

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА

На правах рукописи

Роговский Александр Игоревич

**Исследование свойств относительного порядка и нулевой
динамики для различных классов динамических систем**

01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы и
оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2019

Работа выполнена на кафедре нелинейных динамических систем и процессов управления факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель — Фомичев Василий Владимирович

доктор физико-математических наук, профессор, и. о. заведующего кафедрой Нелинейных динамических систем и процессов управления факультета Вычислительной математики и кибернетики ФГБОУ ВО «МГУ имени М.В. Ломоносова»

Официальные оппоненты — Асеев Сергей Миронович,

доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, главный научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений ФГБУН «Математический институт имени В.А. Стеклова Российской академии наук»

Крищенко Александр Петрович,

доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент РАН, заведующий кафедрой Математического моделирования факультета Фундаментальных наук ФГБОУ ВО «МГТУ имени Н.Э. Баумана (НИУ)»

Хлебников Михаил Владимирович,

доктор физико-математических наук, доцент, профессор РАН, главный научный сотрудник Лаборатории адаптивных и робастных систем ФГБУН «Институт проблем управления имени В.А. Трапезникова Российской академии наук»

Защита диссертации состоится «20» ноября 2019 г. в 15 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета МГУ.01.09 Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова по адресу: *119991, Москва, Ленинские горы, д.1, строение 52.*

E-mail: ilgova@cs.msu.ru

С диссертацией можно ознакомиться в отделе диссертаций научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова (Ломоносовский просп., д. 27.) и на сайте ИАС «ИСТИНА»:

<https://istina.msu.ru/dissertations/228977360/>

Автореферат разослан

Ученый секретарь

диссертационного совета,

доктор физико-математических наук,

профессор

Е.В. Захаров

Введение

Актуальность работы.

Теория управления активно используется в различных областях науки и техники: от авиации до медицины и экономики (см., например, [8—17]). Несмотря на то, что объекты управления имеют различную структуру, математические модели большинства объектов сходны. В простейшем случае модель объекта управления представляет собой отображение множества входных сигналов во множество выходных по заранее определенному правилу. Однако, для решения практических задач необходимо учитывать, что объекты управления могут иметь внутреннюю динамику (например, в задачах стабилизации недостаточно стабилизировать выход системы, если она содержит неустойчивые подсистемы; подробнее см. [18; 19]). Эта динамика во многом определяет свойства объекта, поэтому ее изучение является важной составляющей анализа систем управления.

В настоящей работе мы будем рассматривать системы управления, которые описываются при помощи дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad y(t) = h(x(t)),$$

где $x(t)$ обозначает вектор состояния системы, $u(t)$ — входной сигнал, а $y(t)$ — выходной сигнал. Будут рассмотрены два случая:

- $f(t, x(t), u(t)) = Ax(t) + Bu(t)$, $h(x(t)) = Cx(t)$, где A, B, C — постоянные матрицы;
- $f(t, x(t), u(t)) = f(x(t)) + \sum_{i=1}^l g_i(x(t))u_i(t)$, где $f(x)$, $g_i(x)$ — гладкие векторные поля, $h(x(t)) = (h_1(x(t)), \dots, h_l(x(t)))^T$, $h_i(x)$ — гладкие функции, $i = \overline{1, l}$.

Первый вариант — это классическая линейная система управления, второй — это нелинейная аффинная система. Системы такого вида используются для опи-

сания многих объектов управления, поэтому их исследование является актуальным и интересным с практической точки зрения. Для исследования внутренней динамики указанных систем обычно приводят уравнения к специальному виду, в котором эта динамика описывается одной из подсистем. Такие представления называются каноническими формами и часто применяются при решении различных задач управления.

В данной работе мы будем рассматривать динамику системы при тождественно нулевом выходе, которую называют нулевой динамикой. Для скалярных систем описание этой динамики известно, поскольку в этом случае любую систему общего положения можно привести к канонической форме с выделением нулевой динамики. Вообще говоря, к такой форме могут быть приведены только системы, имеющие относительный порядок. Однако, для скалярных систем общего положения условия относительного порядка всегда совместны. Ситуация существенно меняется при рассмотрении векторных систем, поскольку в этом случае условия относительного порядка не всегда совместны, и исчерпывающего описания данной динамики нет. Таким образом, задача описания нулевой динамики векторных систем до сих пор полностью не решена.

Заметим также, что каноническая форма с выделением нулевой динамики используется при решении многих задач управления. К таким задачам можно отнести задачу стабилизации (см., например, [20–22]), обращения (см., например, [23–25]), наблюдения (см., например, [26; 27]) и некоторые другие (см. [28]). Но, как уже было сказано, к такой форме могут быть приведены только системы, имеющие относительный порядок, что не всегда имеет место для многосвязных систем.

Для систем, не имеющих относительного порядка, возникает задача приведения системы к виду с относительным порядком, то есть преобразования исходной системы таким образом, чтобы для преобразованной системы условия относительного порядка выполнялись. Существуют разные методы решения этой задачи: в работе [25] для преобразования используется динамическая

обратная связь, в работе [29] — интегрирование входов. Однако, для некоторых задач (например, для задачи обращения), наиболее удобно использовать преобразование выходов. Этот подход разрабатывается в настоящей работе (см. главу 2).

Тем не менее, существуют системы, которые принципиально нельзя привести к виду с относительным порядком (необратимые системы). Для таких систем исследование нулевой динамики с помощью канонической формы, соответствующей вектору относительного порядка, невозможно. Поэтому имеет смысл поиск других форм с выделением нулевой динамики, не требующих выполнения условий относительного порядка. Этот подход также используется в данной работе (см. главы 3, 4).

Степень разработанности темы. Различные методы приведения систем к виду с относительным порядком рассматривались в работах [25; 29]. Однако, замена выходов как метод преобразования в указанных работах не рассматривается (в первой работе используется интегрирование входов, во второй — динамическая обратная связь).

Обобщения канонических форм для линейных систем рассматривались в работе [30], а для нелинейных систем — в работах [25; 31; 32]. При этом для нелинейных систем предложенные в указанных работах методы применимы не всегда. Также заметим, что форма из работы [30] является довольно громоздкой, поэтому ее упрощение может быть полезно для решения практических задач. Таким образом, разработка новых методов описания нулевой динамики является актуальной задачей.

Цель диссертационной работы. Цель работы состоит в разработке новых методов описания нулевой динамики, применимых как для линейных, так и для нелинейных многосвязных систем. Для достижения этой цели были поставлены следующие задачи:

1. Получить достаточные условия приводимости линейных систем к виду

с относительным порядком при помощи линейной стационарной замены выходов.

2. Исследовать связь обобщений относительного порядка, введенных в работе [1], с нулевой динамикой системы.
3. Разработать метод приведения линейных систем к виду с относительным порядком с помощью динамического преобразования выходов, применимый для любой обратимой линейной системы.
4. Получить обобщение канонической формы с выделением нулевой динамики для линейных систем.
5. Получить метод нахождения нулевой динамики для нелинейных систем, применимый к необратимым системам.

Методы исследования. Основные результаты получены с использованием методов теории дифференциальных уравнений, математического анализа, матричных методов линейной алгебры и дифференциальной геометрии.

Научная новизна. Научная новизна работы заключается в том, что впервые рассматривается задача приведения системы к виду с относительным порядком с помощью динамической замены выходов, а также в том, что в диссертационной работе получены следующие новые результаты:

1. Получены достаточные условия приводимости линейных систем к виду с относительным порядком при помощи линейной стационарной замены выходов.
2. Получены оценки размерности нулевой динамики линейных систем через обобщенный вектор относительного порядка.
3. Предложен метод динамической и минимально-фазовой замен выходов, позволяющий привести любую обратимую линейную систему к виду с относительным порядком.

4. Получена новая форма с выделением нулевой динамики для линейных систем.
5. Получен новый метод нахождения уравнений нулевой динамики, применимый к необратимым нелинейным системам.

Практическая значимость Работа носит теоретический характер. Разработанные методы описания нулевой динамики могут быть использованы для решения практических задач, в которых требуется исследование нулевой динамики. Также при решении задач могут использоваться полученные формы с выделением нулевой динамики.

На защиту выносятся следующие положения:

1. Достаточные условия приводимости линейных систем к виду с относительным порядком.
2. Оценка размерности нулевой динамики с помощью вектора неполного относительного порядка.
3. Алгоритм приведения линейных систем к виду с относительным порядком при помощи динамической и минимально-фазовой замен выходов.
4. Обобщенная форма с выделением нулевой динамики для линейных систем.
5. Метод нахождения уравнений нулевой динамики нелинейных аффинных систем.

Апробация работы. Представленные в работе результаты докладывались на семинаре Лаборатории № 7 Адаптивных и робастных систем им. Я. З. Цыпкина Института проблем управления им. В. А. Трапезникова, семинаре «Проблемы нелинейной динамики: качественный анализ и управление», а также на следующих конференциях:

- научной конференции «Тихоновские чтения 2014» (Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, 27–31 октября 2014 г.);
- международной научной конференции «Ломоносов 2015» (Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, 13–17 апреля 2015 г.);
- научной конференции «Ломоносовские чтения 2016» (Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, 18–27 апреля 2016 г.);
- международной научной конференции «Ломоносов 2017» (Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, 10–14 апреля 2017 г.);
- научной конференции «Ломоносовские чтения 2017» (Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, 17–26 апреля 2017 г.);
- научной конференции «Тихоновские Чтения 2017» (Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, 23–27 октября 2017 г.);
- научной конференции «Ломоносовские чтения 2018» (Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, 16–27 апреля 2018 г.);
- научной конференции «Тихоновские Чтения 2018» (Москва, МГУ им. М. В. Ломоносова, 29 октября – 1 ноября 2018 г.);
- научной конференции «Всероссийское совещание по проблемам управления» (Москва, институт проблем управления им. В. А. Трапезникова, 17–20 июня 2019 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 7-ми работах: [1–7], в журналах «Дифференциальные уравнения» (входит в базы *Scopus*, *WoS*, РИНЦ, список рецензируемых научных изданий ВАК, и список изданий, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности; импакт-фактор *WoS* — 0.659) и «Вестник Московского университета. Серия 15: вычислительная математика и кибернетика» (входит в базу

Scopus, РИНЦ, список рецензируемых научных изданий ВАК и список изданий, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности; импакт-фактор РИНЦ — 0.423).

Личный вклад автора. Представленные в работе результаты получены автором лично. Подготовка части материалов к публикации проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 4-х глав, заключения и списка литературы. Объем диссертации составляет 140 страниц текста, 2 иллюстрации. Список литературы содержит 59 наименований.

Содержание работы

Во **введении** обоснованы актуальность работы, научная новизна и практическая значимость, указана цель диссертационной работы, приведены используемые методы исследования, а также выносимые на защиту положения.

В **первой главе** приведена постановка задачи и обзор существующих методов описания нулевой динамики для линейных систем. Рассматривается линейная стационарная система управления, которая описывается следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (1.1)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^l$, $u(t) \in \mathbb{R}^l$, а A , B , C — вещественные матрицы, имеющие согласованные с векторами размеры; $t > t_0$. Система (1.1) однозначно определяется своими матрицами, поэтому далее мы будем иногда обозначать ее так: $\{A, B, C\}$.

Мы будем рассматривать задачу описания нулевой динамики системы (1.1). Нулевая динамика — это множество всех решений, обеспечивающих системе тождественно нулевой выход. Для описания этого множества обычно с помо-

щью замены фазовых переменных преобразуют уравнения системы к специальному виду — так называемой канонической форме с выделением нулевой динамики. Система (1.1) может быть приведена к такой форме только в том случае, если для нее выполняются условия относительного порядка. Эти условия, однако, не всегда совместны. Для описания нулевой динамики систем, не имеющих относительного порядка, часто используют следующий метод: с помощью каких-либо преобразований «изменяют» систему таким образом, чтобы для измененной системы условия относительного порядка выполнялись. Этот метод называется приведением к виду с относительным порядком. В первой главе мы рассмотрим простейшее такое преобразование — линейную замену выходов — и получим достаточные условия приводимости.

Запишем указанную задачу более формально. Заметим, что решение системы $x(t)$ зависит от начальных условий x_0 , времени t и управления $u(t)$, то есть $x = x(t, x_0, u(t))$. Такая же зависимость имеет место и для выхода: $y = y(t, x_0, u(t))$. Пусть X_0 обозначает множество всех начальных условий, для которых существует такое непрерывное управление $u_{x_0}^0(t)$, определенное при $t > t_0$, что имеет место равенство $y(t, x_0, u_{x_0}^0(\cdot)) \equiv O_{l \times 1}$ (здесь и далее $O_{p \times q}$ обозначает нулевую матрицу порядка $p \times q$). Управление $u_{x_0}^0(t)$ будем называть *аннулирующим*, соответствующим начальным условиям x_0 . Иначе говоря,

$$X_0 = \{x_0 : \exists u_{x_0}^0(t) : y(t, x_0, u_{x_0}^0(\cdot)) \equiv O_{l \times 1}\}.$$

Определение 1.1. Нулевой динамикой системы $\{A, B, C\}$ называется множество решений $x(t, x_0, u_{x_0}^0(t))$ этой системы, где $x_0 \in X_0$, а $u_{x_0}^0(t)$ — соответствующее аннулирующее управление.

Иначе говоря, нулевая динамика — это множество решений системы, обеспечивающих ей тождественно нулевой выход.

Замечание 1.1. Заметим, что нулевая динамика системы (1.1) не пуста. В самом деле, нулевое решение (соответствующее нулевым начальным условиям и нулевому входу) принадлежит нулевой динамике системы (1.1).

Очевидно, что все траектории нулевой динамики, и только они, удовлетворяют уравнениям

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) \equiv O_{l \times 1}. \end{cases}$$

Эти уравнения представляют собой систему дифференциальных и алгебраических уравнений, исследование такой системы затруднительно. Поэтому целесообразно преобразовать указанную систему к наиболее простой форме. Эта задача называется задачей нахождения уравнений нулевой динамики. Запишем ее формально.

Определение 1.2. Пусть дана система (1.1). Будем говорить, что уравнения

$$\begin{cases} z^1(t) \equiv O_{(n-p) \times 1} \\ \dot{z}^2(t) = A^0 z^2(t) + B^0 \xi(t), \end{cases} \quad (1.2)$$

где $z(t) = \text{col}(z^1(t), z^2(t)) \in \mathbb{R}^n$, $z^1(t) \in \mathbb{R}^{n-p}$, $\xi(t) \in \mathbb{R}^l$, $t > t_0$, $A^0 \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $B^0 \in \mathbb{R}^{p \times l}$, являются *уравнениями нулевой динамики* системы (1.1), если существует такая невырожденная матрица $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, что:

- i) при любых начальных условиях $z_0^2 \in \mathbb{R}^p$ и при любой непрерывной функции $\xi(t) \in \mathbb{R}^l$, определенной на луче (t_0, ∞) , вектор-функция $M^{-1}z(t)$, где $z(t)$ — это решение системы (1.2), принадлежит нулевой динамике системы (1.1);
- ii) для любого решения $x(t)$, принадлежащего нулевой динамике системы (1.1), существует такая непрерывная функция $\xi(t) \in \mathbb{R}^l$, определенная на луче (t_0, ∞) , что $Mx(t)$ удовлетворяет системе (1.2).

Здесь и далее $\text{col}(v^1, \dots, v^i) = (v^{1T}, \dots, v^{iT})^T$, где $v^1, \dots, v^i$ — это матрицы, имеющие одинаковое количество столбцов. Задача нахождения уравнений нулевой динамики разрешима для любой линейной системы (1.1) (как показано в главе 3). Также с описанием нулевой динамики связывают еще две задачи:

нахождение размерности нулевой динамики (то есть динамического порядка системы дифференциальных уравнений из (1.2)) и ее спектра (то есть спектра матрицы A^0 из (1.2)). Эти две задачи в большинстве случаев удается решить с помощью матрицы Розенброка.

Определение 1.3. Матрицей Розенброка системы (1.1) называется полиномиальная матрица следующего вида:

$$R(s) = \begin{pmatrix} sI_n - A & -B \\ C & O_{l \times l} \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы называется *характеристическим полиномом нулевой динамики* и обычно обозначается $\beta(s)$. Если $\beta(s) \neq 0$, то степень этого полинома совпадает с размерностью нулевой динамики, а множество его корней — с ее спектром.

Задача нахождения уравнений нулевой динамики несколько сложнее. С ней тесно связано понятие относительного порядка. Для линейных систем оно формулируется так (см. [23, с. 71]):

Определение 1.4. Вектор $r \in \mathbb{N}^l$ называется вектором *относительного порядка* системы (1.1), если:

i) для всех $i \in \{1, 2, \dots, l\}$ справедливы равенства:

$$\begin{aligned} C_{i*}A^{r_i-1}B &\neq O_{1 \times l}, \text{ и, если } r_i > 1, \text{ то} \\ C_{i*}B &= O_{1 \times l}, \quad C_{i*}AB = O_{1 \times l}, \quad \dots, \quad C_{i*}A^{r_i-2}B = O_{1 \times l}; \end{aligned} \tag{1.3}$$

ii) матрица

$$H = \begin{pmatrix} C_{1*}A^{r_1-1}B \\ C_{2*}A^{r_2-1}B \\ \vdots \\ C_{l-1*}A^{r_{l-1}-1}B \\ C_{l*}A^{r_l-1}B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{l \times l} \tag{1.4}$$

невырождена.

Здесь и далее выражение C_{i*} (C_{*j}) обозначает i -ю строку (j -й столбец) матрицы C . Если условия относительного порядка совместны, систему с помощью замены фазовых координат $z(t) = Mx(t)$ можно преобразовать к так называемой канонической форме с выделением нулевой динамики, в которой уравнения нулевой динамики являются одной из подсистем (см. [23, с. 92]).

Таким образом, если система имеет вектор относительного порядка, легко найти уравнения нулевой динамики. Однако, условия относительного порядка не всегда совместны для систем с векторным входом и выходом. При этом стоит отметить, что эти условия не являются инвариантными относительно замены выходов, то есть если для системы $\{A, B, C\}$ они не совместны, то для системы $\{A, B, TC\}$, где $T \in \mathbb{R}^{l \times l}$ — невырожденная матрица, они могут быть совместны. Это означает, что для нахождения уравнений нулевой динамики системы, для которой требования определения 1.4 не выполняются, целесообразно попробовать *привести систему к виду с относительным порядком*, то есть найти такую невырожденную матрицу $T \in \mathbb{R}^{l \times l}$, что для системы $\{A, B, TC\}$ условия определения 1.4 выполняются. Заметим, что такое преобразование системы соответствует замене выходов

$$\tilde{y}(t) = Ty(t). \quad (1.5)$$

Задачу нахождения указанной матрицы T будем называть задачей приводимости (с помощью линейной замены выходов). Эта задача полностью решена в работе [1]. Для ее решения вводится обобщение относительного порядка.

Определение 1.5. Вектор $r \in \mathbb{N}^l$ называется вектором *неполного относительного порядка*, если выполняется первое условие определения 1.4, то есть условие (1.3).

Введенное обобщение относительного порядка также можно использовать для оценки размерности нулевой динамики системы (1.1).

Лемма 1.1. Пусть для системы (1.1) характеристический полином нулевой динамики $\beta(s)$ ненулевой. Тогда:

- i) для этой системы определен вектор неполного относительного порядка r ;
- ii) справедливо неравенство $\deg \beta(s) \leq n - r_1 - r_2 - \dots - r_l$.

Также имеют место достаточные условия приводимости.

Утверждение 1.1. Пусть полином $\beta(s)$ системы (1.1) ненулевой, и справедливо неравенство

$$\deg \beta(s) \geq n - l - 1.$$

Тогда существует такая невырожденная матрица $T \in \mathbb{R}^{l \times l}$, что система $\{A, B, \tilde{C}\}$, где $\tilde{C} = TC$, имеет относительный порядок.

Следствие 1.1. Если система (1.1) такова, что $n-1 = l$, и полином $\beta(s)$ ненулевой, то существует такая невырожденная матрица T , что система $\{A, B, \tilde{C}\}$, где $\tilde{C} = TC$, имеет относительный порядок.

Заметим, что следствие 1.1 обобщает результат из работы [33], где показано, что любая многосвязная система третьего порядка может быть приведена к виду с относительным порядком с помощью замены (1.5).

Основные результаты первой главы опубликованы в работах [1],[2].

Во **второй главе** рассматривается метод динамической замены выходов. Поскольку линейная замена (1.5) не всегда позволяет привести систему (1.1) к виду с относительным порядком, имеет смысл рассматривать более сложные преобразования. Мы рассмотрим динамическую замену выходов. Подадим выход системы $\{A, B, C\}$ на вход другой системе следующего вида:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}y(t) \\ \tilde{y}(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t) + \tilde{D}y(t), \end{cases} \quad (2.1)$$

где $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $\tilde{B} \in \mathbb{R}^{p \times l}$, $\tilde{C} \in \mathbb{R}^{l \times p}$, $\tilde{D} \in \mathbb{R}^{l \times l}$, причем матрица $\tilde{D}$ невырождена.

Замечание 2.1. В отличие от системы (1.1), в (2.1) вход $y(t)$ влияет на выход $\tilde{y}(t)$ «напрямую» через множитель $\tilde{D}y(t)$. Систему (2.1) будем обозначать $\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}\}$, поскольку она однозначно определяется своими матрицами. Также заметим, что если матрица $\tilde{D}$ невырождена, то система $\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}\}$ является обратимой (см. [24]).

Композиция систем (1.1), (2.1) также является линейной системой управления. Об этом говорит следующее утверждение:

Утверждение 2.1. *Рассмотрим динамическую систему, полученную в результате преобразования выхода системы (1.1) с помощью системы (2.1) (то есть выход системы (1.1) подается на вход системе (2.1)). Эта система также является линейной системой $\{\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}\}$ со следующими матрицами:*

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A & O_{n \times p} \\ \tilde{B}C & \tilde{A} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (n+p)},$$

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} B \\ O_{p \times l} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+p) \times l}, \quad \bar{C} = (\tilde{D}C \quad \tilde{C}) \in \mathbb{R}^{l \times (n+p)}.$$

Иногда удастся подобрать систему (2.1) так, чтобы композиция систем (1.1), (2.1) имела относительный порядок. Именно, справедлива следующая теорема:

Теорема 2.1. *Пусть система (1.1) не имеет относительного порядка, а определитель матрицы Розенброка для нее ненулевой. Тогда существует такая система (2.1), что композиция систем (1.1) и (2.1) имеет относительный порядок.*

Стоит отметить, что преобразование выхода с помощью системы (2.1) может изменить «качественные» свойства исходной системы, такие как устойчивость и устойчивость нулевой динамики. Однако, преобразующую систему можно выбрать так, чтобы указанные свойства для композиции систем сохранялись.

Теорема 2.2. Пусть система (1.1) является устойчивой, имеет устойчивый полином $\beta(s)$, но не имеет относительного порядка. Существует такая система (2.1), что композиция систем (1.1) и (2.1) является устойчивой, имеет устойчивый полином $\bar{\beta}(s)$, а также имеет относительный порядок.

Таким образом, получен метод приведения к виду с относительным порядком любой системы (1.1), имеющей ненулевой полином $\beta(s)$.

Основные результаты главы 2 опубликованы в статьях [5; 6].

В **третьей главе** рассматривается обобщенная каноническая форма с выделением нулевой динамики, к которой может быть приведена любая система (1.1), независимо от значения полинома $\beta(s)$. Сначала рассмотрим еще одно обобщение относительного порядка.

Определение 3.1. Вектор $\rho \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^l$ называется вектором *вырожденного относительного порядка* для системы (1.1), если его компоненты определяются согласно следующим правилам:

- $\rho_i = k$, если $C_{i*}A^{k-1}B \neq O_{1 \times l}$, и при $k > 1$ справедливы равенства $C_{i*}A^{j-1}B = O_{1 \times l}$, $j = \overline{1, k-1}$;
- $\rho_i = 0$, если $C_{i*}A^{j-1}B = O_{1 \times l} \forall j \in \mathbb{N}$.

Таким образом, в определении 3.1 ослабляются требования неполного относительного порядка (см. определение 1.5): если для какой-то строки выполняются условия определения 1.5, то значение вектора вырожденного относительного порядка определяется так же, как и для неполного, иначе значение соответствующей компоненты равно нулю.

Нулевому вектору вырожденного относительного порядка соответствует форма с выделением нулевой динамики.

Утверждение 3.1. Пусть вектор вырожденного относительного порядка системы (1.1) нулевой. Тогда существует такая невырожденная матрица

$M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, что после замены координат $z(t) = Mx(t)$ система примет вид

$$\begin{cases} \dot{z}^1(t) = A^{11}z^1(t) \\ \dot{z}^2(t) = A^{21}z^1(t) + A^{22}z^2(t) + B^2u(t) \\ y(t) = C^1z^1(t), \end{cases} \quad (3.1)$$

причем пара $\{A^{11}, C^1\}$ наблюдаема. Здесь $z^1(t) \in \mathbb{R}^p$, $z^2(t) \in \mathbb{R}^{n-p}$, а матрицы A^{11} , A^{21} , A^{22} , B^2 , C^1 имеют согласованные с соответствующими векторами размеры.

Уравнения нулевой динамики системы 3.1 легко находятся. Именно, имеет место следующее утверждение:

Утверждение 3.2. Уравнения нулевой динамики системы (3.1) имеют вид

$$\dot{z}^2(t) = A^{22}z^2(t) + B^2\tilde{u}(t).$$

Таким образом, уравнения нулевой динамики можно найти в двух случаях: если для системы выполняются условия относительного порядка, или вектор вырожденного относительного порядка нулевой. Следующая теорема позволяет находить эти уравнения для систем общего вида.

Теорема 3.1. Для любой системы $\{A, B, C\}$ существуют такие невырожденные матрицы $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $N \in \mathbb{R}^{l \times l}$, $T \in \mathbb{R}^{l \times l}$, что после замены переменных $z(t) = Mx(t)$, входов $\tilde{u}(t) = Nu(t)$ и выходов $\tilde{y}(t) = Ty(t)$ преобразованная система $\{\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}\}$ примет вид

$$\begin{cases} \dot{z}^i(t) = \sum_{j=0}^k \tilde{A}^{ij}z^j(t) + \tilde{B}^i\tilde{u}_i(t), \quad i = \overline{1, k} \\ \dot{z}^0(t) = \sum_{j=0}^k \tilde{A}^{0j}z^j(t) + \tilde{B}^0\tilde{u}(t) \\ \tilde{y}_i(t) = \sum_{j=1}^i \tilde{C}^{ij}z^j(t), \quad i = \overline{1, k} \\ \tilde{y}(t) = \sum_{j=0}^k \tilde{C}^{0j}z^j(t), \end{cases} \quad (3.2)$$

где

$$\begin{aligned} z(t) &= \text{col} \left(z^1(t) \ \dots \ z^k(t) \ z^0(t) \right) \in \mathbb{R}^n, \\ z^i(t) &= \text{col} \left(z_1^i(t) \ \dots \ z_{d_i}^i(t) \right) \in \mathbb{R}^{d_i}, \ z^0(t) \in \mathbb{R}^\sigma, \\ \tilde{y}(t) &= \text{col} \left(\tilde{y}_{k+1}(t) \ \tilde{y}_{k+2}(t) \ \dots \ \tilde{y}_l(t) \right) \in \mathbb{R}^{l-k}, \\ \tilde{u}(t) &= \text{col} \left(\tilde{u}_{k+1}(t) \ \tilde{u}_{k+2}(t) \ \dots \ \tilde{u}_l(t) \right) \in \mathbb{R}^{l-k}, \\ d_1 + d_2 + \dots + d_k + \sigma &= n, \end{aligned}$$

а матрицы системы следующие:

$$\begin{aligned} \tilde{A}^{ii} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ * & * & * & \dots & * \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ * & \dots & * \end{pmatrix} \quad \text{при } i < j, \\ \tilde{A}^{ij} &= \begin{pmatrix} * & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{при } i > j, \quad \tilde{A}^{0j} = \begin{pmatrix} * & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}^{i0} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ * & \dots & * \end{pmatrix}, \\ \tilde{C}^{0j} &= \begin{pmatrix} * & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{C}^{ij} = \begin{pmatrix} * & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \\ \tilde{B}^i &= (0, \dots, 0, 1)^T \in \mathbb{R}^{d_i}, \quad \tilde{C}^{ii} = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{1 \times d_i}, \\ i, j &= \overline{1, k}. \end{aligned}$$

При этом для системы $\{\tilde{A}^{00}, \tilde{B}^0, \tilde{C}^{00}\}$ справедлива следующая альтернатива: либо она имеет нулевой вектор вырожденного относительного порядка, либо является скалярной (то есть $\tilde{C}^{00} \in \mathbb{R}^{1 \times \sigma}$, и $\tilde{B}^0 \in \mathbb{R}^\sigma$).

Полученная форма позволяет найти уравнения нулевой динамики. Действительно, если выход системы тождественно равен нулю, то из уравнений (3.2) следует, что $z^i(t) \equiv O_{d_i \times 1}$, $i = \overline{1, k}$. Таким образом, для нахождения нулевой динамики исходной системы достаточно найти ее для системы $\{A^{00}, B^0, C^{00}\}$. Согласно указанной альтернативе, уравнения нулевой динамики этой системы легко находятся.

Основные результаты главы 3 опубликованы в статье [3].

В **четвертой главе** результаты главы 3 обобщаются на случай нелинейных систем. Именно, рассматривается нелинейная система аффинная по управлению:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= f(x(t)) + \sum_{i=1}^l g_i(x(t))u_i(t) \\ y_i(t) &= h_i(x(t)), \quad i = \overline{1, l},\end{aligned}\tag{4.1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^l$, $y(t) \in \mathbb{R}^l$, $h_i(x)$ — гладкие функции, а $f(x)$, $g_i(x)$ — гладкие векторные поля, $i = \overline{1, l}$, $t > t_0$, и управление $u(t)$ предполагается непрерывным. Мы также будем предполагать, что имеют место равенства $f(O_{n \times 1}) = O_{n \times 1}$, $h_i(O_{n \times 1}) = 0$, $i = \overline{1, l}$.

Распространим определения, связанные с нулевой динамикой, на систему (4.1). Как и ранее, обозначим через X_0 множество всех начальных условий $x_0 \in \mathbb{R}^n$, для которых существует такое непрерывное управление $u_{x_0}^0(t)$, определенное на интервале (t_0, t_*) , что решение $x(t)$ системы (4.1) продолжается на максимальный интервал существования $(t_0, t_{max}) \subset (t_0, t_*)$, а указанное управление обеспечивает системе тождественно нулевой выход (при этом управление $u_{x_0}^0(t)$ как и ранее будем называть аннулирующим управлением, соответствующим начальным условиям x_0). Иначе говоря,

$$X_0 = \{x_0 : \exists u_{x_0}^0(t) : y(t, x_0, u_{x_0}^0(\cdot)) = O_{l \times 1} \quad \forall t \in (t_0, t_{max})\}.$$

Определение 4.1. Нулевой динамикой системы (1.1) называется множество всех решений $x(t, x_0, u_{x_0}^0(\cdot))$ этой системы, где $x_0 \in X_0$, а $u_{x_0}^0(t)$ — соответствующее аннулирующее управление.

Определение 4.2. Будем говорить, что система (1.1) допускает *выделение нулевой динамики* в окрестности нуля U , если существуют такой определенный в этой окрестности диффеоморфизм $\Phi(x)$, а также такие гладкие векторные

поля $f^2(z^2), g_1^2(z^2), \dots, g_l^2(z^2) \in \mathbb{R}^p$, что уравнения

$$\begin{cases} z^1(t) \equiv O_{(n-p) \times 1} \\ \dot{z}^2(t) = f^2(z^2(t)) + \sum_{i=1}^l g_i^2(z^2(t)) \xi_i(t) \end{cases} \quad (4.2)$$

обладают следующими свойствами:

- i) при любых начальных условиях $z_0^2 \in \Phi(U) \cap \{z^1 = O_{(n-p) \times 1}\}$ и при любой непрерывной функции $\xi(t) \in \mathbb{R}^l$, определенной на интервале (t_0, t_*) , функция $\Phi^{-1}(z(t))$, где $z(t)$ — решение системы (4.2), принадлежит нулевой динамике системы (4.1);
- ii) для любого решения $x(t)$, принадлежащего нулевой динамике системы (4.1), существует такая непрерывная функция $\xi(t) \in \mathbb{R}^l$, определенная на интервале (t_0, t_*) , что $\Phi(x(t))$ удовлетворяет системе (4.2).

Если система допускает выделение нулевой динамики, то уравнения (4.2) называются *уравнениями нулевой динамики*. Заметим, что некоторые системы (4.1) не допускают выделение нулевой динамики.

Известно, что если система имеет векторный относительный порядок, то она допускает выделение нулевой динамики. Более того, в этом случае можно преобразовать систему к нормальной форме, в которой уравнения нулевой динамики являются одной из подсистем. Однако, условия относительного порядка выполняются не всегда.

Для системы (4.1), допускающей выделение нулевой динамики, предложен метод, позволяющий найти ее уравнения. Метод применим к некоторым системам, к которым известные алгоритмы (см. [32]) не применимы (в частности, к некоторым системам, не имеющим относительного порядка).

Основные результаты главы 4 опубликованы в работе [7].

В **заключении** подводятся итоги работы проведенной работы и приводятся основные результаты. Также обозначаются возможные направления дальнейших исследований.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю — профессору Василию Владимировичу Фомичеву — за помощь и всестороннюю поддержку на всех этапах работы.

Автор также выражает благодарность коллективу кафедры Нелинейных динамических систем и процессов управления факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова за поддержку и предоставленные ему благоприятные условия для работы.

Список публикаций в журналах Scopus, WoS, RSCI, а также в изданиях, рекомендованных для защиты в диссертационном совете МГУ по специальности

1. Краев А. В., Rogovskiy А. И., Фомичев В. В. К обобщению относительного порядка // Дифференциальные уравнения. — 2014. — Т. 50, № 8. — С. 1128—1132. — Импакт-фактор *WoS* 0.659.
2. Фомичев В. В., Краев А. В., Rogovskiy А. И. Обобщение понятия относительного порядка и его свойства // Дифференциальные уравнения. — 2016. — Т. 52, № 8. — С. 1099—1108. — Импакт-фактор *WoS* 0.659.
3. Фомичев В. В., Краев А. В., Rogovskiy А. И. О свойствах нулевой динамики линейных систем // Дифференциальные уравнения. — 2016. — Т. 52, № 11. — С. 1533—1544. — Импакт-фактор *WoS* 0.659.
4. Краев А. В., Rogovskiy А. И., Фомичев В. В. О приведении векторной системы к виду с относительным порядком // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. — 2015. — № 3. — С. 20—26. — Импакт-фактор РИНЦ 0.423.
5. Фомичев В. В., Краев А. В., Rogovskiy А. И. О приведении систем к виду с относительным порядком методом динамического преобразования выходов // Дифференциальные уравнения. — 2017. — Т. 53, № 5. — С. 693—705. — Импакт-фактор *WoS* 0.659.
6. Rogovskiy А. И. Приведение линейных систем к виду с относительным порядком минимально-фазовым преобразованием выходов // Дифференциальные уравнения. — 2017. — Т. 53, № 11. — С. 1507—1513. — Импакт-фактор *WoS* 0.659.

7. *Фомичев В. В., Краев А. В., Rogovskiy A. И.* Об уравнениях нулевой динамики некоторых аффинных нелинейных систем // Дифференциальные уравнения. — 2018. — Т. 54, № 12. — С. 1695—1709. — Импакт-фактор *WoS* 0.659.

Цитированная литература

8. *Zolghadri A.* Modern Control Theory and Real-World Aerospace Applications: I love You, Nor do I ? // IFAC-PapersOnLine. — 2017. — Vol. 50, no. 1. — P. 6446–6451. — 20th IFAC World Congress.
9. *Merrill W., Lehtinen B., Zeller J.* The role of modern control theory in the design of controls for aircraft turbine engines // Journal of Guidance, Control, and Dynamics. — 1984. — Nov. — Vol. 7, no. 6. — P. 652–661.
10. *Fossen T. I.* A survey on Nonlinear Ship Control: from Theory to Practice // IFAC Proceedings Volumes. — 2000. — Vol. 33, no. 21. — P. 1–16. — 5th IFAC Conference on Manoeuvring and Control of Marine Craft (MCMC 2000), Aalborg, Denmark, 23-25 August 2000.
11. *Fossen T. I.* Guidance and Control of Ocean Vehicles. — Willey, 08/1994. — 494 p.
12. *Skowronski J. M.* Control Theory of Robotic Systems. — World Scientific, 1989. — 364 p.
13. Springer Handbook of Robotics / ed. by B. Siciliano, O. Khatib. — Springer, 2016. — 2227 p.
14. Theory of Robot Control / ed. by C. C. de Wit, G. Bastin, B. Siciliano. — 1st. — Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 1996. — 392 p.
15. *Swan G. W.* General Applications of Optimal Control Theory in Cancer Chemotherapy // Mathematical Medicine and Biology: A Journal of the IMA. — 1988. — Vol. 5, no. 4. — P. 303–316.

16. Optimal control of medical treatment: Adaptive control of blood glucose level in diabetic coma / M. Inoue [et al.] // Computers and Biomedical Research. — 1976. — Vol. 9, no. 3. — P. 217–228.
17. *Kendrick D.* Chapter 4 Control theory with applications to economics //. Vol. 1. — Elsevier, 1981. — P. 111–158. — (Handbook of Mathematical Economics).
18. *Kalman R.* Mathematical Description of Linear Dynamical Systems // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics Series A Control. — 1963. — Vol. 1, no. 2. — P. 152–192.
19. *Gilbert E.* Controllability and Observability in Multivariable Control Systems // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics Series A Control. — 1963. — Vol. 1, no. 2. — P. 128–151.
20. *Крищенко А. П., Панфилов Д. Ю., Ткачев С. Б.* Построение минимально фазовых аффинных систем // Дифференциальные уравнения. — 2002. — Т. 38, № 11. — С. 1574–1580.
21. *Крищенко А. П., Панфилов Д. Ю., Ткачев С. Б.* Глобальная стабилизация аффинных систем с помощью виртуальных выходов // Дифференциальные уравнения. — 2003. — Т. 39, № 11. — С. 1503–1510.
22. *Byrnes C. I., Isidori A.* On the attitude stabilization of rigid spacecraft // Automatica. — 1991. — Vol. 27, no. 1. — P. 87–95.
23. *Ильин А. В., Коровин С. К., Фомичев В. В.* Методы робастного обращения динамических систем. — М. : Физматлит, 2009. — 219 с.
24. *Silverman L.* Inversion of multivariable linear systems // IEEE Trans Aut Contr. — 1969. — Vol. 14. — P. 270–276.
25. *Isidori A.* Nonlinear Control Systems. — London : Springer-Verlag, 1995. — 549 p.

26. Ассимптотические наблюдатели состояния неопределенных векторных линейных систем / С. Коровин [и др.] // Доклады Академии наук. — 2004. — Т. 396, № 4. — С. 469—473.
27. Ильин А. В., Коровин С. К., Фомичев В. В. Ассимптотические наблюдатели с разрывным управлением для скалярных линейных неопределенных систем // Дифференциальные уравнения. — 2005. — Т. 41, № 10. — С. 1310—1317.
28. *Isidori A.* The zero dynamics of a nonlinear system: From The Origin To the latest progresses of a long successful story // Proceedings of the 30th Chinese Control Conference. — 07/2011. — P. 18–25.
29. *Schwartz C., Gibbens P., Fu M.* Achieving vector relative degree for nonlinear systems with parametric uncertainties // International journal of robust and nonlinear control. — 1995. — Vol. 5. — P. 139–151.
30. *Sannuti P., Saberi A.* Special coordinate basis for multivariable linear systems—finite and infinite zero structure, squaring down and decoupling // International Journal of Control. — 1987. — Vol. 45, no. 5. — P. 1655–1704.
31. *Wang L., Isidori A., Su H.* Global Stabilization of a Class of Invertible MIMO Nonlinear Systems // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2015. — Vol. 60, no. 3. — P. 616–631.
32. *Liu Z., Lin Z.* On normal forms of nonlinear systems affine in control // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2011. — Vol. 56, no. 2. — P. 239–253.
33. Краев А. В. О приведении векторной линейной системы третьего порядка к форме с относительным порядком по Исидори // Дифференциальные уравнения. — 2014. — Т. 48, № 11. — С. 1558—1560.