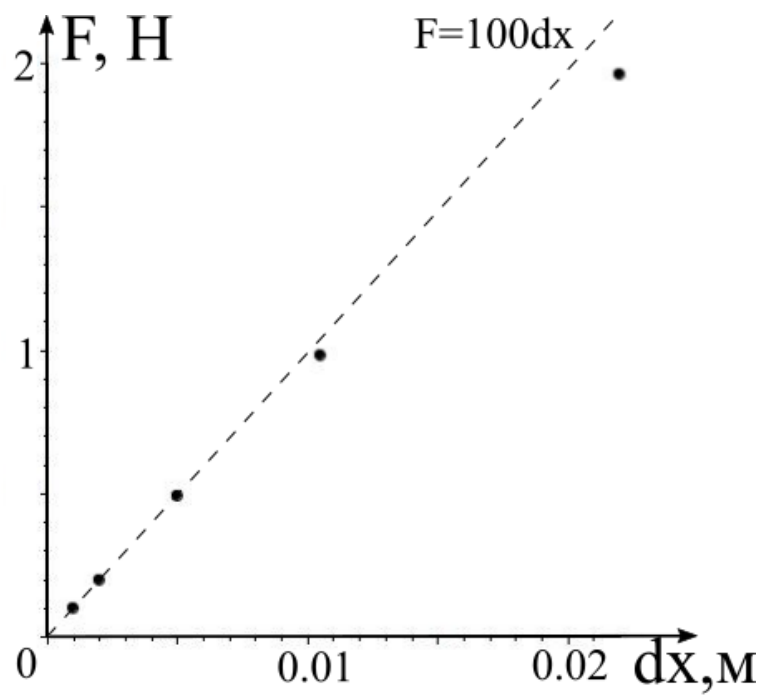


Рис.3.7 Зависимость силы упругости от деформации. Пружина I

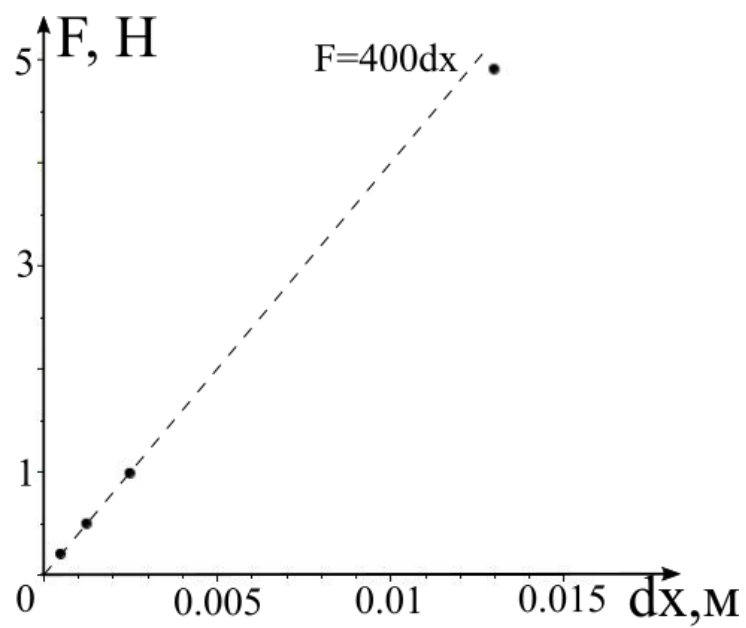


Рис.3.8 Зависимость силы упругости от деформации. Пружина II

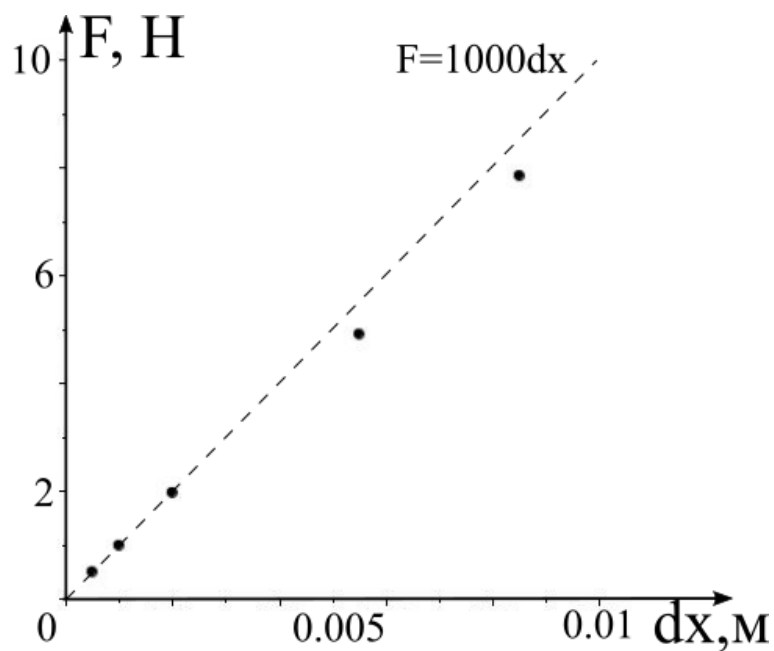


Рис.3.9 Зависимость силы упругости от деформации. Пружина III

Было выбрано три вида пружин. I тип – жёсткость 100 Н/м (Рис. 3.7), II тип – жёсткость 400 Н/м (Рис. 3.8) и III – жёсткость 1000 Н/м (Рис. 3.9). При небольших отклонениях пружины ведут себя как линейные. Коэффициент K линейной жёсткостью пружин следующим соотношением $K = K_{\text{лин}} r_{\text{д}}^2$, где $r_{\text{д}}$ – радиус диска, который крепится на первое звено и к которому монтируются пружины (Рис. 3.6), $r_{\text{д}} = 0,02$ м. Соответственно, размерные коэффициенты жёсткости для момента таковы: I тип – 0,04 Н · м, II тип – жёсткость 0,16 Н · м и III – жёсткость 0,4 Н · м.

Было проведено несколько серий экспериментов. Проводилось измерение углов φ и θ , при различных скоростях набегающего потока. Затем положение крыла менялось, и эксперимент повторялся для такого же диапазона скоростей ветра. Положение крыла менялось от 8 см до 15 см, с шагом 1 см. Скорость ветра изменялась от 5 м/с до 15 м/с, с шагом 2 м/с.

Такие эксперименты проводились, когда на маятнике не было установлено пружин: $k_1=k_2=0$ и при различных значениях жёсткости пружины на первом звене. Пружины на первом звене: I – 0,04 Н · м, II – 0,16 Н · м и III – 0,4 Н · м. Пружина на втором звене отсутствовала ($k_2=0$).

Эксперимент был проведён для положения крыла, при котором $R=16.5$ см. Скорость ветра изменялась от 7 м/с до 13 м/с, с шагом 2 м/с. Пружины на первом звене: I – 0,04 Н·м, II – 0,16 Н·м, III – 0,4 Н·м, IV – 0.8 Н·м, V – 1.6 Н·м. Пружина на втором звене отсутствовала ($k_2=0$).

На Рис. 3.10 приведён пример затухающих колебаний из эксперимента. Как видно из Рис.3.10, значения углов близки друг к другу (похоже на однозвенный маятник). Заметим, что такой же результат наблюдался и в численном моделировании (см. Рис.2.2).

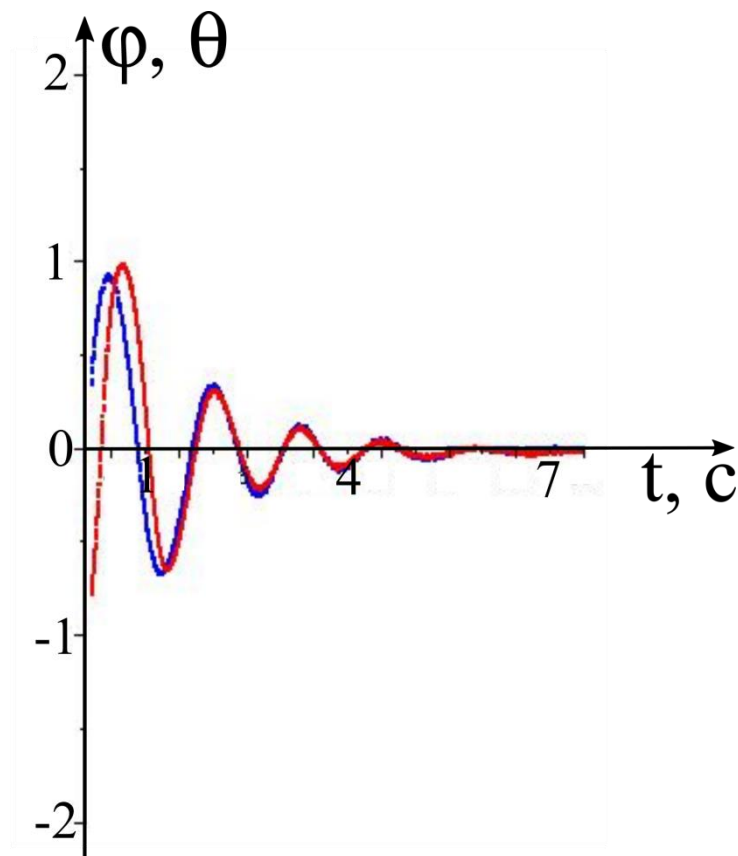


Рис.3.10 Зависимость φ и θ от t , при затухающих колебаниях

Проведённое во второй главе численное моделирование выявило некоторые тенденции:

Существование, как минимум, двух типов цикла одновременно, у каждого из которых своя область устойчивости.

Уменьшение амплитуды и возрастание частоты колебаний при увеличении R . Устойчивость положения «по потоку», при больших R .

Увеличение амплитуды и частоты колебаний, при наличии пружины на первом звене (в некотором диапазоне), а также потеря устойчивости положения «по потоку».

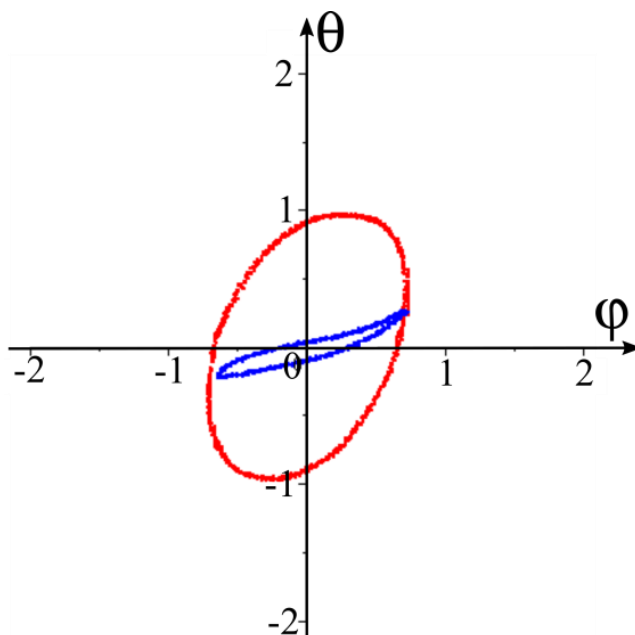


Рис.3.11 Одновременное существование двух циклов

На Рис. 3.11 показано существование двух типов цикла одновременно (в эксперименте). Это согласуется с результатами, полученными в численном моделировании.

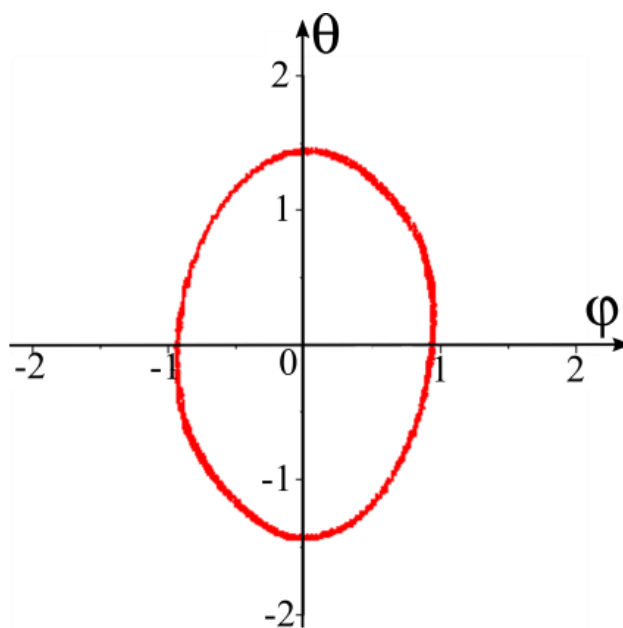


Рис.3.12 (а) Периодический режим при R=8 см

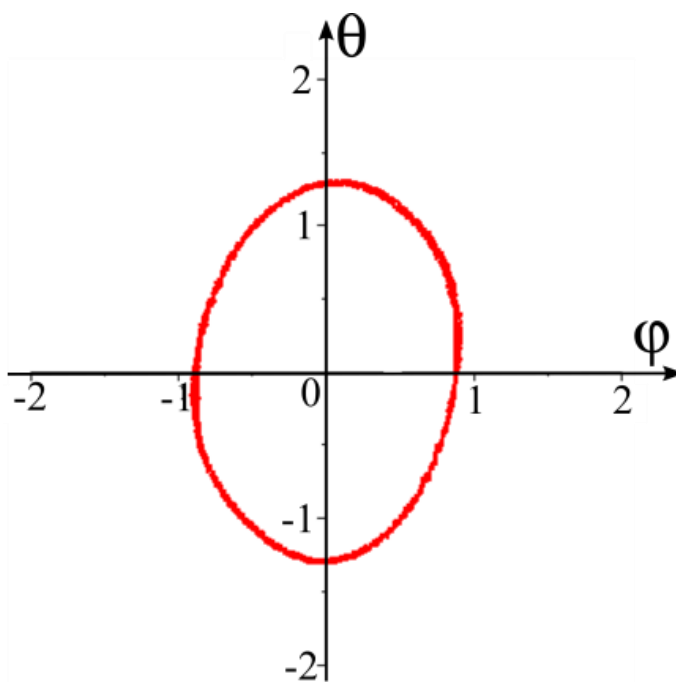


Рис.3.12 (б) Периодический режим при $R=9$ см

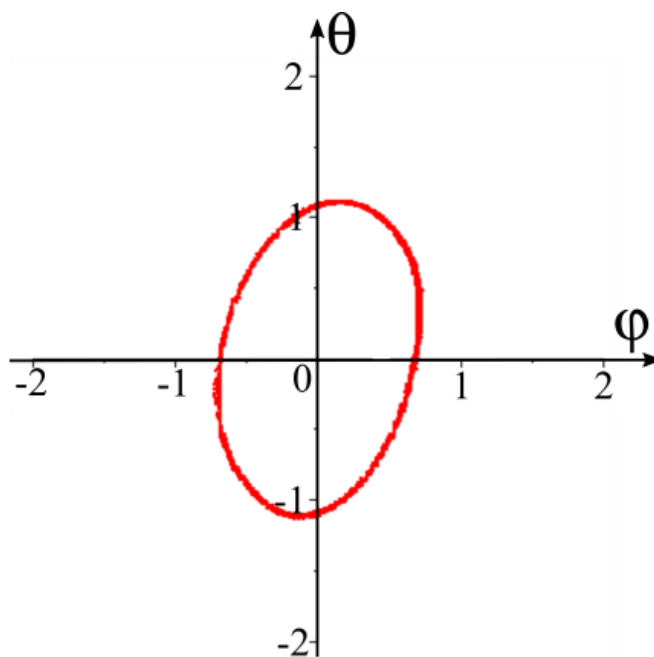


Рис.3.12 (в) Периодический режим при $R=10$ см

На Рис.3.12(а, б, в) приведены результаты эксперимента для разных положений лопасти. Видно, что при увеличении R , амплитуды колебаний по обоим звеньям уменьшаются, что совпадает с тенденциями из численного моделирования.

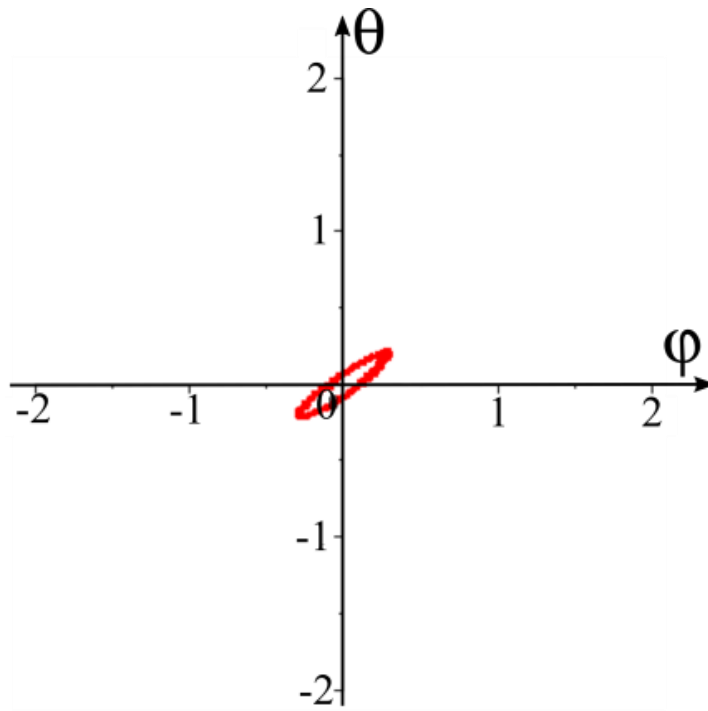


Рис.3.13 (а) Цикл из эксперимента, при $k_1 = 0$ (без пружины)

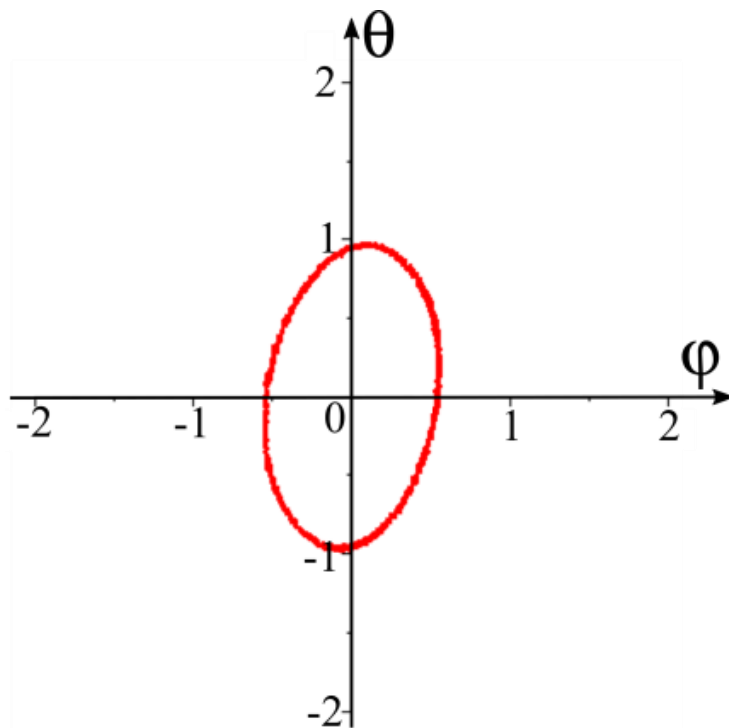


Рис.3.13 (б) Цикл из эксперимента, при $k_1 = 0,04$ (I тип пружины)

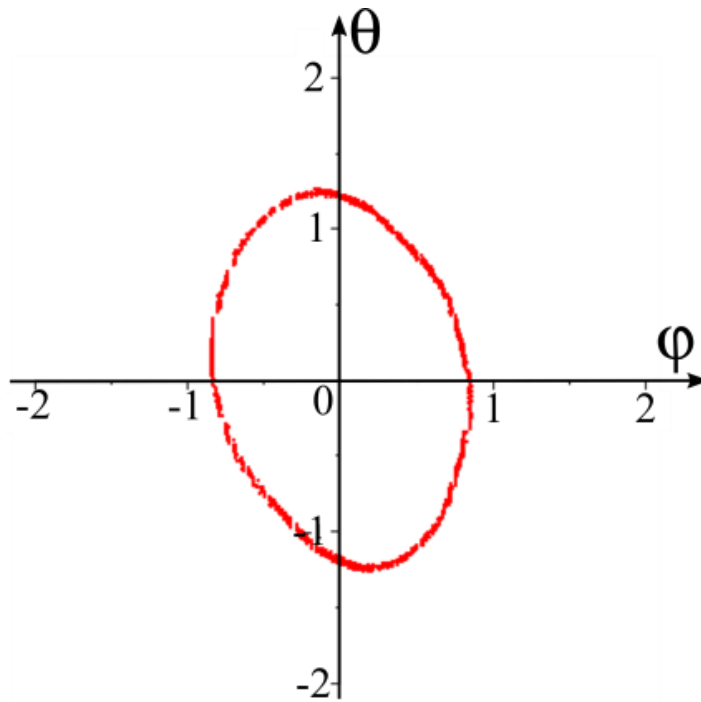


Рис.3.13 (в) Цикл из эксперимента, при $k_1 = 0,16$ (II тип пружины)

Влияние жёсткости пружины на первом звене, показано на Рис. 3.13(а, б, в). Как видно, амплитуды колебаний возрастают, при увеличении k_1 .

3.4 Случай без пружин

На Рис.3.14(а, б) представлена зависимость амплитуды колебаний от скорости набегающего потока в эксперименте. Как видно, зависимость частоты при разных положениях крыла близка к линейной. На графиках представлено два типа режимов: первый – с низкой частотой колебаний (Рис.3.14(в) $R=13$ см), второй – с сравнительно большой (Рис.3.14(в) $R=8$ см и 10 см). Для I типа циклов, амплитуда колебаний первого звена увеличивается, а второго меняется незначительно. При II типе циклов амплитуды колебаний звеньев практически не меняются.

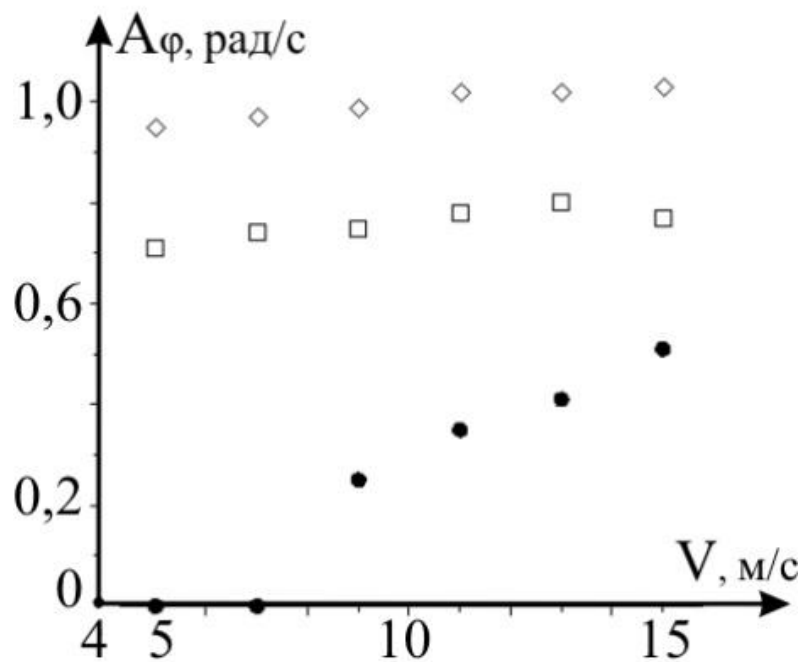


Рис.3.14 (а) Зависимость амплитуды колебаний первого звена от скорости ветра (при различных положениях крыла).

Ромб: $R=8$ см; квадрат: $R=10$ см; чёрный круг: $R=13$ см

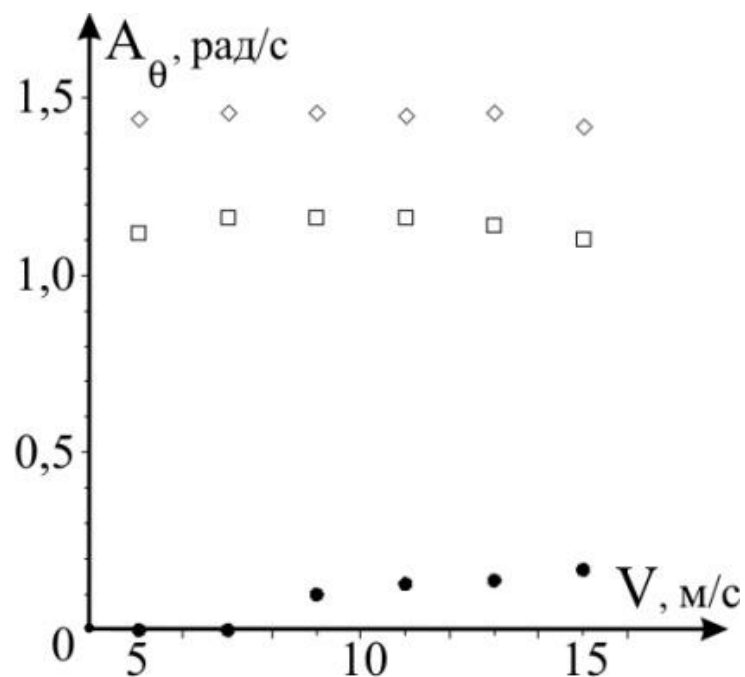


Рис.3.14 (б) Зависимость амплитуды колебаний второго звена от скорости ветра (при различных положениях крыла).

Ромб: $R=8$ см; квадрат: $R=10$ см; чёрный круг: $R=13$ см

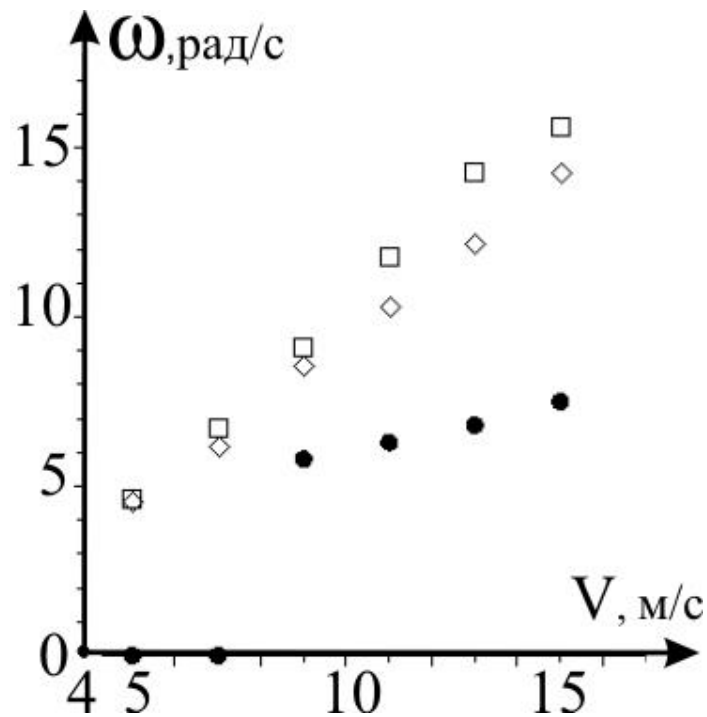


Рис.3.14 (в) Зависимость частоты колебаний маятника от скорости ветра (при различных положениях крыла).

Ромб: $R=8$ см; квадрат: $R=10$ см; чёрный круг: $R=13$ см

На Рис.3.15(а, б, в) показана зависимость частот и амплитуд колебаний от положения крыла. Было взято три различных скорости набегающего потока. Как видно из Рис.3.15(в), частота колебаний остаётся практически постоянной в некотором диапазоне R . Резкое изменение частоты колебаний связано с переходом с первого на второй режим колебаний. Амплитуда колебаний первого звена (Рис.3.15(а)) уменьшается, при увеличении R . Это имеет место и для амплитуды колебаний второго звена (Рис.3.15(б)), причём переход на другой режим сопровождается скачкообразным уменьшением амплитуды колебаний.

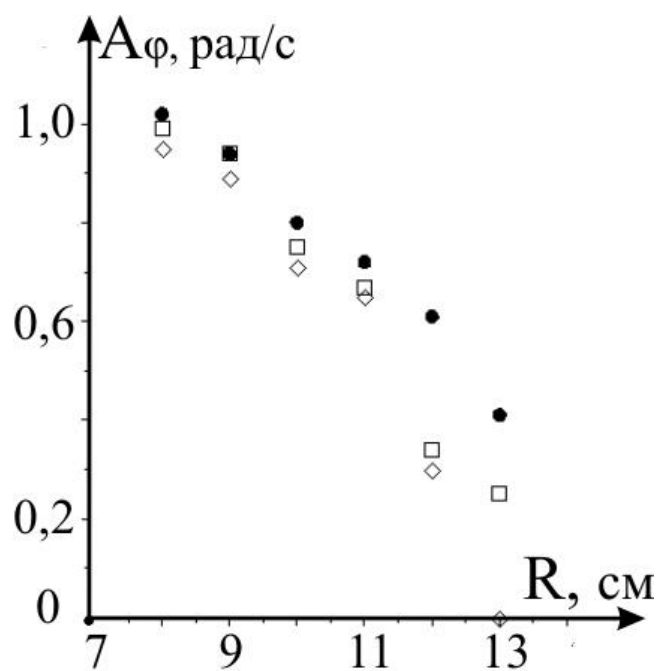


Рис.3.15 (а). Зависимость амплитуды колебаний первого звена от положения крыла (при различных скоростях ветра).

Ромб: $V=5$ м/с; квадрат: $V=9$ м/с; жирный круг: $V=13$ м/с

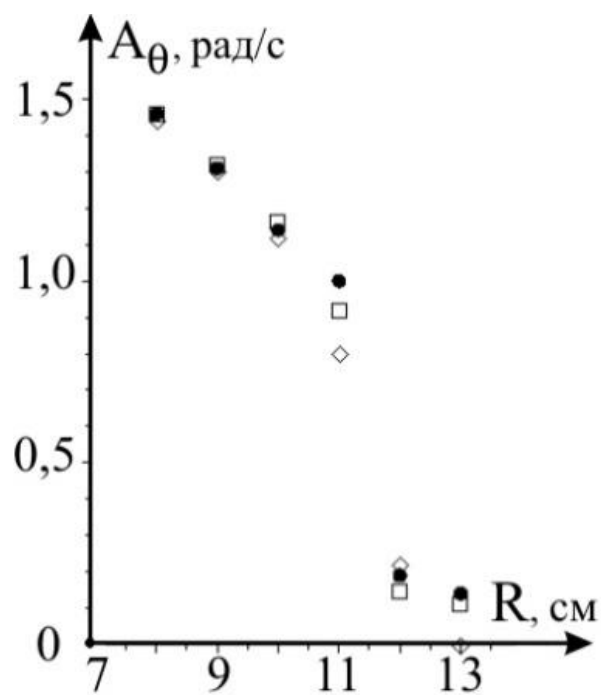


Рис.3.15 (б). Зависимость амплитуды колебаний второго звена от

положения крыла (при различных скоростях ветра).

Ромб: $V=5$ м/с; квадрат: $V=9$ м/с; жирный круг: $V=13$ м/с

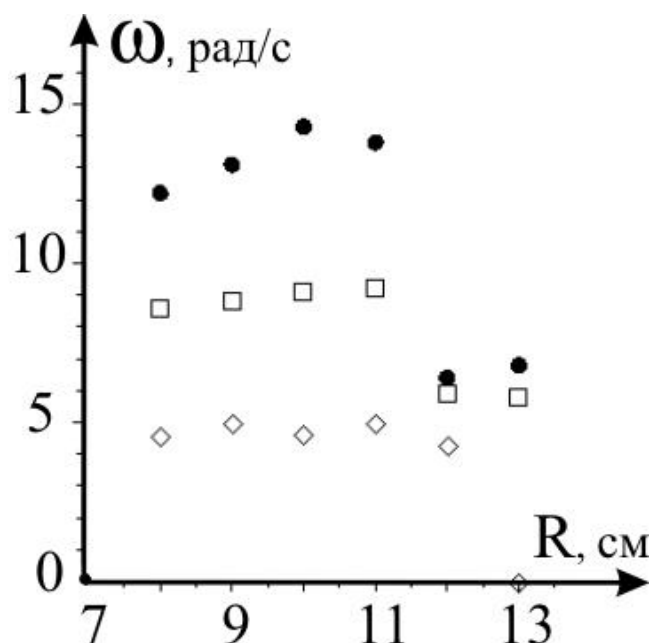


Рис.3.15 (в). Зависимость частоты колебаний маятника от положения крыла (при различных скоростях ветра).

Ромб: $V=5$ м/с; квадрат: $V=9$ м/с; жирный круг: $V=13$ м/с

3.5 Влияние пружин

На Рис.3.16(а, б) представлена зависимость амплитуды колебаний от скорости набегающего потока при наличии пружины I типа на первом звене в эксперименте. Зависимость частоты колебаний (Рис. 3.16(в)) от скорости ветра при разных положениях крыла по-прежнему близка к линейной. Для положения крыла $R=10$ см и скорости 15 м/с виден переход с одного режима (когда амплитуды колебаний обоих звеньев велики) на другой (когда амплитуда колебаний второго звена небольшая). В отсутствие пружин для $R=13$ см колебания начинались только с 9 м/с. При наличии пружины на первом звене колебания существуют при всех скоростях потока, для которых проводился эксперимент.

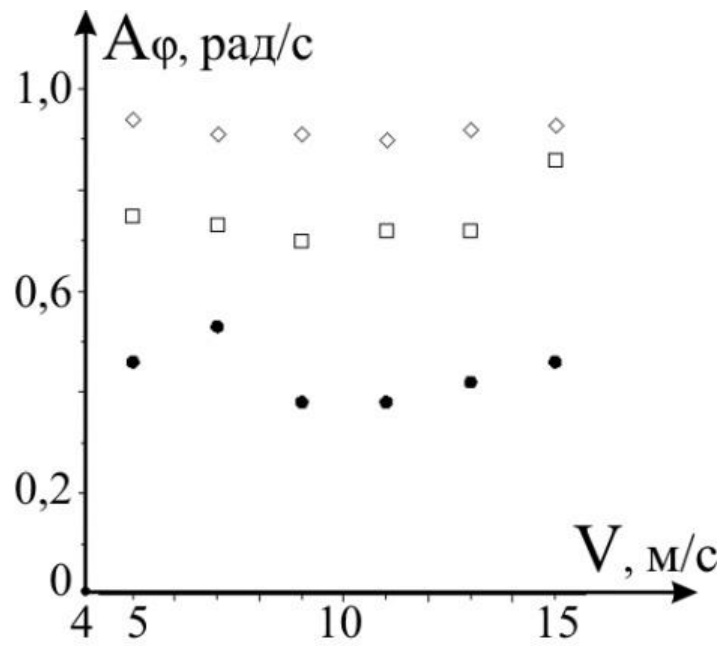


Рис.3.16(а) Зависимость амплитуды колебаний первого звена от скорости ветра (при различных положениях крыла). Пружина I типа.
Ромб: $R=8$ см; квадрат: $R=10$ см; жирный круг: $R=13$ см

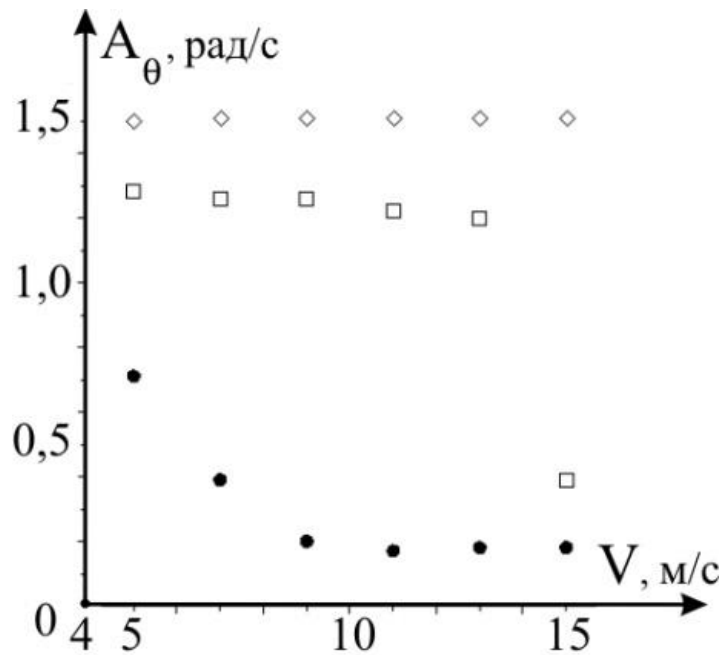
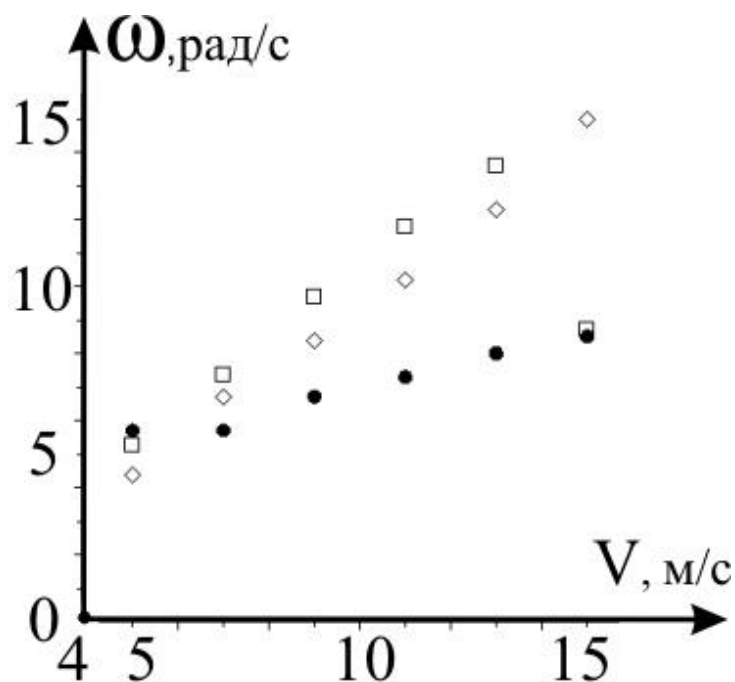


Рис.3.16(б) Зависимость амплитуды колебаний второго звена от скорости ветра (при различных положениях крыла). Пружина I типа.
Ромб: $R=8$ см; квадрат: $R=10$ см; жирный круг: $R=13$ см



*Рис.3.16(в) Зависимость частоты колебаний маятника от скорости ветра (при различных положениях крыла). Пружина I типа.
Ромб: $R=8$ см; квадрат: $R=10$ см; жирный круг: $R=13$ см*

На Рис.3.17(а, б, в) показана зависимость частот и амплитуд колебаний от положения крыла при различных скоростях ветра для пружины I на первом звене. Было взято три различных скорости набегающего потока. Из Рис.3.17(в) видно, что частота колебаний остаётся практически постоянной при разных положениях крыла в определённом диапазоне. Изменение частоты колебаний связано с переходом с первого режима на второй. Амплитуда колебаний первого звена (Рис.3.17(а)) уменьшается при увеличении R . Это происходит и с амплитудой колебаний второго звена (Рис.3.17(б)). Переход на другой режим сопровождается резким изменением частоты колебаний.

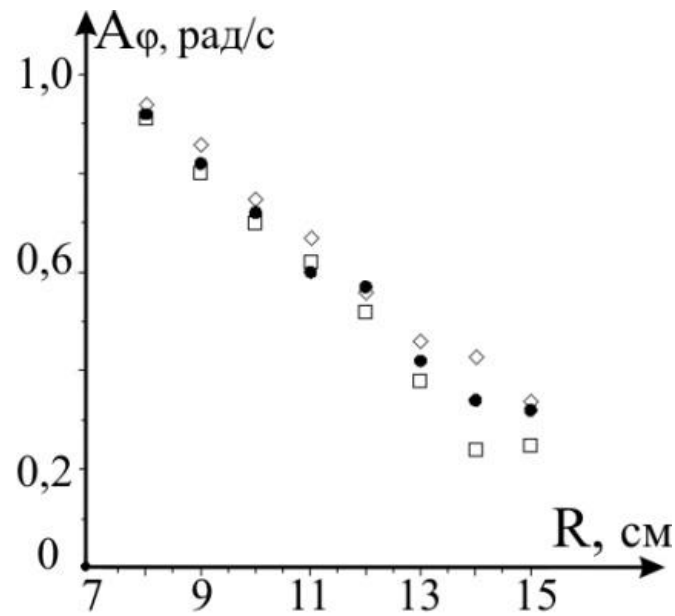


Рис.3.17(а) Зависимость амплитуды колебаний первого звена от положения крыла (при различных скоростях ветра). Пружина I типа.
Ромб: $V=5$ м/с; квадрат: $V=9$ м/с; жирный круг: $V=13$ м/с

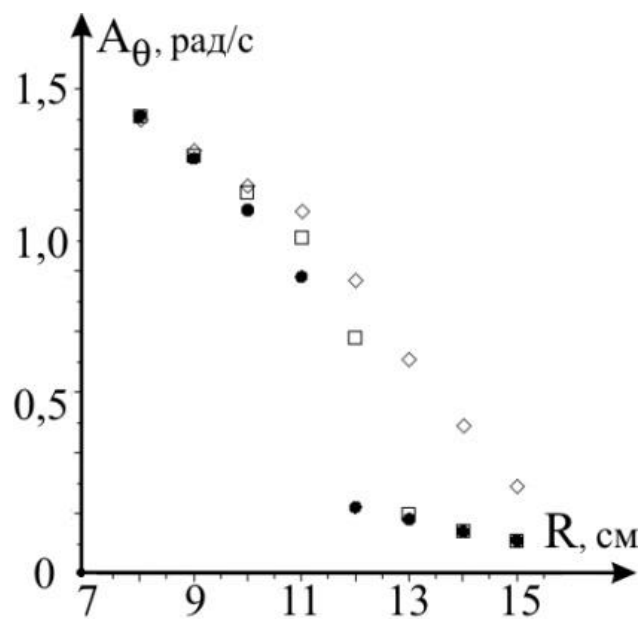
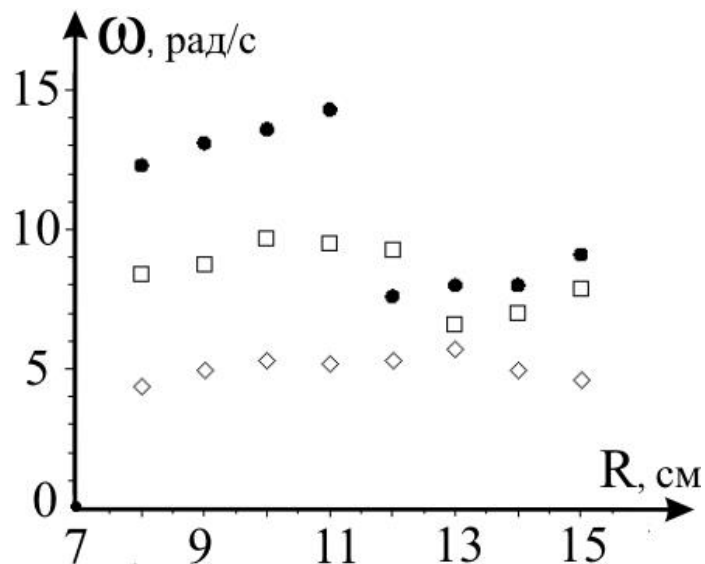


Рис.3.17(б) Зависимость амплитуды колебаний второго звена от положения крыла (при различных скоростях ветра). Пружина I типа.
Ромб: $V=5$ м/с; квадрат: $V=9$ м/с; жирный круг: $V=13$ м/с



*Рис.3.17(в) Зависимость частоты колебаний маятника от положения крыла (при различных скоростях ветра). Пружина I типа.
Ромб: $V=5$ м/с; квадрат: $V=9$ м/с; жирный круг: $V=13$ м/с*

На Рис.3.18(а, б) представлена зависимость амплитуды колебаний от скорости набегающего потока при наличии пружины II типа на первом звене. Зависимость частоты (Рис. 3.18(в)) при разных положениях крыла близка к линейной. Для положения крыла $R=10$ см и скорости 15 м/с виден переход с первого режима на второй. Наблюдается изменение частоты и амплитуды колебаний второго звена. Потеря устойчивости и наличие колебаний также наблюдается при небольших скоростях потока для положения крыла $R=13$ см.

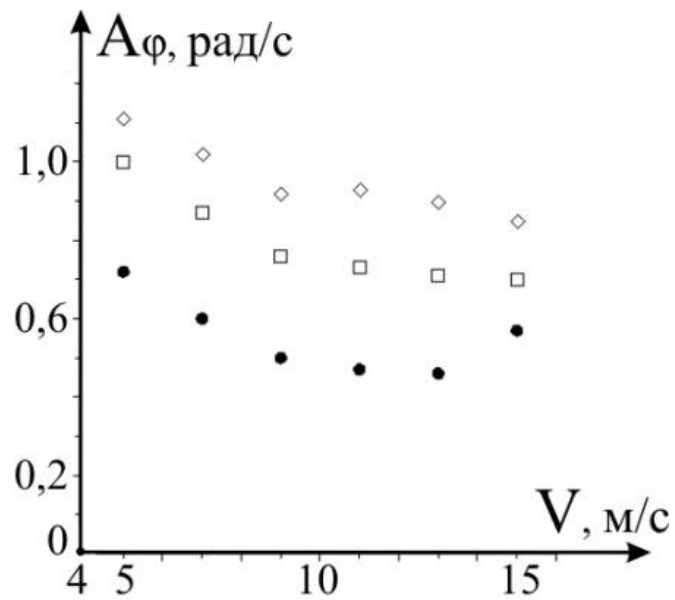


Рис.3.18(а) Зависимость амплитуды колебаний первого звена от скорости ветра (при различных положениях крыла). Пружина II типа.
Ромб: $R=8$ см; квадрат: $R=10$ см; жирный круг: $R=13$ см

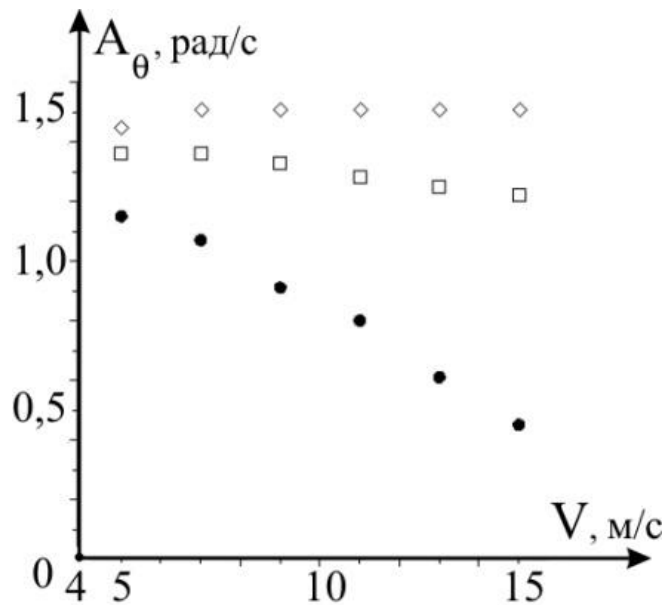


Рис.3.18(б) Зависимость амплитуды колебаний второго звена от скорости ветра (при различных положениях крыла). Пружина II типа.
Ромб: $R=8$ см; квадрат: $R=10$ см; жирный круг: $R=13$ см

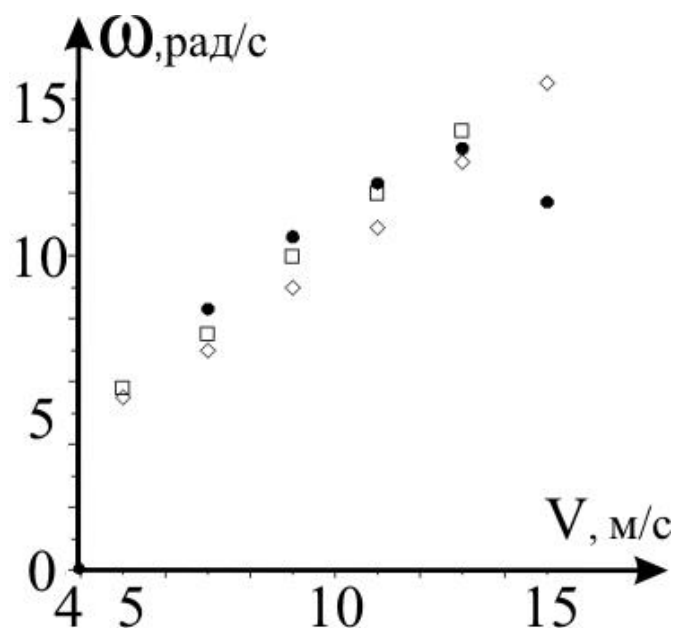


Рис.3.18(в) Зависимость частоты колебаний от скорости ветра (при различных положениях крыла). Пружина II типа.

Ромб: $R=8$ см; квадрат: $R=10$ см; жирный круг: $R=13$ см

На Рис.3.19(а, б, в) показана зависимость частот и амплитуд колебаний от положения крыла при различных скоростях ветра для пружины II на первом звене. Из Рис.3.19(в) видно, что частота колебаний остаётся практически постоянной при разных положениях крыла. Изменение линейной зависимости частоты колебаний связано с переходом с одного режима на другой (для скоростей потока 9 и 13 м/с). Но этот переход менее выражен, чем в случае пружины I типа. Амплитуда колебаний первого звена (Рис.3.19(а)) уменьшается, при увеличении R . Такая же ситуация имеет место и с амплитудой колебаний второго звена (Рис.3.19(б)), но при переходе на другой режим наблюдается резкий скачок.

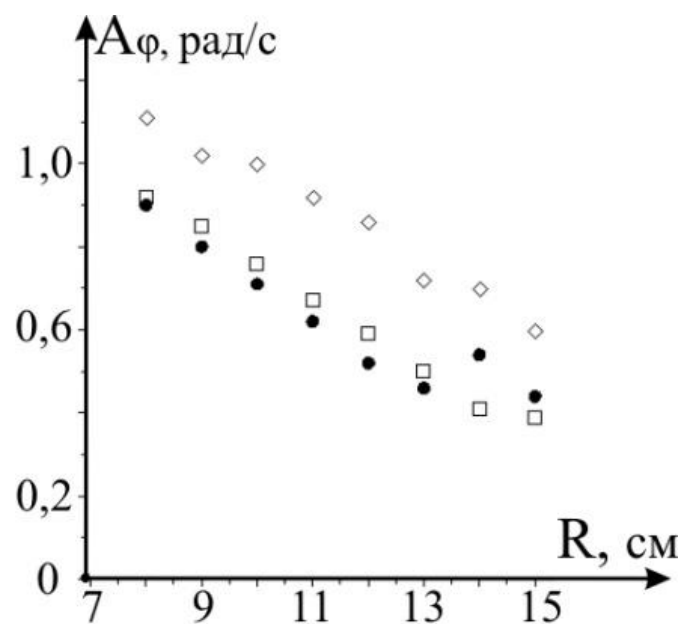


Рис.3.19(а) Зависимость амплитуд колебаний первого звена от положения крыла (при различных скоростях ветра). Пружина II типа.
Ромб: $V=5$ м/с; квадрат: $V=9$ м/с; жирный круг: $V=13$ м/с

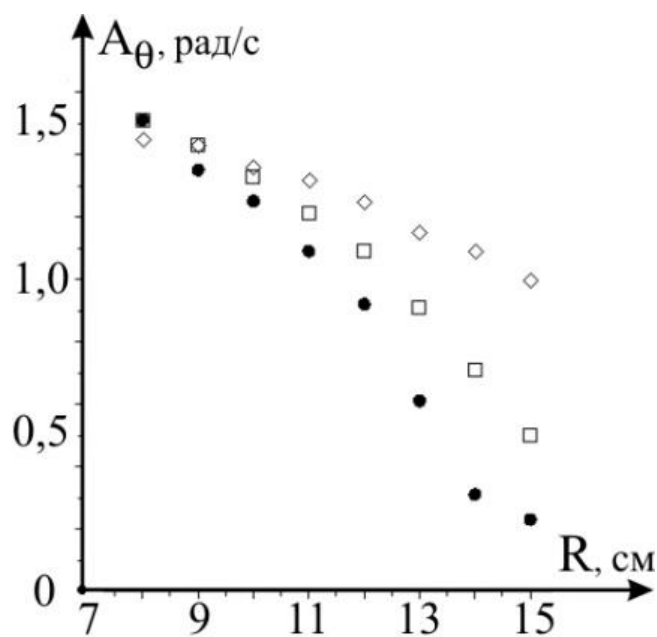
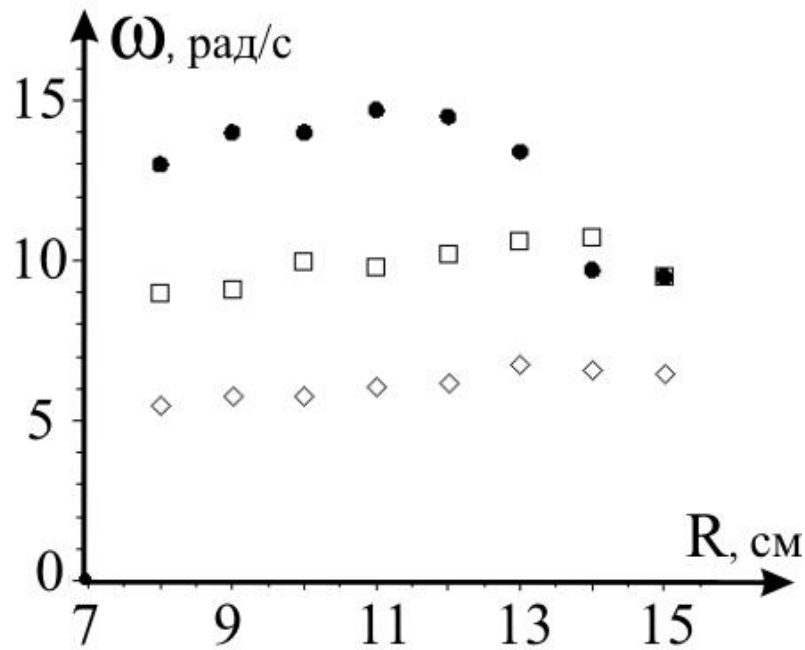


Рис.3.19(б) Зависимость амплитуд колебаний второго звена от положения крыла (при различных скоростях ветра). Пружина II типа.
Ромб: $V=5$ м/с; квадрат: $V=9$ м/с; жирный круг: $V=13$ м/с



*Рис.3.19(в) Зависимость частоты колебаний маятника от положения крыла (при различных скоростях ветра). Пружина II типа.
Ромб: $V=5$ м/с; квадрат: $V=9$ м/с; жирный круг: $V=13$ м/с*

На Рис.3.20(а, б) представлена зависимость амплитуды колебаний от скорости набегающего потока при наличии пружины III типа на первом звене. Для данного случая характерно наличие одного режима (с большими колебаниями обоих звеньев) при всех скоростях и положениях крыла. Наблюдается практически линейная зависимость частоты от скорости ветра при разных положениях крыла (Рис.3.20(в)). Амплитуда колебаний первого звена уменьшается с ростом V при всех положениях крыла. На Рис.3.20(б) видно, что при $R=8$ см, амплитуда колебаний второго звена уменьшается, а при $R=10$ см и 13 см, практически не меняется.

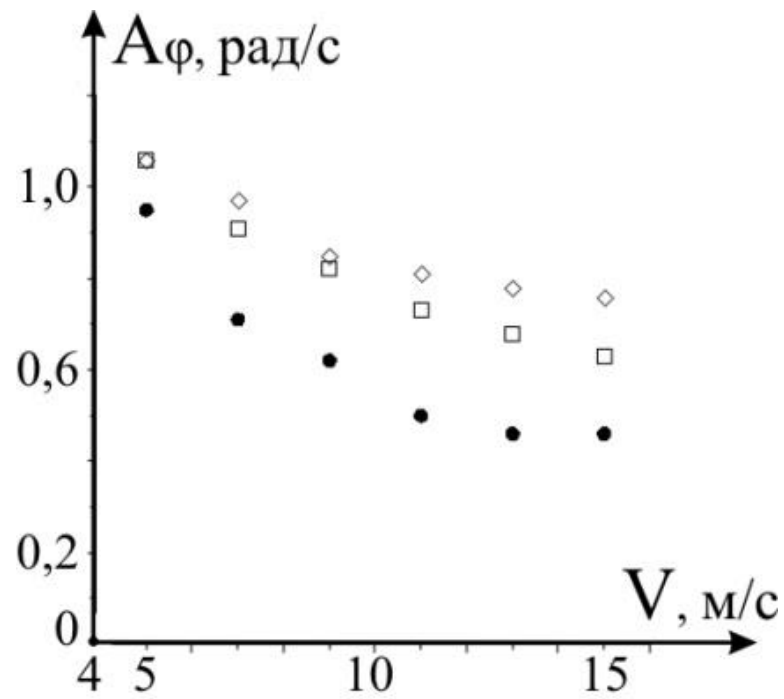


Рис.3.20(а) Зависимость амплитуды колебаний первого звена от скорости ветра (при различных положениях крыла). Пружина III типа.

Ромб: $R=8$ см; квадрат: $R=10$ см; жирный круг: $R=13$ см

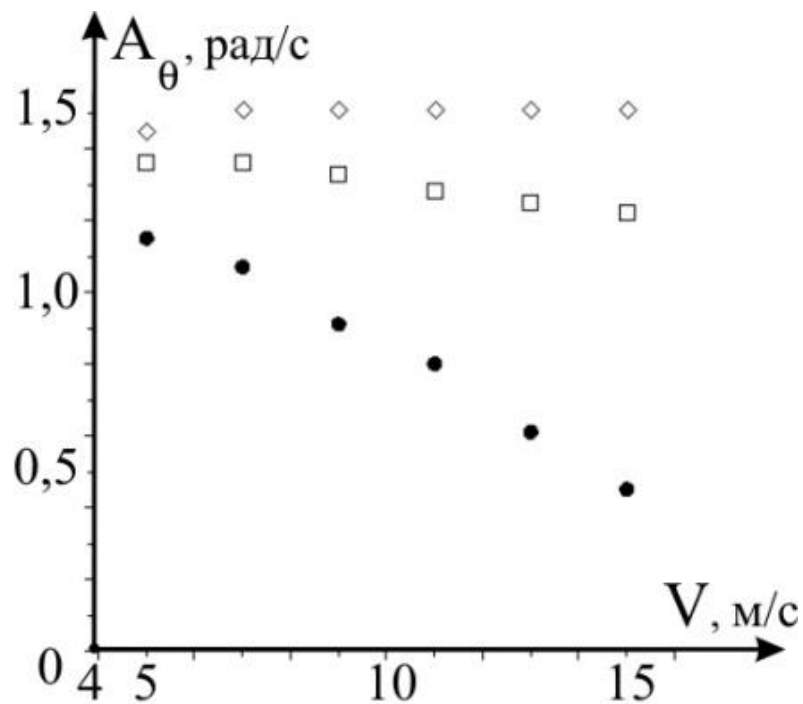


Рис.3.20(б) Зависимость амплитуды колебаний первого звена от скорости ветра (при различных положениях крыла). Пружина III типа.

Ромб: $R=8$ см; квадрат: $R=10$ см; жирный круг: $R=13$ см

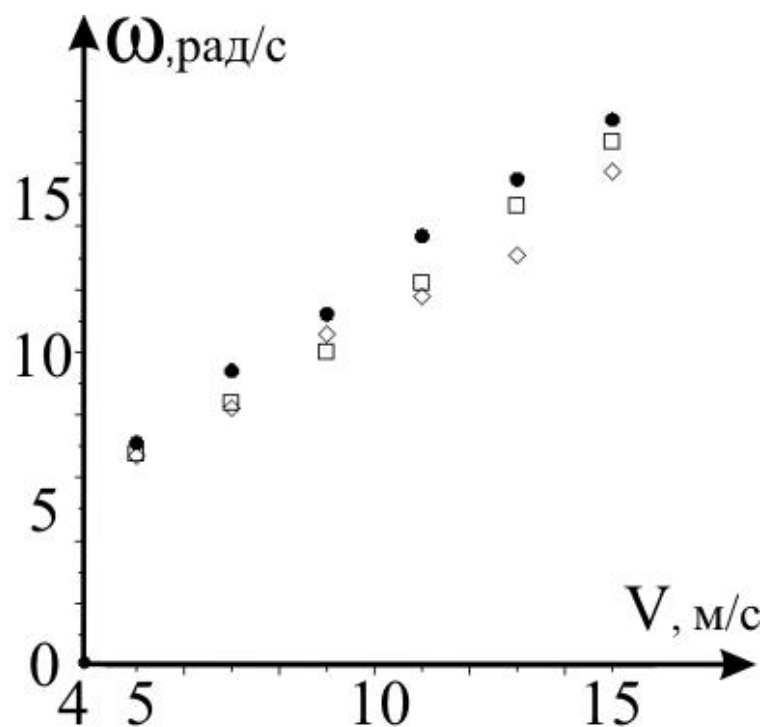


Рис.3.20(в) Зависимость частоты колебаний маятника от скорости ветра (при различных положениях крыла). Пружина III типа.

Ромб: $R=8$ см; квадрат: $R=10$ см; жирный круг: $R=13$ см

На Рис.3.21(а, б, в) показана зависимость частот и амплитуд колебаний от положения крыла при различных скоростях ветра для пружины III на первом звене. Из Рис.3.21(в) видно, что частота колебаний достаточно слабо меняется при изменении положения крыла. Амплитуды колебаний первого и второго звеньев (Рис.3.21(а, б)) уменьшаются при увеличении R .

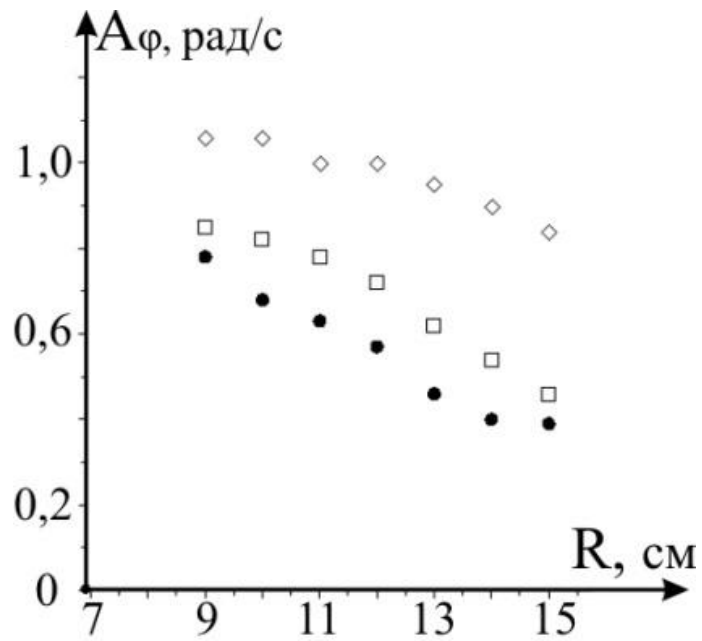


Рис.3.21(а) Зависимость амплитуды колебаний первого звена от положения крыла (при различных скоростях ветра). Пружина III типа.
Ромб: $V=5$ м/с; квадрат: $V=9$ м/с; жирный круг: $V=13$ м/с

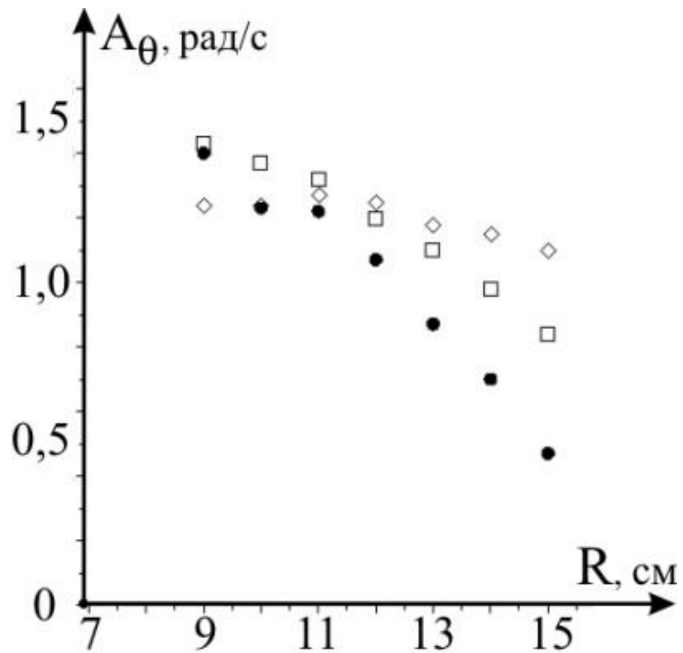


Рис.3.21(б) Зависимость амплитуды колебаний второго звена от положения крыла (при различных скоростях ветра). Пружина III типа.
Ромб: $V=5$ м/с; квадрат: $V=9$ м/с; жирный круг: $V=13$ м/с

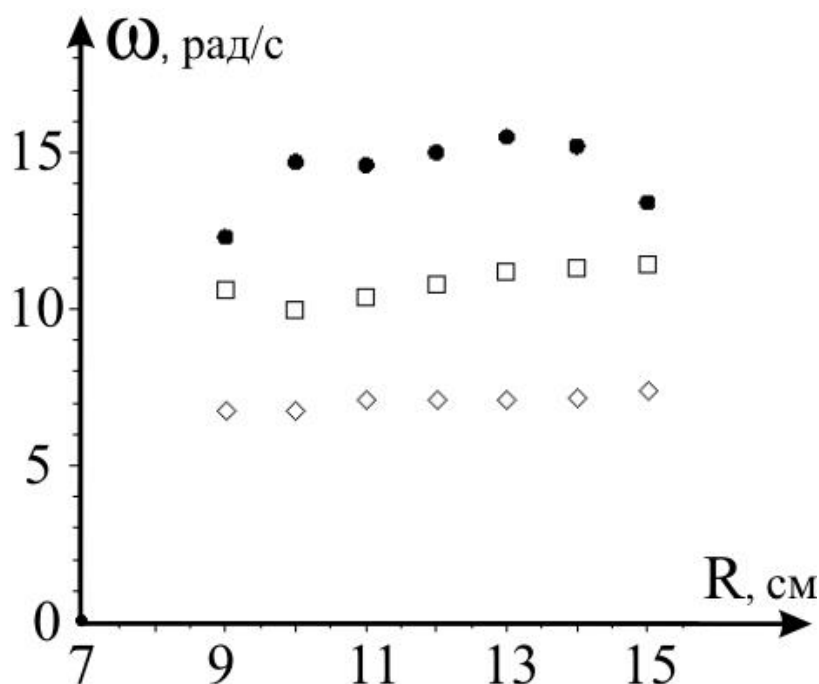


Рис.3.21(в) Зависимость частоты колебаний маятника от положения крыла (при различных скоростях ветра). Пружина III типа.
Ромб: $V=5$ м/с; квадрат: $V=9$ м/с; жирный круг: $V=13$ м/с

Как видно, общие тенденции поведения системы качественно совпадают в эксперименте и численном моделировании. Поэтому далее, в пункте 3.6, будет рассмотрено, как количественно соотносятся данные моделирования и эксперимента. Численное моделирование будет проведено для таких же физических параметров, как и в эксперименте.

3.6. Сравнение эксперимента с численным моделированием

Сравним результаты эксперимента и численного моделирования для случая без пружин ($k_1 = 0$, $k_2 = 0$). Для численного моделирования брались значения, которые приближённо равнялись физическим характеристикам реального маятника: $J_1 = 4.36 \cdot 10^{-3}$ кг · м², $M = 0.17$ кг, $L_1 = 0.16$ м, $L_2 = 0.23$ м, а J_2 и L_2 зависят от положения лопасти на втором звене по следующим формулам:

$$J_2 = (42R^2 - 14.4R + 1.79)10^{-3}, L_2 = (4.4R + 0.88) 10^{-1} .$$

Также было учтено воздействие потока среды не только на крыло, но и на остальные части конструкции. Детали маятника имели

цилиндрическую форму. Тогда $C_{d0} = C_{d0\text{крыла}} + \frac{S_{\text{частей}}}{S_{\text{крыла}}} C_{d\text{цилиндра}}$.
 $C_{d0\text{крыла}} 0.05, C_{d\text{цилиндра}} = 1$. Исходя из таких значений для C_{d0} , в численном моделировании бралось среднее значение $C_{d0} = 0.2$.

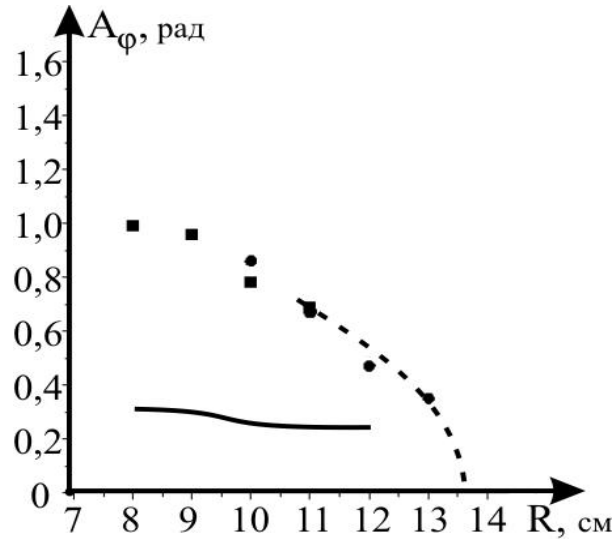


Рис.3.22(а) Амплитуда колебаний первого звена в зависимости от R .
 Точки – экспериментальные данные, линии – результаты численного моделирования. Круги и пунктирная линия – циклы 1-го типа, квадраты и сплошная линия – циклы 2-го типа. $V=11$ м/с. Случай без пружин

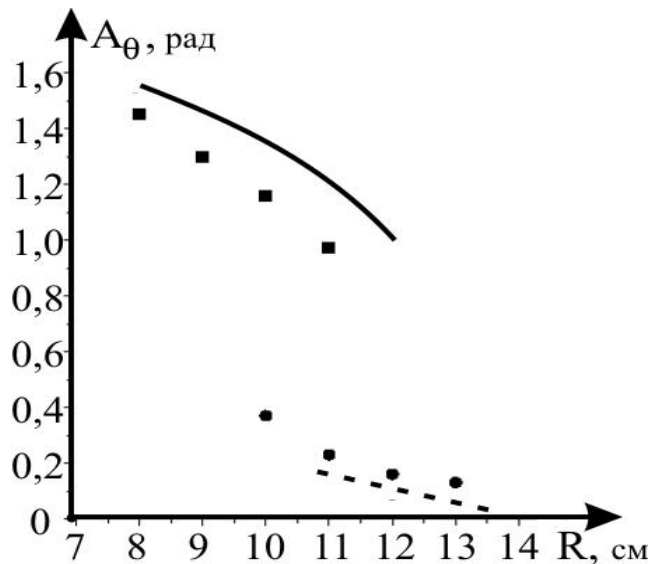


Рис.3.22(б) Амплитуда колебаний второго звена в зависимости от R .
 Точки – экспериментальные данные, линии – результаты численного моделирования. Круги и пунктирная линия – циклы 1-го типа, квадраты и сплошная линия – циклы 2-го типа. $V=11$ м/с. Случай без пружин

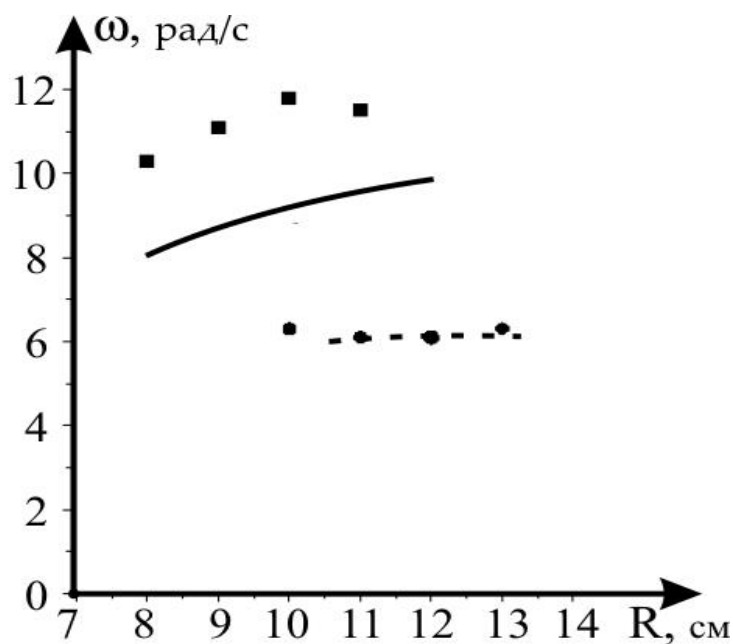


Рис.3.22(в) Частота колебаний маятника в зависимости от R .

Точки – экспериментальные данные, линии – результаты численного моделирования. Круги и пунктирная линия – циклы 1-го типа, квадраты и сплошная линия – циклы 2-го типа. $V=11$ м/с. Случай без пружин

На Рис.3.22(а, б, в) представлено сравнение амплитуд и частоты автоколебаний в эксперименте и в численном моделировании в отсутствие пружин. Как видно, для циклов первого типа имеет место не только качественное, но и количественное согласие данных эксперимента с результатами расчёта. Хорошо соотносятся как частоты, так и амплитуды по обоим звеньям.

Для циклов второго типа наблюдается качественное совпадение. Количественно лучше всего соответствует амплитуда колебаний второго звена (разница примерно в 10%). Частота колебаний отличается примерно на 20%, а вот амплитуда колебаний первого звена плохо соотносится с численными расчётами: в моделировании она существенно ниже, чем в эксперименте. Заметим, что области существования каждого типа циклов весьма близки в эксперименте и в моделировании.

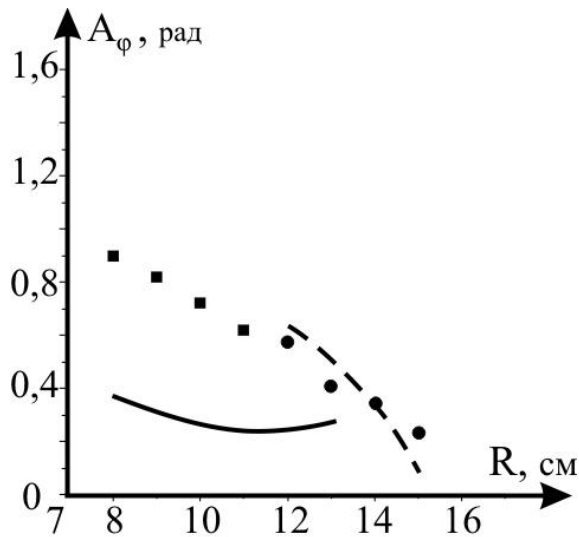


Рис.3.23(а) Амплитуда и колебаний первого звена в зависимости от R .

Точки – экспериментальные данные, линии – результаты численного моделирования. Круги и пунктирная линия – циклы 1-го типа, квадраты и сплошная линия – циклы 2-го типа. $V=11$ м/с. Пружина 1-го типа

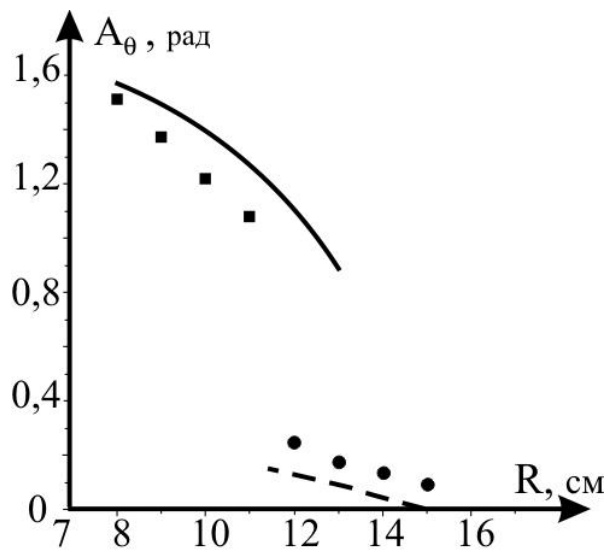


Рис.3.23(б) Амплитуда колебаний второго звена в зависимости от R .

Точки – экспериментальные данные, линии – результаты численного моделирования. Круги и пунктирная линия – циклы 1-го типа, квадраты и сплошная линия – циклы 2-го типа. $V=11$ м/с. Пружина 1-го типа

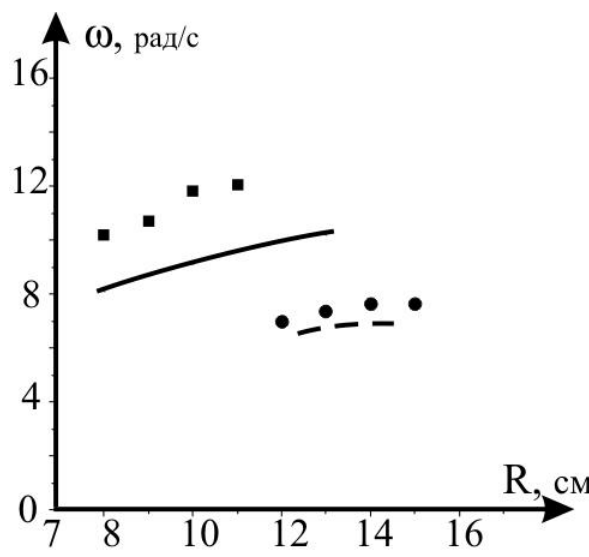


Рис.3.23(в) Частота колебаний маятника в зависимости от R .

Точки – экспериментальные данные, линии – результаты численного моделирования. Круги и пунктирная линия – циклы 1-го типа, квадраты и сплошная линия – циклы 2-го типа. $V=11$ м/с. Пружина 1-го типа

На Рис.3.23(а, б, в) показаны результаты экспериментов и моделирования при наличии пружины I типа на первом звене. Видно, что наблюдается качественное и количественное соответствие для циклов первого типа. Для циклов второго типа амплитуда колебаний второго звена и частота автоколебаний достаточно близки к результатам численного моделирования. Амплитуда колебаний первого звена плохо совпала с результатами моделирования (как и для случая без пружин). Области существования циклов весьма близки в эксперименте и в моделировании.

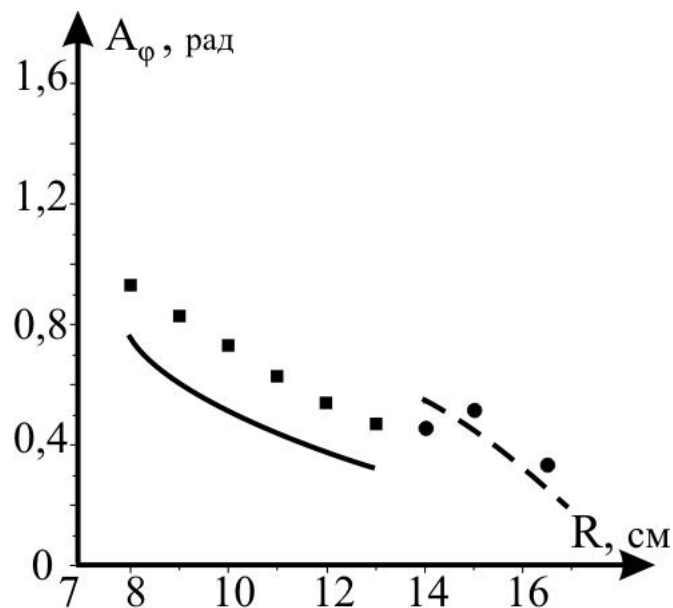


Рис.3.24(а) Амплитуда колебаний первого звена в зависимости от R . Точки – экспериментальные данные, линии – результаты численного моделирования. Круги и пунктирная линия – циклы 1-го типа, квадраты и сплошная линия – циклы 2-го типа. $V=11$ м/с. Пружина II-го типа

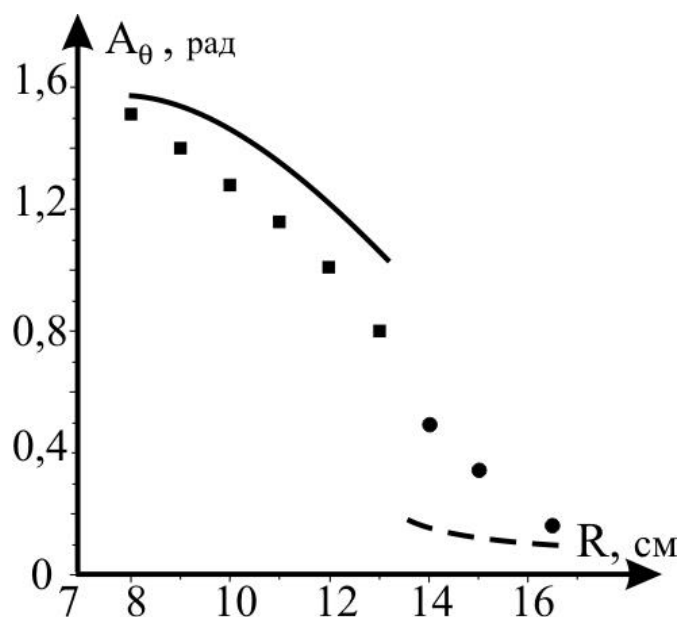


Рис.3.24(б) Амплитуда колебаний второго звена в зависимости от R . Точки – экспериментальные данные, линии – результаты численного моделирования. Круги и пунктирная линия – циклы 1-го типа, квадраты и сплошная линия – циклы 2-го типа. $V=11$ м/с. Пружина II-го типа

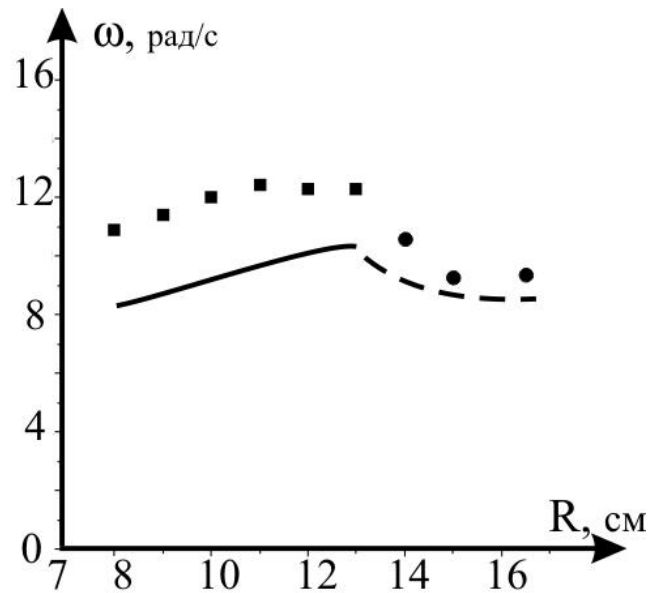


Рис.3.24(в) Частота колебаний маятника в зависимости от R .

Точки – экспериментальные данные, линии – результаты численного моделирования. Круги и пунктирная линия – циклы 1-го типа, квадраты и сплошная линия – циклы 2-го типа. $V=11$ м/с. Пружина II-го типа

На Рис.3.24(а, б, в) представлен случай для пружины II типа. Для этого случая отсутствует область значений R , при которых одновременно могут существовать два типа циклов, и практически нет переходного процесса от одного типа циклов к другому (нет разницы между циклами). Результаты моделирования и эксперимента достаточно хорошо соотносятся.

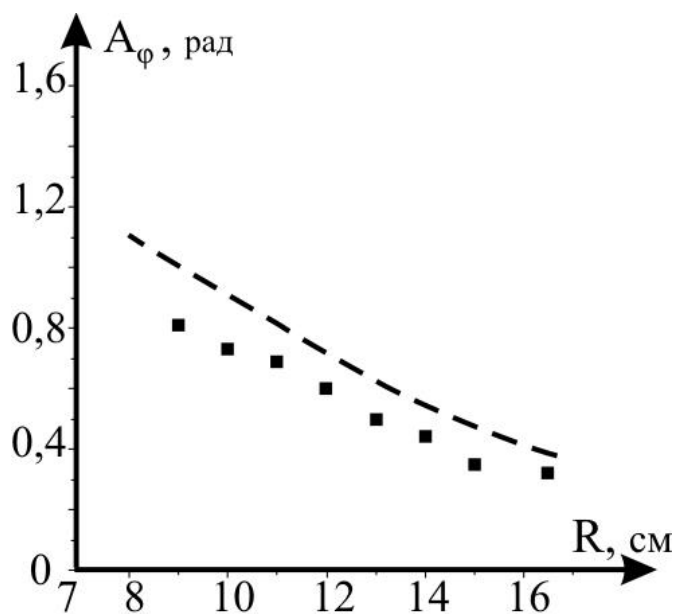


Рис.3.25(а) Амплитуда колебаний первого звена в зависимости от R .

Точки – экспериментальные данные, линии – результаты численного моделирования. $V=11$ м/с. Пружина III-го типа

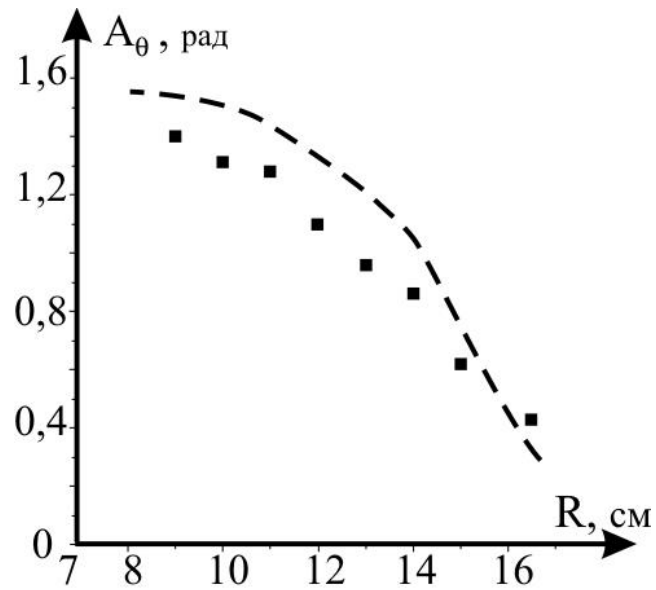


Рис.3.25(б) Амплитуда колебаний второго звена в зависимости от R . Точки – экспериментальные данные, линии – результаты численного моделирования. $V=11$ м/с. Пружина III-го типа

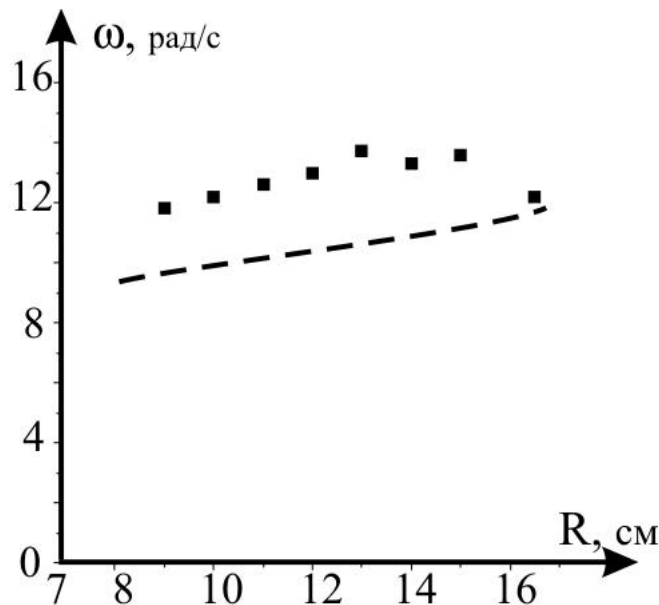


Рис.3.25(в) Частота колебаний маятника в зависимости от R . Точки – экспериментальные данные, линии – результаты численного моделирования. $V=11$ м/с. Пружина III-го типа

На Рис.3.25(а, б, в) показан случай с пружиной III типа. Как видно, и в моделировании и в эксперименте существуют циклы только второго типа.

Результаты моделирования и качественно, и количественно согласуются с экспериментом.

На конфигурационной плоскости были построены циклы для эксперимента и численного моделирования. Они представлены на Рис.3.26 – 3.29 для разных значений R .

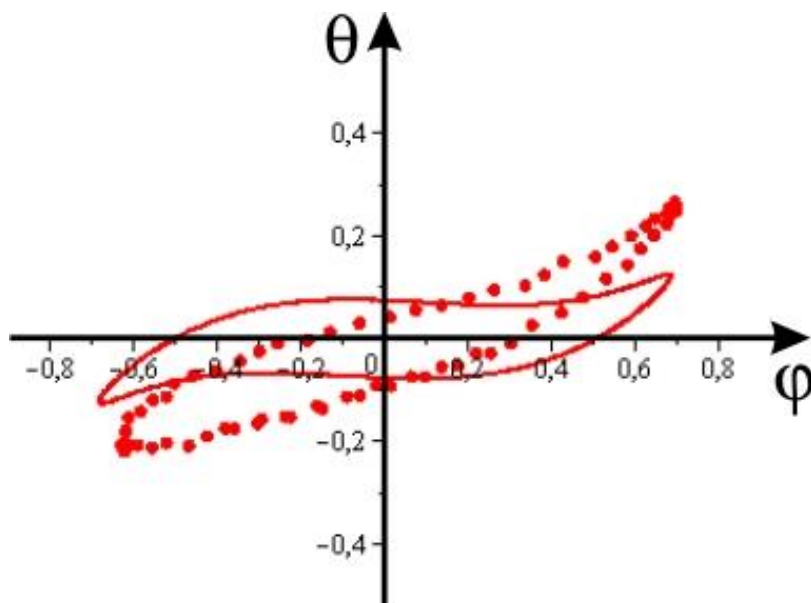


Рис.3.26(а) Периодические режимы. Сплошная линия – результат численного моделирования. Точки – результаты эксперимента.

$R=11$ см. $V=11$ м/с. Без пружин

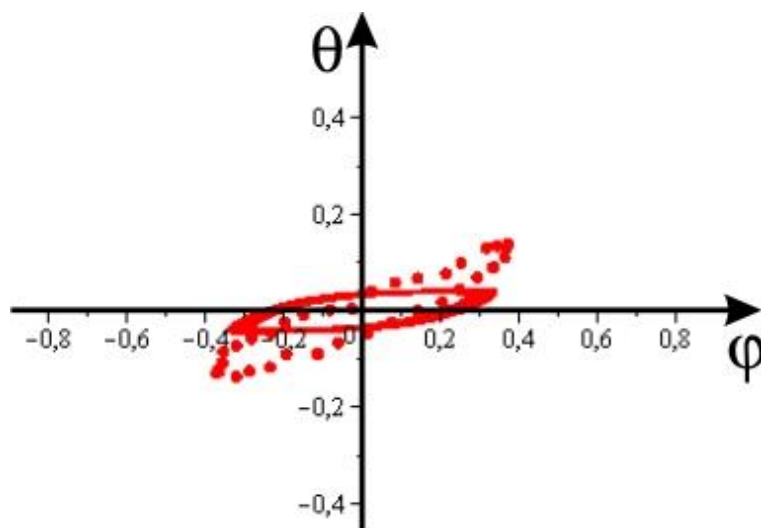


Рис.3.26(б) Периодические режимы. Сплошная линия – результат численного моделирования. Точки – результаты эксперимента.

$R=13$ см. $V=11$ м/с. Без пружин

На Рис.3.26(а,б) представлен случай без пружин. В обоих случаях цикл первого типа. Видно, что и там и там достаточно хорошее соответствие эксперимента и моделирования.

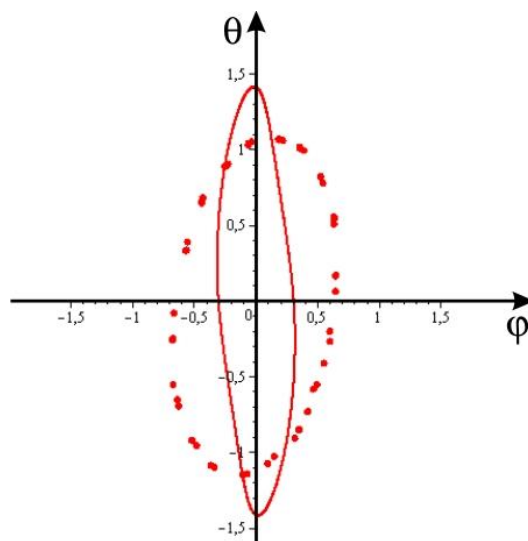


Рис.3.27(а) Периодические режимы. Сплошная линия – результат численного моделирования. Точки – результаты эксперимента.

$R=11$ см. $V=11$ м/с. Пружины I-го типа

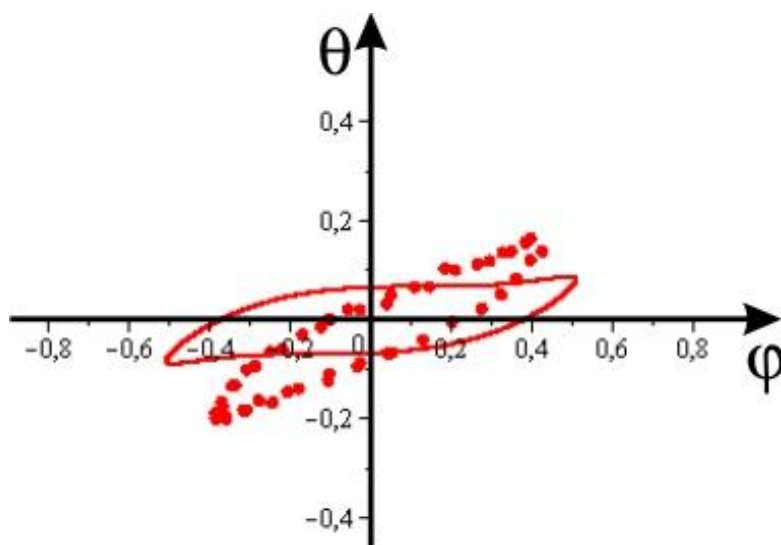


Рис.3.27(б) Периодические режимы. Сплошная линия – результат численного моделирования. Точки – результаты эксперимента.

$R=13$ см. $V=11$ м/с. Пружины I-го типа

На Рис.3.27(а,б) представлен случай с пружиной I типа. При $R=11$ см – цикл второго типа, а при $R=13$ см – цикл первого типа. И в эксперименте, и в моделировании наблюдается одна и та же ситуация. Для цикла I типа

экспериментальные данные лучше совпадают с моделированием, чем для циклов II типа.

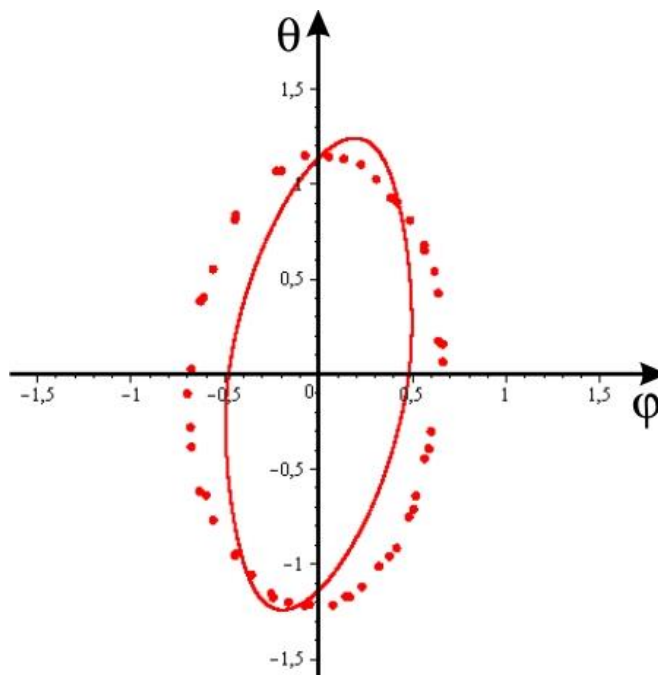


Рис.3.28(а) Периодические режимы. Сплошная линия – результат численного моделирования. Точки – результаты эксперимента.

$R=11$ см. $V=11$ м/с. Пружины II-го типа

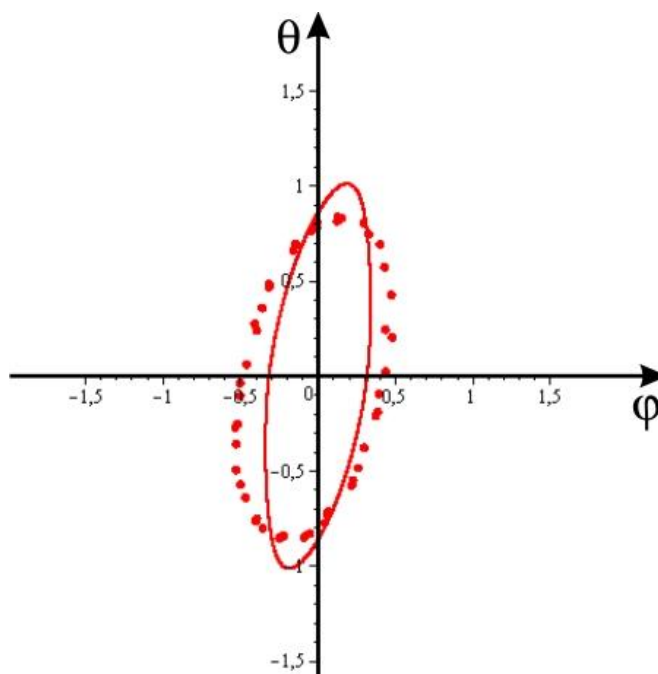


Рис.3.28(б) Периодические режимы. Сплошная линия – результат численного моделирования. Точки – результаты эксперимента.

$R=13$ см. $V=11$ м/с. Пружины II-го типа

На Рис.3.28(а, б) представлен случай с пружиной II типа. При $R=11$ см и 13 см существует цикл второго типа. Имеется расхождение экспериментальных и численных результатов.

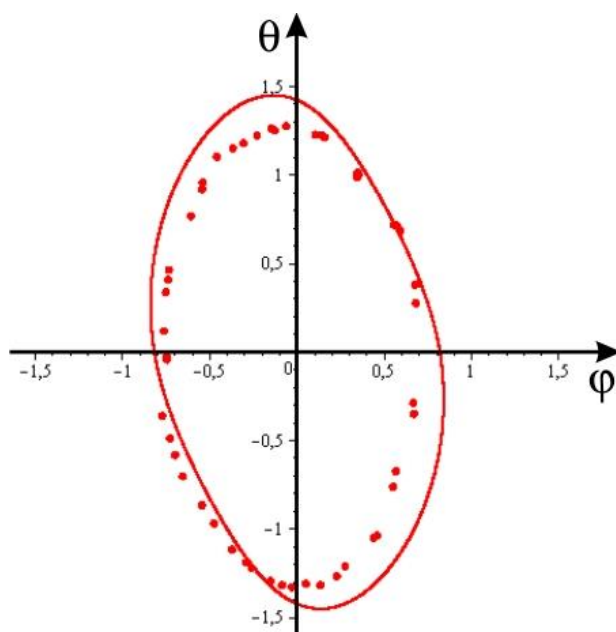


Рис.3.29(а) Периодические режимы. Сплошная линия – результат численного моделирования. Точки – результаты эксперимента $R=11$ см. $V=11$ м/с. Пружины III-го типа

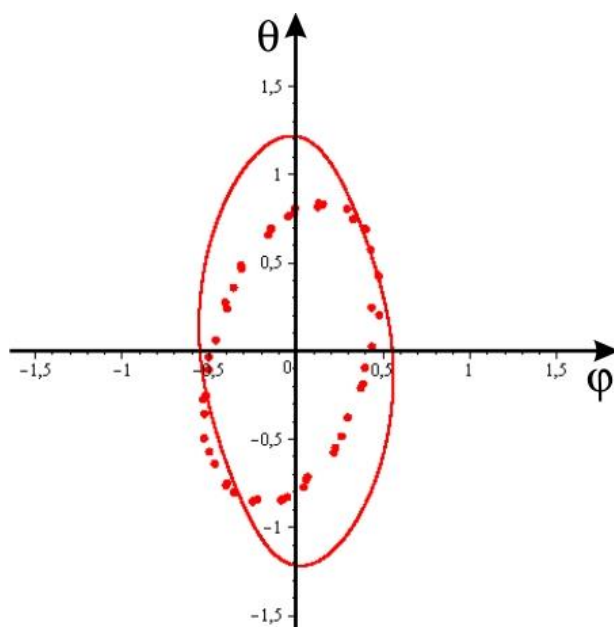


Рис.3.29(б) Периодические режимы. Сплошная линия – результат численного моделирования. Точки – результаты эксперимента $R=13$ см. $V=11$ м/с. Пружины III-го типа

На Рис.3.29(а, б) Случай с пружиной III типа. При $R=11$ см и 13 см цикл второго типа. При $R=13$ см по θ имеется существенное различие. Для случая $R=11$ см, эксперимент и моделирование соотносятся достаточно хорошо.

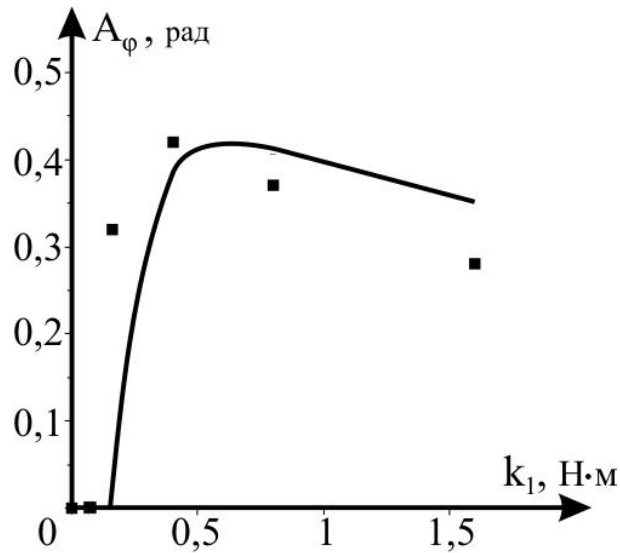


Рис.3.30(а) Амплитуда колебаний первого звена в зависимости от жёсткости пружины k_1 . Сплошная линия – результат численного моделирования. Точки – результаты эксперимента. $V=13$ м/с. $R=16,5$ см

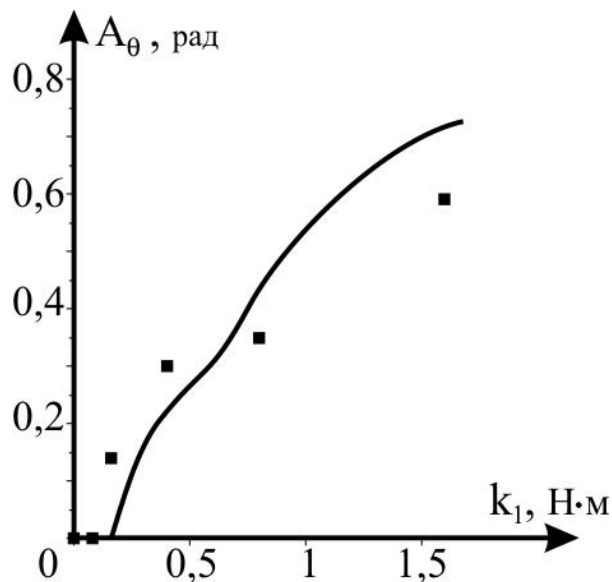


Рис.3.30(б) Амплитуда колебаний второго звена в зависимости от жёсткости пружины k_1 . Сплошная линия – результат численного моделирования. Точки – результаты эксперимента. $V=13$ м/с. $R=16,5$ см

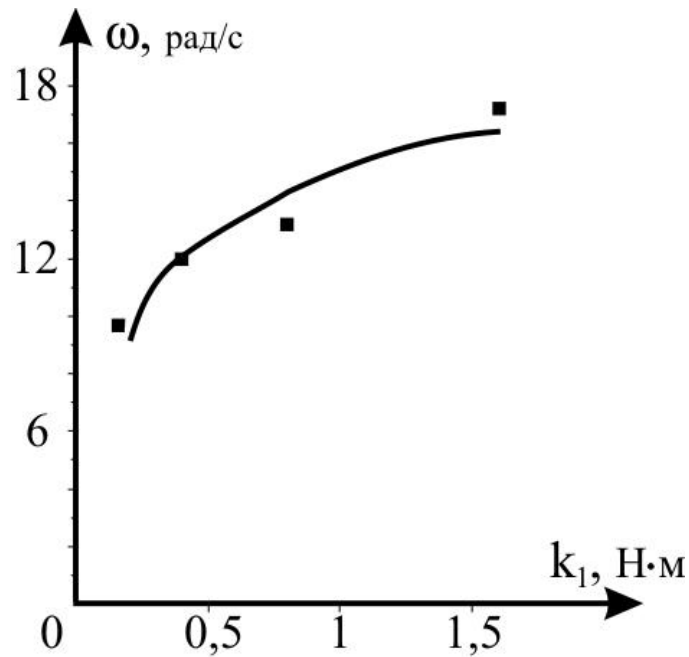


Рис.3.30(в) Частота колебаний маятника в зависимости от жёсткости пружины k_1 . Сплошная линия – результат численного моделирования.

Точки – результаты эксперимента. $V=13$ м/с. $R=16,5$ см

На Рис.3.30(а, б, в) показана зависимость амплитуд и частоты автоколебаний от жёсткости пружины на первом звене. Приведены результаты численного моделирования и эксперимента. Были выбраны такие R и V ($R=16,5$ см, $V=13$ м/с), что при отсутствии пружин положение вдоль потока устойчиво. Увеличение жёсткости пружины на первом звене приводит к потере устойчивости, росту амплитуды и частоты автоколебаний. При достаточно больших k_1 амплитуда колебаний первого звена начинает уменьшаться. Это происходит и в моделировании и в эксперименте. Данные эксперимента не только качественно, но и количественно согласуются с результатами численного моделирования.

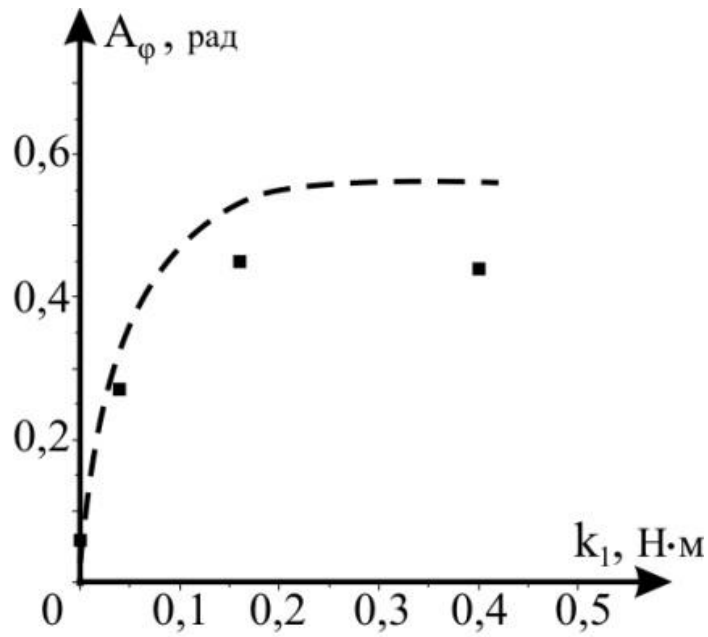


Рис.3.31(а) Амплитуда колебаний первого звена в зависимости от жёсткости пружины k_1 . Сплошная линия – результат численного моделирования. Точки – результаты эксперимента. $V=11$ м/с. $R=14$ см

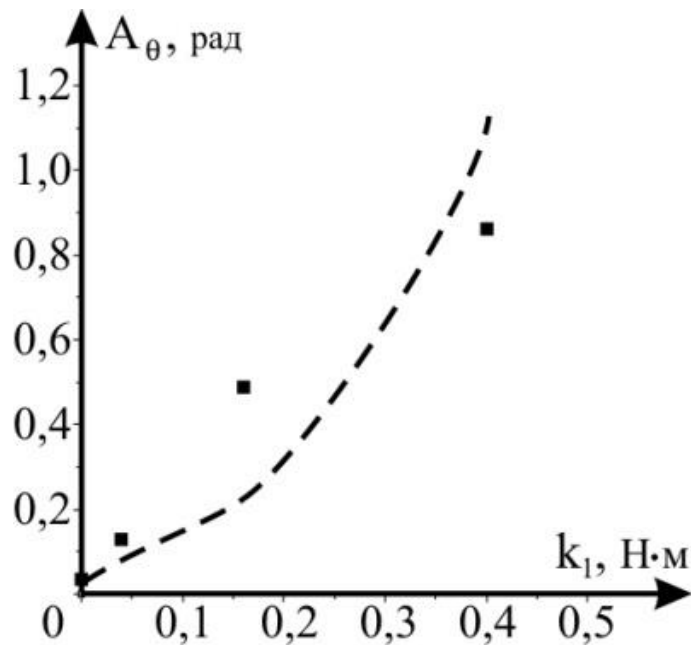


Рис.3.31(б) Амплитуды и частота колебаний маятника в зависимости от жёсткости пружины k_1 . Сплошная линия – результат численного моделирования. Точки – результаты эксперимента. $V=11$ м/с. $R=14$ см

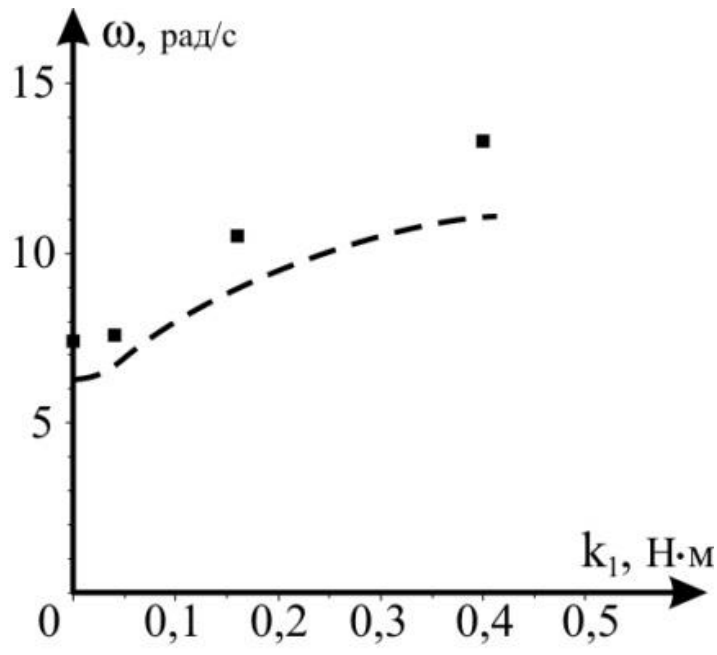


Рис.3.31(в) Амплитуда колебаний второго звена в зависимости от жёсткости пружины k_1 . Сплошная линия – результат численного моделирования. Точки – результаты эксперимента. $V=11$ м/с. $R=14$ см

На Рис.3.31(а, б, в) показан случай при $R=14$ см, $V=11$ м/с. Здесь также видно, как увеличение жёсткости приводит к увеличению амплитуд и частоты.

Из проведённого сравнения видно, что результаты эксперимента и численного моделирования, в целом, хорошо согласуются не только качественно, но и количественно. Для количественного соответствия необходимо учитывать сопротивление элементов конструкции. Цикл первого типа (который рождается из бифуркации типа Андронова-Хопфа) удалось хорошо описать. Цикл второго типа количественно плохо совпадает с результатами моделирования. Для его более точного описания следует внести дополнительные корректировки в модель.

Заключение

Построена математическая модель двухзвенного аэродинамического маятника с пружинами в шарнирах.

Исследована устойчивость положения равновесия, в котором оба звена маятника ориентированы вдоль набегающего потока. Показано, что если крыло находится на достаточно большом расстоянии от шарнира между звеньями, то положение равновесия вдоль потока асимптотически устойчиво как с пружинами крепления, так и без них. Уменьшение этого расстояния может привести к потере устойчивости. Показано, что если крыло расположено достаточно близко к шарниру между звеньями, и при этом момент инерции первого звена достаточно велик, то существует диапазон значений коэффициента жесткости пружины в первом шарнире, для которого пружина дестабилизирует положение равновесия по потоку (устойчивое без пружины). Увеличение жесткости пружины в шарнире между звеньями приводит к уменьшению области значений параметров, для которых имеет место неустойчивость положения равновесия по потоку.

Исследованы периодические решения системы. Показано, что если крыло расположено достаточно близко к шарниру между звеньями, то существуют притягивающие циклы, по крайней мере, двух типов. Для циклов первого типа характерны сравнительно большие амплитуды колебаний первого звена при малых амплитудах колебаний второго. Для циклов второго типа характерны достаточно большие амплитуды колебаний обоих звеньев.

Проведена серия экспериментов в аэродинамической трубе НИИ механики МГУ. В ходе испытаний были определены характеристики колебательных режимов для разных скоростей ветра, различных положений крыла на втором звене и жесткости пружин. Результаты эксперимента подтверждают выводы, полученные аналитическими и численными методами (в частности, эффект потери устойчивости в определенном

диапазоне значений коэффициента жесткости пружины на первом звене, наличие двух типов циклов). Кроме того, для циклов первого типа квазистатическая модель обеспечивает достаточно хорошее количественное соответствие между результатами расчетов и экспериментальными данными.

С учетом проведенного исследования представляется целесообразным продолжить исследование динамики двухзвенного аэродинамического маятника уже как элемента ветроэнергетической установки колебательного типа (в которой электричество будет вырабатываться, например, с помощью пьезоэлементов).

Автор выражает благодарность научным руководителям: доценту Селюцкому Юрию Дмитриевичу и профессору Самсонову Виталию Александровичу.

Литература

1. Strganac T.W., Ko. J., Kurdila A.J. Identification and Control of Limit Cycle Oscillations in Aeroelastic Systems // *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*. 2000. Vol. 23, Iss. 6. P. 1127-1133.
2. Dimitriadis G., Li J. Bifurcation behavior of airfoil undergoing stall flutter oscillations in low-speed wind tunnel // *AIAA Journal*. 2009. Vol. 47. Iss. 11. P. 2577-2596.
3. Gao M., Cai G. Robust fault-tolerant control for wing flutter under actuator failure // *Chinese Journal of Aeronautics*. 2016. Vol. 29, Iss 4. P. 1007-1017.
4. Mannini C., Marra A.M., Bartoli G. VIV-galloping instability of rectangular cylinders: Review and new experiments // *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 2014. Iss. 132. P. 109-124.
5. Xu K., Ge Y., Zhang D. Wake oscillator model for assessment of vortex-induced vibration of flexible structures under wind action // *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 2014. Iss. 136. P. 192-200.
6. Dumitrescu H., Cardos V. Predictions of unsteady HAWT aerodynamics by lifting line theory // *Mathematical and Computer Modelling*. 2001. Vol. 33, Iss. 4–5. P. 469-481.
7. Kim H., Lee S., Lee S. Numerical analysis on the aerodynamics of HAWTs using nonlinear vortex strength correction // *Current Applied Physics*. 2010. Vol. 10, Iss. 2. P. S311-S315.
8. Kishinami K., Taniguchi H., Suzuki J., Imano H., Kazunou T., Turuhami M. Theoretical and experimental study on the aerodynamic characteristics of a horizontal axis wind turbine // *Energy*. 2005. Vol. 30. P. 2089-2100.
9. Adams D., White J., Rumsey M., Farrar C. Structural health monitoring of wind turbines: method and application to a HAWT // *Wind Energy*. 2011. Vol. 14. Iss. 4. P. 603-623.

10. Yu G., Shen X., Zhu X., Du Z. An insight into the separate flow and stall delay for HAWT // *Renewable Energy*. 2011. V. 36. Iss. 1. P. 69-76.

11. Hsiao F. B., Bai C. J., Chong W. T. (2013). The performance test of three different horizontal axis wind turbine (HAWT) blade shapes using experimental and numerical methods // *Energies*. 2013. Vol. 6. Iss. 6. P. 2784-2803.

12. Bai C.J., Hsiao F.B., Li M.H., Huang G.Y., Chen Y.J. Design of 10 kW horizontal-axis wind turbine (HAWT) blade and aerodynamic investigation using numerical simulation // *Procedia Engineering*. 2013. Vol. 67. P. 279-287.

13. Keck R.E. A numerical investigation of nacelle anemometry for a HAWT using actuator disc and line models in CFX // *Renewable energy*. 2012. Vol. 48. P. 72-84.

14. Wendler J., Marten D., Pechlivanoglou G., Nayeri C. N., Paschereit C.O. (2016, June). An unsteady aerodynamics model for lifting line free vortex wake simulations of hawt and vawt in qblade // *ASME Turbo Expo 2016: Turbomachinery Technical Conference and Exposition*. American Society of Mechanical Engineers Digital Collection. 2016. P. V009T46A011-V009T46A011.

15. Shen W.Z., Zakkam V.A.K., Sorensen J.N., Appa K. Analysis of counter-rotating wind turbines // *Journal of Physics: Conference Series*. 2007. Vol. 75. Iss. 1. P. 012003.

16. Lee S., Kim H., Son E., Lee S. Effects of design parametres on aerodynamic performance of a counter-rotating wind turbine // *Renewable Energy*. 2012. Vol. 42 P. 140-144.

17. Климина Л.А., Шалимова Е.С. Двухпропеллерная ветроэнергетическая установка с дифференциальной планетарной передачей // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2017. Т. 18. № 10. С. 679-684.

18. Klimina L., Lokshin B., Samsonov V., Seliutskiy Yu., Shalimova E., Steindl A. Modeling of dynamics of a counter-rotating horizontal axis windturbine // Proceedings of 14th Conference on Dynamical Systems: Theory and Applications (DSTA 2017), Mathematical and Numerical Aspects of Dynamical System Analysis. 2017. Vol. 3. P. 263-274.

19. Досаев М.З., Кобрин А.И., Локшин Б.Я., Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д. Конструктивная теория МВЭУ. Учебное пособие. Ч. 1 // Издательство Московского университета Москва, ISBN 978-5-211-05429-5.

20. Досаев М.З., Кобрин А.И., Локшин Б.Я., Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д. Конструктивная теория МВЭУ. Учебное пособие. Ч. 2 // Издательство Московского университета Москва, ISBN 978-5-211-05429-5.

21. Досаев М.З., Линь Ч.Х., Лю В.Л., Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д. Качественный анализ стационарных режимов малых ветровых электростанций // ПММ. 2009. Т.73. № 3. С. 368-374.

22. Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д. Математическая модель поведения малых ветровых электростанций // Математическое моделирование. 2015. Т. 27. № 2. С.85–95

23. Головин А.А., Досаев М.З., Климина Л.А., Локшин Б.Я., Меснянкин С.Ю., Селюцкий Ю.Д. Об экспериментальном исследовании малогабаритной горизонтально-осевой ВЭУ // НИИ механики МГУ. 2011. отчет о НИР № 5148. 45 С.

24. Досаев М.З., Климина Л.А. Методика исследования влияния параметров генератора на эффективность малых ветроэнергетических установок // Вопросы современной науки и практики. 2014. Т. 4. № 54. С. 94-102.

25. Селюцкий Ю.Д. О динамике малых ветроэнергетических установок // Математическое моделирование. 2018. Т. 30. № 1. С. 31-39.

26. Sutherland H.J., Berg D.E., Ashwill T.D. A retrospective of VAWT technology // Sandia Report No. SAND2012-0304. 2012.
27. Kumbernuss J., Chen J., Yang H.X., Lu L. Investigation into the relationship of the overlap ratio and shift angle of double stage three bladed vertical axis wind turbine (VAWT) // Journal of wind engineering and industrial aerodynamics. 2012. V. 107. P. 57-75.
28. Krishnan A., Paraschivoiu M. 3D analysis of building mounted VAWT with diffuser shaped shroud // Sustainable Cities and Society. 2016. Vol. 27. P. 160-166.
29. Yao Y.X., Tang Z.P., Wang X.W. Design based on a parametric analysis of a drag driven VAWT with a tower cowling // Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics. 2013. V. 116. P. 32-39.
30. Castelli M.R., Fedrigo A., Benini E. Effect of dynamic stall, finite aspect ratio and streamtube expansion on VAWT performance prediction using the BE-M model // International Journal of Engineering and Physical Sciences. 2012. Vol. 6. P. 237-249.
31. Merz K.O. A method for analysis of VAWT aerodynamic loads under turbulent wind and platform motion // Energy Procedia. 2012. Vol. 24. P. 44-51.
32. Madsen H.A., Paulsen U.S., Vitae L. Analysis of VAWT aerodynamics and design using the Actuator Cylinder flow model // Journal of Physics: Conference Series. 2014. Vol. 555. Iss. 1. P. 012065.
33. Wendler J., Marten D., Pechlivanoglou G., Nayeri C.N., Paschereit C.O. An unsteady aerodynamics model for lifting line free vortex wake simulations of hawt and vawt in qblade // ASME Turbo Expo 2016: Turbomachinery Technical Conference and Exposition. 2016. P. V009T46A011-V009T46A011.

34. Saha U.K., Thotla S., Maity D. Optimum design configuration of Savonius rotor through wind tunnel experiments // *J. of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 2008. Vol. 96. P. 1359–1375.
35. Kamoji M.A., Kedare S.B., Prabhu S.V. Experimental investigations on single stage, two stage and three stage conventional Savonius rotor // *Int. J. Energy Res.* 2008. Vol. 32. P. 877–895.
36. Klimina L., Masterova A., Selyutskiy Yu., Hwang S.S., Lin C.H. On dynamics of a Savonius rotor-based wind power generator // *Proceedings of 14th Conference on Dynamical Systems: Theory and Applications (DSTA 2017), Mathematical and Numerical Aspects of Dynamical System Analysis*. 2017. Vol. 3. P. 275-284.
37. Kang C., Liu H., Yang X. Review of fluid dynamics aspects of Savonius-rotor-based vertical-axis wind rotors // *Renewable and Sustainable Energy Reviews*. 2014. Vol. 33. P. 499-508.
38. Akwa J.V., Vielmo H.A., Petry A.P. (2012). A review on the performance of Savonius wind turbines // *Renewable and sustainable energy reviews* 2012. Vol. 16. Iss. 5. P. 3054-3064.
39. Mohamed M.H., Janiga G., Pap E., Thévenin D. Optimization of Savonius turbines using an obstacle shielding the returning blade // *Renewable Energy*. 2010. Vol. 35, Iss. 11. P. 2618-2626.
40. Mahmoud N.H., El-Haroun A.A., Wahba E., Nasef M.H. An experimental study on improvement of Savonius rotor performance // *Alexandria Engineering Journal*. 2012. Vol. 51. Iss. 1. P. 19-25.
41. Kacprzak K., Liskiewicz G., Sobczak K. Numerical investigation of conventional and modified Savonius wind turbines // *Renewable energy*. 2013. Vol. 60. P. 578-585.

42. Golecha K., Eldho T.I., Prabhu, S.V. Influence of the deflector plate on the performance of modified Savonius water turbine // *Applied Energy*. 2011. Vol. 88. Iss. 9. P. 3207-3217.
43. Castelli M.R., Englaro A., Benini E. The Darrieus wind turbine: Proposal for a new performance prediction model based on CFD // *Energy*. 2011. Vol. 36. Iss. 8. P. 4919-4934.
44. Balduzzi F., Bianchini A., Carnevale E.A., Ferrari L., Magnani S. Feasibility analysis of a Darrieus vertical-axis wind turbine installation in the rooftop of a building // *Applied Energy*. 2012. Vol. 97. P. 921-929.
45. Tjiu W., Marnoto T., Mat S., Ruslan M. H., Sopian K. Darrieus vertical axis wind turbine for power generation I: Assessment of Darrieus VAWT configurations // *Renewable Energy*. 2015. Vol. 75. P. 50-67.
46. Kirke B.K., Lazauskas L. Limitations of fixed pitch Darrieus hydrokinetic turbines and the challenge of variable pitch // *Renewable Energy*. 2011. Vol. 36. Iss. 3. P. 893-897.
47. Jin X., Zhao G., Gao K., Ju W. Darrieus vertical axis wind turbine: Basic research methods // *Renewable and Sustainable Energy Reviews*. 2015. Vol. 42. P. 212-225.
48. Castelli M.R., Ardizzon G., Battisti L., Benini E., Pavesi G. Modeling strategy and numerical validation for a Darrieus vertical axis micro-wind turbine // *ASME 2010 international mechanical engineering congress and exposition*. 2010. P. 409-418.
49. Mohamed M.H., Ali A.M., Hafiz A.A. CFD analysis for H-rotor Darrieus turbine as a low speed wind energy converter // *Engineering Science and Technology, an International Journal*. 2015. Vol. 18. Iss. 1. P. 1-13.
50. Castelli M.R., Dal Monte A., Quaresimin M., Benini E. Numerical evaluation of aerodynamic and inertial contributions to Darrieus wind turbine blade deformation // *Renewable Energy*. 2013. V. 51. P. 101-112.

51. Горелов Д.Н. Энергетические характеристики ротора Дарье // Теплофизика и аэромеханика. 2010. Т. 17. № 3. С. 325-333.
52. Danao L.A., Eboibi O., Howell R. An experimental investigation into the influence of unsteady wind on the performance of a vertical axis wind turbine // Applied Energy. 2013. Vol. 107. P. 403-411.
53. Jin X., Zhao G., Gao K., Ju W. Darrieus vertical axis wind turbine: Basic research methods // Renewable and Sustainable Energy Reviews. 2015. Vol. 42. P. 212-225.
54. Bianchini A., Ferrara G., Ferrari L. Design guidelines for H-Darrieus wind turbines: Optimization of the annual energy yield // Energy Conversion and Management. 2015. Vol. 89. P. 690-707.
55. Gupta R., Biswas A. Computational fluid dynamics analysis of a twisted three-bladed H-Darrieus rotor // Journal of Renewable and Sustainable Energy. 2010. Vol. 2. Iss. 4. P. 043111.
56. Gosselin R., Dumas G., Boudreau M. Parametric study of H-Darrieus vertical-axis turbines using uRANS simulations // 21st Annual Conference of the CFD Society of Canada (CFDSC). 2013. P. 6-9. 2013.
57. Malipeddi A.R., Chatterjee D. Influence of duct geometry on the performance of Darrieus hydroturbine // Renewable Energy. 2012. Vol. 43. P. 292-300.
58. Daróczy L., Janiga G., Petrasch K., Webner M., Thévenin D. Comparative analysis of turbulence models for the aerodynamic simulation of H-Darrieus rotors // Energy. 2015. Vol. 90. P. 680-690.
59. Bedon G., Castelli M.R., Benini E. Optimization of a Darrieus vertical-axis wind turbine using blade element–momentum theory and evolutionary algorithm // Renewable Energy. 2013. Vol. 59. P. 184-192.

60. П.Р. Андронов, М.З. Досаев, Г.Я. Дынникова, Ю.Д. Селюцкий, С.Д. Стрекалов. Моделирование ветродвигателя колебательного типа // Проблемы машиностроения и надежности машин, 2009, № 4, С. 86-91
61. Barrero-Gil A., Pindado S. Avila S. Extracting energy from vortex-induced vibrations: a parametric study // Appl. Math. Model. 2012. Vol. 36, Iss. 7. P. 3153-3160.
62. Abdelkefi A. Aeroelastic energy harvesting. A review // International Journal of Engineering Science. 2016. Iss. 100. P. 112-135.
63. Jones K.D., Davids S.T., Platzer M.F. Oscillating-wing power generation // 3rd ASME/JSME Joint Fluids Engineering Conference. 1999. P. 1-6.
64. Isoc T., Leach F., Bobean C., Pavel V., Vadan I. Study and design of a wing oscillating wind system // Advanced Topics in Electrical Engineering (ATEE), 2011 7th International Symposium. 2011. P. 1-4.
65. Klimina L.A., Samsonov V.A., Hwang S.S., Lin K.H., Lin C.H. Application of the Poincare-Pontryagin theorem to analysis of a dynamical model of a wind powered car // International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference), IEEE. 2016. P. 1-3.
66. Klimina L., Dosaev M., Selyutskiy Yu. Asymptotic analysis of the mathematical model of a wind-powered vehicle // Applied Mathematical Modelling. Elsevier BV. 2017. Vol. 46. P. 691-697.
67. Dosaev M., Klimina L., Selyutskiy Y. Wind Turbine Based on Antiparallel Link Mechanism. New Trends in Mechanism and Machine Science, Mechanisms and Machine Science // Springer International Publishing. 2017. Vol. 43. P. 543-550.
68. Klimina L.A., Lokshin B.Ya., Selyutskiy Yu.D., Garziera R. Necessary and sufficient conditions of existence of periodical motions in the

model of a hinge mechanism in a flow // *Procedia Engineering*. 2017. Vol. 199. P. 826-831.

69. Климина Л.А., Досаев М.З., Селюцкий Ю.Д. О динамике ветроэнергетической установки с рабочим элементом на основе механизма антипараллелограмма // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2016. Т. 17. № 8. С. 536-540.

70. Голуб А.П., Досаев М.З., Климина Л.А., Локшин Б.Я., Меснянкин С.Ю., Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д., Симоненко М.М. Кривошипно-шатунный механизм - Устройство для преобразования возобновляемой энергии // *Официальный бюллетень федеральной службы по интеллектуальной собственности (Роспатент), серия Изобретения. Полезные модели, место издания Федеральная служба по интеллектуальной собственности Москва*. 2018. Т. 2. #2641176.

71. Бекмеметьев В.О., Досаев М.З., Климина Л.А. Установившиеся режимы движения лодки с кривошипно-шатунным механизмом // *Динамические системы*. Т. 5. № 3-4. С. 169-176.

72. Klimina L.A, Holub A.P. Wind powered car: theory and experiments // XII International Summer School "Computer Technologies of Engineering Mechanical Problems". 2018. P.7.

73. Zhou Z., Whiteman C. Motions of a double pendulum // *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*. 1996. Vol. 26. Iss.7. P. 1177-1191.

74. Awrejcewicz J., Sendkowski D. Geometric analysis of the dynamics of a double pendulum // *Journal of Mechanics of Materials & Structures*. 2007. Vol. 2, Iss. 8. P. 1421-1430.

75. Мастерова А.А О существовании хаотических движений двухлопастного маятника // *Труды конференции-конкурса молодых ученых*. 10-12 октября 2016 г. 2017. С. 142-149.

76. Герценштейн С.Я., Досаев М.З., Некрасов И.В., Самсонов В.А. Двухзвенный флюгер в потоке воздуха // Издательство Московского университета. 2004.

77. Dosaev, M.Z., Selyutskiy, Yu.D. On dynamics of double pendulum in airflow // Proc. of the 6th EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference. 2008. P. 4.

78. Зенкин А.Н., Самсонов В.А. Динамика вращающихся тел, взаимодействующих со средой. Экспериментальное исследование движения тела, авторотирующего в потоке среды. // МГУ. НИИ механики. Отчёт 3844. 1989 г.

79. Selyutskiy Y.D., Holub A.P., Dosaev M.Z. Elastically Mounted Double Aerodynamic Pendulum // International Journal of Structural Stability and Dynamics. 2019. V. 19. No. 5. P. 1-13.

80. Голуб А.П., Селюцкий Ю.Д. О влиянии жёсткости крепления на динамику двухзвенного аэродинамического маятника // Доклады Академии наук. 2018. Т. 481. № 3. С. 254-257.

81. Голуб А.П., Селюцкий Ю.Д. Двухзвенный маятник в упругом подвесе // Мехатроника, автоматизация, управление. 2018. Т. 19. № 6. С. 380-386.

82. Голуб А.П., Селюцкий Ю.Д. О влиянии упругого крепления на колебания двухзвенного аэродинамического маятника // Труды МФТИ. 2017. Т. 9. № 3. С. 8-13.

83. Holub A.P., Hwang S.S., Lin C.H. How stiffness affects on the dynamics of a double-link aerodynamic pendulum // Proceedings of 14th International Conference "Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems". 2018. P. 1-3.

84. Голуб А.П., Селюцкий Ю.Д., Hwang S.S., Lin Ch.H. Анализ поведения упругозакреплённого двухзвенного аэродинамического маятника

// Проблемы механики и управления: Материалы Международной конференции. 2018. С. 127-128.

85. Selyutskiy Y.D., Holub A.P., Dosaev M.Z., Garziera R. Elastically mounted double pendulum in flow // Proceedings of 14th Conference on Dynamical Systems. 2017. Vol. 3. P. 501-510.

86. Голуб А.П., Селюцкий Ю.Д., Hwang S.-S., Lin Ch.-H. О поведении двухзвенного аэродинамического маятника // «Аналитическая механика, устойчивость и управление». Труды XI Международной Четаевской конференции. 2017. Т. 2. С. 99-105.

87. Голуб А.П. Динамика двухзвенного аэродинамического маятника в упругом закреплении // Труды конференции-конкурса молодых ученых НИИ механики МГУ. 2018. С. 103-107.

88. Кравец А.С. Характеристики авиационных профилей // М.: Оборонгиз. 1939 г. 332 с.

89. Самсонов В.А., Паршин Д.Е. Качественный анализ в задаче о движении аэродинамического маятника // МГУ. НИИ механики. Отчёт №4194. 1992 г.