УДК 512.5

О МНОГООБРАЗИЯХ С ТОЖДЕСТВАМИ ОДНОПОРОЖДЁННОЙ СВОБОДНОЙ МЕТАБЕЛЕВОЙ АЛГЕБРЫ

А. Б. Верёвкин, С. П. Мищенко (г. Ульяновск)

Аннотация

Совокупность линейных алгебр, в которых выполняется фиксированный набор тождеств, следуя А.И. Мальцеву, называется многообразием. При нулевой характеристике основного поля все сведения о многообразии содержатся в полилинейных частях относительно свободной алгебры многообразия, которые являются модулями над групповыми алгебрами симметрических групп соответствующей степени. Используя язык теории алгебр Ли будем говорить, что алгебра метабелева, если она удовлетворяет тождеству $(xy)(zt) \equiv 0$.

В данной работе мы изучим тождества неассоциативной однопорождённой свободной метабелевой алгебры и некоторых её факторов. В частности, мы построим бесконечное множество многообразий с различными дробными экспонентами между одним и двумя. Обратите внимание, что последовательность коразмерностей этих многообразий асимптотически формируется кодлинами, а не размерностями отдельных неприводимых модулей над групповыми алгебрами симметрических групп, как в известных ранее примерах.

Ключевые слова: тождество, многообразие, метабелевость, коразмерность.

ON VARIETIES WITH IDENTITIES OF ONE GENERATED FREE METABELIAN ALGEBRA

A. B. Verevkin, S. P. Mishchenko (Ulyanovsk)

A set of linear algebras where a fixed set of identities takes place, following A.I. Maltsev, is called a variety. In the case of zero characteristic of the main field all the information about the variety is contained in multilinear parts of relatively free algebra of the variety. We can study the identities of variety by means of investigations of multilinear part of degree n as module of the symmetric group S_n. Using the language of Lie algebras we say that an algebra is metabelian if it satisfies the identity $(xy)(zt) \equiv 0$.

In this paper we study the identities of non-associative one-generated free metabelian algebra and its factors. In particular, the infinite set of the varieties with different fractional exponents between one and two was constructed. Note that the sequence of codimensions of these varieties asymptotically formed by using colength, and not by using the dimension of some irreducible module of the symmetric group what was for all known before examples.

Key words: identity, variety, metabelian, codimension.

1 Введение

На протяжении всей работы характеристика основного поля K предполагается равной нулю. Мы рассматриваем неассоциативные группоиды, линейные алгебры и полилинейные тождества таких алгебр. Соответствующая неассоциативному случаю теория тождеств линейных алгебр была предложена А.И. Мальцевым (см. [1]). Все неопределяемые понятия можно найти в книге А. Джамбруно и М.В. Зайцева [2].

Отметим, что в неассоциативном случае всякий результат умножения необходимо оснащать соответствующими скобками, и это особенно важно, когда умножение применяется многократно. Тем самым, любое длинное произведение заключено во внешние скобки, что усложняет вид записи. Поэтому иногда, когда смысл выражения ясен из контекста записи, мы будем внешние скобки опускать. Неассоциативное произведение мы будем обозначать $(a \times b)$ или $a \times b$, ассоциативное – $a \cdot b$ или ab.

Используя язык теории алгебр Ли будем говорить, что алгебра метабелева, если она удовлетворяет тождеству

$$(x \times y) \times (z \times t) \equiv 0.$$

В основном, данная статья посвящена детальному изучению многообразия, определённого тождествами однопорожденной свободной метабелевой алгебры. Обозначим это многообразие $\mathbf{M}_1$. Отметим, что интерес к этому многообразию и его подмногообразиям был инициирован работой [3].

Пусть $\mathbf{V}$ – некоторое многообразие линейных алгебр, а $P_n(\mathbf{V})$ – пространство полилинейных элементов относительно свободной алгебры этого многообразия степени n от свободных образующих $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Обозначим $c_n(\mathbf{V}) = \dim P_n(\mathbf{V})$, где $n \geq 1$, – размерности таких пространств. Это – последовательность коразмерностей многообразия $\mathbf{V}$, задающая рост многообразия. Она является одной из основных его числовых характеристик.

В случае полиномиального роста многообразия ассоциативных алгебр $\mathbf{V}$, как доказано в статье [4], для последовательности коразмерностей есть следующая асимптотическая оценка

$$c_n(\mathbf{V}) = qn^t + O(n^{t-1}),$$

где t – натуральное число, а q – положительное вещественное число. Ситуация аналогична и в случае алгебр Ли или йордановых алгебр (см. [4]). В частности, во всех этих трёх случаях предел

$$t = \lim_{n \to \infty} \log_n c_n(\mathbf{V}) \tag{1}$$

существует и равен натуральному числу.

Нарушение этого свойства в общем случае было впервые замечено в работе [5], где построен пример с пределом (1) равным 3,5. Позже, в работе одного из соавторов [6] был построен пример, в котором $t = 2,5$. Следует отметить, что понизить предел (1) удалось на принципиально другой идее, связанной с рассмотрением подмногообразия многообразия $\mathbf{M}_1$, в котором подходящим образом ограничена кодлина.

В случае экспоненциального роста многообразия $\mathbf{V}$ может существовать предел последовательности $\sqrt[n]{c_n(\mathbf{V})}$, который называется экспонентой многообразия. В случае многообразия ассоциативных алгебр экспонента всегда существует и является неотрицательным числом [7]. В случае алгебр Ли были построены примеры дробной экспоненты (см. [8], [9]), и позже даже дискретная серия таких примеров (см. [10], [11]). В общем случае в работе [12] для любого действительного числа $\alpha > 1$ построено многообразие экспоненты α. И в этом случае на принципиально другой идее, связанной с рассмотрением подмногообразия многообразия $\mathbf{M}_1$, в котором подходящим образом ограничена кодлина, в статье [13] удалось построить многообразие с дробной экспонентой, равной золотому сечению. Одним из результатов настоящей работы является обобщение того примера.

Изложенное выше явилось мотивом пристального внимания авторов к многообразию $\mathbf{M}_1$.

2 Неассоциативные скобочные структуры

В этой главе мы укажем несколько градуировок свободного неассоциативного группоида (т.е., универсальной алгебры с одной бинарной операцией), необходимых в последующих главах.

Определение 2.1. Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ – непустое конечное множество. Оно порождает свободный группоид $W(X) = \bigcup_{m\geq 1} W_m(X)$, состоящий из дизъюнктного объединения компонент:

$$W_1(X) = X \quad \text{и} \quad W_k(X) = \bigcup_{s=1}^{k-1} (W_s(X) \times W_{k-s}(X)), \text{ при } \quad k \geq 2.$$

Укажем рекуррентный критерий равенства в $W(X)$.

Лемма 2.1. $w_1 = w_2 \in W(X)$ если и только если выполнены два условия:

1. w_1 и $w_2 \in W_k(X)$ для некоторого $k \geq 1$;
2. при $k = 1$ равенство $w_1 = w_2$ выполняется в X, а при $k \geq 2$ есть однозначное разложение $w_i = (u_i \times v_i)$, где $u_1 = u_2$ и $v_1 = v_2$ в $W_{<k}(X)$.

Доказательство: непосредственно вытекает из рекуррентного определения $W(X)$.

Определение 2.2. Нижний индекс $W_k(X)$ задаёт длину элементов группоида $W(X)$. Если $w \in W_k(X)$, положим $|w| = k$. Поскольку $|(u \times v)| = |u| + |v|$, эта длина определяет аддитивную натуральную градуировку $W(X)$:

$$W_s(X) \times W_t(X) = (W_s(X) \times W_t(X)) \subset W_{s+t}(X).$$

Определение 2.3. Среди рассмотренных свободных группоидов есть простейший, называемый *группоидом скобочных шаблонов* $B := W(\{x\})$. Любой $W(X)$ гомоморфно отображается на B стиранием индексов x_i:

$$\beta\colon W(X) \twoheadrightarrow B, \quad \text{где} \quad \beta(x_i) = x,\ \beta((u{\times}v)) = (\beta(u){\times}\beta(v)).$$

Если $w \in W(X)$, то $\beta(w) \in B$ назовём *скобочной структурой* неассоциативного монома w. Для $b \in B$ обозначим множество

$$W^{(b)}(X) := \{w \in W(X) \mid \beta(w) = b\} = \beta^{-1}(b).$$

Тогда разбиение $W(X) = \bigcup_{b\in B} W^{(b)}(X)$ является неассоциативной мультипликативной градуировкой $W(X)$:

$$W^{(b)}(X){\times}W^{(b')}(X) = (W^{(b)}(X){\times}W^{(b')}(X)) = W^{((b\times b'))}(X) = W^{(b\times b')}(X).$$

Скобочная структура помнит длину: $|\beta(w)| = |w|$, поэтому

$$W_s(X) = \bigcup\nolimits_{|b|=s} W_s^{(b)}(X).$$

Здесь $W_s^{(b)}(X) = W^{(b)}(X)$, при $|b| = s$, но $W_s^{(b)}(X) = \emptyset$, иначе.

Легко найти количество неассоциативных мономов структуры $b \in B$:

$$\sharp(B^{(b)}) = \sharp(W^{(b)}(\{x\})) = 1, \quad \sharp(W^{(b)}(X)) = \sharp(X)^{|b|}.$$

Замечание 2.1. В ассоциативном случае на этом пути мы получим свободный моноид ассоциативных слов относительно операции приписывания $X_+^* = \bigcup_{s\geq 1} X^s$. Элементы X^s имеют вид $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s})$, который может быть упрощён до $x_{i_1} \cdots x_{i_s}$, и есть каноническая биекция $X^s{\times}X^t \simeq X^{s+t}$. В простейшем случае $\{x\}^s = \{x^s\}$, и поэтому $(\{x\}^*,\ \times) \cong (\mathbf{N},\ +)$, а скобочная структура ассоциативного монома совпадает с его длиной. Это рассуждение распространяется на моноид $X^* = \bigcup_{s\geq 0} X^s$, получающийся из X_+^* добавлением $X^0 = \{\emptyset\}$, содержащего пустое слово длины ноль, играющего роль единицы моноида X^*. В этих случаях скобочная структура поглощается длиной и не видна. В неассоциативном случае поведение скобочной структуры более сложное.

Следующие примеры показывают, что одинаковые скобочные структуры могут разделяться при подстановках, и наоборот – разные скобочные структуры могут сливаться. Это необходимо учитывать при описании скобочной структуры возможных неассоциативных тождеств.

Примеры 2.1.

- у мономов $x_1 \times x_2$ и $x_2 \times x_1$ одна скобочная структура $(x \times x)$, но при подстановке $x_1 := x$, $x_2 := x \times x$ получается разный результат: $(x \times (x \times x)) \neq ((x \times x) \times x)$.
- мономы $x_1{\times}(x_2{\times}x_3)$ и $(x_2{\times}x_3){\times}x_1$ имеют разную скобочную структуру $(x{\times}(x{\times}x)) \neq ((x{\times}x){\times}x)$, но при подстановке $x_1 := x{\times}x$, $x_2 := x$, $x_3 := x$ получается одинаковый итог $((x{\times}x){\times}(x{\times}x))$.

Замечание 2.2. Скобочные структуры в свободном неассоциативном группоиде связаны с числами Каталана $C_s : 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, \dots :$

$$\sharp(B_s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2s-1} \cdot \binom{2s}{s} = C_s\,, \quad \sharp(W_s(X)) = C_s \cdot \sharp(X)^s.$$

Эти формулы допускают расщепление, которое мы назовём *гнездовым*.

Определение 2.4. Обозначим множество

$${}_1I(X) = {}_1I := W_{\geq 2}(X) = \bigcup\nolimits_{s\geq 2} W_s(X)\,.$$

Тогда ${}_1I(X)$ – это *идеал* группоида $W(X)$, в том смысле, что оно выдерживает умножение на элементы $W(X)$: ${}_1I \times W(X)$, $W(X) \times {}_1I \subset {}_1I$.

Само $W(X) = W_{\geq 1}(X)$ является в этом смысле своим идеалом – мы обозначим его ${}_0I(X) = {}_0I$.

Для непустого $M \subset W(X)$ обозначим $\langle M \rangle$ – идеальное замыкание M в $W(X)$, то есть, – наименьший по включению идеал $W(X)$, содержащий M.

Теперь мы можем определить следующие идеалы (при этом последующие объединения не являются дизъюнктными):

$${}_2I(X) = {}_2I := \langle {}_1I \times {}_1I \rangle\,,$$

$${}_sI(X) = {}_sI := \langle \bigcup_{t=1}^{s-1} {}_tI \times {}_{s-t}I \rangle = \bigcup_{t=1}^{s-1} \langle {}_tI \times {}_{s-t}I \rangle\,, \text{ при } s > 2.$$

Мономы из ${}_sI$ являются неассоциативными произведениями некоторого набора элементов $W(X)$, не менее s из которых лежат в $W_{\geq 2}(X)$. Комбинаторное строение ${}_sI$ мы выясним позднее.

Построенные идеалы определяют убывающую фильтрацию на $W(X)$:

$$W(X) = {}_0I \supset {}_1I \supset \cdots \supset {}_sI \supset {}_{s+1}I \supset \dots\ , \quad \bigcap_{s\geq 0} {}_sI = \emptyset.$$

Определим последовательные дополнения предыдущего ряда:

$${}_sG(X) = {}_sG := {}_sI \setminus {}_{s+1}I\,,\ s \geq 0.$$

Ясно, что

$${}_sI = \bigcup_{t\geq s} {}_tG\,, \quad \text{в частности,} \quad W(X) = \bigcup_{t\geq 0} {}_tG\,,$$

и эти объединения дизъюнктные.

Замечание 2.3. Множество ${}_sG$ состоит из неассоциативных мономов, ровно s сомножителей которых лежат в $W_{\geq 2}(X)$, а остальные – в X. Это определяет скобочный шаблон мономов: если $w \in {}_sG(X)$, то $\beta(w) \in {}_sG(\{x\})$. Например, мономы шаблона $(((x\times(x\times x))\times x)\times((x\times x)\times x))\times x$ принадлежат ${}_2G$ – элементы отсюда содержат ровно два вхождения вида $(x_i \times x_j)$.

Определение 2.5. Пусть $w \in W(X)$, подмономы w вида $(x_i \times x_j)$ мы назовём *гнёздами* в w. Их количество определяет принадлежность монома множествам ${}_sG$ и ${}_sI$. Если $w \in {}_sG$, то w содержит s гнёзд, и наоборот. Кроме того, $|w| \geq 2s$, и в итоге:

$$ {}_sG = \bigcup_{m \geq 2s} \bigcup_{b \in B} {}_sG_m^{(b)}\,, \quad \text{где} \quad {}_sG_m^{(b)} = {}_sG \bigcap W_m^{(b)}(X). $$

Безгнездовые мономы имеют вид x_i, – они принадлежат $X = {}_0G = {}_0G_1^{(x)}$.

Замечание 2.4. Разбиение $\{{}_sG \mid s \geq 0\}$ задаёт на $W(X)$ *почтиградуировку*, в смысле:

$$ {}_sG \times {}_tG \subset {}_{s+t}G \quad \text{при} \quad (s,t) \neq (0,0), \quad \text{но} \quad {}_0G \times {}_0G \subset {}_1G. $$

Благодаря этому можно найти производящую функцию группоида $W(X)$, учитывающую гнездовую структуру мономов и их длину (тут $\sharp(X) = n$):

$$ F(y,z) = \sharp(G(X))(y,z) := \sum_{m \geq 1} \sum_{s \geq 0} \sharp({}_sG_m) y^m z^s = $$

$$ = ny + n^2y^2z + 2n^3y^3z + \cdots . $$

Лемма 2.2. $F(y,z)$ – алгебраична:

$$ F(y,z) = \frac{1}{2}\left(1 - (1-2ny)\cdot\left(1 - \frac{4n^2y^2}{(1-2ny)^2}\cdot z\right)^{\frac{1}{2}}\right). $$

Доказательство. Функциональная связь для $F = F(y,z)$, с учётом вышеуказанного сбоя градуировки ${}_sG$, следует из равенств:

$$ X \cup (W(X) \times W(X)) = W(X)\,, $$

$$ ny + F(y,z)^2 = F(y,z) - n^2y^2z + n^2y^2\,. $$

Откуда получается квадратичное уравнение:

$$ F^2 - F + (n^2y^2z - n^2y^2 + ny) = 0\,. $$

Преобразуем дискриминант этого выражения:

$$ D = 1 - 4n^2y^2z + 4n^2y^2 - 4ny = (1-2ny)^2 - 4n^2y^2z\,. $$

Поэтому для F есть две возможности:

$$ F_\pm = \frac{1}{2}\left(1 \pm (1-2ny)\cdot\left(1 - \frac{4n^2y^2}{(1-2ny)^2}\cdot z\right)^{\frac{1}{2}}\right). $$

Из $F(0,z) = 0$, получаем $F = F_-$, что и доказывает Лемму 2.2.

Замечание 2.5. При $n = 1$, полагая $z = 1$ получим $D = 1 - 4y$ и

$$F(y,1) = \sum\nolimits_{m\geq 1} \sharp(B_m) y^m = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1-4y}\right) = \sum\nolimits_{m\geq 1} C_m y^m \,,$$

где C_m – числа Каталана, считающие скобочные шаблоны длины m:

$$C_m = -\frac{1}{2}\binom{1/2}{m}(-4)^m = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{m!}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}-1)\cdot\ldots\cdot(\frac{1}{2}-(m-1))\right)\cdot(-4)^m =$$

$$= \frac{1}{2^{m+1}}\cdot\frac{1}{m!}\cdot((2(m-1)-1)\cdot(2(m-2)-1)\cdot\ldots\cdot(2-1))\cdot 4^m =$$

$$= \frac{1}{2^{m+1}}\cdot\frac{1}{m!}\cdot((2m-3)\cdot(2m-5)\cdot\ldots\cdot 1)\cdot 4^m =$$

$$= \frac{1}{2^{m+1}}\cdot\frac{1}{m!}\cdot\frac{(2m-2)!}{(2m-2)\cdot(2m-4)\cdot\ldots\cdot 2}\cdot 4^m =$$

$$= \frac{1}{2^{m+1}}\cdot\frac{1}{m!}\cdot\frac{(2m-2)!\cdot 4^m}{2^{m-1}\cdot(m-1)!} = \frac{(2m-2)!}{m!\cdot(m-1)!} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2m-1}\cdot\binom{2m}{m}\,.$$

Тем же способом мы можем найти мощность компонент ${}_sG_m(X)$.

Теорема 2.1. При $m \geq 2$, $s \geq 1$:

$$\sharp({}_sG_m) = C_s\cdot\binom{m-2}{2s-2}\cdot 2^{\,m-2s}\cdot\sharp(X)^m,\ \text{при } m \geq 2s\,;\ \text{иначе } \sharp({}_sG_m) = 0\,.$$

Доказательство. Вычислим часть алгебраического выражения $F(y,z)$:

$$\left(1 - \frac{4n^2y^2}{(1{-}2ny)^2}\cdot z\right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{s\geq 0}\binom{1/2}{s}\cdot\frac{(-4)^s(n^2y^2z)^s}{(1{-}2ny)^{2s}} = 1 - 2\cdot\sum_{s\geq 1} C_s\cdot\frac{(n^2y^2z)^s}{(1{-}2ny)^{2s}}\,,$$

здесь $n = \sharp(X)$. Далее, получаем:

$$F(y,z) = \frac{1}{2}\cdot\left(1 - (1-2ny)\cdot\left(1 - 2\cdot\sum_{s\geq 1} C_s\cdot\frac{(n^2y^2z)^s}{(1-2ny)^{2s}}\right)\right) =$$

$$= ny + \sum_{s\geq 1}\frac{C_s\cdot(n^2y^2z)^s}{(1-2ny)^{2s-1}} = ny + \sum_{s\geq 1} C_s\cdot(n^2y^2z)^s\cdot\sum_{u\geq 0}\binom{-2s{+}1}{u}\cdot(-2ny)^u =$$

$$= ny + \sum_{s\geq 1} C_s\cdot(n^2y^2z)^s\cdot\sum_{u\geq 0}\binom{2s+u-2}{u}\cdot(2ny)^u =$$

$$= ny + \sum_{s\geq 1}\sum_{u\geq 0} C_s\cdot\binom{2s+u-2}{2s-2}\cdot 2^{\,u}(ny)^{2s+u}z^s = \left[\begin{array}{c} 2s+u=m \\ m\geq 2s \end{array}\right] =$$

$$= ny + \sum_{s\geq 1}\sum_{m\geq 2s} C_s\cdot\binom{m-2}{2s-2}\cdot 2^{\,m-2s}\cdot n^m y^m z^s = \sum_{m\geq 1}\sum_{s\geq 0}\sharp({}_sG_m)\cdot y^m z^s\,,$$

следовательно, получаем искомые равенства:

$$\sharp({}_0G_1) = n\,;\quad \sharp({}_sG_m) = C_s \cdot \binom{m-2}{2s-2} \cdot 2^{\,m-2s} \cdot n^m\,,\ \text{при } s \geq 1\,,\, m \geq 2s.$$

Остальные $\sharp({}_sG_m)$ – нулевые.

Лемма 2.3. Пусть $s \geq 1$, $m \geq 2$. Аналогично получаем формулы:

$$\sharp(G_m(X))(z) := \sum_{s\geq 1} \sharp({}_sG_m(X))z^s = n^m\cdot \sum_{s=1}^{\lfloor m/2\rfloor} C_s\cdot\binom{m-2}{2s-2}\cdot 2^{m-2s}z^s =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot(2n)^m\cdot\sum_{s=1}^{\lfloor m/2\rfloor}\binom{1/2}{s}\cdot\binom{m-2}{2s-2}\cdot(-z)^s = n^m\cdot\sum_{u=0}^{\lfloor m/2\rfloor} C_{m-u}\cdot\binom{m-u}{u}\cdot(z-1)^u\,;$$

$$C_m = \sharp(B_m) = \sum_{s=1}^{\lfloor m/2\rfloor}\sharp({}_sG_m(\{x\})) = \sum_{s=1}^{\lfloor m/2\rfloor} C_s\cdot\binom{m-2}{2s-2}\cdot 2^{m-2s}\,;$$

$$\sharp({}_sG(X))(y) := \sum_{m\geq 1}\sharp({}_sG_m(X))y^m = -\frac{(1-2ny)}{2}\cdot\binom{1/2}{s}\cdot\frac{(-4)^s(n^2y^2)^s}{(1-2ny)^{2s}} =$$

$$= \frac{C_s\cdot n^{2s}\cdot y^{2s}}{(1-2ny)^{2s-1}}\ ;$$

$$\sharp({}_sG_{2s}(\{x\})) = C_s\,,\quad \sharp({}_1G_m(\{x\})) = 2^{m-2}\,.$$

Другая форма записи при $s \geq 1$, $m \geq 2s$:

$$\sharp({}_sG_m) = \frac{1}{2\cdot(2s-1)}\cdot\binom{2s}{s}\cdot\binom{m-2}{2s-2}\cdot 2^{\,m-2s}\cdot n^m =$$

$$= \frac{s}{(m-1)\cdot m}\binom{m}{s,\ s,\ m-2s}\cdot 2^{\,m-2s}\cdot n^m\,.$$

Примеры 2.2. Впредь для удобства обозначим $x^2 := (x\times x)$:

- $B_4 = \{x^2\times x^2,\ x\times(x\times x^2),\ x\times(x^2\times x),\ (x\times x^2)\times x,\ (x^2\times x)\times x\}$, $\sharp(B_4)(z) = z^2+4z\,,\ \sharp(B_4) = C_4 = 5\,;$
- ${}_1G_m(\{x\}) = \{x\times(\cdots\times(x\times x^2)\ldots),\ x\times(\cdots\times(x^2\times x)\ldots),\ \ldots,$ $(\ldots(x^2\times x)\times\cdots)\times x\}$.

Для последующих рассчётов важно описание *одногнездовых* шаблонов и неассоциативных мономов, затронутых в предыдущем примере.

Определение 2.6. Пусть $b \in B$, обозначим $L(b) := (x{\times}b)$, $R(b) := (b{\times}x)$. Операции L и R – преобразования множества шаблонов B, и поэтому их композиция ассоциативна. Определим отображение:

$$\mu\colon \{L,R\}^* \to B, \quad \mu(\emptyset) = x^2, \quad \mu(w(L,R)) = w(L,R)(x^2).$$

Тогда μ продолжает отображение $\mu(L) = L(x^2)$, $\mu(R) = R(x^2)$. Ясно, что $|\mu(w)| = |w| + 2$, и можно считать, что $\deg \mu = 2$.

Лемма 2.4. μ осуществляет биекцию $\{L,R\}^*$ на ${}_1G(\{x\})$.

Доказательство: Поскольку μ однороден степени 2 относительно длины мономов, достаточно убедиться в биективности отображения

$$\mu\colon \{L,R\}^s \to {}_1G_{s+2}(\{x\}).$$

Рассуждение проведём индукцией по s. Случаи $s = 0, 1$ – очевидны.

Докажем инъективность μ. Замечаем, если $\mu(w_1(L,R)) = \mu(w_2(L,R))$, то $|w_1| = |w_2|$. Пусть для неких $w_1 \neq w_2 \in \{L,R\}^s$, но $\mu(w_1) = \mu(w_2)$. При этом s можно считать наименьшим из таковых – ясно, что $s \geq 2$.

Напомним критерий равенства ассоциативных мономов положительной длины. В моноиде $X^* = \{x_1, \dots\}^*$ выполнено $w_1 = w_2$, если и только если $|w_1| = |w_2|$ и $w_i = x_{j_i} \cdot v_i$, где $j_1 = j_2$, $v_1 = v_2$.

Итак, в нашей ситуации $w_i = U_i{\cdot}v_i(L,R)$, где $U_i \in \{L,R\}$. По предположению, пары (U_1, v_1) и (U_2, v_2) – различны, но неассоциативный моном $\mu(w_1) = (U_1{\cdot}v_1(L,R))(x^2) = U_1(v_1(L,R)(x^2))$ равен $\mu(w_2) = U_2(v_2(L,R)(x^2))$ в B. По критерию равенства в группоиде B, имеем: $U_1 = U_2$ и

$$v_1(L,R)(x^2) = \mu(v_1) = \mu(v_2) = v_2(L,R)(x^2) \in B.$$

При этом ассоциативные мономы $v_1(L,R)$ и $v_2(L,R)$ оказываются разными, но имеют длину $s - 1 < s$. Полученное противоречие доказывает инъективность отображения μ.

Докажем сюръективность μ. Пусть $m \in {}_1G(\{x\})$. Вспомним, что

$${}_1G(\{x\}) = {}_1I(\{x\}) \setminus {}_2I(\{x\}) = {}_1I(\{x\}) \setminus \langle {}_1I(\{x\}) \times {}_1I(\{x\}) \rangle =$$

$$= B_{\geq 2} \setminus \langle B_{\geq 2} \times B_{\geq 2} \rangle.$$

Таким образом, $m \in B_{\geq 2}$ и $m = u \times v$. Оба сомножителя u и v не могут принадлежать $B_{\geq 2}$, поскольку тогда $m \in \langle B_{\geq 2} {\times} B_{\geq 2} \rangle = {}_2I(\{x\}) \nsubseteq {}_1G(\{x\})$. Поэтому один из них лежит в $B_1 = \{x\}$. Для определённости ограничимся случаем $u = x$. Если $|v| = 1$, тогда $v = x$ и $m = x^2 = \mu(\emptyset)$ – утверждение доказано. Если $|v| \geq 2$, тогда $v \in B_{\geq 2}$, но

$$v \notin \langle B_{\geq 2} \times B_{\geq 2} \rangle = \langle {}_1I(\{x\}) \times {}_1I(\{x\}) \rangle = {}_2I(\{x\}),$$

поскольку иначе было бы: $m = x \times v \in {}_2I(\{x\}) \not\subseteq {}_1G(\{x\})$. Поэтому

$$v \in {}_1I(\{x\}) \setminus {}_2I(\{x\}) = {}_1G(\{x\})\,,\ |v| = |m| - 1\,.$$

По предположению индукции, для некоторого $w(L,R) \in \{L,R\}^*$ есть равенство $v = \mu(w)$. И тогда $m = x \times v = L(v) = L(\mu(w)) = \mu(L \cdot w)$. Тем самым, индукция завершена и Лемма 2.4 доказана. Она содержательно наполняет предыдущие комбинаторные формулы:

$$\sharp({}_1G_m(\{x\})) = 2^{m-2}\ ,\quad \sharp({}_1G(X))(y) = \sharp(X)^2 \cdot y^2 \big/ (1 - 2 \cdot \sharp(X) \cdot y)\,.$$

3 Коразмерности свободной метабелевой алгебры

Рассмотрим неассоциативную группоидную алгебру $KW(X)$, – по определению, её базис над полем K образуют неассоциативные мономы из $W(X)$, а умножение дистрибутивно продолжает операцию группоида $(W(X), \times)$. Она может быть градуирована длиной мономов:

$$KW(X) \cong \bigoplus_{m \geq 1} KW_m(X)\,,\ \text{где}\quad KW_m(X) = \left\{ \sum_{w\colon\, |w|=m} \lambda_w w\,,\ \lambda_w \in K \right\}.$$

Лемма 3.1. Алгебра $KW(X)$ свободно порождена множеством X в категории неассоциативных (градуированных) K-алгебр. То есть, любое (однородное) отображение X в K-алгебру A однозначно продолжается до гомоморфизма $KW(X)$ в A.

Доказательство. Пусть $\phi\colon X \to A$ – отображение в не обязательно ассоциативную K-алгебру. Можно считать A целочисленно градуированной и предполагать, что ϕ – постоянной степени $deg\,(\phi) = deg\,(\phi(x)) - 1\,,\ x \in X$.

Индукцией по длине мономов продолжим ϕ до мультипликативного отображения $\phi^*\colon W(X) \to A\colon\ \phi^*(u \times v) = \phi^*(u) \times \phi^*(v)$. Далее, по линейности продолжим ϕ^* до отображения $\Phi\colon KW(X) \to A$, полагая:

$$\Phi\left(\sum\nolimits_{w \in W(X)} \lambda_w w\right) := \sum\nolimits_{w \in W(X)} \lambda_w \phi^*(w)\,,$$

здесь в суммах лишь конечное число слагаемых – почти все $\lambda_w = 0$.

Докажем, что Φ – мультипликативна, и, следовательно, является гомоморфизмом K-алгебр. Действительно,

$$\Phi\left(\left(\sum_{u \in W(X)} \lambda_u u\right) \times \left(\sum_{v \in W(X)} \mu_v v\right)\right) = \Phi\left(\sum_{u,v \in W(X)} \lambda_u \mu_v\, u \times v\right) =$$

$$= \sum\nolimits_{u,v \in W(X)} \lambda_u \mu_v\, \phi^*(u \times v) = \sum\nolimits_{u,v \in W(X)} \lambda_u \mu_v\, \phi^*(u) \times \phi^*(v) =$$

$$= \left(\sum\nolimits_{u\in W(X)} \lambda_u \phi^*(u)\right) \times \left(\sum\nolimits_{v\in W(X)} \mu_v \phi^*(v)\right) =$$

$$= \Phi\left(\sum\nolimits_{u\in W(X)} \lambda_u u\right) \times \Phi\left(\sum\nolimits_{v\in W(X)} \mu_v v\right).$$

Ясно, что построенный гомоморфизм определяется однозначно. В градуированном случае Φ является однородным, в том смысле, что

$$\Phi(KW_m(X)) \subset A_{\alpha(m)}\,,\ \text{где}\quad \alpha(m) = m\cdot deg\,(\phi(x)) = m\cdot(deg\,(\phi)+1)\,.$$

Что полностью доказывает Лемму 3.1.

Для описания полилинейных тождеств неассоциативных алгебр мы зафиксируем предварительные определения и обозначения.

Определения 3.1. Пусть $x \in X$, $w \in W(X)$. *Кратность вхождения* x в моном w, – $deg_x(w)$, – мы определим рекуррентным правилом:

- $deg_x(y) = [x{=}y]$, при $y \in X$;
- $deg_x(w) = deg_x(u) + deg_x(v)$, при $w = u \times v$.

Здесь мы использовали *обозначение Айверсона* (Iverson bracket). Для математического высказывания S:

$$[S] = \begin{cases} 0\,, & \text{если } S \text{ ложно;}\\ 1\,, & \text{если } S \text{ истинно.}\end{cases}$$

Очевидно, $0 \le deg_x(w) \le |w|$. *Полистепенью* монома $w \in W(X)$ называется последовательность кратностей вхождения переменных в него:

$$Deg\,(w) = (deg_x(w)\,,\ x \in X)\colon X \to N_0 = \{0,1,2,\dots\}\,.$$

Полиоднородными неассоциативными полиномами от X называются K-линейные комбинации неассоциативных полиномов одинаковой полистепени.

Пусть $D\colon X \to N_0$, обозначим D-*полиоднородную компоненту* $KW(X)$:

$$KW_D(X) = {}_K\langle\, w \mid Deg\,(w){=}D\,\rangle = \left\{\sum\nolimits_{w\colon Deg\,(w)=D} \lambda_w w\,,\ \lambda_w \in K\right\}.$$

Вес полистепени неассоциативного монома равен его длине:

$$|Deg\,(w)| = \sum\nolimits_{x\in X} deg_x(w) = |w|\,,$$

поэтому полиоднородная градуировка $KW(X)$ утончает градуировку по длине:

$$KW_m(X) \cong \bigoplus\nolimits_{D\colon |D|=m} KW_D(X)\,,\ \text{здесь } |D| = \sum\nolimits_{x\in X} D(x)\,.$$

Среди возможных полистепеней важна единичная: $D \equiv \mathbf{1}\colon X \to N_0$. Соответствующая компонента разложения $KW(X)$ называется *полилинейной*:

$$KW_{\mathbf{1}}(X) =: P(X) =: P_n(KW)\,,\ \text{если}\quad \sharp(X) = n\,.$$

В записи полилинейных неассоциативных мономов все $x \in X$ присутствуют с единичной кратностью и, если не обращать внимание на скобки, в таких мономах записаны перестановки множества X. Скобочная структура придаёт им дополнительную “индивидуальность”, поэтому:

$$\dim_K P_n(KW) = C_n \cdot n!$$

Определим *неассоциативные полиномиальные тождества* K-алгебры A. Обозначим идеал $Id^{\,(n)}(A) \trianglelefteq KW(X)$ (здесь, как обычно, $n = \sharp(X)$):

$$Id^{\,(n)}(A) = \bigcap \ker \{\varphi\colon KW(X) \to A\}\,.$$

По Лемме 3.1, неассоциативная K-алгебра $KW(X)$ свободно порождена множеством $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Поэтому гомоморфизм $\varphi\colon KW(X) \to A$ однозначно задаётся значениями $\varphi(x_i) = a_i \in A$, которые могут быть выбраны произвольно. Следовательно, $Id^{\,(n)}(A)$ состоит из неассоциативных полиномов $Q(x_1, \ldots, x_n) \in KW(X)$, обнуляющихся в A при всякой подстановке $x_i = a_i$:

$$\varphi(Q(x_1, \ldots, x_n)) = Q(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)) = Q(a_1, \ldots, a_n) = 0\,.$$

Такие полиномы называются *тождествами* алгебры A. Они образуют *характеристический* идеал $KW(X)$, сохраняемый эндоморфизмами алгебры $KW(X)$, и выдерживающий подстановки $x_i = R_i(x_1, \ldots, x_n) \in KW(X)$. В частности, идеал $Id^{\,(n)}(A)$ инвариантен относительно перестановок множества X: $x_i \to x_{\sigma(i)}$, где $\sigma \in S_n$. Такие перестановки сохраняют длину и скобочную структуру неассоциативных мономов, поскольку $\beta \circ \sigma = \beta$. Они также сохраняют свойство полилинейности, что отчасти мотивирует рассмотрение двух пространств представлений группы S_n:

$$P_n(KW) \bigcap Id^{\,(n)}(A)\,, \quad P_n(A) = P_n(KW) \Big/ P_n(KW) \bigcap Id^{\,(n)}(A)\,.$$

Это – *полилинейные тождества* и *полилинейная компонента* степени n алгебры A. При нулевой характеристике основного поля полилинейные тождества A разных степеней отождествлением переменных порождают все её полиномиальные тождества. Важной характеристикой алгебры A является целочисленная последовательность *коразмерностей тождеств* A:

$$c_n(A) = \dim P_n(A)\,.$$

Из очевидных соображений следует:

$$Id^{\,(n)}(KW(\{x_1, \ldots, x_n\})) = 0\,,\ c_n(KW(\{x_1, \ldots, x_n\})) = C_n \cdot n!\,.$$

Но справедливо более сильное утверждение. В ([14], §2) А.Г. Курош доказал, что любая подалгебра неассоциативной свободной алгебры – свободна, а также то, что алгебра B содержит счётнопорождённую неассоциативную свободную алгебру. В алгебре B можно найти счётный набор элементов, –

Курош указал, что они могут иметь мономиальный вид $x^2{\times}x$, $(x^2{\times}x){\times}x$, $((x^2{\times}x){\times}x){\times}x$, $\ldots$, – не имеющий неассоциативных алгебраических соотношений. Из этого непосредственно вытекает следующее утверждение.

Лемма 3.2. Для всех натуральных n и m:

- $Id^{\,(n)}(KB) = 0\,,$
- $Id^{\,(m)}(KW(\{x_1,\ldots,x_n\})) = 0\,,$
- $c_m(KW(\{x_1,\ldots,x_n\})) = C_m\cdot m!\,.$

Результат А.Г. Куроша в определённых ситуациях позволяет исчислять порождающие множества (свободных) подалгебр $KW(X)$ и B. Для этого достаточно знать производящие функции этих подалгебр. Но прежде нужно модифицировать доказательство Леммы 2.2, приспособив его к неравностепенно порождённому случаю.

Пусть неассоциативная свободная алгебра $KW(X)$ прождена непустым градуированным множеством $X{=}\bigcup_{m\geq 1}X_m$. По мультипликативности и линейности свободная алгебра наследует эту градуировку:

$$KW(X)\cong\bigoplus\nolimits_{m\geq 1}KW_m(X)\,.$$

Рассмотрим известное соотношение базисных элементов $KW(X)$:

$$X\bigcup(W(X)\times W(X)) = W(X)\,.$$

Без учёта гнездовой структуры получим алгебраическую связь гильбертовых производящих функций

$$X(y)=\sum\nolimits_{m\geq 1}\sharp(X_m)y^m \quad \text{и} \quad KW(X)(y)=\sum\nolimits_{m\geq 1}\dim_K KW_m(X)y^m\,,$$

$$X(y)+(KW(X)(y))^2 = KW(X)(y)\,,\ X(y)=KW(X)(y)-KW(X)^2(y)\,.$$

Применим эти соображения к некоторым подалгебрам KB, для которой имеем:

$$KB(y)=B(y)=\sum\nolimits_{m\geq 1}C_m y^m \quad \text{и} \quad B(y)-B^2(y)=y\,.$$

Примеры 3.1.

а) Сочтём порождающее множество идеала $K\,{}_1I(\{x\})\triangleleft KB$, как свободной алгебры. Заметим, что

$$K\,{}_1I(\{x\})(y)={}_1I(\{x\})(y)=B(y)-{}_0G(\{x\})(y)=B(y)-y\,.$$

Следовательно, можно выразить производящую функцию порождающего множества ${}_1X$ этого идеала:

$${}_1X(y)={}_1I(\{x\})(y)-{}_1I(\{x\})^2(y)=(B(y)-y)-(B(y)-y)^2=$$

$$= B(y) - y - B^2(y) + 2yB(y) - y^2 = 2yB(y) - y^2 = y^2 + 2y^3 + 4y^4 + 10y^5 + \dots$$

То есть, для $m \geq 2$:

$$\sharp({}_1X_m) = 2C_{m-1} - [m = 2]\,.$$

Можно показать, что

$${}_1X = \{x^2\,;\, w \times x\,,\, x \times w\,,\ \text{где } |w| \geq 2\,\}\,.$$

б) Теперь сочтём порождающее множество идеала $K{}_2I(\{x\}) \triangleleft KB$, как свободной алгебры. Заметим, что в этом случае:

$$K{}_2I(\{x\})(y) = {}_2I(\{x\})(y) = B(y) - {}_0G(\{x\})(y) - {}_1G(\{x\})(y) =$$

$$= B(y) - y - \frac{y^2}{1-2y}\,.$$

Для производящей функции порождающего множества ${}_2X$ этого идеала получаем следующее выражение:

$${}_2X(y) = {}_2I(y) - {}_2I^2(y) = {}_2I(y)\cdot 2y + {}_2I(y)\cdot(1-2y) - {}_2I^2(y) =$$

$$= {}_2I(y)\cdot 2y + \left(B(y) - y - \frac{y^2}{1-2y}\right)\cdot(1-2y) - {}_2I^2(y) =$$

$$= {}_2I(y)\cdot 2y + \left(B(y) - \frac{y-y^2}{1-2y}\right)\cdot(1-2y) - {}_2I^2(y) =$$

$$= {}_2I(y)\cdot 2y + B(y) - B(y)\cdot 2y - y + y^2 - {}_2I^2(y) =$$

$$= {}_2I(y)\cdot 2y + B^2(y) - B(y)\cdot 2y + y^2 - {}_2I^2(y) =$$

$$= {}_2I(y)\cdot 2y + (B(y) - y)^2 - {}_2I^2(y) = {}_2I(y)\cdot 2y + {}_1I^2(y) - {}_2I^2(y) =$$

$$= {}_2I(y)\cdot 2y + \left({}_2I(y) + \frac{y^2}{1-2y}\right)^2 - {}_2I^2(y) =$$

$$= 2\cdot{}_2I(y)\cdot y + 2\cdot{}_2I(y)\cdot\frac{y^2}{1-2y} + \left(\frac{y^2}{1-2y}\right)^2.$$

Используя результат А.Г. Куроша и эту формулу, можно показать, что

$${}_2X = \{\, w \times x\,,\, x \times w\,;\, w \times u\,,\, v \times w\,;\, v \times u \mid w \in {}_2I(\{x\})\,;\, v, u \in {}_1G(\{x\})\}\,.$$

Мы изучим полилинейные тождества некоторых факторов алгебры KB по мономиальным соотношениям. В этой главе мы рассмотрим два примера – *одномерную* алгебру ${}_0A = KB/K{}_1I(\{x\})$ и алгебру ${}_1A = KB/K{}_2I(\{x\})$, которая *бесконечномерна*. Первая из них имеет нулевое умножение, и поэтому её тождества порождены всеми мономами длины большей 1:

$$c_1({}_0A) = 1\,;\quad c_n({}_0A) = 0\,,\ \text{при } n > 1\,.$$

Вторая алгебра содержит бесконечномерный идеал с нулевым умножением коразмерности один – $K_{\mathit{1}}I(\{x\})/K_{\mathit{2}}I(\{x\})$, благодаря чему её полилинейные тождества имеют простое описание. Мы найдём коразмерности полилинейных тождеств алгебры ${}_{\mathit{1}}A$ и строение полилинейных компонент, как пространств представлений симметрической группы.

Определение 3.2. *Метабелевостью* называется тождество вида:

$$((a \times b) \times (c \times d)) \equiv 0\,.$$

Этот термин взят из теории алгебр Ли, где алгебра с нулевым умножением называется *абелевой*, потому что исторически лиева скобка произошла из ассоциативного коммутатора ([15]). В этом смысле алгебра ${}_{\mathit{0}}A$ – абелева, но мы не будем использовать это название, потому что оно может быть истолковано иным способом.

Теорема 3.1.

1. ${}_{\mathit{1}}A$ – неассоциативно-свободная однопорождённая метабелева;
2. $c_1({}_{\mathit{1}}A) = 1\,, \quad c_2({}_{\mathit{1}}A) = 2 \quad$ и $\quad c_n({}_{\mathit{1}}A) = 2^{\,n-2}\cdot(2n-1)$ при $n > 2\,;$
3. $P_1({}_{\mathit{1}}A) \cong S_{(1)} \cong K\,,\quad P_2({}_{\mathit{1}}A) \cong S_{(2)} \bigoplus S_{(1,1)}\,,$ а при $n > 2$ имеем $P_n({}_{\mathit{1}}A) \cong 2^{\,n-2}\cdot\left(S_{(n)} \bigoplus 2\cdot S_{(n-1,1)}\right).$

Доказательство. Первая часть теоремы следует из того, что ${}_{\mathit{1}}A$ является образом однопорождённой свободной неассоциативной алгебры KB. Любое отображение порождающего KB элемента x в неассоциативную K–алгебру C продолжается до гомоморфизма $\phi : KB \to C$.

По построению, все мономы из ${}_{\mathit{2}}I(\{x\})$ мультипликативно содержат подмономы вида $((m_1 \times m_2) \times (m_3 \times m_4))$. Поэтому, если C – метабелева, то $\phi\,(K_{\mathit{2}}I(\{x\})) = 0$, и ϕ продолжается до гомоморфизма ${}_{\mathit{1}}A \to C$.

Числовые и структурные утверждения Теоремы 3.1 будут получены из ряда последующих утверждений, описывающих полилинейные тождества алгебры ${}_{\mathit{1}}A$.

Замечания 3.1.

- При мономиальной подстановке в моном количество гнёзд не убывает, поэтому при любой подстановке из ${}_{\mathit{1}}A$ в полилинейный моном с более, чем двумя гнёздами результат обнуляется;
- Два ненулевых в ${}_{\mathit{1}}A$ монома w_1 и w_2 длины большей 1 равны, если и только если $w_t = {}_{\mathit{1}}u_t \times {}_{\mathit{2}}u_t$, где ${}_{l}u_1 = {}_{l}u_2$ – ненулевые мономы, и хотя бы одна пара из них (при $l = 1$ или 2) равна x;
- В качестве базиса алгебры ${}_{\mathit{1}}A$ мы выберем все её ненулевые мономы – это x и одногнездовые мономы от x.

Лемма 3.3. Пусть два полилинейных монома разной скобочной структуры и одного состава переменных равны при некоторой мономиальной подстановке из алгебры ${}_1A$. Тогда эти мономы при указанной подстановке обнуляются в ${}_1A$.

Доказательство: Пусть $w_{1,2}$ – полилинейные мономы от $x_1, \ldots, x_n$ разной скобочной структуры, при мономиальной подстановке $x_i := u_i \in {}_1A$ равные и отличные от нуля.

Тогда w_i содержат не более одного гнезда; все u_s, кроме может быть одного монома, равны x, а оставшийся может иметь не более одного гнезда; $|w_1| = |w_2| = n$, где n можно считать наименьшим из возможных.

Ясно, $n \neq 1, 2$ – в этих степенях нет мономов разной скобочной структуры. Случай $n = 3$ также невозможен. Действительно, полилинейные мономы разной скобочной структуры здесь имеют вид:

$$a \times (b \times c)\,,\ (d \times e) \times f\,.$$

Ненулевые в ${}_1A$ мономиальные подстановки в них таковы ($u \in {}_1G(\{x\})$):

$$x{\times}(x{\times}x)\,,\ x{\times}(x{\times}u)\,,\ x{\times}(u{\times}x) \quad \text{и} \quad (x{\times}x){\times}x\,,\ (u{\times}x){\times}x\,,\ (x{\times}u){\times}x\,.$$

Все эти мономы различны в ${}_1A$.

Поэтому $n \geq 4$. Любой ненулевой моном $m \in {}_1A$, $|m| \geq 4$ имеет вид $m = \mu{\times}x$ или $m = x{\times}\mu$, где $\mu \in {}_1A$ – ненулевой моном и $|\mu| = |m| - 1 \geq 3$. Поэтому, если $m_1 = m_2 \neq 0$ – результаты подстановки $x, \ldots, x, u(x)$ в w_1, w_2, тогда

$$m_1 = \mu_1 \times x = \mu_2 \times x = m_2 \quad \text{или} \quad m_1 = x \times \mu_1 = x \times \mu_2 = m_2\,.$$

Следовательно, исходные полилинейные мономы будут иметь вид

$$w_1 = v_1 \times x_i,\ w_2 = v_2 \times x_j \quad \text{или} \quad w_1 = x_i \times v_1,\ w_2 = x_j \times v_2\,,$$

где $v_{1,2}$ – некие полилинейные от своего состава мономы длины $n-1$, дающие при указанной подстановке значения $\mu_1 = \mu_2 \neq 0$. Мономы $v_{1,2}$ имеют разную скобочную структуру, ведь иначе одинаковую структуру имели бы мономы w_1 и w_2.

Если $i = j$, то v_1 и v_2 имеют одинаковый состав, и этот случай окажется рассмотренным позднее, пока же мы предполагаем, что $i \neq j$.

Поскольку w_1 и w_2 имеют одинаковый состав переменных $x_1, \ldots, x_n$, v_1 однократно содержит x_j и не содержит x_i, а v_2 наоборот – однократно содержит x_i и не содержит x_j. Заменой определим два монома: подставив в v_1 вместо x_j новую переменную z, получим $\widetilde{v}_1$; подставив в v_2 вместо x_i новую переменную z, получим $\widetilde{v}_2$.

Мономы $\widetilde{v}_1$ и $\widetilde{v}_2$ полилинейны длины $n-1$ одного состава: z и x_s, где $s = 1, \ldots, n$, но $s \neq i, j$. Они имеют разную скобочную структуру и при подстановке $z := x$, $x_s := u_s$ дают ненулевые равные значения μ_1 и μ_2, что противоречит минимальности выбранного n. Лемма 3.3 доказана.

Лемма 3.4. Полилинейные тождества алгебры ${}_1A$ и её полилинейные компоненты градуированы по скобочной структуре, и эта градуировка совместима с действием симметрических групп (здесь $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$):

$$\begin{aligned} P_n(KW(X)) \bigcap Id^{(n)}({}_1A) &\cong \bigoplus\nolimits_{b\in B} \left(P_n^{(b)}(KW(X)) \bigcap Id^{(n)}({}_1A)\right), \\ P_n({}_1A) &\cong \bigoplus\nolimits_{b\in B} P_n^{(b)}({}_1A), \end{aligned}$$

где $P_n^{(b)}({}_1A) := P_n^{(b)}(KW(X)) \Big/ \left(P_n^{(b)}(KW(X)) \bigcap Id^{(n)}({}_1A)\right)$.

Доказательство: выразим полилинейное тождество алгебры ${}_1A$ степени n через $m^{(b)}$ – полилинейные мономы скобочной структуры $b \in B$

$$\sum\nolimits_{b\in B} \sum\nolimits_{\sigma\in S_n} \lambda_\sigma^{(b)} m_\sigma^{(b)} \equiv 0\,.$$

По Лемме 3.3, при подстановке базисных мономов ${}_1A$: $m_\sigma^{(b)} \to \mu_{\sigma,b} \in {}_1A$ при разных скобочных структурах $b_1, b_2 \in B$ появляющиеся ненулевые мономы μ_{σ,b_1}, μ_{τ,b_2} различны и, следовательно, линейно независимы в ${}_1A$. Поэтому при всякой подстановке такого рода для каждого $b \in B$ в алгебре ${}_1A$ выполняется равенство:

$$\sum\nolimits_{\sigma\in S_n} \lambda_\sigma^{(b)} \mu_{\sigma,b} = 0\,.$$

Таким образом, исходное тождество является следствием своих скобочных компонент:

$$\sum\nolimits_{\sigma\in S_n} \lambda_\sigma^{(b)} m_\sigma^{(b)} \equiv 0\,,\ b \in B.$$

С учётом сохраниения скобочной структуры мономов при действии группы S_n, утверждения Леммы 3.4 о разложимости соответствующих пространств доказаны.

Лемма 3.5. Полагаем $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, тогда

1. ${}_{KS_n}P_n^{(b)}(KW(X)) \cong {}_{KS_n}P_n^{(b')}(KW(X))$ для всех $b, b' \in B_n$;
2. $P_n^{(b)}(KW(X)) \subseteq Id^{(n)}({}_1A)$ для всех $b \in B$, содержащих более одного гнезда;
3. ${}_{KS_n}P_n^{(b)}(KW(X)) \bigcap Id^{(n)}({}_1A) \cong {}_{KS_n}P_n^{(b')}(KW(X)) \bigcap Id^{(n)}({}_1A)$ для одногнездовых $b, b' \in B_n$;
4. $P_n^{(b)}({}_1A) \cong 0$ для всех $b \in B$, содержащих более одного гнезда;
5. ${}_{KS_n}P_n^{(b)}({}_1A) \cong {}_{KS_n}P_n^{(b')}({}_1A)$ для всех одногнездовых $b, b' \in B_n$.

Доказательство: опишем действие S_n на $P_n^{(b)}(KW(\{x_1, \ldots, x_n\}))$. Пусть $\sigma \in S_n$, $b \in B_n$, $m^{(b)} = (x_{i_1} \cdots x_{i_n})^{(b)} \in P_n^{(b)}(KW(X))$. Тогда действие на мономах

$$\sigma(m^{(b)}) = (x_{\sigma(i_1)} \cdots x_{\sigma(i_n)})^{(b)}$$

по линейности продолжается до изоморфизма левых представлений S_n:

$$f : KS_n \to P_n^{(b)}(KW(X))\,,\ f(\sigma) = (x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)})^{(b)},$$

$$f(\tau \cdot \sigma) = (x_{\tau(\sigma(1))} \cdots x_{\tau(\sigma(n))})^{(b)} = \tau\left((x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)})^{(b)}\right) = \tau(f(\sigma))\,.$$

Итак, левое представление $P_n^{(b)}(KW(\{x_1, \ldots, x_n\}))$ для всякой расстановки скобок $b \in B_n$ изоморфно левому регулярному представлению KS_n, что доказывает первое утверждение Леммы 3.5.

Если скобочная структура $b \in B_n$ монома $m^{(b)} \in KW(X)$ содержит более одного гнезда, такой же будет и любая мономиальная подстановка в него из алгебры B. Следовательно, любая подстановка из ${}_1A$ в $m^{(b)}$ обнуляется. Поэтому $KW^{(b)}(X)$ состоит из тождеств ${}_1A$, что доказывает второе и четвёртое утверждения Леммы 3.5.

Если скобочный шаблон $b \in B_n$ полилинейного монома $m^{(b)} \in KW_n(X)$ содержит одно (или менее) гнездо, то моном не обнуляется, к примеру, при постоянной подстановке $x_i = x$, поскольку $m^{(b)}(x, \ldots, x) = b \neq 0 \in {}_1A$. В частности, $KW_1(X)$ и $KW_2(X)$ не содержат тождеств алгебры ${}_1A$, а их полилинейные компоненты порождены мономами единственной скобочной структуры для этой длины.

Пусть $b \in B$ – одногнездовая скобочная структура длины $n \geq 3$. Полилинейный моном этого шаблона однозначно представляется в виде:

$$m^{(b)} = U_{i_1} \circ \cdots \circ U_{i_{n-2}}(x_{i_{n-1}} \times x_{i_n}) = U_{i_1} \ldots U_{i_{n-2}}(x_{i_{n-1}} \times x_{i_n})\,,$$

где U_i обозначает оператор умножения на x_i слева – L_{x_i}, или справа – R_{x_i}. По Лемме 2.4, последовательность $U = L, R$ определяет структуру $b \in B_n$.

При $n \geq 3$ и $k = 1, \ldots, n-2$ на пространстве одногнездовых полилинейных многочленов длины n определим линейный оператор φ_k, меняющий скобочный шаблон компонент линейной комбинации следующим образом:

$$\varphi_k\left(U_{i_1} \ldots U_{i_k} \ldots U_{i_{n-2}}(x_{i_{n-1}} \times x_{i_n})\right) = U_{i_1} \ldots \overline{U}_{i_k} \ldots U_{i_{n-2}}(x_{i_{n-1}} \times x_{i_n})\,,$$

здесь $\overline{L}_{x_i} = R_{x_i}$, $\overline{R}_{x_i} = L_{x_i}$. Например, $\varphi_1\colon\ x \times (y \times z) \longleftrightarrow (y \times z) \times x$. Ясно, что φ_k является обратимым, инволютивным отображением

$$\varphi_k^{-1} = \varphi_k \in \mathrm{GL}\left(\bigoplus\nolimits_{b \,\in\, {}_1G(\{x\})} P_n^{(b)}(KW(\{x_1, \ldots, x_n\}))\right),$$

согласованным с действием $S_n : \varphi_k \cdot \sigma = \sigma \cdot \varphi_k$, поскольку

$$\varphi_k\left(\sigma(U_{i_1} \ldots U_{i_k} \ldots U_{i_{n-2}}(x_{i_{n-1}} \times x_{i_n}))\right) =$$
$$= \varphi_k\left(U_{\sigma(i_1)} \ldots U_{\sigma(i_k)} \ldots U_{\sigma(i_{n-2})}(x_{\sigma(i_{n-1})} \times x_{\sigma(i_n)})\right) =$$
$$= U_{\sigma(i_1)} \ldots \overline{U}_{\sigma(i_k)} \ldots U_{\sigma(i_{n-2})}(x_{\sigma(i_{n-1})} \times x_{\sigma(i_n)}) =$$
$$= \sigma(U_{i_1} \ldots \overline{U}_{i_k} \ldots U_{i_{n-2}}(x_{i_{n-1}} \times x_{i_n})) =$$

$$= \sigma(\varphi_k \left(U_{i_1} \dots U_{i_k} \dots U_{i_{n-2}}(x_{i_{n-1}} \times x_{i_n})\right)).$$

Все одногнездовые скобочные шаблоны длины $n \geq 3$ переводятся друг в друга однозначно определяемой последовательностью φ_k, $k = 1, \dots, n-2$. Поэтому все компоненты $P_n^{(b)}(KW(\{x_1, \dots, x_n\}))$ при $b \in {}_1G_n(\{x\})$ изоморфны, как представления группы S_n. Этот факт является частным случаем первого утверждения Леммы 3.5 – выше было доказано, что эти компоненты изоморфны левому регулярному представлению KS_n. Докажем, что морфизмы φ_k сохраняют полилинейные тождества алгебры ${}_1A$. Из этого последует истинность третьего и пятого утверждений Леммы 3.5.

Действительно, рассмотрим полилинейное тождество алгебры ${}_1A$ степени $n \geq 3$ одногнездовой скобочной структуры b:

$$f^{(b)} = \sum\nolimits_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma m_\sigma^{(b)} \equiv 0.$$

Здесь $m_\sigma^{(b)}$ – полилинейный моном от переменных $x_1, \dots, x_n$ скобочного шаблона b, например, $m_\sigma^{(b)} = \left(x_{\sigma(1)} \times \dots \times x_{\sigma(n)}\right)^{(b)}$. Условие $f^{(b)} \equiv 0$ в алгебре ${}_1A$ означает, что при любой подстановке в x_i базисных мономов алгебры ${}_1A$ результат подстановки обнуляется. Базисные мономы ${}_1A$ могут иметь единичную длину и длину, бо́льшую единицы. К первым относится только x, остальные обозначим u – это одногнездовые мономы $|u| \geq 2$.

При подстановке u вне гнезда $m_\sigma^{(b)}$, вне зависимости от остальных подстановок, результат будет иметь более одного гнезда, и моном обнулится в ${}_1A$. По аналогичной причине моном обнулится при подстановке u_1 и u_2 в гнездо $m_\sigma^{(b)}$, что бы не подставлялось в остальные позиции. Таким образом, если в подставляемом наборе более одного базисного элемента вида u, то обнулятся все слагаемые линейной комбинации $f^{(b)}$ в отдельности, и никаких условий на значения λ_σ не возникнет.

Нетривиальные условия на $(\lambda_\sigma,\ \sigma \in S_n)$ могут появиться при подстановке в $x_1, \dots, x_n$ наборов $(x, \dots, x, x)$ или $(x, \dots, x, u)$ – в каком-то порядке.

Наша цель – доказать, что из тождества $f^{(b)} \equiv 0$ в ${}_1A$ следует тождество $\varphi_k(f^{(b)}) = f^{(b')} \equiv 0$. А для этого достаточно установить, что если какая-то подстановка указанного выше вида обнуляет $f^{(b)}$, то она обнулит и $f^{(b')}$.

Рассмотрим тождественную подстановку $x_1 = \dots = x_n = x$ в $f^{(b)}$:

$$\sum\nolimits_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma \cdot (x \times \dots \times x)^{(b)} = \left(\sum\nolimits_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma\right) \cdot b = 0.$$

Поскольку $b \in {}_1G_n(\{x\})$ – одногнездовой шаблон, не обнуляющийся в ${}_1A$, получаем равенство $\sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma = 0$. Но, с учётом $\varphi_k(b) = b' \neq 0$ в ${}_1A$, то же равенство получается при аналогичной подстановке в $f^{(b')}$:

$$\sum\nolimits_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma \cdot (x \times \dots \times x)^{(b')} = \left(\sum\nolimits_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma\right) \cdot b' = 0.$$

Проверим подстановку наборов $(x, \dots, x, u)$ в $f^{(b)} = \sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma m_\sigma^{(b)}$. Результат будет содержать нулевые мономы-слагаемые, если элемент u попал вне гнезда $m_\sigma^{(b)}$,– тогда коэффициент λ_σ в получающихся уравнениях не участвует. Но в этом случае u попадает вне гнезда $m_\sigma^{(\,b')}$ и обнуляет его. В итоге λ_σ не участвует в условиях, следующих из тождества $f^{(\,b')} \equiv 0$.

При подстановке одного элемента вида u внутрь гнезда полилинейного монома $m_\sigma^{(b)}$ и x – во все остальные его позиции получим базисный моном алгебры ${}_1A$.

Уточним это наблюдение. Пусть $m_\sigma^{(b)} = U_{i_1}\cdots U_{i_{n-2}}(x_{i_{n-1}} \times x_{i_n})$, а элемент u подставляется в $x_{i_{n-1}}$. Тогда получается базисный моном ${}_1A$ вида $U_x\cdots U_x R_x(u)$. При подстановке u в x_{i_n} получается $U_x\cdots U_x L_x(u)$.

Отметим, что при тех же подстановках в $\varphi_k(m_\sigma^{(b)}) = m_\sigma^{(\,b')}$ получаются базисные мономы вида $U_x\cdots \overline{U}_x \cdots U_x R_x(u)$ или $U_x\cdots \overline{U}_x \cdots U_x L_x(u)$, соответственно ($\overline{U}_x$ стоит на k–ом месте).

Таким образом, после рассмотренной подстановки в $f^{(b)}$ линейная комбинация ненулевых (базисных) мономов ${}_1A$ принимает вид:

$$\sum_{j=1}^{d}\left(\sum\nolimits_{\sigma\in S_n,\ m_\sigma^{(b)}\to v_j}\lambda_\sigma\right)v_j = 0\,,$$

где v_j – различные базисные мономы ${}_1A$ вида $U_x\cdots U_x(R,L)_x(u)$. И это даёт систему линейных условий на λ_σ :

$$\sum\nolimits_{\sigma\in S_n,\ m_\sigma^{(b)}\ \to v_j}\lambda_\sigma = 0\ ,\quad j=1,\ldots,d\,.$$

Та же подстановка в $\varphi_k(f^{(b)}) = f^{(\,b')}$ принимает вид линейной комбинации:

$$\sum_{j=1}^{d}\left(\sum\nolimits_{\sigma\in S_n,\ m_\sigma^{(\,b')}\ \to v_j'}\lambda_\sigma\right)v_j' = 0\,,$$

где $v_j' = \varphi_k(v_j)$ – различные базисные мономы ${}_1A$. Что даёт ту же самую систему линейных уравнений на λ_σ :

$$\sum\nolimits_{\sigma\in S_n,\ m_\sigma^{(\,b')}\ \to v_j'}\lambda_\sigma = 0\ ,\quad j=1,\ldots,d\,,$$

поскольку условия $m_\sigma^{(b)}\ \ \to\ v_j$ и $m_\sigma^{(\,b')}\ \ \to\ v_j$ равносильны. Итак, φ_k сохраняет полилинейные тождества ${}_1A$, и Лемма 3.5 доказана полностью.

4 Вычисления в групповой алгебре KS_n

Изучение KS_n-модульной структуры полилинейных тождеств алгебры ${}_1A$ и её полилинейных компонент $P_n({}_1A)$ мы начнём с прояснения связей между коэффициентами λ_σ из доказательства Леммы 3.5.

Ранее было показано, что тождества алгебры ${}_1A$ и её полилинейные компоненты степени n для разных одногнездовых расстановок скобок образуют изоморфные представления симметрической группы S_n. Поэтому далее мы зафиксируем какую-нибудь расстановку скобок, – например, левоупорядоченную, – и ради удобства записи до изменения обстоятельств эту расстановку указывать не будем:

$$R_x^{n-2}(x^2) = (\dots((x \times x) \times x) \times \dots \times x) =: xxx \cdots x\,.$$

Итак, запишем полилинейное тождество общего вида (фиксированной скобочной структуры) алгебры ${}_1A$ степени $n \geq 3$:

$$\sum\nolimits_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma \cdot x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)} \equiv 0\,.$$

Как было разобрано ранее, нетривиальные уравнения на λ_σ могут получаться при подстановке в $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ наборов мономов вида $\{x, x, \dots, x\}$ или $\{u, x, \dots, x\}$, где $u \in {}_1A_{>1}$. Подстановка набора $\{x, x, \dots, x\}$ даёт уравнение $\sum_{\sigma \in S_n} \lambda_\sigma = 0$, – ниже выяснится, что оно следует из результатов подстановок набора $\{u, x, \dots, x\}$, которые, в свою очередь, зависят от того – вместо какой переменной x_i подставляется моном u. Исследуем это точнее.

Пусть u подставляется вместо x_j, а вместо прочих x_i подставляется x. В итоге, обнуляются все полилинейные мономы, где x_j стоит вне гнезда (то есть, при наших соглашениях – вне первых двух позиций). Ненулевые подстановки собираются в нетривиальное в ${}_1A$ уравнение вида:

$$\sum\nolimits_{\sigma \in S_n\,,\ \sigma(1)=j} \lambda_\sigma \cdot R_x^{n-2}(u \times x) + \sum\nolimits_{\sigma \in S_n\,,\ \sigma(2)=j} \lambda_\sigma \cdot R_x^{n-2}(x \times u) = 0\,.$$

Если базисный моном $u \in {}_1A_{>1}$, то результирующие мономы

$$R_x^{n-2}(u \times x) = R_x^{n-1}(u) \quad \text{и} \quad R_x^{n-2}(x \times u) = R_x^{n-2} L_x(u)$$

линейно независимы в ${}_1A$. Следовательно, для каждого $j = 1, \dots, n$ мы получаем пару линейных уравнений на λ_σ, не зависящих от шаблона и степени подставляемого монома $u \in {}_1A_{>1}$:

$$\sum\nolimits_{\sigma \in S_n\,,\ \sigma(1)=j} \lambda_\sigma = 0\,, \quad \sum\nolimits_{\tau \in S_n\,,\ \tau(2)=j} \lambda_\tau = 0\,. \tag{2}$$

Между этими уравнениями есть очевидное соотношение:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum\nolimits_{\sigma \in S_n\,,\ \sigma(1)=j} \lambda_\sigma = \sum\nolimits_{\varsigma \in S_n} \lambda_\varsigma = \sum_{j=1}^{n} \sum\nolimits_{\tau \in S_n\,,\ \tau(2)=j} \lambda_\tau\,.$$

Вскоре мы увидим, что с точностью до пропорциональности оно единственное. Поэтому для одногнездовых $b \in B_n$ получаем $\dim P_n^{(b)}({}_1A) = 2n - 1$.

Определения 4.1. Зафиксируем натуральное n. Тогда для $1 \leq i \leq n$ обозначим:

$$St(i) := \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) = i\,\} \cong Sym\{1, \dots, \widehat{i}, \dots, n\} \cong S_{n-1}\,,$$

$$\xi_i := \sum\nolimits_{\sigma \in St(i)} \sigma\,, \quad s := \sum\nolimits_{\tau \in S_n} \tau\,.$$

Тогда $St(i)$ – подгруппа S_n, а ξ_i и s – элементы KS_n. Для $\sigma \in St(i)$ и $\tau \in S_n$ имеем равенства "поглощения" – $\sigma \cdot \xi_i = \xi_i$, $\tau \cdot s = s$, и поэтому

$$\xi_i^2 = (n-1)! \cdot \xi_i\,, \quad \xi_i \cdot s = s \cdot \xi_i = (n-1)! \cdot s\,, \quad s^2 = n! \cdot s\,.$$

Лемма 4.1. Выберем c – циклическую перестановку длины n из S_n .

1. Любая подстановка $\tau \in S_n$ однозначно представляется в виде
$$\tau = c^a \cdot \sigma_1 = \sigma_2 \cdot c^b\,, \quad \text{где} \quad \sigma_1, \sigma_2 \in St(i) \text{ и } 0 \le a, b < n\,;$$
2. Имеется разложение $s = \sum\limits_{a\,=\,0,\ldots,n-1} c^a \cdot \xi_i = \xi_i \cdot \sum\limits_{b\,=\,0,\ldots,n-1} c^b$;
3. $\{e,\ c,\ \ldots,\ c^{n-1}\}$ – полный набор представителей левых (и правых) смежных классов $S_n : St(i)$;
4. Для любой $\tau \in S_n$ есть однозначные показатели $0 \le a_k\,, b_k < k$, такие что:
$$\tau = (12\ldots n)^{a_n} \cdot (12\ldots n{-}1)^{a_{n-1}} \cdot \ldots \cdot (12)^{a_2} = (12)^{b_2} \cdot \ldots \cdot (12\ldots n)^{b_n}\,.$$

Доказательство: пусть $c^a \cdot \sigma = c^b \cdot \varsigma$, где $\sigma, \varsigma \in St(i)$ и $0 \le a \le b < n$. Тогда

$$c^{b-a} = \sigma \cdot \varsigma^{-1} \in St(i) \quad \text{и} \quad 0 \le b-a < n\,,$$

поэтому $a = b$ и $\sigma = \varsigma$. Таким образом, выражения вида $c^a \cdot \sigma$ с разными сомножителями – различны. А их общее количество $n \cdot (n-1)! = n!$ равно порядку группы S_n. Поэтому все элементы S_n однозначно разложимы в виде $c^a \cdot \sigma$. Разлагая $\tau^{-1} = c^a \cdot \sigma$, получим однозначное представление $\tau = \sigma^{-1} \cdot c^{n-a}$. Что доказывает первое утверждение Леммы 4.1. Остальные утверждения этой леммы непосредственно следуют из первого.

Вернёмся к уравнениям (2). Изучим наборы подстановок:

$$\{\sigma \in S_n \mid \sigma(1) = j\,\}\,, \quad \text{где} \quad j = 1, \ldots, n\,.$$

Первый из них – это подгруппа $St(1)$, а остальные – это левые смежные классы S_n по подгруппе $St(1)$:

$$\{\sigma \in S_n \mid \sigma(1) = j\,\} = (12\ldots n)^{j-1} \cdot \{\sigma \in S_n \mid \sigma(1) = 1\,\}\,.$$

Аналогично, наборы подстановок $\{\tau \in S_n \mid \tau(2) = j\,\}$, где $j = 1, \ldots, n$, содержат подгруппу $St(2)$ и левые смежные классы S_n по ней:

$$\{\tau \in S_n \mid \tau(2) = j\,\} = (12\ldots n)^{j-2} \cdot \{\tau \in S_n \mid \tau(2) = 2\,\}\,.$$

Эти соображения – первый шаг к описанию полилинейных тождеств ${}_1A$. Напомним, что такие тождества фиксированной одногнездовой скобочной структуры погружаются с сохранением левого действия S_n в групповую алгебру KS_n :

$$\sum\nolimits_{\sigma\in S_n} \lambda_\sigma \cdot (x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(n)})^{(b)} \longrightarrow \sum\nolimits_{\sigma\in S_n} \lambda_\sigma \cdot \sigma\,.$$

Методы работы в групповых кольцах изложены в ([16]). Опишем специфические аннуляторы групповых алгебр.

Лемма 4.2. Пусть H – подгруппа конечной группы G. Обозначим $\eta \in KG$ – сумму всех элементов H. Тогда $LAnn_{KG}(\eta) := \{z \in KG \mid z\cdot\eta = 0\}$ состоит из линейных комбинаций вида

$$\Big\{\sum\nolimits_{g\in G} \lambda_g \cdot g \mid \sum\nolimits_{h\in H} \lambda_{g\cdot h} = 0 \text{ для всех } g \in G\Big\}.$$

Доказательство. Выберем $\{s_1,\ldots,s_d\}$ – разные представители всех левых смежных классов $G : H$. Если $h_1 \in H$, тогда для всех $i = 1,\ldots,d$ имеем равенства:

$$s_i \cdot h_1 \cdot \eta = s_i \cdot h_1 \cdot \sum\nolimits_{h\in H} h = s_i \cdot \sum\nolimits_{h\in H} h_1 \cdot h = s_i \cdot \sum\nolimits_{h'\in H} h' = s_i \cdot \eta\,.$$

Следовательно, для $z = \sum_{g\in G} \lambda_g \cdot g$ получаем:

$$z\cdot\eta = \Big(\sum\nolimits_{g\in G} \lambda_g \cdot g\Big)\cdot\eta = \sum\nolimits_{i=1}^{d} \sum\nolimits_{h\in H} \lambda_{s_i\cdot h} \cdot s_i\cdot h \cdot \eta =$$

$$= \sum\nolimits_{i=1}^{d} \sum\nolimits_{h\in H} \lambda_{s_i\cdot h} \cdot s_i \cdot \eta = \sum\nolimits_{i=1}^{d} \Big(\sum\nolimits_{h\in H} \lambda_{s_i\cdot h}\Big) \cdot s_i \cdot \eta = 0\,.$$

Элементы $g \in G$, входящие в разложения $s_i \cdot \eta$ различны для разных i, поскольку лежат в разных левых смежных классах $G : H$. Поэтому наборы $\{s_1 \cdot \eta,\ldots, s_d \cdot \eta\}$ – линейно независимы в KG, и уравнение $z \cdot \eta = 0$ равносильно $\sum_{h\in H} \lambda_{s_i\cdot h} = 0$ для всех $i = 1,\ldots,d$. Это доказывает Лемму 4.2, так как любой $g \in G$ может быть выбран представителем своего левого смежного класса $G : H$.

Итак, прояснено KS_n–строение пространства полилинейных тождеств алгебры ${}_1A$ левоупорядоченного шаблона $l = R_x^{n-2}(x\times x) \in B$ при $n \geq 3$. Полилинейный многочлен $\sum_{\sigma\in S_n} \lambda_\sigma \cdot (x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(n)})^{(l)}$ является тождеством неассоциативной алгебры ${}_1A$, если и только если в групповой алгебре KS_n выполняются равенства:

$$\Big(\sum\nolimits_{\sigma\in S_n} \lambda_\sigma \cdot \sigma\Big) \cdot \xi_1 = 0\,, \quad \Big(\sum\nolimits_{\sigma\in S_n} \lambda_\sigma \cdot \sigma\Big) \cdot \xi_2 = 0\,,$$

где $\xi_i = \sum_{\tau\in St(i)} \tau \in KS_n$. Резюмируем этот факт.

Лемма 4.3. Для $l = R_x^{n-2}(x \times x) \in B$ при $n \geq 3$ изоморфны следующие левые KS_n–модули :

$$\begin{aligned} P_n^{(l)}(KW(\{x_1,\ldots,x_n\})) \bigcap Id^{(n)}({}_1A) &\cong LAnn_{KS_n}(\xi_1,\xi_2)\,,\\ P_n^{(l)}({}_1A) &\cong KS_n \,/\, LAnn_{KS_n}(\xi_1,\xi_2)\,. \end{aligned}$$

По Лемме 3.5, полилинейные тождества и полилинейные компоненты алгебры ${}_{1}A$ для разных одногнездовых шаблонов как левые KS_n–модули изоморфны. Поэтому

$$ {}_{KS_n}P_n({}_{1}A) \cong \left(KS_n \,/\, LAnn_{KS_n}(\xi_1, \xi_2)\right)^{2^{n-2}} . $$

Для завершения доказательства Теоремы 3.1 осталось прояснить строение левого KS_n–модуля $KS_n / \, LAnn_{KS_n}(\xi_1, \xi_2)$.

Заметим, что левый аннулятор в KS_n множества $\{\xi_1, \xi_2\}$ совпадает с левым аннулятором правого идеала $(\xi_1, \xi_2) \cdot KS_n \lhd KS_n$, порождённого ξ_1 и ξ_2. Этот правый идеал выделяется прямым слагаемым, и поэтому порождается соответствующей компонентой единицы KS_n – идемпотентом, для вычисления которого полезна техническая Лемма 4.4 ниже. Но прежде продолжим Определения 4.1.

Определения 4.2. Для натурального n и $1 \le i \ne j \le n$ обозначим:

$$ St(i,j) = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) = i, \sigma(j) = j\,\} \cong Sym\{1, \ldots, \widehat{i}, \widehat{j}, \ldots, n\} \cong S_{n-2} , $$

$$ \xi_{i,j} = \sum\nolimits_{\sigma \in St(i,j)} \sigma . $$

Ясно, что $St(i,j) = St(i) \cap St(j) < St(i), St(j)$, и в KS_n выполняется:

$$ \xi_{i,j} \cdot \xi_i = \xi_i \cdot \xi_{i,j} = (n-2)! \cdot \xi_i \ , \quad \xi_{i,j} \cdot \xi_j = \xi_j \cdot \xi_{i,j} = (n-2)! \cdot \xi_j \ . $$

Для целого k обозначим $\overline{k} \in \{1, \ldots, n\}$: $\overline{k} \equiv k \,(\bmod\, n)$, $\overline{k} = 1 + n \cdot \{(k-1)/n\}$.

Лемма 4.4. Фиксируем натуральное n и $1 \le i \ne j \le n$, тогда

1. Если γ – циклическая перестановка длины $n-1$ из $St(i)$, то

$$ \sum_{k=0}^{n-2} \gamma^k \cdot \xi_j = \sum_{\sigma \in S_n} \sigma \cdot [\,\sigma(j) \ne i\,] = s - (ij) \cdot \xi_j \ ; $$

2. Если $\overline{i-d} = j$, то $\xi_i \cdot (12\ldots n)^d \cdot \xi_j = (n-1)! \cdot (12\ldots n)^d \cdot \xi_j$;
3. Если $\overline{i-d} \ne j$, то $\xi_i \cdot (12\ldots n)^d \cdot \xi_j = (n-2)! \cdot (s - (ij) \cdot \xi_j)$;
4. Если $d \ne 0$, то $\xi_i \cdot (12\ldots n)^d \cdot \xi_i = (n-2)! \cdot (s - \xi_i)$.

Доказательство. 1. Поскольку для любого k имеем $\gamma^k(i) = i$, для любого $\tau \in St(j)$ выполнено $\gamma^k \cdot \tau(j) = \gamma^k(j) \ne i$. Следовательно,

$$ \bigcup_{k=0}^{n-2} \gamma^k \cdot St(j) \subset \{\sigma \in S_n \mid \sigma(j) {\ne} i\} = S_n \setminus \{\sigma \in S_n \mid \sigma(j) {=} i\} = S_n \setminus (ij) \cdot St(j) . $$

При этом $\sharp(S_n \setminus (ij) \cdot St(j)) = n! - (n-1)! = (n-1) \cdot (n-1)!$.

Пусть $\sigma, \tau \in St(j)$ и $\gamma^k \cdot \sigma = \gamma^l \cdot \tau$, тогда $\gamma^{k-l} = \tau \cdot \sigma^{-1} \in St(j)$. Поэтому $\gamma^{k-l} = e$, $\gamma^k = \gamma^l$ и $\sigma = \tau$. Таким образом, левые смежные классы $\gamma^k \cdot St(j)$ не пересекаются при различных $k = 0, \ldots, n-2$ и

$$\sharp(\bigcup_{k=0}^{n-2} \gamma^k \cdot St(j)) = (n-1) \cdot \sharp(St(j)) = (n-1) \cdot (n-1)!\,.$$

Следовательно,

$$\bigcup_{k=0}^{n-2} \gamma^k \cdot St(j) = S_n \setminus (ij) \cdot St(j) \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{n-2} \gamma^k \cdot \xi_j = s - (ij) \cdot \xi_j\ .$$

2. Заметим, что для $1 \leq l \leq n$ есть сопряжение

$$(n \ldots 21) \cdot St(l) \cdot (12 \ldots n) = St(\,\overline{l-1}\,)\,,$$

поэтому выполняются равенства

$$(n \ldots 21) \cdot \xi_l \cdot (12 \ldots n) = \xi_{\,\overline{l-1}} \quad \text{и} \quad \xi_l \cdot (12 \ldots n) = (12 \ldots n) \cdot \xi_{\,\overline{l-1}}\ .$$

Для $\overline{i-d} = j$ получаем равенства

$$\xi_i {\cdot} (12 \ldots n)^d {\cdot} \xi_j = (12 \ldots n)^d {\cdot} \xi_{\,\overline{i-d}} {\cdot} \xi_j = (12 \ldots n)^d {\cdot} \xi_j^2 = (n{-}1)! {\cdot} (12 \ldots n)^d {\cdot} \xi_j\ .$$

3. При $\overline{i{-}d} \neq j$ выберем γ – цикл длины $n{-}1$ из $St(\,\overline{i{-}d}\,)$ и, пользуясь вторым утверждением Леммы 4.1, получим равенства

$$\xi_{\,\overline{i-d}} {\cdot} \xi_j = \sum_{k=0}^{n-2} \gamma^k {\cdot} \xi_{\,\overline{i-d}\,,\,j} {\cdot} \xi_j = \sum_{k=0}^{n-2} \gamma^k {\cdot} (n{-}2)! {\cdot} \xi_j = (n{-}2)! {\cdot} (s - (\,\overline{i{-}d}\,j\,) {\cdot} \xi_j)\,,$$

из которых следует

$$\xi_i {\cdot} (12 \ldots n)^d {\cdot} \xi_j = (12 \ldots n)^d {\cdot} \xi_{\,\overline{i-d}} {\cdot} \xi_j = (n{-}2)! {\cdot} (12 \ldots n)^d {\cdot} (s - (\,\overline{i{-}d}\,j\,) {\cdot} \xi_j) =$$

$$= (n{-}2)! {\cdot} ((12 \ldots n)^d {\cdot} s - (12 \ldots n)^d {\cdot} (\,\overline{i{-}d}\,j\,) {\cdot} \xi_j) = (n-2)! {\cdot} (s - (ij) {\cdot} \xi_j)\,,$$

потому что есть вложение левых смежных классов $S_n : St(j)$

$$(12 \ldots n)^d \cdot (\,\overline{i{-}d}\,j\,) \cdot St(j) \subseteq (ij) \cdot St(j)\,.$$

4. При $d \neq 0$ получаем $\overline{i{-}d} \neq i$ и, согласно предыдущему, имеем равенства

$$\xi_i {\cdot} (12 \ldots n)^d {\cdot} \xi_i = (12 \ldots n)^d {\cdot} \xi_{\,\overline{i-d}} {\cdot} \xi_i = (n{-}2)! {\cdot} (12 \ldots n)^d {\cdot} (s - (\,\overline{i{-}d}\ i\,) {\cdot} \xi_i) =$$

$$= (n{-}2)! {\cdot} (s - (12 \ldots n)^d {\cdot} (\,\overline{i{-}d}\ i\,) \cdot \xi_i) = (n-2)! {\cdot} (s - \xi_i)\,,$$

потому что $(12 \ldots n)^d \cdot (\,\overline{i{-}d}\ i\,) \in St(i)$. Лемма 4.4 доказана полностью.

Найдём порождающий идемпотент E правого идеала $(\xi_1, \xi_2)\cdot KS_n$ алгебры KS_n . Пусть $1 \le a \le n$, тогда любой элемент S_n принадлежит одному из правых смежных классов $S_n : St(a)$ вида $St(a)\cdot(1, 2, \ldots, n)^k$, где $0 \le k < n$. При этом $\xi_a \cdot \tau = \xi_a$, если $\tau \in St(a)$. Поэтому $E \in (\xi_1, \xi_2) \cdot KS_n$ можно представить в виде:

$$E = \xi_1 \cdot \sum_{k=0}^{n-1} x_k \cdot (12\ldots n)^k + \xi_2 \cdot \sum_{u=0}^{n-1} y_u \cdot (12\ldots n)^u \,,$$

где $x_0, \ldots, x_{n-1}, y_0, \ldots, y_{n-1} \in K$. Идемпотент E – компонента единицы в прямом слагаемом $(\xi_1, \xi_2)\cdot KS_n$ алгебры KS_n , и удовлетворяет равенствам

$$E \cdot \xi_1 = \xi_1 \ , \quad E \cdot \xi_2 = \xi_2 \ ,$$

задающим линейные условия на переменные $x_0, \ldots, x_{n-1}, y_0, \ldots, y_{n-1}$. Исследуем первое равенство

$$\begin{aligned}
\xi_1 \quad &= \quad E\cdot\xi_1 = \xi_1\cdot \sum_{k=0}^{n-1} x_k\cdot(12\ldots n)^k\cdot\xi_1 + \xi_2\cdot \sum_{u=0}^{n-1} y_u\cdot(12\ldots n)^u\cdot\xi_1 = x_0\cdot\xi_1^2 + \\
&+ \sum_{k=1}^{n-1} x_k\cdot\xi_1\cdot(12\ldots n)^k\cdot\xi_1 + y_1\cdot\xi_2\cdot(12\ldots n)\cdot\xi_1 + \xi_2\cdot \sum_{u=0,\, u\neq 1}^{n-1} y_u\cdot(12\ldots n)^u\cdot\xi_1 \,.
\end{aligned}$$

С учётом Леммы 4.4, получаем при $n \ge 2$

$$\begin{aligned}
\xi_1 \quad &= \quad E\cdot\xi_1 = x_0\cdot(n{-}1)!\cdot\xi_1 + \sum_{k=1}^{n-1} x_k\cdot(n{-}2)!\cdot(s{-}\xi_1) + y_1\cdot(n{-}1)!\cdot(12\ldots n)\cdot\xi_1 + \\
&+ \sum_{u=0,\, u\neq 1}^{n-1} y_u\cdot(n{-}2)!\cdot(s{-}(21)\cdot\xi_1) = x_0\cdot(n{-}1)!\cdot\xi_1 + (n{-}2)!\cdot(s-\xi_1)\cdot \sum_{k=1}^{n-1} x_k + \\
&+ \quad y_1\cdot(n{-}1)!\cdot(12)\cdot(2\ldots n)\cdot\xi_1 + (n{-}2)!\cdot(s-(21)\cdot\xi_1)\cdot \sum_{u=0,\, u\neq 1}^{n-1} y_u = \\
&= \quad (n{-}2)! \times \Bigg\{ x_0\cdot(n{-}1)\cdot\xi_1 + (s-\xi_1)\cdot \sum_{k=1}^{n-1} x_k + y_1\cdot(n{-}1)\cdot(12)\cdot\xi_1 + \\
&+ \quad (s-(21)\cdot\xi_1)\cdot \sum_{u=0,\, u\neq 1}^{n-1} y_u \Bigg\} = (n{-}2)! \times \left\{ \left(\sum_{k=1}^{n-1} x_k + \sum_{u=0,\, u\neq 1}^{n-1} y_u \right)\cdot s + \right. \\
&+ \quad \left. \left(n\cdot x_0 - \sum_{k=0}^{n-1} x_k \right)\cdot\xi_1 + \left(n\cdot y_1 - \sum_{u=0}^{n-1} y_u \right)\cdot(12)\cdot\xi_1 \right\}.
\end{aligned}$$

Это влечёт принципиально разные выводы при $n = 2$ и $n > 2$. В первом случае $\xi_1 = \xi_2 = e$, $s = e{+}(12)$, $(\xi_1, \xi_2)\cdot KS_2 \cong e\cdot KS_2 \cong KS_2$ и получаем

$$\begin{aligned}
e \quad &= \quad (x_1 + y_0 + 2x_0 - x_0 - x_1)\cdot e + (x_1 + y_0 + 2y_1 - y_0 - y_1)\cdot(12) = \\
&= \quad (x_0 + y_0)\cdot e + (x_1 + y_1)\cdot(12)\,, \\
E \quad &= \quad e\cdot(x_0{+}x_1\cdot(12)) + e\cdot(y_0{+}y_1\cdot(12)) = (x_0{+}y_0)\cdot e + (x_1{+}y_1)\cdot(12) = e\,.
\end{aligned}$$

Во втором случае $\xi_1, \xi_2 \neq e$, и s раскладывается в сумму линейно независимых элементов KS_n:

$$s = \xi_1 + (12)\cdot\xi_1 + (13)\cdot\xi_1 + \cdots + (1n)\cdot\xi_1 \,.$$

Поэтому в равенстве $E\cdot\xi_1 = \xi_1$ баланс при слагаемом $(13)\cdot\xi_1$ имеет вид:

$$(n-2)!\cdot\left(\sum_{k=1}^{n-1} x_k + \sum_{u=0,\,u\neq 1}^{n-1} y_u\right) = 0\,,$$

а при слагаемых $(12)\cdot\xi_1$ и ξ_1, соответственно:

$$(n-2)!\cdot\left(n\cdot y_1 - \sum_{u=0}^{n-1} y_u\right) = 0 \quad \text{и} \quad (n-2)!\cdot\left(n\cdot x_0 - \sum_{k=0}^{n-1} x_k\right) = 1\,.$$

Эти уравнения упрощаются, если определить новые переменные

$$X = x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1}\,,\ Y = y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1}\,. \tag{3}$$

Тогда предыдущие уравнения принимают вид:

$$X - x_0 + Y - y_1 = 0\,, \quad n\cdot y_1 - Y = 0\,, \quad n\cdot x_0 - X = 1/(n-2)!\,. \tag{4}$$

Аналогично исследуем уравнение $E\cdot\xi_2 = \xi_2$:

$$\begin{aligned}
\xi_2 \;&=\; E\cdot\xi_2 = \xi_1\cdot\sum_{k=0}^{n-1} x_k\cdot(12\ldots n)^k\cdot\xi_2 + \xi_2\cdot\sum_{u=0}^{n-1} y_u\cdot(12\ldots n)^u\cdot\xi_2 = y_0\cdot\xi_2^2 + \\
&+\; \sum_{u=1}^{n-1} y_u\cdot\xi_2\cdot(12\ldots n)^u\cdot\xi_2 + \sum_{k=0}^{n-2} x_k\cdot\xi_1\cdot(12\ldots n)^k\cdot\xi_2 + \\
&+\; x_{n-1}\cdot\xi_1\cdot(12\ldots n)^{n-1}\cdot\xi_2 = y_0\cdot(n-1)!\cdot\xi_2 + \sum_{u=1}^{n-1} y_u\cdot(n-2)!\cdot(s-\xi_2) + \\
&+\; \sum_{k=0}^{n-2} x_k\cdot(n-2)!\cdot(s-(12)\cdot\xi_2) + x_{n-1}\cdot(n-1)!\cdot(12\ldots n)^{n-1}\cdot\xi_2 = \\
&=\; y_0\cdot(n-1)!\cdot\xi_2 + (n-2)!\cdot(s-\xi_2)\cdot\sum_{u=1}^{n-1} y_u + (n-2)!\cdot(s-(12)\cdot\xi_2)\cdot\sum_{k=0}^{n-2} x_k + \\
&+\; x_{n-1}\cdot(n-1)!\cdot(n\ldots 21)\cdot\xi_2 = \Bigg\{(s-\xi_2)\cdot\sum_{u=1}^{n-1} y_u + y_0\cdot(n-1)\cdot\xi_2 + \\
&+\; (s-(12)\cdot\xi_2)\cdot\sum_{k=0}^{n-2} x_k + x_{n-1}\cdot(n-1)\cdot(12)\cdot(n\ldots 31)\cdot\xi_2\Bigg\}\cdot(n-2)! = \\
&=\; (n-2)!\times\Bigg\{\left(\sum_{u=1}^{n-1} y_u + \sum_{k=0}^{n-2} x_k\right)\cdot s + \left(n\cdot y_0 - \sum_{u=0}^{n-1} y_u\right)\cdot\xi_2 + \\
&\qquad + \left(n\cdot x_{n-1} - \sum_{k=0}^{n-1} x_k\right)\cdot(12)\cdot\xi_2\Bigg\}\,.
\end{aligned}$$

Случай $n=2$ также даёт $E=e$, а при $n>2$, с учётом обозначений (3), получаем линейные уравнения:

$$X - x_{n-1} + Y - y_0 = 0\,, \quad n\cdot x_{n-1} - X = 0\,, \quad n\cdot y_0 - Y = 1/(n{-}2)!\,. \quad (5)$$

При $n>2$ уравнения (3, 4, 5) составляют неопределённую систему, но для нахождения E нам достаточно получить её частное решение. Удобно выбрать такое:

$$x_0 = (n-1)/n!\,, \quad x_1 = -(n-1)/n!\,, \quad x_2 = \dots = x_{n-1} = 0\,, \quad X = 0\,;$$

$$y_0 = 1/(n{-}1)!\,,\ y_1 = \dots = y_{n-2} = 1/n!\,,\ y_{n-1} = -(n{-}2)/n!\,,\ Y = 1/(n{-}1)!\,.$$

Вычисляем искомый идемпотент:

$$\begin{aligned}
E &= \xi_2 \cdot \frac{1}{n!} \cdot \left(n\cdot e + \sum_{u=1}^{n-2} (12\dots n)^u - (n-2)\cdot(12\dots n)^{n-1} \right) + \\
&+ \xi_1 \cdot \frac{n-1}{n!} \cdot (e - (12\dots n)) = \frac{n-1}{n!} \cdot \xi_1 \cdot (e-(12\dots n)) + \\
&+ \frac{n-1}{n!} \cdot \xi_2 \cdot (e - (n\dots 21)) + \frac{1}{n!} \cdot \xi_2 \cdot \sum_{u=0}^{n-1} (12\dots n)^u = \frac{1}{n!}\cdot s + \\
&+ \frac{n{-}1}{n!} \cdot \xi_1 \cdot (e - (23\dots n)\cdot(1n)) + \frac{n{-}1}{n!} \cdot \xi_2 \cdot (e - (n\dots 431)\cdot(23)) = \\
&= \frac{1}{n!}\cdot s + \frac{n-1}{n!}\cdot \xi_1 \cdot (e-(1n)) + \frac{n-1}{n!} \cdot \xi_2 \cdot (e-(23))\,.
\end{aligned}$$

С помощью Леммы 4.4 можно убедиться, что следующие элементы KS_n:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n!}\cdot s &= \frac{1}{n!}\cdot \xi_2 \cdot \sum_{u=0}^{n-1} (12\dots n)^u = \frac{1}{n!}\cdot \sum\nolimits_{\sigma\in S_n} \sigma\,, \\
E_1 &= \frac{n-1}{n!}\cdot \xi_1 \cdot (e-(12\dots n)) = \frac{n-1}{n!}\cdot \xi_1 \cdot (e-(1n))\,, \\
E_2 &= \frac{n-1}{n!}\cdot \xi_2 \cdot (e-(n\dots 21)) = \frac{n-1}{n!}\cdot \xi_2 \cdot (e-(23))
\end{aligned}$$

являются взаимно ортогональными идемпотентами – компонентами E. Ясно, что s порождает тривиальное представление $S_{(n)}$ группы S_n. Центральный идемпотент $s/n!$ соответствует диаграмме Юнга $|1,2,\dots n|$.

Идемпотенты E_1 и E_2 не центральны, но примитивны и соответствуют диаграммам $|n,n{-}1,\dots 2|1|$ и $|3,4,\dots n,1|2|$, соответственно. Они порождают изоморфные неприводимые $(n{-}1)$–мерные представления $S_{(n-1,1)}$ группы S_n ([17], с. 185–192). То есть,

$$KS_n\cdot E \cong KS_n\cdot E_1 \oplus KS_n\cdot E_2 \oplus KS_n \cdot s \cong S_{(n-1,1)} \oplus S_{(n-1,1)} \oplus S_{(n)}\,.$$

Для окончания доказательства Теоремы 3.1 докажем завершающее утверждение этой главы.

Лемма 4.5. Имеются изоморфизмы левых KS_n-модулей

$$KS_n/\,LAnn_{KS_n}(\xi_1,\,\xi_2) \cong KS_n/\,LAnn_{KS_n}((\xi_1,\,\xi_2)\cdot KS_n) \cong$$

$$\cong KS_n/\,LAnn_{KS_n}(E\cdot KS_n) \cong KS_n/\,LAnn_{KS_n}(E) \cong KS_n\cdot E\,.$$

Доказательство. Первые три изоморфизма доказаны нами выше. Последний изоморфизм следует из теоремы о гомоморфизмах. Действительно, определим гомоморфизм левых KS_n-модулей:

$$\mu : KS_n \xrightarrow{\cdot E} KS_n\,, \quad \mu(a) = a\cdot E\,.$$

Тогда получаем:

$$\operatorname{Ker}\mu \cong LAnn_{KS_n}(E)\,,\ \operatorname{Im}\mu \cong KS_n\cdot E\,,\ KS_n/\,LAnn_{KS_n}(E) \cong KS_n\cdot E\,,$$

и Теорема 3.1 полностью доказана.

5 Тождества некоторых факторов ${}_1A$

Напомним, что мономы x, $x^2 = x{\times}x$, $U_1\ldots U_s(x^2)$, где $U_i = L_x\,,\ R_x$ при $s\geq 1$, являются базисом неассоциативной K–алгебры ${}_1A = KB/K_2I(\{x\})$. Слово $U_1\ldots U_s$ можно считать мономом свободной ассоциативной K–алгебры $K\langle L_x\,, R_x\rangle$. Любому такому слову соответствует базисный моном алгебры ${}_1A$. Сопоставим пустое слово,– единицу алгебры $K\langle L_x, R_x\rangle$,– моному $x^2\in {}_1A$. Такое соответствие продолжается до однородного степени 2 изоморфизма градуированных K–пространств:

$$\tau :\ K\langle L_x\,,\,R_x\rangle \to {}_1A_{\geq 2}\,, \quad \tau\left(\sum \alpha_m\cdot m\right) = \sum \alpha_m\cdot m(x^2)\,,$$

здесь $m\in\{L_x\,,\,R_x\}^*$ – ассоциативные слова в алфавите $\{L_x\,,\,R_x\}$.

Определение 5.1. Пусть $M\subseteq\{L_x\,,\,R_x\}^*$. Обозначим $J(M)$ – однородный идеал алгебры $K\langle L_x\,,\,R_x\rangle$, порождённый M:

$$J(M) = {}_K\langle\, m'\cdot m\cdot m'' \mid m\in M,\ m',m''\in\{L_x\,,\,R_x\}^*\,\rangle\,.$$

Заметим, что нужно различать случаи $M=\emptyset$ и $M=\{\emptyset\}$. В первом – $J(M)=\{0\}$, а во втором – $J(M)=K\langle L_x\,,\,R_x\rangle$.

Лемма 5.1. Пространство $M^\tau := \tau(J(M))$ – идеал алгебры ${}_1A$.

Доказательство. Если $M=\emptyset$, то $M^\tau=\{0\}$, и утверждение очевидно.

Пусть $M\neq\emptyset$, тогда M^τ – идеал ${}_1A$, поскольку обнуляется при левом или правом умножении на элементы ${}_1A_{\geq 2}$ и выдерживает левое и правое умножение на x:

$$x\times(m(u)) = (L_x\cdot m)(u)\,,\ (m(u))\times x = (R_x\cdot m)(u)\,.$$

Определение 5.2. *Мономиальным фактором* ${}_1A$ мы назовём в общем-то неассоциативную K–алгебру ${}_1A/M^\tau$. Наша цель – описание её полиномиальных тождеств.

Поскольку алгебра ${}_1A$ градуирована скобочной структурой B, а идеал M^τ однороден относительно неё, соответствующий мономиальный фактор градуирован скобочной структурой:

$$ {}_1A/M^\tau \cong \bigoplus\nolimits_{b\in B} ({}_1A/M^\tau)^{(b)} \, . $$

Поэтому B–градуированы полиномиальные тождества мономиального фактора ${}_1A/M^\tau$. Ясно, что имеются включения пространств ($\sharp(X) = n$):

$$ Id^{\,(n)}({}_1A) \subseteq Id^{\,(n)}({}_1A/M^\tau) \, , $$

$$ P_n^{(b)}(KW(X)) \bigcap Id^{\,(n)}({}_1A) \subseteq P_n^{(b)}(KW(X)) \bigcap Id^{\,(n)}({}_1A/M^\tau) \, . $$

Поэтому сюръективны отображения представлений группы S_n :

$$ P_n^{(b)}({}_1A) \twoheadrightarrow P_n^{(b)}({}_1A/M^\tau) \, . $$

Лемма 5.2. Если $b = w_1 \cdot m \cdot w_2(x^2) \in {}_1I_n \subset B_n$, где $w_i \in \{L_x\, ,\, R_x\}^*$, $m \in M$ тогда

$$ P_n^{(b)}(KW(X)) \subset Id^{\,(n)}({}_1A/M^\tau) \, . $$

Доказательство. Возьмём полилинейный моном указанного выше вида $u = U_1 \cdot \ldots \cdot U_{n-2}(x_{n-1} \times x_n)$, где $U_i = L_{x_i}$ или R_{x_i} , скобочной структуры $\beta(u) = b$. Тогда b – базисный моном ${}_1A$. Исследуем базисные мономиальные подстановки из ${}_1A$ в u . Если при такой подстановке в позиции $x_1, \ldots, x_{n-2}$ попадёт хотя бы один моном степени выше первой, результат в ${}_1A$ обнулится. И то же выйдет при одновременной подстановке длинных мономов в позиции x_{n-1} и x_n . Поэтому нетривиальными в ${}_1A$ могут быть только подстановки x в позиции $x_1, \ldots, x_{n-2}$ и в один из x_{n-1} , x_n . В оставшуюся позицию можно подставлять любой моном v, – получится базисный моном алгебры ${}_1A$. Результат подстановки зависит от вида $v = x$ или $\widetilde{m}(L_x, R_x)(x^2)$, и во втором случае от того – подставляется он налево или направо в гнездо u. В зависимости от этого получим $w_1 \cdot m \cdot w_2(x^2)$, $w_1 \cdot m \cdot w_2 \cdot L_x \cdot \widetilde{m}(x^2)$ или $w_1 \cdot m \cdot w_2 \cdot R_x \cdot \widetilde{m}(x^2)$, соответственно. Все эти мономы лежат в идеале $M^\tau \lhd {}_1A$. Поэтому любые мономиальные базисные подстановки из ${}_1A/M^\tau$ в u обнуляются в ${}_1A/M^\tau$,– то есть u является полилинейным тождеством ${}_1A/M^\tau$.

Остальные полилинейные мономы скобочной структуры b получаются из u перестановкой $x_1, \ldots, x_n$. Результаты подстановки в них базисных мономов алгебры ${}_1A$ те же самые, что и в u. Лемма 5.2 доказана.

Замечание 5.1. Для некоторых M не все полилинейные тождества ${}_1A/M^\tau$ получаются указанным в Лемме 5.2 способом. Например, $M = \{LL, LR\}$.

Тогда трилинейный многочлен $p\,(a,b,c) = a\times(b\times c) - a\times(c\times b)$ обнуляется в ${}_1A$ при подстановке $a=b=c=x$. А ненулевые в ${}_1A$ результаты получаются при мономиальных подстановках вида:

$$a=b=x,\; c=w(x^2) \quad \text{или} \quad a=c=x,\; b=w(x^2)\,, \quad \text{где } w\in\{L_x\,,\,R_x\}^*\,.$$

И в этом случае результат равен $\pm(L_x{\cdot}L_x{\cdot}w(x^2)-L_x{\cdot}R_x{\cdot}w(x^2))\in M^\tau$. Таким образом, многочлен $p(a,b,c)$ скобочного шаблона $x\times(x\times x)$ – тождество алгебры ${}_1A/M^\tau$.

Для уточнения Леммы 5.2 упоминаемый в её доказательстве полилинейный моном $u=U_1\cdot\ldots\cdot U_{n-2}(x_{n-1}\times x_n)$, где $U_i=L_{x_i}$ или R_{x_i}, скобочного шаблона $\beta(u)=b\in{}_1I_n$, обозначим $U(x_1,\ldots,x_{n-2})(x_{n-1}\times x_n)$. Тогда $b=U(x,\ldots,x)(x^2)$, а общий вид полилинейного элемента шаблона b таков:

$$P_U(x_1,\ldots,x_n)=\sum\nolimits_{\sigma\in S_n} a_\sigma\cdot U(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n-2)})(x_{\sigma(n-1)}\times x_{\sigma(n)})\,.$$

Вычислим результаты подстановок в него базисных мономов алгебры ${}_1A$. Подстановки с заведомо нулевыми результатами мы не рассматриваем. Из продуктивных подстановок останется тождественная – $x_1=\cdots=x_n=x$:

$$P_U(x,\ldots,x)=\sum\nolimits_{\sigma\in S_n} a_\sigma\cdot U(x,\ldots,x)(x{\times}x)=\Bigl(\sum\nolimits_{\sigma\in S_n} a_\sigma\Bigr)\cdot b\,,$$

а также подстановки вида – $x_i=u\in{}_1I$, а все остальные $x_j=x$. При такой подстановке все слагаемые суммы $P_U(x,\ldots,u,\ldots,x)$, в которых моном u попадает внутрь оператора $U(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n-2)})$, заведомо обнуляются, и результат подстановки оказывается следующим (здесь в суммах $\sigma\in S_n$):

$$P_U(x,\ldots,\overset{i}{u},\ldots,x)=\sum\nolimits_{\sigma(n)=i} a_\sigma U(x,\ldots,x)(x\times u)+$$

$$+\sum\nolimits_{\sigma(n-1)=i} a_\sigma U(x,\ldots,x)(u\times x)=\Bigl(\sum\nolimits_{\sigma(n)=i} a_\sigma\Bigr)\cdot U(x,\ldots,x)\cdot L_x(u)+$$

$$+\Bigl(\sum\nolimits_{\sigma(n-1)=i} a_\sigma\Bigr)\cdot U(x,\ldots,x)\cdot R_x(u)\,.$$

Заметим, что для всех $u\in{}_1I$ в полученном выражении участвуют разные базисные мономы $U(x,\ldots,x)\cdot L_x(u)$, $U(x,\ldots,x)\cdot R_x(u)$ алгебры ${}_1A$, отличные от монома b. Поэтому справедлива лемма о полилинейных тождествах алгебры ${}_1A/M^\tau$.

Лемма 5.3. Полагаем $b=U(x,\ldots,x)(x^2)$, тогда

1. если $U(x,\ldots,x)\in J(M)$, то $P_n^{(b)}({}_1A/M^\tau)=0$;
2. если оба $U(x,\ldots,x)\cdot L_x$ и $U(x,\ldots,x)\cdot R_x\notin J(M)$, то

$$P_n^{(b)}({}_1A/M^\tau)\cong P_n^{(b)}({}_1A)\,;$$

3. если оба $U(x,\dots,x)\cdot L_x$, $U(x,\dots,x)\cdot R_x \in J(M)$, но $U(x,\dots,x) \notin J(M)$, то модуль ${}_{KS_n}P_n^{(b)}({}_1A/M^\tau) \cong S_{(n)}$ – одномерен;

4. если $U(x,\dots,x)\cdot R_x \in J(M)$, но $U(x,\dots,x)\cdot L_x \notin J(M)$, или наоборот, то модуль ${}_{KS_n}P_n^{(b)}({}_1A/M^\tau) \cong S_{(n-1,1)} \oplus S_{(n)}$ – n–мерен;

Доказательство. 1. Тогда имеем $U(x,\dots,x)\cdot L_x$, $U(x,\dots,x)\cdot R_x \in J(M)$, и полином $P_U(x_1,\dots,x_n) \in Id^{(n)}({}_1A/M^\tau)$ при всех a_σ. Этот случай разобран в Лемме 5.2.

2. В этом случае $P_U(x_1,\dots,x_n) \in Id^{(n)}({}_1A/M^\tau)$ при следующих условиях на коэффициенты a_σ:

$$\sum\nolimits_{\sigma(n-1)=i} a_\sigma = 0\,,\ \sum\nolimits_{\sigma(n)=i} a_\sigma = 0\,,\quad \text{где}\quad i=1,\dots,n\,.$$

Это – условия (2) из 4 главы. Они задают $(2n-1)$–мерный модуль

$${}_{KS_n}P_n^{(b)}({}_1A) \cong 2\cdot S_{(n-1,1)} \oplus S_{(n)}\,.$$

3. В этом случае $U(x,\dots,x)\cdot L_x(u)$, $U(x,\dots,x)\cdot R_x(u) \in M^\tau$ при любых a_σ. Для всех $1 \le i \le n$ и мономов $u \in {}_1I$ выражение $P_U(x,\dots,\overset{i}{u},\dots,x)$ обнуляется в алгебре ${}_1A/M^\tau$. Но для обнуления $P_U(x,\dots,x)$ необходима тривиальность суммы всех a_σ. Это единственное условие на полилинейное тождество ${}_1A/M^\tau$ шаблона b. То есть, $\sum_{\sigma\in S_n} a_\sigma\cdot\sigma = LAnn_{KS_n}(s)$, и поэтому $P_n^{(b)}({}_1A/M^\tau) \cong KS_n\cdot s \cong S_{(n)}$ – одномерно.

4. Допустим $U(x,\dots,x)\cdot R_x \in J(M)$, но $U(x,\dots,x)\cdot L_x \notin J(M)$. Тогда выражение $P_U(x,\dots,\overset{i}{u},\dots,x)$ обнуляется в ${}_1A/M^\tau$ при всех $i=1,\dots,n$, если выполняется система из n линейно независимых равенств:

$$\sum\nolimits_{\sigma(n)=i} a_\sigma = 0\,,\quad i=1,\dots,n \tag{6}$$

Из этой системы следуют равенства $\sum_{\sigma\in S_n} a_\sigma = 0$ и $P_U(x,\dots,x)=0$. Таким образом, полилинейные тождества алгебры ${}_1A/M^\tau$ шаблона b определяются системой (6). Но согласно Лемме 4.2, эта система равносильна равенству в алгебре KS_n:

$$\Big(\sum\nolimits_{\sigma\in S_n} a_\sigma\cdot\sigma\Big)\cdot\xi_n = 0\,,\quad \text{где}\quad \xi_n = \sum\nolimits_{\tau\in St(n)}\tau$$

Подобно доказательству Леммы 4.5, имеются изоморфизмы KS_n–модулей:

$$\begin{aligned} P_n^{(b)}(KW(\{x_1,\dots,x_n\}))\bigcap Id^{(n)}({}_1A/M^\tau) \quad &\cong \quad LAnn_{KS_n}(\xi_n)\,,\\ P_n^{(b)}({}_1A/M^\tau) \cong KS_n\,/\,LAnn_{KS_n}(\xi_n) \quad &\cong \quad KS_n\cdot\xi_n\,. \end{aligned}$$

Для описания KS_n–модуля $P_n^{(b)}({}_1A/M^\tau)$ разобьём идемпотент $\xi_n/(n-1)!$ на примитивные компоненты. Поскольку $s \in KS_n\cdot\xi_n$, рассмотрим ортогональное разложение:

$$\frac{1}{(n-1)!}\cdot\xi_n = \frac{1}{n!}\cdot s + \frac{1}{n!}\cdot(n\cdot\xi_n - s)\,.$$

Используем Лемму 4.1, обозначив $c = (12\dots n)$:

$$n{\cdot}\xi_n - s = \sum_{i=0}^{n-1} \big(\xi_n - c^i{\cdot}\xi_n\big) = \sum_{i=1}^{n-1} \xi_n{\cdot}\big(e - c^i\big) = \sum_{i=1}^{n-1} \xi_n{\cdot}(e - (n{-}i\ n)) =$$

$$= \xi_n{\cdot}(e - (n{-}1\ n)) + \sum_{i=2}^{n-1} \xi_n{\cdot}(e - (n{-}i\ n{-}1)\cdot(n{-}1\ n)\cdot(n{-}i\ n{-}1)) =$$

$$= \xi_n{\cdot}(e - (n{-}1\ n)) + \sum_{i=2}^{n-1} \xi_n{\cdot}(e - (n{-}1\ n)\cdot(n{-}i\ n{-}1)) =$$

$$= \xi_n{\cdot}(e - (n{-}1\ n))\cdot\left(e + \sum_{i=2}^{n-1}(n{-}i\ n{-}1)\right).$$

В алгебре KS_n выполнено $\xi_n\cdot(e-(n{-}1\ n))\cdot h = n\cdot\xi_n - s \neq 0$, поэтому морфизм

$$KS_n\cdot\xi_n\cdot(e-(n{-}1\ n)) \xrightarrow{\cdot\, h} KS_n\cdot(n\cdot\xi_n - s) \text{ -- сюръективен.}$$

Но, согласно ([17], с. 185–192), идемпотент $(n{-}1)\cdot\xi_n\cdot(e-(n{-}1\,n))/n!$ примитивен и соответствует диаграмме $|n{-}1,\dots 2,1|n|$. Он порождает неприводимое $(n{-}1)$–мерное представление $S_{(n-1,1)}$ группы S_n. Поэтому имеются изоморфизмы

$$KS_n\cdot(n\cdot\xi_n - s) \cong S_{(n-1,1)}\,,\ \ P_n^{(b)}({}_1A/M^\tau) \cong KS_n\cdot\xi_n \cong S_{(n-1,1)} \oplus S_{(n)}\,.$$

Ситуация, когда $U(x,\dots,x)\cdot L_x \in J(M)$, но $U(x,\dots,x)\cdot R_x \notin J(M)$ подобна разобранной выше. Поэтому Лемма 5.3 доказана полностью.

Наша ближайшая цель – изучение коразмерностей тождеств K–алгебры ${}_1A/M^\tau$, то есть – последовательности $c_n({}_1A/M^\tau) = \dim_K P_n({}_1A/M^\tau)$ в зависимости от набора ассоциативных мономов $M \subseteq \{L_x\,,\,R_x\}^*$. С этим набором естественным образом связана ассоциативная K–алгебра

$$A(M) = K\langle L_x\,,\,R_x\rangle/J(M) = K\langle L_x\,,\,R_x \mid M\,\rangle\,.$$

Алгебра $A(M)$ является *мономиальной* и градуированной:

$$A(M) \cong \bigoplus\nolimits_{n\geq 0} A_n(M)\,,\ \text{где } A_n(M) = {}_K\langle w(L_x\,,\,R_x) \mid \deg(w) = n\,\rangle\,.$$

С ней связана последовательность $a_n(M) = \dim_K A_n(M)$, считающая ассоциативные мономы $w \in \{L_x\,,\,R_x\}^*$ степени n, свободные от вхождений мономов из M.

Обе последовательности экспоненциально ограничены (см. Теорему 3.1):

$$a_n(M) \leq a_n(\emptyset) = 2^n \text{ и } c_n({}_1A/M^\tau) \leq c_n({}_1A) = 2^{n-2}\cdot(2n-1)\,,\ \text{при } n > 2\,,$$

поэтому удобна производящая функция (ряд) Гильберта:

$$A(M)(t) = \sum\nolimits_{n\geq 0} a_n(M)\cdot t^n\,, \quad C({}_1A/M^\tau)(t) = \sum\nolimits_{n>0} c_n({}_1A/M^\tau)\cdot t^n\,.$$

Например, в простейших нетривиальных случаях получаем:

$$A(\emptyset)(t) = \sum\nolimits_{n\geq 0} 2^n\cdot t^n = \frac{1}{1-2t}\ ;$$

$$C({}_1A)(t) = t + 2t^2 + \sum\nolimits_{n>2} 2^{n-2}\cdot(2n-1)\cdot t^n = \sum\nolimits_{n\geq 0} 2^{n-1}\cdot(n+1)\cdot t^n -$$

$$-3\cdot\sum\nolimits_{n\geq 0} 2^{n-2}\cdot t^n + \frac{1}{4} + \frac{t}{2} - t^2 = \frac{1}{2\cdot(1-2t)^2} - \frac{3}{4\cdot(1-2t)} + \frac{1+2t-4t^2}{4} =$$

$$= \frac{6t-1}{4\cdot(1-2t)^2} + \frac{1+2t-4t^2}{4} = \frac{t-2t^2+6t^3-4t^4}{(1-2t)^2}\ .$$

Вопреки структурным препятствиям, коразмерности тождеств ${}_1A/M^\tau$ определяются последовательностью $(a_n(M))$. Но прежде решения этой задачи разберёмся с некоторыми аннуляторами в ассоциативных алгебрах.

Рассмотрим алгебру $R = K\langle\, x, y \mid T\,\rangle = K\langle\, x, y\,\rangle/(T)$, где $T \subseteq \{x, y\}^*$ – набор мономов. Она градуирована по степени: $R \cong \oplus_{n\geq 0} R_n$, $R_0 \cong K$. Обозначим $R_+ \cong \oplus_{n>0} R_n$ – её двусторонний идеал и левые однородные идеалы $R{\cdot}x$, $R{\cdot}y$, $LAnn_R(x)$, $LAnn_R(y)$. Их ряды Гильберта обозначим $R(t)$, $R_+(t)$, $R{\cdot}x(t)$, $R{\cdot}y(t)$, $LAnn_R(x)(t)$, $LAnn_R(y)(t)$, соответственно, а коэффициенты этих рядов – r_n, rx_n, ry_n, $lann_R(x)_n$, $lann_R(y)_n$.

Лемма 5.4. Имеются соотношения:

1. $R_+ \cong R\cdot x \oplus R\cdot y\,;$
2. $R{\cdot}x(t) + R{\cdot}y(t) = R_+(t) = R(t) - 1\,;$
3. $R{\cdot}x(t) = t{\cdot}\{R(t) - LAnn_R(x)(t)\}\,,\ R{\cdot}y(t) = t{\cdot}\{R(t) - LAnn_R(y)(t)\}\,.$

Доказательство. 1. Важное свойство мономиальной алгебры таково – линейные комбинации мономов в ней обнуляются почленно, и поэтому ненулевые мономы образуют её базис. Это непосредственно следует из леммы А.И. Ширшова о композиции для ассоциативного случая, – т.н. “Алмазной леммы”, – ведь любой набор мономов в свободной ассоциативной алгебре замкнут относительно композиции.

В рассматриваемом примере $R = K\langle\, x, y \mid T\,\rangle$ ненулевые мономы – это те, которые не содержат вхождений из T. Мономы положительной степени оканчиваются либо на x, либо на y, и таким образом принадлежат либо $R\cdot x$, либо $R\cdot y$. Поэтому пространства R_+ и $R\cdot x\oplus R\cdot y$ изоморфны, и этот изоморфизм согласован с левым умножением на элементы R.

2. Изоморфизм из первого утверждения сохраняет степень однородных элементов. Поэтому для всех n: $(R_+)_n \cong (R\cdot x)_n \oplus (R\cdot y)_n$, откуда следует равенство рядов Гильберта соответствующих градуированных пространств.

3. Морфизм R–модулей: $R \xrightarrow{\cdot x} R{\cdot}x$ увеличивает степень на $\deg(x) = 1$. Чтобы сделать его (однородным) морфизмом градуированных R–модулей, надо уметь "подкручивать" градуированные объекты следующим образом: если $V \cong \oplus V_n$, тогда $V[m] \cong \oplus V[m]_n$, где $V[m]_n \cong V_{n+m}$. Ряд Гильберта при подкрутке градуированного объекта изменяется так:

$$V[m](t) = \sum\nolimits_n \dim_K(V[m]_n){\cdot}t^n = t^{-m}{\cdot}\sum\nolimits_n \dim_K(V_{n+m}){\cdot}t^{n+m} = t^{-m}{\cdot}V(t)\,.$$

Рассмотрим точную последовательность градуированных R–модулей:

$$0 \longrightarrow LAnn_R(x) \longrightarrow R \xrightarrow{\cdot x} R{\cdot}x[1] \longrightarrow 0\,.$$

Ей соответствуют равенства производящих функций:

$$LAnn_R(x)(t) - R(t) + R{\cdot}x[1](t) = LAnn_R(x)(t) - R(t) + t^{-1}{\cdot}R{\cdot}x(t) = 0\,,$$

$$R{\cdot}x(t) = t{\cdot}\{R(t) - LAnn_R(x)(t)\}\,.$$

Второе равенство третьего утверждения доказывается аналогично. Лемма 5.4 доказана.

Теорема 5.1. В предыдущих обозначениях имеются соотношения:

1. $c_{n+2}({}_1A/M^\tau) = a_n(M) + (n+1)\cdot a_{n+1}(M)$ при $n \geq 1$;
2. $C({}_1A/M^\tau)(t) = t + t^2\cdot\{c_2({}_1A/M^\tau) - a_0(M) - a_1(M) + A(M)(t) +$ $+ A(M)'(t)\}$.

Доказательство. 1. При $n \geq 1$ базис пространства $P_{n+2}({}_1A/M^\tau)$ образуют полилинейные многочлены вида:

$$P_U(x_1,\ldots,x_{n+2}) = \sum\nolimits_{\sigma\in S_{n+2}} a_\sigma\cdot U(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)})(x_{\sigma(n+1)}\times x_{\sigma(n+2)})\,,$$

где $U(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)})$ – композиция левых или правых умножений на $x_{\sigma(i)}$ соответствует ассоциативному моному $U(x,\ldots,x) \in \{L_x\,,\,R_x\}^n$. Вычислим коразмерность тождеств ${}_1A/M^\tau$ степени $n{+}2$, используя Лемму 5.3.

Если $U \in J(M) \trianglelefteq K\langle L_x\,,\,R_x\rangle$, то $P_U(x_1,\ldots,x_{n+2})$ – тождество алгебры ${}_1A/M^\tau$. Полиномов вида P_U в базисе пространства $P_{n+2}({}_1A/M^\tau)$ нет.

Если оба $U\cdot L_x$ и $U\cdot R_x \notin J(M)$, тогда полиномы вида P_U входят в базис пространства $P_{n+2}({}_1A/M^\tau)$ с кратностью $2(n+2)-1 = 2n+3$. И тогда U – базисный моном факторпространства

$$K\langle L_x\,,\,R_x \mid M\rangle_n/(LAnn(L_x) + LAnn(R_x))_n\,.$$

Если $U \notin J(M)$, но оба $U\cdot L_x$ и $U\cdot R_x \in J(M)$, тогда полиномы вида P_U входят в базис пространства $P_{n+2}({}_1A/M^\tau)$ с кратностью 1. И в этом случае U – базисный моном пространства $LAnn(L_x\,,\,R_x)_n \subseteq K\langle L_x\,,\,R_x \mid M\rangle_n$.

Если $U\cdot L_x\notin J(M)$, но $U\cdot R_x\in J(M)$ (или наоборот), то полиномы вида P_U входят в базис пространства $P_{n+2}({}_1A/M^\tau)$ с кратностью $n+2$. Тогда U – базисный моном факторпространства $LAnn(L_x)_n/LAnn(L_x\,,\,R_x)_n$ (или $LAnn(R_x)_n/LAnn(L_x\,,\,R_x)_n$).

Суммируя найденное выше, получаем равенство:

$$c_{n+2}({}_1A/M^\tau)=(2n{+}3)\cdot\dim_K(K\langle L_x,R_x\mid M\rangle/(LAnn(L_x){+}LAnn(R_x)))_n+$$
$$+\,1\cdot\dim_K LAnn(L_x,R_x)_n+(n{+}2)\cdot\dim_K(LAnn(L_x)/LAnn(L_x,R_x))_n+$$
$$+\,(n{+}2)\cdot\dim_K(LAnn(R_x)/LAnn(L_x,R_x))_n\,.$$

Здесь первое слагаемое преобразуется из точной последовательности:

$$0\longrightarrow LAnn(L_x\,,\,R_x)\xrightarrow{(1,-1)}LAnn(L_x)\oplus LAnn(R_x)\xrightarrow{\binom{1}{1}}K\langle L_x\,,\,R_x\mid M\rangle\longrightarrow$$
$$\longrightarrow K\langle L_x,R_x\mid M\rangle/(LAnn(L_x)+LAnn(R_x))\longrightarrow 0\,.$$

Теперь, благодаря упрощённым обозначениям, мы избавляемся от символов dim и получаем равенства:

$$c_{n+2}({}_1A/M^\tau)=(2n+3)\cdot(lann(L,R)_n-lann(L)_n-lann(R)_n+a_n(M))+$$
$$+\,(n+2)\cdot(lann(L)_n-lann(L,R)_n)+(n+2)\cdot(lann(R)_n-lann(L,R)_n)+$$
$$+\,lann(L,R)_n=((2n+3)+1-2(n+2))\cdot lann(L,R)_n+(2n+3)\cdot a_n(M)+$$
$$+\,(-(2n+3)+(n+2))\cdot(lann(L)_n+lann(R)_n)=$$
$$=(2n+3)\cdot a_n(M)-(n+1)\cdot(lann(L)_n+lann(R)_n)\,.$$

Упростим формулу, используя Лемму 5.4. Из неё следуют равенства:

$$t\cdot\{2R(t){-}LAnn_R(x)(t){-}LAnn_R(y)(t)\}=R{\cdot}x(t){+}R{\cdot}y(t)=R_+(t)=R(t){-}1\,.$$

При $n\ge 1$ приравняем коэффициенты рядов Гильберта при t^n:

$$2\cdot r_{n-1}-lann_R(x)_{n-1}-lann_R(y)_{n-1}=r_n\,.$$

Поэтому, возвращаясь к аннуляторам алгебры $K\langle L_x\,,\,R_x\mid M\rangle$, получим:

$$lann(L)_n+lann(R)_n=2\cdot a_n(M)-a_{n+1}(M)\,,$$

и, окончательно, коразмерность $c_{n+2}({}_1A/M^\tau)$ принимает искомый вид:

$$(2n{+}3){\cdot}a_n(M){-}(n{+}1){\cdot}(2a_n(M){-}a_{n+1}(M))=a_n(M){+}(n{+}1){\cdot}a_{n+1}(M)\,.$$

2. Вычислим ряд Гильберта коразмерностей тождеств алгебры ${}_1A/M^\tau$:

$$C({}_1A/M^\tau)(t)-t-c_2({}_1A/M^\tau)\cdot t^2=\sum\nolimits_{n\ge 3}c_n({}_1A/M^\tau)\cdot t^n=$$

$$= \sum\nolimits_{n\geq 1} c_{n+2}\,({}_1A/M^\tau)\cdot t^{n+2} = t^2\cdot \sum\nolimits_{n\geq 1}(a_n(M)+(n{+}1)\cdot a_{n+1}(M))\cdot t^n =$$
$$= t^2\cdot\{A(M)(t)-a_0(M)+(A(M)(t)-a_0(M)-a_1(M)\cdot t)'\} =$$
$$= t^2\cdot\{A(M)(t)+A(M)'(t)\}-(a_0(M)+a_1(M))\cdot t^2\,.$$

Откуда вытекает второе утверждение Теоремы 5.1, которое можно упростить, если выделить тривиальный случай $1\in M$. Тогда

$$A(M)\cong 0\,,\ A(M)(t)\equiv 0\,;\quad {}_1A/M^\tau\cong {}_0A\,,\ C({}_1A/M^\tau)(t)\equiv t\,.$$

Если же $1\notin M$, тогда $a_0(M)=1$ и $c_2({}_1A/M^\tau)=2$, и формула для рядов такова:

$$C({}_1A/M^\tau)(t) = t+t^2\cdot\{1-a_1(M)+A(M)(t)+A(M)'(t)\}\,.$$

Итак, асимптотика коразмерностей тождеств ${}_1A/M^\tau$ определяется ростом размерностей компонент ассоциативной алгебры $A(M)$.

Замечание 5.2. Из предыдущего следует:

1. если $a_n(M)\asymp n^\alpha$ степенного роста, то $c_n({}_1A/M^\tau)\asymp n^{\alpha+1}$ – степенного роста;
2. если $a_n(M)\asymp\lambda^n$ экспоненциального роста, то $c_n({}_1A/M^\tau)\asymp\lambda^n$ – такого же экспоненциального роста.

Пример 5.1. ([13]) Пусть $M=\{L_x\cdot L_x\}$, тогда

$$A(M)(t)=\frac{1+t}{1-t-t^2}=1+2t+3t^2+5t^3+8t^4+13t^5+21t^6+\dots\,,$$

По Теореме 5.1 коразмерности $c_n({}_1A/M^\tau)$ имеют дробный экспоненциальный рост, выражаясь при $n\geq 3$ через числа Фибоначчи:

$$c_{n+2}({}_1A/M^\tau)=F_n+(n{+}1){\cdot}F_{n+1}=F_{n+2}+n{\cdot}F_{n+1}\,,$$

$$c_n({}_1A/M^\tau)\asymp\phi^n\,,\ \text{где}\ \phi=\frac{1+\sqrt5}{2}\approx 1.618\,.$$

Этот пример поддаётся обобщению.

Пример 5.2. Пусть $n\geq 1$ и $M=\{(L_x)^n\}$, тогда

$$A(M)\cong K\langle L,R\mid L^n\rangle\cong K\langle L\mid L^n\rangle * K\langle R\rangle\,.$$

Ряды Гильберта сомножителей таковы:

$$K\langle L\mid L^n\rangle(t)=1+\dots+t^{n-1}\,,\quad K\langle R\rangle(t)=1+t+t^2+\dots=\frac{1}{1-t}\,,$$

а ряд их свободного произведения определяется формулой ([18], с. 50):

$$(A(M)(t))^{-1}=(K\langle L\mid L^n\rangle(t))^{-1}+(K\langle R\rangle(t))^{-1}-1=\frac{1-t-\dots-t^n}{1+\dots+t^{n-1}}\,,$$

$$A(M)(t) = \frac{1 + \ldots + t^{n-1}}{1 - t - \ldots - t^n}\,.$$

Таким образом, ряд Гильберта $A(M)$ рационален, и $a_m(M)$ – квазимногочлен уточняемого вида. Рассмотрим уравнение:

$$t^n + \ldots + t = \frac{t^{n+1} - t}{t - 1} = 1\,, \tag{7}$$

Обозначим $r(n)$ – его единственный положительный корень. Ясно, $r(n) \leq 1$.

Если $r(n) = 1$, тогда: $n = 1$, $A(M) \cong K\langle R\rangle$, $a_m(M) \equiv 1$, $c_m({}_1A/M^\tau) = m$.

В нетривиальных случаях $n > 1$ имеем $0 < r(n) < 1$. Нетрудно видеть, что уравнение (7) не имеет кратных корней. Поэтому $a_m(M)$ – линейная комбинация экспонент с основаниями обратными к корням уравнения (7). Пусть z – какой-то, возможно комплексный, корень этого уравнения, отличный от $r(n)$. Тогда он неположительный. Для неположительных, возможно комплексных w из условия $|w| \leq r(n)$ следует:

$$|w^n + \ldots + w| < |w^n| + \ldots + |w| \leq (r(n))^n + \ldots + r(n) = 1\,.$$

Поэтому $|z| > r(n)$ и последовательность $a_m(M) \asymp r(n)^{-m}$ – имеет экспоненциальный рост с основанием $r(n)^{-1} > 1$.

Сравним $r(n)$ и $r(n+1)$. Они – положительные корни уравнений:

$$(r(n))^n + \ldots + r(n) = 1\,,$$

$$(r(n+1))^{n+1} + (r(n+1))^n + \ldots + r(n+1) = 1\,.$$

Поэтому $r(n)$ монотонно убывают: $r(n) > r(n+1)$. При росте n корни $r(n)$ стремятся к r – положительному решению уравнения:

$$\ldots + r^n + \ldots + r = \frac{r}{1 - r} = 1 \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{1}{2}\,.$$

Мы получили, что $1 > r(n) > 1/2$, и $a_m(M)$, $c_m({}_1A/M^\tau)$ имеют дробный экспоненциальный рост с основанием $1 < 1/r(n) < 2$, строго растущим к 2 при росте n.

Список литературы

[1] Мальцев А. И. Об алгебрах с тождественными определяющими соотношениями // Матем. сб. 1950. Т. 26(68). № 1. С. 19–33.

[2] A. Giambruno, M. Zaicev Polynomial Identities and Asymptotic Methods // Mathematical Surveys and Monographs, AMS, Providence, RI. 2005. V. 122. 352 p.

[3] A. Giambruno, S. P. Mishchenko Polynomial growth of the codimensions: A characterization // Proc. Amer. Math. Soc. V. 138. № 3. March 2010. pp. 853–859.

[4] V. Drensky Relations for the cocharacter sequences of T-ideals // Proc. of the International Conference on Algebra Honoring A. Malcev, Contemp. Math. 131. 1992 (Part 2). pp. 285–300.

[5] Зайцев М.В., Мищенко С.П. Пример многообразия линейных алгебр с дробным полиномиальным ростом. // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика и механика. 2008. № 1. С. 25–31.

[6] Мищенко С. П. Пример многообразия линейных алгебр с дробным полиномиальным ростом меньшим трех // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2013. № 3. С. 51–54.

[7] A. Giambruno and M. Zaicev Exponential codimension growth of P.I. algebras: an exact estimate // Adv. Math. V. 142. 1999. pp. 221–243.

[8] S. P. Mishchenko, M. V. Zaicev An example of a variety of Lie algebras with a fractional exponent // Journal of Mathematical Sciences (New York). 1999. V. 93. № 6, pp. 977–982.

[9] Мищенко С.С. О росте многообразий коммутативных линейных алгебр // Фундаментальная и прикладная математика. 2008. Т. 14. № 5. С. 165–170.

[10] O. Malyusheva, S. Mishchenko, A. Verevkin Series of varieties of Lie algebras of different fractional exponents // Compt. rend. Acad. Bulg. Sci. 66. № 3. 2013. P. 321–330.

[11] O.A. Bogdanchuk, S.P. Mishchenko, A.B. Verëvkin On Lie algebras with exponential growth of the codimensions // Serdica Math. J. V. 40. 2014. № 3-4. P. 209–240.

[12] A. Giambruno, S. Mishchenko, M. Zaicev Codimensions of Algebras and Growth Functions // Adv. Math. 2008. 217. № 3. P. 1027-1052.

[13] Ершова Н. А., Чигарьков М. В. Пример многообразия с дробной экспонентой // Вестник МГАДА. 2013. № 1(20). С. 56–62.

[14] Курош А. Г. Неассоциативные свободные алгебры и свободные произведения алгебр // Матем. сб. 1947. Т. 20(62). № 2. С. 239–262.

[15] Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. М. : Наука.– 1985.– 448 с.

[16] Залесский А. Е., Михалёв А. В. Групповые кольца. – Итоги науки и техники. Современные проблемы математики.– Том 2.– ВИНИТИ, М., 1973.– С. 5—118.

[17] Кэртис Ч., Райнер И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. – М.: Наука.– 1969.

[18] Уфнаровский В. А. Комбинаторные и асимптотические методы в алгебре, Алгебра–6, – Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления.– Том 57, ВИНИТИ, М., 1990.– С. 5—177.

Ульяновский государственный университет.
Получено 1.06.2016

Список литературы

[1] Mal'tsev, A. I., 1950, "On algebras defined by identities", *Mat. Sb. (N.S.)*, 26(68):1 (1950), 19–33. (Russian)

[2] Giambruno, A., Zaicev, M., 2005, *"Polynomial Identities and Asymptotic Methods"*, Math. Surv. and Monographs, vol. 122, Providence, RI, Amer. Math. Soc., 352 pp.

[3] Giambruno, A., Mishchenko, S. P., 2010, "Polynomial growth of the codimensions: A characterization", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 138, No 3, March 2010, pp. 853–859.

[4] Drensky, V., 1992, "Relations for the cocharacter sequences of T-ideals", *Proc. of the International Conference on Algebra Honoring A. Malcev, Contemp. Math.*, 131 (Part 2), 285–300.

[5] Zaicev, M. V., Mishchenko, S. P., 2008, "An example of a variety of linear algebras with fractional-polynomial growth", *Moscow University Mathematics Bulletin*, 63, No 1, pp. 27–32.

[6] Mishchenko, S. P., 2013, "The example of linear algebras variety with fractional polynomial growth less than 3", *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1 Mat. Mekh.*, No 3, pp. 51–54. (Russian)

[7] Giambruno, A., and Zaicev, M., 1999, "Exponential codimension growth of P.I. algebras: an exact estimate", *Adv. Math.*, 142, pp. 221–243.

[8] Mishchenko, S. P., Zaicev, M. V., 1999, "An example of a variety of Lie algebras with a fractional exponent", *Journal of Mathematical Sciences (New York)*, V. 93, No 6, pp. 977–982.

[9] Mishchenko, S. S., 2011, "New example of a variety of lie algebras with fractional exponent", *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.*, No 6. P. 44–47; English translation in: *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2011, Vol. 66, No 6, pp. 264–266.

[10] Malyusheva, O., Mishchenko, S., Verevkin, A., 2013, "Series of varieties of Lie algebras of different fractional exponents", *Compt. rend. Acad. Bulg. Sci.*, 66, No 3, pp. 321–330.

[11] Bogdanchuk, O.A., Mishchenko, S. P., Verëvkin, A. B., 2014, "On Lie algebras with exponential growth of the codimensions", *Serdica Math. J.*, 40, No 3-4, pp. 209–240.

[12] Giambruno, A., Mishchenko, S., Zaicev, M., 2008, "Codimensions of Algebras and Growth Functions", *Adv. Math.*, 217, No 3, pp. 1027-1052.

[13] Yershova N. A., Chigarkov M. V., 2013, "The example of variety with fractional exponent", *Vestnik MGADA*, No 1(20), pp. 56–62. (Russian)

[14] Kurosh, A., 1947, "Non-associative free algebras and free products of algebras", *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.*, 20(62):2, pp. 239–262. (Russian)

[15] Bahturin, Y. A., 1985, *Identities in algebras Lie.* Science, Moscow, 448 pp.

[16] Zalesskii, A. E., Mikhalev, A. V., 1973, *Group rings*, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat., vol. 2, VINITI, Moscow, pp. 5–118. (Russian)

[17] Curtis, C. W., Reiner I., 1962, *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*, NY, London: Interscience Publishers a division of J. Wiley & Sons, 1942.

[18] Ufnarovski, V. A., 1990, *Combinatorial and asymptotic methods in algebra*, Algebra – 6, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr., 57, VINITI, Moscow, 1990, 5—177. (Russian)