Том 25, номер 1, 2019 ISSN 1609 - 3143

Физическое образование в вузах

Издательский Дом Московского Физического общества

УДК 537.8

Элементарный вывод уравнений Максвелла

Константин Александрович Томилин

Институт истории естествознания и техники им. С.И. Вавилова РАН
125315 Россия, Москва, ул. Балтийская, д. 14
Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет
125319 Россия, Москва, Ленинградский проспект, д. 64; e-mail: ktomilin@mail.ru

Дается простой вывод уравнений, математически идентичных уравнениям электродинамики Максвелла, выраженных через два поля **E** и **B**. Полностью физически идентичной уравнениям классической электродинамики система уравнений становится при учете линейных материальных уравнений между полями **E** и **D**, а также между **B** и **H** (или, что эквивалентно, линейного соотношения между *концентрацией потенциала*, введенной Дж.К. Максвеллом в 1873 г., и плотностью тока). При этом в качестве коэффициента пропорциональности выступает постоянная тонкой структуры α – безразмерная константа, характеризующая силу электромагнитного взаимодействия, в комбинации с размерными фундаментальными постоянными. Показано, что размерные постоянные μ_0, ε_0^{-1}, Z_0 и k_e, носившие первоначально в системе СИ конвенциональный характер, при современном переходе к квантовой метрологии приобретают фундаментальный смысл размерных констант электромагнитного взаимодействия.
Ключевые слова: уравнения Максвелла, классическая электродинамика, материальные уравнения, постоянная тонкой структуры, плотность тока, концентрация потенциала, дисперсия.

Введение

Преподавание уравнений классической электродинамики – уравнений Максвелла – представляет определенные трудности как из-за сложной дифференциальной формы уравнений в частных производных, так и разнообразия применяемых систем единиц (СИ, гауссовой, системы Лоренца–Хевисайда).

Уравнениями Максвелла принято называть следующие две пары уравнений, связывающие плотность свободных зарядов ρ_f, плотность тока свободных зарядов $\mathbf{J}_f$, вектор электрической индукции (смещения) **D**, напряженность магнитного поля **H**, напряженность электрического поля **E**, магнитную индукцию **B**:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = 0 \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0 \tag{1}$$

$$-\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{J}_f \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{D} = \rho_f, \tag{2}$$

к которым добавляются так называемые материальные уравнения (constitutive relations) с учетом векторов поляризации **P** и намагниченности вещества **M** или в случае изотропных сред – констант электрической и магнитной проницаемости вещества ε и μ:

$$\mathbf{E} = \varepsilon_0^{-1}(\mathbf{D} - \mathbf{P}) = \varepsilon^{-1}\varepsilon_0^{-1}\,\mathbf{D} \qquad (3)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu\mu_0\,\mathbf{H}\,.$$

Уравнения (1) носят ныне общепринятое название “первой пары” уравнений Максвелла, уравнения (2) – “второй пары” (в начале XX века применялась обратная нумерация). В пользу именно такой нумерации А. Зоммерфельд привел педагогические аргументы – последовательность нумерации должна соответствовать последовательности преподавания сначала электростатики (являющейся особым случаем “первой пары”), а затем – магнитостатики (являющейся особым случаем “второй пары”) [1, с. 39].

Такой вид уравнения Максвелла имеют в Международной системе (СИ). В гауссовой системе, которая широко применялась в XX веке, отсутствуют размерные постоянные ε_0^{-1} и μ_0. Переход от единиц системы СИ к гауссовой осуществляется путем включения размерных постоянных ε_0^{-1} и μ_0 в степени 1/2 в определения физических величин (см.: [2, с. 679], [3, с. 33-34]).

У самого Дж.К. Максвелла первая и вторая пары фигурировали в его статье “О физических силовых линиях” (1861) в виде дифференциальных соотношений (в компонентной форме) между **E** и μ**H,** а также плотностью тока **J**. В современной векторной форме максвелловские уравнения 1861 г. соответствуют уравнениям: $-\operatorname{rot}\mathbf{E} = \mu\dfrac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}$ и $\operatorname{rot}\mathbf{H} - \dfrac{1}{k^2}\dfrac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = 4\pi\,\mathbf{J}_f$ ([4, с. 141, 170], см. [5]). С точки зрения общепринятой ныне терминологии, первая и вторая пары уравнений (1) и (2) фигурировали у Максвелла в виде, совмещенном с “третьей парой” – материальными уравнениями (3). В “чистом” виде современная “первая пара” (т. е. соотношение между **E** и **B**) у Максвелла отсутствовала (очевидно, потому, что тождественно вытекала из определений полей **E** и **B** через потенциалы). “Первая пара” (1) появилась в статьях Дж. Пойнтинга (1884), О. Хевисайда (1885), Г. Герца (1890), и затем, в 1892 г., была включена Дж.Дж. Томсоном в примечание “Уравнения электромагнитного поля” к 3-ему изданию “Трактата” Дж.К. Максвелла. При этом О. Хевисайд использовал впервые векторную форму: $\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$, в то время как остальные – компонентную с различными обозначениями всех компонент.

Помимо форм уравнений с 4-мя полями применяются и формы уравнений с двумя полями **E** и **B** (это достигается при включении материальных уравнений (3) во вторую пару уравнений (2)):

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} + \operatorname{rot}\mathbf{E} = 0 \qquad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \qquad (4)$$

$$-\frac{\partial\mathbf{E}}{c^2\partial t} + \operatorname{rot}\mathbf{B} = \mu_0\,\mathbf{J} \qquad \operatorname{div}\mathbf{E} = \varepsilon_0^{-1}\rho\,,$$

При этом следует помнить, что при переходе к системе из двух полей в правой части появляются уже *полные* плотности заряда ρ и тока **J**, которые являются суммой плотностей токов свободных и связанных зарядов, определяющих поляризацию **P** и намагниченность вещества **M**: $\rho = \rho_f + \rho_b$ и $\mathbf{J} = \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_b$, где $\rho_b = -\mathrm{div}\,\mathbf{P}$ и $\mathbf{J}_b = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathrm{rot}\,\mathbf{M}$.

Изучение уравнений Максвелла в высших учебных заведениях, как правило, сводится к заучиванию и воспроизведению форм уравнений (1)–(3) без понимания смысла этих уравнений и их связи с основополагающими принципами.

А. Эйнштейн в лекции "О методе теоретической физики", прочитанной в Оксфорде в 1933 г., размышляя над соотношением математики и эксперимента в физических теориях, описывающих взаимодействия, как раз сформулировал принципы, на которых базируются две известные в то время теории взаимодействия – релятивистская теория гравитации и классическая электродинамика: "Весь предшествующий опыт убеждает нас в том, что природа представляет собой реализацию простейших математически мыслимых элементов. Я убежден, что посредством чисто математических конструкций мы можем найти те понятия и закономерные связи между ними, которые дадут нам ключ к пониманию явлений природы. <...> Поэтому я считаю <...>, что чистое мышление в состоянии постигнуть реальность. Чтобы обосновать эту уверенность, я вынужден применить математические понятия. Физический мир представляется в виде четырехмерного континуума. Если я предполагаю в нем риманову метрику и спрашиваю, каковы простейшие законы, которые могут удовлетворить такой метрике, я прихожу к релятивистской теории гравитации для пустого пространства. Если в этом пространстве я предполагаю векторное поле или полученное из него антисимметричное тензорное поле и спрашиваю, каковы простейшие законы, которые могут удовлетворить такому полю, я прихожу к максвелловым уравнениям для вакуума" [6].

Таким образом, А. Эйнштейн указывает, во-первых, на 4-мерное пространство-время (мир Минковского) как основополагающий элемент физической картины мира. Во-вторых, что классическую электродинамику можно описывать с помощью векторов или антисимметричных тензоров (это является следствием унитарной симметрии U(1), которой подчиняется классическая электродинамика). Третье условие Эйнштейна – простейшая (т.е. линейная) форма уравнений. Линейная форма уравнений электродинамики является прямым следствием *принципа линейной суперпозиции* – сила действия нескольких источников является суммой сил от каждого источника в отдельности.

Эти три условия, действительно, полностью характеризуют математический аппарат классической электродинамики, но с точки зрения физики требуют дополнения еще одним, четвертым условием. Для построения теорий взаимодействия в полном виде необходимо в теорию привлечь еще характерные *константы взаимодействия*, которые характеризуют силы взаимодействий: в гравитации это гравитационная постоянная G, в слабом взаимодействии – постоянная Ферми G_F, в квантовой хромодинамике –

безразмерная постоянная α_s, а в электродинамике – безразмерная постоянная тонкой структуры α = 0,0072973525664(17) (обратное значение α^{-1} = 137,035999139(31) [7]). Численные значения констант взаимодействий берутся из опыта – попытки их вывести теоретически пока не увенчались успехом.

Постоянная тонкой структуры была введена в физику А. Зоммерфельдом в 1915 г. как отношение двух импульсов (ее историю см.: [8]), ее название связано с тем, что она появилась при исследовании тонкой структуры спектральных линий. Ее физический смысл как *безразмерной константы, характеризующей силу электромагнитного взаимодействия*, выяснился значительно позже, только в середине XX века. Постоянная тонкой структуры α входит в потенциальную энергию (напомним, что потенциальная энергия определяется как взятая с обратным знаком работа по перемещению частицы от данной точки до бесконечности) между двумя притягивающимися элементарными частицами (например, между электроном и протоном):

$$\mathrm{U} = -\frac{\alpha}{r}\hbar c\,, \tag{5}$$

(см., например: [9, с.60]) и в закон Кулона, если его записывать в форме, независящей от единиц измерения:

$$F = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2}\,, \tag{6}$$

где кулоновская постоянная $k_e = \alpha\,\dfrac{\hbar c}{e^2}$ [10, 11]. Однако в уравнениях электродинамики Максвелла (1)–(3), из которых вытекают уравнения (5) и (6), константа α в явном виде не фигурирует! Это связано с тем, что уравнения Максвелла записываются не в универсальном виде, независящем от выбора единиц, а в различных специфических системах единиц и α там фигурирует в скрытом виде. Запись уравнений Максвелла в универсальной форме приводит к появлению в уравнениях электродинамики постоянной тонкой структуры α в явном виде (см. ниже).

Рассмотрим систему уравнений (4) с точки зрения их математической структуры с учетом определений величин, которые в них фигурируют.

1. Элементарный вывод двух пар уравнений Максвелла

Введем операторы p и q, обладающие свойством коммутативности по отношению к векторам (например, это могут быть изменения длин вектора, смещения, повороты и т.п.).

Тогда можно записать следующие уравнения:

$$\begin{aligned} &p(q\boldsymbol{a}) - q(p\boldsymbol{a}) = 0 \\ &q(q\boldsymbol{a}) - p(p\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{b}\,, \end{aligned} \tag{7}$$

где $\boldsymbol{a}$ – некоторый произвольный вектор, а вектор $\boldsymbol{b}$ является результатом действия операторов p и q на вектор $\boldsymbol{a}$. При этом первое уравнение отражает то, что порядок применения коммутативных операторов не влияет на результат. Так, в случае операторов поворота и смещения мы получаем один и тот же вектор, независимо от порядка применения этих операторов. Второе уравнение выражает то, что к вектору применяется дважды один и тот же оператор, и применение дважды другого оператора, не тождественного первому, естественно, дает другой результат. Поэтому первое уравнение тождественно равно нулю вследствие коммутативности операторов $(pq - qp)\boldsymbol{a} \equiv 0$, а второе – в общем случае при разных операторах нулю не равно $(q^2 - p^2)\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \not\equiv 0$.

Введя обозначения $\mathbf{X} = p\boldsymbol{a}$ и $\mathbf{Y} = q\boldsymbol{a}$, получаем уравнения:

$$p\,\mathbf{Y} - q\,\mathbf{X} \equiv 0 \tag{8}$$

$$q\,\mathbf{Y} - p\,\mathbf{X} = \boldsymbol{b} \not\equiv 0\,.$$

Как видим, в уравнениях (8) явная не симметрия по правой части, *обусловленная определениями* $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$.

Теперь под операторами p и q будем подразумевать операторы дифференцирования, которые также являются коммутативными:

$$p = \frac{\partial}{\partial \tau} = \partial_\tau$$

$$q = \mathrm{rot}, \tag{9}$$

где $(\mathrm{rot})_{ij} = \dfrac{\partial_j}{\partial x^i} - \dfrac{\partial_i}{\partial x^j}$ при $i, j = 1, 2, 3$.

Отметим, что оператор p в качестве $p = \dfrac{\partial}{\partial t}$ использовал еще в 1888 г. О. Хевисайд именно в упрощенной записи уравнений Максвелла. Тогда система уравнений имеет вид:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{X} - \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \tau} = 0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \tau} - \mathrm{rot}\,\mathbf{Y} = \mathbf{b}\,,$$

при этом $\mathbf{X} = \dfrac{\partial\,\mathbf{A}}{\partial \tau}$ и $\mathbf{Y} = \mathrm{rot}\ \mathbf{A}$.

Очевидно, что уравнения (10) структурно идентичны уравнениям Максвелла в векторной форме. Чтобы их сопоставить, выполним следующие преобразования переменных: $\tau = ict$ и $\mathbf{b} = \dfrac{\partial\,\mathbf{U}}{\partial \tau} - \mathbf{V}$, где $\mathbf{U} = ic^{-1}\mathrm{grad}\varphi$, φ – произвольная скалярная функция, $\mathbf{V}$ – некоторый вектор. Введя обозначения $\mathbf{X} - \mathbf{U} = ic^{-1}\mathbf{E}$, $\mathbf{Y} = \mathbf{B}$, $V_0 = \mathrm{div}\mathbf{E}$, получаем:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \mathrm{t}} + \mathrm{rot}\,\mathbf{E} = 0 \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0 \tag{11}$$

$$-\frac{\partial \mathbf{E}}{c^2 \partial \mathrm{t}} + \mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \mathbf{V} \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{E} = \mathrm{V}_0\,.$$

Отождествим теперь математические величины с физическими: φ – со скалярным потенциалом, $\mathbf{A}$ – с векторным потенциалом, c – со скоростью света в вакууме, t – с временем. Тогда в силу аналогичности определений $\mathbf{E} = -ic(\mathbf{X} - \mathbf{U}) = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\varphi$ эквивалентно вектору напряженности электрического поля, $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$ – вектору магнитной индукции. Очевидно, что уравнения (11) при $\mathbf{V} = 0$ и $V_0 = 0$ эквивалентны однородным уравнениям Максвелла, выраженным через два поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ и структурно эквивалентны неоднородным уравнениям Максвелла (4). При этом уравнения (11) получены без какой-либо привязки к электродинамике и выполняются *для любых произвольных дифференцируемых векторов* в силу математических определений векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$.

Таким образом, *форму* дифференциальных уравнений (4), на которую делается основной упор в преподавании классической электродинамики, никак нельзя рассматривать как характерную только для электродинамики – аналогичная форма уравнений (11) является формой чисто математических соотношений, выполняющихся как в электродинамике, так и вне электродинамики – в принципе они справедливы для любых векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ при их аналогичном определении с помощью дифференциальных операторов. Где же заключены в таком случае собственно уравнения электродинамики?

2. Линейные уравнения электродинамики

Принципиальным отличием системы математических уравнений (11) от физических уравнений Максвелла (4) является то, что вторая пара в (11) носит характер определений V_0 и $\mathbf{V}$, в то время как вторая пара в (4) – характер физического закона. Из сравнения (11) и (4) очевидно, что их полная эквивалентность достигается при предположении линейных соотношений:

$$\mathrm{V}_0 = \varepsilon_0^{-1}\rho \qquad (12)$$

$$\mathbf{V} = \mu_0\,\mathbf{J}$$

(в системе СИ).

Или, что эквивалентно, при предположении линейности материальных уравнений (3), поскольку (12) можно получить из уравнений (3), применяя к этим уравнениям операторы rot, div и $\frac{\partial}{\partial t}$. В самом деле,

$$\mathrm{V}_0 = \mathrm{div}\,\mathbf{E} = \varepsilon_0^{-1}(\mathrm{div}\,\mathbf{D} - \mathrm{div}\,\mathbf{P}) = \varepsilon_0^{-1}(\rho_\mathrm{f} + \rho_\mathrm{b}) = \varepsilon_0^{-1}\rho$$

$$\mathbf{V} = -\frac{\partial \mathbf{E}}{c^2 \partial t} + \mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \mu_0\left(-\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathrm{rot}\,\mathbf{H} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \mathrm{rot}\,\mathbf{M}\right) = \mu_0(\mathbf{J}_\mathrm{f} + \mathbf{J}_\mathrm{b}) = \mu_0\,\mathbf{J}\,.$$

Таким образом, единственной физической гипотезой, которая привлекается для вывода уравнений Максвелла, является предположение линейности материальных уравнений (constitutive relations) в форме линейной пропорциональности (3) или (12), что отражает принцип линейной суперпозиции, на котором основана классическая электродинамика. Из вышеприведенного анализа следует очевидный вывод, что собственно уравнениями электродинамики следует рассматривать именно “третью пару” (3) или (12), а не “первую” (1) и “вторую” (2) , выводимых чисто математически. При этом выбор линейных материальных уравнений приводит к линейной электродинамике, выбор нелинейных материальных уравнений – к нелинейной электродинамике.

В электродинамике до сих пор используются различные специфические системы единиц – СИ, гауссова, Лоренца–Хевисайда, и наличие тех или иных коэффициентов в уравнениях зависит от выбора системы единиц. Очевидно, что уравнения электродинамики следует записывать в форме, независящей от выбора единиц измерения. Этого можно достичь, используя фундаментальные физические постоянные в качестве универсальных коэффициентов при физических величинах. Вектор **V** имеет динамическую размерность и обратно пропорционален заряду $[\mathbf{V}] = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{LTQ}}$, этот вектор относится по своей природе к *интенсивным* величинам, в то время как вектор плотности тока **J** не имеет динамической размерности, он относится к *экстенсивным* (количественным) величинам и его размерность прямо пропорциональна заряду $[\mathbf{J}] = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{L^2T}}$. Аналогичное различие в размерностях между скалярными величинами $[\mathrm{V}_0] = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{T^2Q}}$ и плотностью заряда $[\rho] = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{L^3}}$. Нормировка на фундаментальные постоянные c, $\hbar$ и e, имеющие размерности $[c] = \mathrm{L/T}$, $[\hbar] = \mathrm{ML^2/T}$ и $[e] = \mathrm{Q}$, показывает, что размерности скаляров $[e\mathrm{V}_0/\hbar c] = [\rho/e] = \frac{1}{\mathrm{L^3}}$ совпадают, точно так же как и размерности векторов $[e\,\mathbf{V}/\hbar] = [\mathbf{J}/ec] = \frac{1}{\mathrm{L^3}}$.

Принцип линейной суперпозиции, соответствующий принципу простоты, приводит к гипотезе, что вектор **V** линейно пропорционален вектору плотности тока **J**, а V_0 пропорционален плотности заряда ρ. Неслучайно, давая определения физических величин чисто математически, термин “наша гипотеза” (our hypothesis) Дж.К. Максвелл использовал именно для материальных уравнений (3) [12, т. 2, с. 211].

Размерные коэффициенты, являющиеся комбинациями фундаментальных постоянных, можно сразу получить методом анализа размерностей. Однако этот метод не дает безразмерные коэффициенты, которые можно получить только из опыта. Выводя из уравнения $V_0 \sim \rho$ уравнение для потенциальной энергии (6) или закон Кулона (7), получаем, что коэффициент пропорциональности равен $4\pi\alpha = 0{,}091701236853(21)$, где α – постоянная тонкой структуры.

Таким образом:

$$\mathrm{V}_0 = 4\pi\alpha \cdot \frac{\hbar c}{e^2} \cdot \rho \qquad (13)$$

$$\mathbf{V} = 4\pi\alpha \cdot \frac{\hbar}{e^2 c} \cdot \mathbf{J}\,.$$

Эти уравнения и есть *уравнения электродинамики Максвелла* в самой простой, линейной форме. В электростатической системе (а также в гауссовой) для упрощения коэффициентов в уравнениях электродинамики принимается по определению $e^2 = \alpha\hbar c$ (в законе Кулона это соответствует выбору коэффициента равным 1) и первое уравнение из (13) принимает форму: $V_0 = 4\pi\rho$. Именно это уравнение было написано Дж.К. Максвеллом в словесной форме: “Мы можем выразить уравнение Пуассона словами, сказав, что плотность электричества, умноженная на 4π, есть концентрация потенциала. Там, где нет заряда, нет концентрации потенциала, в этом и заключается интерпретация уравнения Лапласа” [13, p. 80]. Здесь заключалась главная идея: *концентрация потенциала линейно пропорциональна плотности электрического заряда*. В общем случае, как мы видим, в качестве коэффициента пропорциональности выступает константа электромагнитного взаимодействия $4\pi\alpha$ в комбинации с размерными фундаментальными постоянными.

Термин “концентрация потенциала” (“the concentration of the potential”) – вовсе не случайное выражение у Максвелла. В 1871 г. Максвелл ввел понятие концентрации величины как результат применения оператора Лапласа к этой величине, взятый с обратным знаком: “Прежде всего, я предлагаю назвать результат ∇^2 (оператор Лапласа с обратным знаком) *Концентрацией* (*Concentration*) величины, к которой он применен” [14, с. 45][1]. При этом он дал ее ясный геометрический смысл как *превышения (excess) значения величины в точке над ее средним значением в окрестности*. Это же определение было дано Максвеллом и во введении к “Трактату” [13, p. 29]. В 1881 г. это максвелловское понятие было оценено Дж.У. Гиббсом, предложившим в своих лекциях по векторному анализу понятие дисперсии (dispersion), отличающееся от максвелловской концентрации только знаком с аналогичной геометрической интерпретацией (как превышения среднего значения в окрестности над значением в точке) [15, p. 37], [16, p. 172]. При этом среднее по окрестности рассчитывалось Гиббсом по сфере, а Максвеллом – по объему шара при стремлении радиуса к нулю. К сожалению, несмотря на ясную геометрическую интерпретацию, ни максвелловское понятие концентрации величины, ни гиббсовское понятие дисперсии не получили распространения в научной и учебной литературе по физике. Введение Дж.К. Максвеллом понятия концентрации величины отмечалось, в основном, только историками математики [17, p. 131, 135]. Также на полезность максвелловской геометрической интерпретации лапласиана обратил

---

[1] Русский перевод уточнен по оригиналу статьи 1871 г.: “And, first, I propose to call the result of ∇^2 (Laplace's operation with the negative sign) the *Concentration* of the quantity to which it is applied.” (курсив Максвелла). При публикации русского перевода этой статьи Максвелла в сборнике [14] некоторые формулы были приведены с искажениями.

внимание в 1965 г. физик Дж.МакДональд, предложивший название *локальной аномалии* [18].

Однако Максвелл, как видим, не только дал общее определение концентрации и ее геометрическую интерпретацию, но и применил это понятие в своем "Трактате" в электростатике, введя понятие концентрации потенциала, разделившего дифференциальное уравнение Пуассона на математическое определение концентрации потенциала и линейное уравнение между концентрацией скалярного потенциала и плотностью заряда. В этом разделении чисто математических (дифференциальных) определений физических величин и линейных физических законов как раз и заключается полезность этой величины. Также Максвелл во введении указал, что понятие концентрации применимо не только к скалярам, но и к векторам, а в конце главы "Общие уравнения электромагнитного поля" выразил также в виде уравнения Пуассона закон электродинамики между векторным потенциалом и обобщенным им понятием плотности тока (за счет добавления к обычной плотности тока $\mathbf{J}$ тока смещения $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$). Это уравнение, очевидно, можно интерпретировать как линейное соотношение между концентрацией векторного потенциала и максвелловским истинным током (true current).

К сожалению, хотя Максвелл ввел величину *концентрация потенциала*, но не дал ей специального символьного обозначения, и, соответственно, не включил эту величину в систему физических величин, приведенных им во втором томе "Трактата" [12, т. 2, с. 213]. Поэтому введение Максвеллом этого понятия и выражение им законов электростатики, а затем и электродинамики в линейной форме, осталось вне поля зрения как физиков, так и историков физики. Однако в нескольких работах 1960-80-х гг. разными авторами (Дж. Джексоном и др.) использовалась аналогичная величина как вспомогательный 4-х вектор (об этом ниже).

Материальные уравнения в универсальной форме, независящей от выбора единиц измерения, имеют вид:

$$\mathbf{E} = 4\pi\alpha \cdot \frac{\hbar c}{e^2} \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{P}) \tag{14}$$

$$\mathbf{B} = 4\pi\alpha \cdot \frac{\hbar}{e^2 c} \cdot (\mathbf{H} + \mathbf{M})\,.$$

Поскольку именно в них фигурирует константа электромагнитного взаимодействия, а не в уравнениях (1)–(2), то именно уравнения (3, 13, 14) и есть, собственно, уравнения классической электродинамики, выражающие линейные соотношения между экстенсивными величинами **D**, **P**, **H**, **M**, характеризующими количество электромагнитной материи, и интенсивными величинами **E** и **B**, характеризующими силу ее действия, с константой электромагнитного взаимодействия $4\pi\alpha$ как коэффициентом пропорциональности. Отметим, что различие между интенсивными (intensity) и экстенсивными величинами (quantity) электромагнетизма было понято еще М. Фарадеем из анализа закона Ома и отмечено Дж.К. Максвеллом в статье "О Фарадеевых силовых линиях" как "очень полезное" [19, с. 50], затем фактически лежало в основе классификации Максвеллом физических величин [12, т. 2, с. 217], а в дальнейшем это было развито в работах Г. Ми и А. Зоммерфельда, который подчеркивал "фундаментальное различие" (fundamentale Unterscheidung) между ними уже в самих уравнениях Максвелла [1, с. 11, с. 297]. Дифференциальные же соотношения (1)–(2) отражают *математические определения* физических величин с помощью дифференциальных операторов, они выполняются, как было показано выше, для произвольных дифференцируемых векторов при аналогичных определениях. Поскольку в них отсутствует константа взаимодействия, их следует называть *математическими уравнениями* классической электродинамики, в отличие от *физических уравнений* электродинамики (материальных уравнений и др.), содержащих константу электромагнитного взаимодействия α.

В выводе уравнений Максвелла были использованы два пункта из указанных А. Эйнштейном – векторный характер величин электродинамики, что является следствием унитарной симметрии U(1), и принцип простоты (линейность материальных уравнений), а также эмпирическая константа α, характеризующая силу электромагнитного взаимодействия.

3. Размерные константы электромагнитного взаимодействия

Другой важный вывод заключается в том, что если ввести *определения* размерных постоянных $\varepsilon_0^{-1} = 4\pi\alpha \cdot \frac{\hbar c}{e^2}$, $\mu_0 = 4\pi\alpha \cdot \frac{\hbar}{e^2 c}$, $Z_0 = 4\pi\alpha \cdot \frac{\hbar}{e^2}$ (волновое сопротивление вакуума) и $k_\text{e} = \alpha \frac{\hbar c}{e^2}$ (кулоновская постоянная) [10, 20, 21], то эти постоянные следует рассматривать как *размерные постоянные электромагнитного взаимодействия* [22]. При этом $4\pi\alpha$ является численным значением постоянных ε_0^{-1}, μ_0 и Z_0 (α – для кулоновской постоянной k_e) при выборе постоянных c, $\hbar$ и e в качестве фундаментальных единиц измерения. Отметим, что осуществленная в ноябре 2018 г. реформа метрологии как раз основана на принятии постоянных c, $\hbar$ и e (а также постоянной Больцмана k) как эталонов (единицами измерения выступают формально не сами эти постоянные, а некоторые точные количества от этих постоянных с тем, чтобы практические меры не изменились), что, в частности, приводит в рамках СИ именно к таким определениям констант ε_0^{-1}, μ_0, Z_0 и k_e.

Таким образом, постоянные ε_0^{-1}, μ_0, волновое сопротивление вакуума Z_0 и кулоновская постоянная k_e, которые в старой системе СИ носили метрологический, конвенциональный характер, связанный с выбором единиц измерения, в результате чего подвергались критике [3, с. 35–36], [23–28 и др.], в новой, квантовой системе СИ приобретают *фундаментальный смысл* размерных констант электромагнитного взаимодействия.

4. Четырехмерность пространства-времени

С современной точки зрения следует учитывать открытую Г. Минковским в 1907 г., в развитие идей А. Эйнштейна и А. Пуанкаре, 4-мерность пространства-времени. При этом оказалось, что скалярный φ и векторный **A** потенциалы образуют единый 4-вектор $\mathrm{A}^{\mu} = (\varphi / c, \mathbf{A})$. Аналогично плотность заряда ρ и плотность тока **J** образуют 4-вектор тока $\mathrm{J}^{\mu} = (c\rho, \mathbf{J})$, а V_0 и **V** являются компонентами 4-вектора концентрации потенциала $\mathrm{V}^{\mu} = (\mathrm{V}_0 / c, \mathbf{V})$. Отметим, что еще Дж. Джексон указывал, что $\operatorname{div}\mathbf{E}$ и $\operatorname{rot}\mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ являются компонентами 4-х-вектора (а это и есть 4-х-вектор концентрации потенциала в гауссовой системе), представляющий собой дивергенцию тензора электромагнитного поля [2, с. 417]. Однако использование гауссовой системы не позволило Дж. Джексону понять, что это принципиально другой вектор, чем плотность тока **J**. Между тем еще А. Зоммерфельд обращал внимание на принципиальное различие между div**E** и плотностью заряда ρ, поскольку “div**E** выражает не заряд, а дивергенцию силовых линий” [1, с. 11].

Напряженность электрического поля **E** и магнитная индукция **B** образуют 4-тензор электромагнитного поля 2-го ранга $F_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathrm{A}_{\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \mathrm{A}_{\mu}}{\partial x^{\nu}}$. Электрическая индукция (смещение) **D** и напряженность магнитного поля **H** являются компонентами другого тензора $G^{\mu\nu}$ (как называл его А. Зоммерфельд – Erregungstensor – тензора возбуждения, ныне используется англоязычный аналог Excitation [29]). В контравариантной форме они имеют вид:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{E}_x / c & -\mathrm{E}_y / c & -\mathrm{E}_z / c \\ \mathrm{E}_x / c & 0 & -\mathrm{B}_z & \mathrm{B}_y \\ \mathrm{E}_y / c & \mathrm{B}_z & 0 & -\mathrm{B}_x \\ \mathrm{E}_z / c & \mathrm{B}_y & \mathrm{B}_x & 0 \end{pmatrix},$$

$$G^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -c\mathrm{D}_x & -c\mathrm{D}_y & -c\mathrm{D}_z \\ c\mathrm{D}_x & 0 & -\mathrm{H}_z & \mathrm{H}_y \\ c\mathrm{D}_y & \mathrm{H}_z & 0 & -\mathrm{H}_x \\ c\mathrm{D}_z & \mathrm{H}_y & \mathrm{H}_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Тензоры в ковариантной форме $F_{\mu\nu}$ и $G_{\mu\nu}$ отличаются от тензоров в контравариантной форме противоположными знаками, соответственно, у компонент вектора напряженности электрического поля **E** и вектора электрической индукции **D**.

Применяя 4-мерный оператор дифференцирования $\partial_{\mu} = \left(\frac{\partial}{c\partial \mathrm{t}}, \nabla \right)$ к этим тензорам получаем, соответственно, 4-вектор концентрации потенциала V^ν и 4-вектор плотности тока J_f^ν:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \left(\frac{\partial}{c\partial \mathrm{t}}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}, \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\right)\cdot\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{E}_x/c & -\mathrm{E}_\mathrm{y}/c & -\mathrm{E}_\mathrm{z}/c \\ \mathrm{E}_x/c & 0 & -\mathrm{B}_\mathrm{z} & \mathrm{B}_\mathrm{y} \\ \mathrm{E}_\mathrm{y}/c & \mathrm{B}_\mathrm{z} & 0 & -\mathrm{B}_x \\ \mathrm{E}_\mathrm{z}/c & \mathrm{B}_\mathrm{y} & \mathrm{B}_x & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(c^{-1}\mathrm{div}\,\mathbf{E}, -\frac{\partial \mathbf{E}}{c^2\partial \mathrm{t}} + \mathrm{rot}\,\mathbf{B}\right) = \left(\mathrm{V}_0/c, \mathbf{V}\right) = \mathrm{V}^\nu \tag{15}$$

$$\partial_\mu G^{\mu\nu} = \left(\frac{\partial}{c\partial \mathrm{t}}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}, \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\right)\cdot\begin{pmatrix} 0 & -c\mathrm{D}_x & -c\mathrm{D}_\mathrm{z} & -c\mathrm{D}_\mathrm{z} \\ c\mathrm{D}_x & 0 & -\mathrm{H}_\mathrm{z} & \mathrm{H}_\mathrm{y} \\ c\mathrm{D}_\mathrm{z} & \mathrm{H}_\mathrm{z} & 0 & -\mathrm{H}_x \\ c\mathrm{D}_\mathrm{z} & -\mathrm{H}_\mathrm{y} & \mathrm{H}_x & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(c\,\mathrm{div}\,\mathbf{D}, -\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathrm{t}} + \mathrm{rot}\,\mathbf{H}\right) = \left(c\rho, \mathbf{J}_f\right) = \mathrm{J}_f^\nu. \tag{16}$$

Кратко эти уравнения можно записать в виде: $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mathrm{V}^\nu$ и $\partial_\mu G^{\mu\nu} = \mathrm{J}_f^\nu$, они имеют явный характер математических определений физических величин, а не физических законов, поскольку не содержат константы взаимодействия и математически связывают между собой только величины одного рода, соответственно – интенсивные $F^{\mu\nu}$ и V^ν и экстенсивные $G^{\mu\nu}$ и J_f^ν.

Чтобы получить “первую пару” уравнений Максвелла (1), нужно применить 4-мерный оператор дифференцирования $\left(\frac{\partial}{c\partial \mathrm{t}}, \nabla\right)$ к дуальному тензору электромагнитного поля:

$$\left(\frac{\partial}{c\partial \mathrm{t}}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}, \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\right)\cdot\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{B}_x & -\mathrm{B}_\mathrm{z} & -\mathrm{B}_\mathrm{z} \\ \mathrm{B}_x & 0 & \mathrm{E}_\mathrm{z}/c & -\mathrm{E}_\mathrm{y}/c \\ \mathrm{B}_\mathrm{z} & -\mathrm{E}_\mathrm{z}/c & 0 & \mathrm{E}_x/c \\ \mathrm{B}_\mathrm{z} & \mathrm{E}_\mathrm{y}/c & -\mathrm{E}_x/c & 0 \end{pmatrix} = \left(\mathrm{div}\,\mathbf{B}, -\frac{\partial \mathbf{B}}{c\partial \mathrm{t}} - c^{-1}\mathrm{rot}\,\mathbf{E}\right) =$$

$$= \left(\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\mathbf{A}), -\frac{\partial(\mathrm{rot}\,\mathbf{A})}{c\partial \mathrm{t}} + c^{-1}\mathrm{rot}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathrm{t}}\right) + c^{-1}\mathrm{rot}\,(\mathrm{grad}\,\varphi)\right) \equiv 0 \tag{17}$$

Равенство нулю получается вследствие определений полей **E** и **B** через векторный потенциал **A**, математических тождеств векторного анализа $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\mathbf{A}) \equiv 0$ и $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\varphi) \equiv 0$, и коммутативности частных производных. Кратко это тождество можно записать в виде: $\partial_\mu \widetilde{F}^{\mu\nu} \equiv 0$, где $\widetilde{F}^{\mu\nu}$ – дуальный тензор, который можно получить из тензора электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ путем его умножения на полностью антисимметричный тензор Леви-Чивиты 4-го ранга $\varepsilon^{\mu\nu kl}$: $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu kl}F_{kl}$. Через обычный тензор электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ "первая пара" уравнений Максвелла записывается в виде тождества Бьянки:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} = 0\,. \tag{18}$$

"Третья пара" (материальные уравнения, т.е. собственно *физические уравнения* электродинамики) записываются в виде линейного уравнения между тензорами электромагнитного поля и возбуждения (т.е. между интенсивной и экстенсивной величиной):

$$F^{\mu\nu} = \mu_0 G^{\mu\nu}\,. \tag{19}$$

Отметим, что линейное уравнение между двумя тензорами, аналогичное уравнению (19) для вакуума фигурировало еще в классическом учебнике по электродинамике А. Зоммерфельда, причем было помещено им даже в предисловие [1, с. 13, с. 298].

В случае вещества к тензору возбуждения добавляется тензор поляризации-намагничения $\mathrm{M}_{\mu\nu}$, состоящий из компонент векторов поляризации **P** и намагничивания **M**:

$$M_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -c\mathrm{P}_x & -c\mathrm{P}_\mathrm{y} & -c\mathrm{P}_\mathrm{z} \\ c\mathrm{P}_x & 0 & -\mathrm{M}_\mathrm{z} & \mathrm{M}_\mathrm{y} \\ c\mathrm{P}_\mathrm{y} & \mathrm{M}_\mathrm{z} & 0 & -\mathrm{M}_x \\ c\mathrm{P}_\mathrm{z} & \mathrm{M}_\mathrm{y} & \mathrm{B}_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в 4-мерном пространстве-времени уравнения электродинамики в универсальной форме, независящей от выбора единиц измерения, выражаются в виде линейных соотношений между тензорами (см., напр., [30, с. 183]):

$$F_{\mu\nu} = \mu_0(G_{\mu\nu} + M_{\mu\nu}) = 4\pi\alpha\cdot\frac{\hbar}{e^2c}\cdot(G_{\mu\nu} + M_{\mu\nu}) \tag{20}$$

или 4-х векторами концентрации потенциала и плотности тока [22]:

$$\mathrm{V}^{\mu} = \mu_0 J^{\mu} = 4\pi\alpha\cdot\frac{\hbar}{e^2c}\cdot J^{\mu}\,, \tag{21}$$

где 4-вектор концентрации потенциала определяется как производная от контравариантного тензора электромагнитного поля, согласно (15):

$$\mathrm{V}^{\nu} = \partial_{\mu}F^{\mu\nu}\,,$$

а 4-плотность тока является суммой плотностей токов свободных и связанных зарядов: $J^{\mu} = J^{\mu}_f + J^{\mu}_b$, где $J^{\nu}_f = \partial_{\mu}G^{\mu\nu}$ и $J^{\nu}_b = \partial_{\mu}M^{\mu\nu}$.

Другое определение 4-вектора концентрации потенциала можно дать с использованием оператора Даламбера как обобщения оператора Лапласа на 4-мерное пространство-время Минковского.

$$\mathrm{V}^{\nu} = \partial^{\mu}\partial_{\mu}\mathrm{A}^{\nu}. \qquad (22)$$

Эти два определения концентрации потенциала отличаются только на слагаемое $\partial^{\nu}(\partial_{\mu}\mathrm{A}^{\mu})$, а при выборе калибровочного условия Л. Лоренца $\partial_{\mu}\mathrm{A}^{\mu} = 0$ являются эквивалентными.

В дифференциальной (или интегральной) форме уравнения электродинамики выражаются в том случае, если в одном уравнении совмещаются как *линейные уравнения электродинамики* (19)-(21), так и *дифференциальные (или интегральные) определения* физических величин $F_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathrm{A}_{\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \mathrm{A}_{\mu}}{\partial x^{\nu}}$ или (15), (16), (22), например:

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu} = \mu_0 J^{\nu} \qquad (23)$$

$$\partial^{\mu}\partial_{\mu}\mathrm{A}^{\nu} - \partial^{\nu}(\partial_{\mu}\mathrm{A}^{\mu}) = \mu_0 J^{\nu},$$

где коэффициент пропорциональности $\mu_0 = 4\pi\alpha \cdot \frac{\hbar}{e^2 c}$.

Понятие Дж.У. Гиббса дисперсии величины, обратное по знаку понятию концентрации Максвелла, возможно, даже более удобно для преподавания. Еще в средней школе учащиеся усваивают, что ток в линейных проводниках пропорционален разности потенциалов (закон Ома). В общем случае речь должна идти не о линейных структурах, а об объемных средах, соответственно об объемных распределениях потенциала, меняющегося и со временем, и векторах плотности тока. Уравнения электродинамики Максвелла поэтому можно выразить так: *плотность электрического тока пропорциональна дисперсии потенциала*.

Выводы

Уравнения, математически идентичные “первой” и “второй” парам уравнений Максвелла, выраженных через два поля **E** и **B**, выполняются для любых произвольных дифференцируемых векторов, причем (1) является тождеством. Полностью физически идентичной уравнениям электродинамики система уравнений становится при учете линейных материальных соотношений (3), (12)–(14). Поэтому уравнения (1) и (2) следует рассматривать как *математические уравнения* электродинамики, отражающие систему определений интенсивных (“первая пара”) и экстенсивных (“вторая пара”) величин с помощью дифференциальных операторов и не содержащих константу электромагнитного взаимодействия. *Физическими уравнениями* электромагнитного взаимодействия являются любые соотношения между интенсивными и экстенсивными величинами, в том числе линейные уравнения (3), (12)–(14), содержащие в общем виде константу электромагнитного взаимодействия α. Дифференциальные уравнения (1)–(2) относятся к системе определений физических величин электродинамики через математические операторы, причем (1) является тождеством. Уравнения электродинамики выражаются также и в дифференциальной (или интегральной) формах при совмещении линейных материальных уравнения (3), (12)–(14) с теми или иными дифференциальными (или интегральными) определениями физических величин. Введение 4-вектора концентрации потенциала (в развитие величины "концентрация потенциала", введенной Дж.К. Максвеллом, и "дисперсии", введенной Дж.У. Гиббсом) приводит к наиболее простой, линейной форме уравнений Максвелла как соотношения между 4-концентрацией (дисперсией) потенциала и 4-плотностью тока с постоянной тонкой структуры как коэффициентом пропорциональности. Реформа метрологии, направленная на переход от старой системы СИ к новой, квантовой системе СИ, основанной на квантовых эталонах, меняет смысл размерных констант ε_0^{-1}, μ_0, Z_0 и k_e, которые приобретают ясный физический смысл размерных констант электромагнитного взаимодействия.

Литература

1. *Зоммерфельд А.* Электродинамика. М.: ИИЛ, 1958, 501 с.
2. *Джексон Дж.* Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965, 702 с.
3. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Т. 3. Ч. 2. Электричество. 3-е изд. М.: Наука, 1996, 320 с.
4. *Максвелл Дж.К.* О физических силовых линиях // *Максвелл Дж.К.* Избранные сочинения по теории электромагнитного поля. М.: Гостехтеориздат, 1952, с. 107-193.
5. *Томилин К.А.* Уравнения электродинамики у Дж.К. Максвелла и Г. Герца // Исследования по истории физики и механики, 2016–2018. М.: "Янус-К", 2019 (в печати).
6. *Эйнштейн А.* О методе теоретической физики // *Эйнштейн А.* Собрание научных трудов в 4-х тт. М.: Наука, 1965-1967. Т. 4. С. 181-186.
7. *Mohr P.J., Taylor B.N., Newell D.B.* CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2014 // Rev. Mod. Phys. **88**(3), 035009 (2016).
8. *Kragh H.* Magic Number: A Partial History of the Fine-Structure Constant // Archive for History of Exact Sciences. Vol. 57. P. 395-431 (2003).
9. *Окунь Л.Б.* Азы физики. Очень краткий путеводитель. М.: Физматлит, 2012, 138 с.
10. *Tomilin K.A.* Fine-structure constant and dimension analysis // Eur. J. Phys., 20, № 5, L39-L40 (1999).
11. *Томилин К.А.* Фундаментальные физические постоянные в историческом и методологическом аспектах. М.: Физматлит, 2006, 368 с.
12. *Максвелл Дж.К.* (1873) Трактат об электричестве и магнетизме. М.: Наука. Т. 1-2. 1989. Перевод Б.М. Болотовского, И.Л. Бурштейна, М.А. Миллера, Е.В. Суворова. Под редакцией М.Л. Левина, М.А. Миллера, Е.В. Суворова. (Серия «Классики науки»).

13. *Maxwell J.C.* (1873) A Treatise on Electricity and Magnetism. Oxford. Vol. 1-2. 1873. Рус. пер.: Максвелл Дж.К. Трактат об электричестве и магнетизме. М.: Наука. Т. 1-2.
14. *Максвелл Дж.К.* (1871) О математической классификации физических величин // *Максвелл Дж.К.* Статьи и речи. М.: Наука, 1968, с. 37-47.
15. *Gibbs J.W.* (1881) Elements of Vector Analysis // Scientific papers. Vol. 2. L., N.Y., Bombay: Longmans, Green and Co, 1906, 284 p.
16. *Gibbs J.W.*, *Wilson E.B.* (1901) Vector Analysis. A text-book for the use of students of mathematics and physics. N.Y.: Charles Scribner's Sons, L.: Edward Arnold, 1901, 436 p.
17. *Crowe M.J.* (1967) A History of Vector Analysis. University of Notre Dame Press, South Bend, Ind., 1967, 270 p.
18. *McDonald J.E.* (1965) Maxwellian Interpretation of the Laplacian // Am. J. Phys. **33**(9), p. 706-711.
19. *Максвелл Дж.К.* О фарадеевых силовых линиях // *Максвелл Дж.К.* Избранные сочинения по теории электромагнитного поля. М.: Гостехтеориздат, 1952, с. 11-88.
20. *Томилин К.А.* (2001) Постоянные *h* и *e*: от попыток редукции к фундаментальному статусу // Исследования по истории физики и механики. 2001. М.: Наука, 2002, с. 238-276.
21. *Каршенбойм С.Г.* (2005) Фундаментальные физические константы: роль в физике и метрологии и рекомендованные значения // УФН, 175, № 3, с. 271-298.
22. *Tomilin K.A.* (2015) Fundamental constants, quantum metrology and electrodynamics // Physical Interpretation of Relativity Theory: Proceedings of International Meeting. Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 29 June"02 July, 2015. Moscow: BMSTU, 2015. P. 511-522.
23. *Леонтович М.А.* (1964/2003) О системах мер // Вестник АН СССР, 1964, № 6, с. 123-126. То же в кн.: Академик М.А. Леонтович: Ученый. Учитель. Гражданин. М.: Наука, 2003, с.481-485.
24. *Сивухин Д.В.* (1979) О Международной системе физических величин // УФН, 129(2), с. 335-338.
25. *Окунь Л.Б.* (1988) Физика элементарных частиц. 2-е изд. М.: Наука, 1988, с. 148-149.
26. *Суханов А.Д., Голубева О.Н.* (2008) К намечаемому переопределению основных единиц СИ // Физическое образование в вузах. Т. 14, № 2. С. 36-39.
27. *Спиридонов О.П.* (1991) Фундаментальные физические постоянные. М.: Высшая школа, 1991, 238 с.
28. *Трунов Г.* (2007) Магнитная постоянная μ_0: фундаментальная физическая константа или просто размерный коэффициент? // Законодательная и прикладная метрология. № 2. С. 48-52.
29. *Hehl F.W., Obukhov Yu.N.* (2003) Foundations of classical electrodynamics. Charge, Flux and Metrics. Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser, 410 p.
30. *Угаров В.А.* Специальная теория относительности. М.: Наука, 2-е изд., 1977, 384 с.

Elementary Derivation of Maxwell's Equations

Konstantin Aleksandrovich Tomilin

S.I.Vavilov Institute for the History of Science and Technology, RAS
14, Baltiyskaya ul., Moscow, 125315, Russian Federation

Moscow Automobile and Road Construction State Technical University (MADI)
64, Leningradsky prospect, Moscow, 125319, Russian Federation;
e-mail: ktomilin@mail.ru

Received February 3, 2019 PACS 01.40.–d, 01.65.+g, 03.50.De, 06.30.Ka

A simple derivation of equations that are mathematically identical to the Maxwell's equations expressed in fields **E** and **B** is given. The system of equations becomes completely physically identical to the equations of classical electrodynamics when linear constitutive relations between **E** and **D**, and also between **B** and **H** are taken into account (or, equivalently, a linear relationship between the *concentration of the potential* introduced by J.C. Maxwell in 1873 and the current density). In this case, the proportionality coefficient is the fine-structure constant α, a dimensionless constant characterizing the strength of electromagnetic interaction, in combination with the dimensional fundamental constants. It is shown that the dimensional constants μ_0, ε_0^{-1}, Z_0, and k_e, which originally were conventional constants in the SI, get due to the modern reform of metrology, based on transition to the new quantum SI, the fundamental meaning of the dimensional coupling constants of electromagnetic interaction.

Keywords: Maxwell's equations, classical electrodynamics, constitutive relations, fine-structure constant, current density, concentration of the potential, dispersion.

References

1. *Sommerfeld A.* Electrodynamics. Academic Press, New York, 1952, 371 p.
2. *Jackson J.D.* Classical Electrodynamics. John Wiley & Sons, New York, 1962, 641 p.
3. *Sivukhin D.V.* General course of physics. Vol. 3. Part 2. Electricity. 3rd ed. M.: Nauka, 1996, 320 p. [*in Russian*].
4. *Maxwell J.C.* On physical lines of force // Philos. Mag. 1861-62. Scientific Papers. Vol.1, Cambridge: at the University Press, 1890, p. 451-513, doi: 10.1080/14786431003659180.
5. *Tomilin K.A.* Maxwellian and Hertzian electrodynamics equations // Historical studies in physics and mechanics. 2016–2018. Moscow: "Yanus-K", 2019 [*in Russian*].

6. *Einstein A.* On the method of theoretical physics // Einstein A. Collection of scientific papers in 4 vols. M.: Nauka, 1965-1967. Vol. 4. P. 181-186 [in Russian].

7. *Mohr P.J., Taylor B.N., Newell D.B.* CODATA recommended values of the fundamental physical constants: 2014 // Rev. Mod. Phys. 88(3), 035009 (2016), doi: 10.1103/RevModPhys.88.035009.

8. *Kragh H.* Magic Number: A Partial History of the Fine-Structure Constant // Archive for History of Exact Sciences. Vol. 57. P. 395-431 (2003), doi: 10.1007/s00407-002-0065-7.

9. *Okun' L.B.* The Elements of Physics. Very short guide. M.: Fizmatlit, 2012, 138 p. [in Russian].

10. *Tomilin K.A.* Fine-structure constant and dimension analysis // Eur. J. Phys., 20, № 5, L39-L40 (1999), doi: 10.1088/0143-0807/20/5/404.

11. *Tomilin K.A.* Fundamental physical constants in historical and methodological aspects. M.: Fizmatlit, 2006, 368 p. [in Russian].

12. *Maxwell J.C.* Treatise on electricity and magnetism. Translation from 3d ed. Edited by M.L. Levina, M.A. Miller, E.V. Suvorov. M.: Nauka. Vol.1-2. 1989 [in Russian].

13. *Maxwell J. C.* A Treatise on Electricity and Magnetism. Oxford. Vol.1-2. 1873.

14. *Maxwell J.C.* Remarks on the mathematical classification of physical quantities. // Proc. Lond. Math. Soc., 1871, 3, 224-232. Scientific Papers, vol. 2, p. 257-266.

15. *Gibbs J.W.* (1881) Elements of Vector Analysis // Scientific papers. Vol. 2. L., N.Y., Bombay: Longmans, Green and Co, 1906, 284 p.

16. *Gibbs J.W.*, *Wilson E.B.* (1901) Vector Analysis. A text-book for the use of students of mathematics and physics. N.Y.: Charles Scribner's Sons, L.: Edward Arnold, 1901, 436 p.

17. *Crowe M.J.* (1967) A History of Vector Analysis. University of Notre Dame Press, South Bend, Ind., 1967, 270 p.

18. *McDonald J.E.* (1965) Maxwellian Interpretation of the Laplacian // Am. J. Phys. 33(9), p. 706-711.

19. *Maxwell J.C.* On Faraday's lines of force. Trans. Camb. Philos. Soc., 1864, 10, p. 27-83. Scientific Papers, vol. 1, p. 155-229.

20. *Tomilin K.A.* Constants *h* and *e*: from attempts of reduction to the fundamental status // Historical studies in physics and mechanics. 2001. M.: Nauka, 2002, p. 238-276 [in Russian].

21. *Karshenboim S.G.* Fundamental physical constants: their role in physics and metrology and recommended values // Phys. Usp. 48, p. 255–280 (2005); doi: 10.1070/PU2005v048n03ABEH002053

22. *Tomilin K.A.* Fundamental constants, quantum metrology and electrodynamics // Physical Interpretation of Relativity Theory: Proceedings of International Meeting. Bauman Moscow State Technical University, Moscow, 29 June–02 July, 2015. Moscow: BMSTU, 2015. P. 511-522.

23. *Leontovich M.A.* On the systems of units // Vestnik AN SSSR, 1964, No. 6, p. 123-126. Also in: Academician M.A. Leontovich: Scientist. Teacher. Citizen. M.: Nauka, 2003, p. 481-485 [in Russian].

24. *Sivukhin D.V.* The international system of physical units // Sov. Phys. Usp. 22 834–836 (1979); doi: 10.1070/PU1979v022n10ABEH005711.

25. *Okun' L.B*. Elementary Particle Physics. 2d ed. M.: Nauka, 1988, p. 148-149 [in Russian].
26. *Sukhanov A.D., Golubeva O.N.* To the planned redefinition of fundamental units of SI // Fizicheskoye obrazovaniye v vuzakh. Vol. 14, No. 2. P. 36-39 (2008) [in Russian].
27. *Spiridonov O.P.* Fundamental physical constants. M.: Vysshaya shkola, 1991, 238 p. [in Russian].
28. *Trunov G*. Magnetic Constant μ_0: fundamental physical constant or just a dimensional factor? // Zakonodatel'naya i prikladnaya metrologiya. № 2. P. 48-52 (2007) [in Russian].
29. *Hehl F.W., Obukhov Yu.N.* (2003) Foundations of classical electrodynamics. Charge, Flux and Metrics. Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser, 410 p.
30. *Ugarov V.A*. Special theory of relativity. M.: Nauka, 2d ed., 1977, 384 p. [in Russian].