Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт (национальный
исследовательский университет)»
физтех-школа физики и исследований им. Ландау
образовательная программа «Фундаментальные проблемы физики
квантовых технологий»

Направление подготовки: 03.04.01 Прикладные математика и физика
Направленность (профиль) подготовки: Квантовая оптика и лазерная физика

Квантово-информационные свойства канала Ландау-Стритера

(магистерская диссертация)

Студент:
Кужамуратова Ксения Валерьевна

(подпись студента)

Научный руководитель:
Филиппов Сергей Николаевич,
к.ф.-м.н., доцент

(подпись научного руководителя)

Москва 2019

Аннотация

Цель данной работы – изучение квантового канала Ландау-Стритера $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_d) \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{H}_d)$. Операторы Крауса этого канала пропорциональны неприводимому унитарному представлению генераторов группы $SU(2)$ размерности d. В исследовании установлена $SU(2)$ ковариантность канала для всех d и $U(3)$ ковариантность для $d = 3$. С использованием теории углового момента в явном виде найдены спектр и минимальная выходная энтропия Φ. Отрицательные собственные значения в спектре Φ показывают, что канал не может быть получен в результате эрмитовой марковской квантовой динамики. Также были исследованы различные пропускные сопособности канала Ландау-Стритера. Квантовая пропускная способность Φ стремится к нулю при $d = 2, 3$ и строго положительна, если $d \geqslant 4$. Показано, что канал $\Phi \otimes \Phi$ не аннигилирует сцепленность и сохраняет запутанность для некоторых состояний с рангом Шмидта 2 при $d \geqslant 3$.

Содержание

1 Введение

Состояние конечномерной квантовой системы описывается оператором плотности $\rho \in B(H_d)$, действующем на гильбертовом пространстве H_d, $d = dim H_d$. Оператор плотности эрмитов, положительно полуопределенный и имеет единичный след.

В теории открытых квантовых систем наиболее общая форма преобразования оператора плотности вследствие его свободной эволюции и взаимодействия с окружением (изначально не скоррелированным с системой) представляется квантовым каналом $\Phi : B(H_{d_1}) \to B(H_{d_2})$. Φ является сохраняющим след вполне положительным линейным отображением [1, §6.3]. (Напомним, что отображение Φ называется вполне положительным, если отображение $\Phi \otimes I_n$ положительно для любого натурального n. Здесь I_n – тождественное отображение $B(H_n) \to B(H_n)$ [1].) В данной работе рассматривается случай, когда размерность системы не менется, то есть $d_1 = d_2 = d$.

Существует специальный класс унитальных квантовых каналов, которые сохраняют максимально смешанное состояние $\frac{1}{d}I$, где I - единичный оператор. Другими словами, для этих каналов $\Phi[\frac{1}{d}I] = \frac{1}{d}I$.

Один из основных результатов работы Ландау и Стритера [2] заключается в том, что любой унитальный канал $\Phi : B(H_2) \to B(H_2)$ представим в виде $\sum_i p_i U_i \rho U_i^\dagger$ для некоторого распределения вероятности p_i и унитарных операторов U_i, действующих на H_2. То есть они являются случайно унитарными (random unitary). Однако для размерности большей 2 это не выполняется [2]. Более того, Ландау и Стритер [2], привели пример унитального квантового канала $\Phi : B(H_d) \to B(H_d)$, для которого не существует такого разложения для всех $d \geq 3$.

Цель данной работы - исследовать квантово-информационные свойства канала Ландау-Стритера:

$$\Phi[\rho] = \frac{1}{j(j+1)} \left(J_x \rho J_x + J_y \rho J_y + J_z \rho J_z \right) \tag{1}$$

Здесь J_x, J_y, J_z - генераторы $SU(2)$, действующие в $(2j+1)$ - мерном гильбертовом пространстве H_{2j+1}. Физически это пространство представляет пространство состояний частицы со спином j. Эрмитовы операторы

J_x, J_y, J_z - операторы проекции спина на оси x, y, z соответственно. Далее используются индексы x, y, z или 1, 2, 3. Отображение (1) вполне положительно, так как имеет предстваление Крауса [1]; оно сохраняет след, так как: $\sum_k J_k^2 = j(j+1)I$ [8, п. 6.1.2, формула (5)]. Последняя формула означает также унитальность отображения (1).

Если $j = \frac{1}{2}$, то $J_k = \frac{1}{2}\sigma_k$, где $\{\sigma_k\}_{k=1}^3$ - матрицы Паули. В этом случае $d = 2$ и Φ является случайно унитарным [2]. Такой канал Φ - лучшая физическая апроксимация для universal NOT кубитного гейта [20].

Следует отметить свойство экстремальности для канала Ландау–Стритера в выпуклом множестве квантовых каналов. Для канала Φ, имеющего представление Крауса $\Phi[\rho] = \sum_k A_k \rho A_k^\dagger$, существует следующий критерий экстремальности. Φ является экстремальным тогда и только тогда, когда операторы $\left\{A_k^\dagger A_l\right\}_{kl}$ линейно независимы [2]. Поэтому если $j \geq 1$, то отображение (1) является экстремальным каналом в множестве всех каналов, и, таким образом, оно не может быть случайно унитарным [2].

Квантовые каналы и, в частности, канал Ландау-Стритера (1) мало изучены. В то же время характеристики каналов очень важны для передачи классической и квантовой информации. Данное исследование дает много важных теоретических результатов, касающихся канала Ландау-Стритера (1). Это пример, допускающий аналитическое решение в такой сложной области, как квантовая теория информации. В данной работе будут изучены фундаметальные свойства канала Ландау-Стритера (1) (такие, как ковариантность и спектр выходного состояния) и его более специфичные квантово-информационные свойства (классическая и квантовая пропускная способность, динамика запутанности). Исследование спектральных свойств отображения необходимо для того, чтобы понять, как канал может быть реализован.

Результаты данной работы опубликованы в статье [3].

2 Ковариантность

Следуя [4], рассмотрим группу G и унитарное представление $g \to U_g$, $g \in G$, в $\mathcal{H}_d$. Канал $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_d) \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{H}_d)$ называется ковариантным по отношению к представлению U_g, если существует унитарное представление $g \to V_g$, $g \in G$, в $\mathcal{H}_d$ такое, что

$$\Phi[U_g X U_g^\dagger] = V_g \Phi[X] V_g^\dagger \tag{2}$$

для всех $g \in G$ и $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_d)$. Ковариантность канала имеет много следствий, например, свойство сильной обратимости для классической пропускной способности с помощью сцепленного состояния (entanglement-assisted classical capacity) [5]. Многие другие свойства и структура неприводимо ковариантных квантовых каналов рассмотрены в [7].

Начнем с простого наблюдения, что канал Ландау-Стритера по своему построению обладает $SU(2)$ ковариантностью.

Утверждение 1. *Канал Ландау-Стритера $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_{2j+1}) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_{2j+1})$ является ковариантным по отношению к унитарному представлению $SU(2)$ для всех спинов j, а именно, $\Phi[U_g X U_g^\dagger] = U_g \Phi[X] U_g^\dagger$ для всех $g \in SU(2)$ и $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{2j+1})$.*

Доказательство. С точностью до фазы любой U_g, $g \in SU(2)$ может быть выражен через генераторы группы $SU(2)$ $\{J_\alpha\}_{\alpha \in \{x,y,z\}}$ следующим образом:

$$U_g = \exp\left(-i\theta \sum_\alpha n_\alpha J_\alpha\right), \tag{3}$$

где $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ - единичный вектор в $\mathbb{R}^3$, который определяет ось вращения, и $\theta \in \mathbb{R}$ - угол вращения. Операторы J_x, J_y, J_z удовлетворяют коммутационному соотношению $[J_\alpha, J_\beta] = i\sum_{\gamma=1}^3 e_{\alpha\beta\gamma} J_\gamma$, где $e_{\alpha\beta\gamma}$ – символ Леви-Чевиты [8, п. 2.1.2, формула (7)]. Используя это коммутационное соотношение, несложно видеть, что [8, п. 3.1.3, формула (11); п. 3.1.6; п. 1.4.5, формула (33)]

$$U_g^\dagger J_\alpha U_g = \sum_\beta Q_{\alpha\beta} J_\beta, \tag{4}$$

где $(Q_{\alpha\beta})$ - ортогональная матрица, описывающая вращение в $\mathbb{R}^3$ вокруг оси $\mathbf{n}$ на угол θ [8, п. 1.4.2]. Окончательно, имеем

$$\begin{aligned}
\Phi[U_g X U_g^\dagger] &= \frac{1}{j(j+1)} \sum_\alpha J_\alpha U_g X U_g^\dagger J_\alpha = \\
&= \frac{1}{j(j+1)} \sum_\alpha U_g (U_g^\dagger J_\alpha U_g) X (U_g^\dagger J_\alpha U_g) U_g^\dagger = \\
&= \frac{1}{j(j+1)} \sum_{\alpha,\beta,\gamma} Q_{\alpha\beta} Q_{\alpha\gamma} U_g J_\beta X J_\gamma U_g^\dagger = \\
&= \frac{1}{j(j+1)} \sum_{\beta\gamma} \delta_{\beta\gamma} U_g J_\beta X J_\gamma U_g^\dagger = \\
&= U_g \Phi[X] U_g^\dagger, \qquad (5)
\end{aligned}$$

где мы учли, что $\sum_\alpha Q_{\alpha\beta} Q_{\alpha\gamma} = \delta_{\beta\gamma}$, символ Кронекера. ■

Так как канал Ландау-Стритера экстремальный на множестве всех каналов [2], он также является экстремальной точкой $SU(2)$ неприводимо ковариантных каналов. Общие свойства таких каналов, такие как представление Крауса, матрица Чоя, дуальный канал рассмотрены в [9].

Оказывается, что в случае $j = 1$ канал Ландау-Стритера не только $SU(2)$ ковариантный, но и обладает общей унитарной ковариантностью. Это означает, что для размерности $d = 3$ канал (1) $U(3)$ ковариантен.

Утверждение 2. *В случае $j = 1$ канал Ландау-Стритера является глобально унитарно ковариантным, а именно, для любого $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_3)$ и унитарных операторов U на $\mathcal{H}_3$ верно следующее*

$$\Phi[UXU^\dagger] = V\Phi[X]V^\dagger, \qquad (6)$$

где унитарный оператор V выражается через U в ортонормированном базисе собственных векторов J_z через формулу

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} \overline{u_{33}} & -\overline{u_{32}} & \overline{u_{31}} \\ -\overline{u_{23}} & \overline{u_{22}} & -\overline{u_{21}} \\ \overline{u_{13}} & -\overline{u_{12}} & \overline{u_{11}} \end{pmatrix}. \qquad (7)$$

Доказательство. Следует отметить, что V является унитарным, если U унитарно. В базисе из собственных векторов оператора J_z, операторы

$\{J_\alpha\}_{\alpha=x,y,z}$ имеют следующий вид, если $j=1$:

$$J_x = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad J_y = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad J_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

При подставлении этих операторов в уравнение (1) прямое вычисление подтверждает справедливость формул (6), (7). ■

Известно, что глобальная унитарная ковариантность – особенное свойство взятия следа, транспонирования, единичного отображения. Эта особенность позволила достичь определенных результатов при исследовании канала Вернера-Холево [10] и деполяризующих каналов с транспонированием (transpose-depolarizing channels) [12], а также доказать аддитивность классической пропускной способности для деполяризующих квантовых каналов [13]. Мы обнаружили, что канал Ландау-Стритера для $j=1$ также глобально унитарно ковариантен. Однако, как будет показано ниже, в случае $j>1$ канал Ландау-Стритера теряет свойство глобальной унитарной ковариантности.

Утверждение 3. *Канал Ландау-Стритера не является глобально унитарно ковариантным в случае, если $j>1$.*

Доказательство. Мы докажем это утверждение построением контрпримера. Предположим, что канал Ландау-Стритера $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_{2j+1}) \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{H}_{2j+1})$, $j>1$, ковариантен по отношению к представлению $U(2j+1)$. Тогда для любого унитарного оператора U, действующего на $\mathcal{H}_{2j+1}$, существует унитарный оператор V, такой что равенство

$$\Phi[U\rho U^\dagger] = V\Phi[\rho]V^\dagger \quad (9)$$

справедливо для всех операторов плотности ρ. Это означает, что выходной оператор плотности $\Phi[U\rho U^\dagger]$ и $\Phi[\rho]$ имеют одинаковый спектр.

Рассмотрим собственные векторы оператора проекции спина на ось z [8, п. 6.1.2, формула (5)]:

$$J_z|j,m\rangle = m|j,m\rangle, \quad m = j, j-1, \ldots, -j. \quad (10)$$

Пусть $\rho = |j,j\rangle\langle j,j|$ и

$$U = |j,j-1\rangle\langle j,j| + |j,j\rangle\langle j,j-1| + \sum_{k=-j}^{j-2} |j,k\rangle\langle j,k|, \qquad (11)$$

тогда $\Phi[|j,j-1\rangle\langle j,j-1|]$ и $\Phi[|j,j\rangle\langle j,j|]$ должны иметь одинаковый спектр.

С другой стороны, действие канала Ландау-Стритера на состояния $|j,m\rangle\langle j,m|$ с определенной проекцией спина m на ось z может быть выражено явно, если мы введем вспомогательные операторы $J_\pm = J_x \pm iJ_y$, удовлетворяющие соотношению [8, п. 2.3.3, формула (7); п. 6.1.2, формула (13)]

$$J_\pm |j,m\rangle = \sqrt{(j \mp m)(j \pm m + 1)}|j, m \pm 1\rangle. \qquad (12)$$

Так как $\Phi[X] = [j(j+1)]^{-1}\left(\frac{1}{2}J_- X J_+ + \frac{1}{2}J_+ X J_- + J_z X J_z\right)$, получаем

$$\begin{aligned}\Phi[|j,m\rangle\langle j,m|] \;=\; & \frac{1}{j(j+1)}\Big[\frac{1}{2}\left(j(j+1) - m(m-1)\right)|j,m-1\rangle\langle j,m-1| + \\ & +\frac{1}{2}\left(j(j+1) - m(m+1)\right)|j,m+1\rangle\langle j,m+1| + \\ & +m^2|j,m\rangle\langle j,m|\Big], \qquad (13)\end{aligned}$$

откуда можно сделать вывод о спектре выходного состояния $\Phi[|j,m\rangle\langle j,m|]$:

$$\begin{gathered}\mathrm{Spec}\left(\Phi[|j,m\rangle\langle j,m|]\right) = \\ = \left\{\frac{j(j+1) - m(m+1)}{2j(j+1)}, \frac{j(j+1) - m(m-1)}{2j(j+1)}, \frac{m^2}{j(j+1)}, 0, 0, \ldots\right\}. \qquad (14)\end{gathered}$$

Если $j > 1$, то $\mathrm{Spec}\left(\Phi[|j,j\rangle\langle j,j|]\right) \neq \mathrm{Spec}\left(\Phi[|j,j-1\rangle\langle j,j-1|]\right)$. Приходим к противоречию, что заканчивает доказательство. ■

3 Спектральные свойства

3.1 Спектр отображения

Канал Ландау-Стритера Φ эрмитов, так как он совпадает со своим дуальным каналом $\Phi^\dagger$, поэтому его спектр $\{\lambda_k\}_{k=0}^{(2j+1)^2-1}$ действительный. (Напомним, что для любого отображения $\Phi : \mathfrak{T}(H) \to \mathfrak{T}(H)$ дуальное или сопряженное отображение $\Phi^\dagger : \mathfrak{B}(H) \to \mathfrak{B}(H)$ определяется выражением

$Tr\{\Phi[T]X\} = Tr\{T\Phi^{\dagger}[X]\}$. Здесь $T \in \mathfrak{T}(H)$, $X \in \mathfrak{B}(H)$. $\mathfrak{T}(H)$ – пространство всех операторов в H со следовой нормой, $\mathfrak{B}(H)$ – с операторной нормой [1].) Эрмитовы собственные операторы X_k удовлетворяют соотношению $\Phi[X_k] = \lambda_k X_k$. Так как Φ унитальный, единичный оператор I является собственным оператором, поэтому можно зафиксировать соответствующее собственное значение $\lambda_0 = 1$ для всех j. Детерминант $\det\Phi$ канала Φ можно получить по значению произведения $\prod_k \lambda_k$.

Если $j = \frac{1}{2}$, то J_x, J_y, J_z – собственные операторы канала Φ и $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -\frac{1}{3}$. В этом случае, $\det\Phi = -\frac{1}{27} < 0$, поэтому канал Φ не является инфинитиземально делимым [14] и не может быть получен в результате марковской эвлюции, тем не менее, его можно физически реализовать, например, в модели столкновений [16].

Если $j = 1$, то J_x, J_y, J_z – собственные операторы Φ с соответствующими собственными значениямми $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{2}$. Другие пять собственных операторов имеют вид $3\left(\sum_\alpha n_\alpha^{(k)} J_\alpha\right)^2 - 2I$, $\mathbf{n}^{(k)} \in \mathbb{R}^3$, $k = 1, \ldots, 5$ [19] и соответствуют собственным значениям $\lambda_4 = \ldots = \lambda_8 = -\frac{1}{2}$. Аналогично, $\det\Phi < 0$, поэтому такой канал не может быть результатом марковской эволюции.

Найдем спектр канала Ландау-Стритера $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_{2j+1}) \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{H}_{2j+1})$ для произвольного целого или полуцелого j. Как мы показываем, собственные операторы Φ частично связаны с неприводимым тензорным оператором $T_{LM}^{(j)}$ для группы $SU(2)$, который также известен как поляризационный оператор [8, п. 2.4.2, формула (6); п. 8.4.3, формула (10)]:

$$\begin{aligned} T_{LM}^{(j)} &= \sqrt{\frac{2L+1}{2j+1}} \sum_{m_1,m_2=-j}^{j} C_{jm_1LM}^{jm_2} |jm_2\rangle\langle jm_1| = \\ &= \sum_{m_1,m_2=-j}^{j} (-1)^{j-m_1} C_{jm_2j-m_1}^{LM} |jm_2\rangle\langle jm_1|, \end{aligned} \tag{15}$$

где $C_{j_1m_1j_2m_2}^{JM}$ – коэффициенты Клебша-Гордана.

Утверждение 4. *Спектр канала Ландау-Стритера* $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_{2j+1}) \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{H}_{2j+1})$ *включает* $(2L+1)$*-кратно вырожденные собственные значения*

$$\lambda_L = 1 - \frac{L(L+1)}{2j(j+1)}, \qquad L = 0, 1, \ldots, 2j. \tag{16}$$

Соответствующие собственные операторы – линейно независимые операторы вида $U_g T_{L0}^{(j)} U_g^{\dagger}$, где оператоы U_g принадлежат унитарному представлению группы $SU(2)$.

Доказательство. Заметим, что $T_{L0}^{(j)}$ – собственный оператор Φ. Чтобы доказать это, запишем канал Ландау-Стритера в виде

$$\Phi[X] = [j(j+1)]^{-1}(\frac{1}{2}J_+ X J_- + \frac{1}{2}J_- X J_+ + J_z X J_z)$$

и используем коммутационные соотношения [8, п. 2.4.1, формула (1)] $[J_\pm, T_{L0}^{(j)}] = \mp\sqrt{L(L+1)} T_{L\pm1}^{(j)}$ и $[J_z, T_{L0}^{(j)}] = 0$, для коэффициентов Клебша-Гордана $C_{L01\pm1}^{L\pm1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$, $C_{L010}^{L0} = 0$ [п. 8.5.1 формула (8)]. Получим

$$\begin{aligned}\Phi\left[T_{L0}^{(j)}\right] = \frac{1}{j(j+1)}\Big[&\left(\frac{1}{2}J_+J_- + \frac{1}{2}J_-J_+ + J_zJ_z\right)T_{L0}^{(j)} - \\ &-\frac{\sqrt{L(L+1)}}{2}\left(J_+T_{L-1}^{(j)} - J_-T_{L1}^{(j)}\right)\Big].\end{aligned} \tag{17}$$

Первое выражение в скобках $(\cdot)$ есть $j(j+1)I$, тогда как второе $(\cdot)$ может быть упрощено [8, п. 2.4.4, формула (16); п. 2.4.2, формула (10)], так как $J_\pm = \mp\sqrt{\frac{2j(j+1)(2j+1)}{3}} T_{1\pm1}^{(j)}$ [8, п. 2.4.2 формула(10), п. 2.3.3 формула (7)] и известно, чему равно произведение $T_{1\pm1}^{(j)} T_{L\mp1}^{(j)}$ [8, п. 2.4.4 формула (16)]:

$$\begin{aligned}J_+T_{L-1}^{(j)} + J_-T_{L1}^{(j)} &= -\sqrt{\frac{2j(j+1)(2j+1)}{3}}\left(T_{11}^{(j)}T_{L-1}^{(j)} - T_{1-1}^{(j)}T_{L1}^{(j)}\right) = \\ -\sqrt{\frac{2j(j+1)(2j+1)}{3}}\sum_{L'}&(-1)^{2j+L'}\sqrt{3(2L+1)}\begin{Bmatrix}1 & L & L' \\ j & j & j\end{Bmatrix}(C_{11L-1}^{L'0} - \\ &-C_{1-1L1}^{L'0})T_{L'0}^{(j)}\end{aligned} \tag{18}$$

Коэффициенты Клебша-Гордана $C_{11L-1}^{L'0}$ и $C_{1-1L1}^{L'0}$ совпадают, если $L' = L \pm 1$ [8, п. 8.4.3, формула (11)] и равны нулю при $L' < L-1$ и $L' > L+1$ [8, п. 8.1.1, формула (1)], поэтому вклад в (18) вносит только случай, когда $L' = L$, $C_{11L-1}^{L'0} - C_{1-1L1}^{L'0} = \sqrt{2}$ [8, п. 8.5.1, формула (8)]. 6j-символ Вигнера $\begin{Bmatrix}1 & L & L' \\ j & j & j\end{Bmatrix} = \frac{1}{2}(-1)^{2j+L+1}\sqrt{\frac{L(L+1)}{j(j+1)(2j+1)(2L+1)}}$ [8, п. 9.5.4, формула (21)]. Окончательно, $J_+T_{L-1}^{(j)} + J_-T_{L1}^{(j)} = \sqrt{L(L+1)}T_{L0}^{(j)}$. Подставляя это выражение в формулу (17), получаем, что $T_{L0}^{(j)}$ – собственный оператор Φ, соответствующий собственному значению λ_L из формулы (16).

Благодаря $SU(2)$-ковариантности Φ (предложение 1), операторы $U_g T_{L0}^{(j)} U_g^\dagger$ также являются собственными операторами Φ, которые соответствуют собственному значению λ_L. Известно, что существует ровно $2L+1$ линейно независимых операторов $U_g T_{L0}^{(j)} U_g^\dagger$, если U_g – представление группы $SU(2)$ ([18], формула (11), где $S_L^{(j)}$ пропорционально оператору $T_{L0}^{(j)}$ и [19], текст после формулы (36)). Таким образом, собственные значения λ_L $(2L+1)$-кратно вырождены. Так как $\sum_{L=0}^{2j}(2L+1) = (2j+1)^2$, данные собственные значения единственны и составляют спектр Φ. ■

В последнем предложении для случая $L = 1$ генераторы J_x, J_y, J_z – три линейно независимых собственных оператора $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_{2j+1}) \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{H}_{2j+1})$, соответствующих собственному значению $1 - \frac{1}{j(j+1)}$.

Нетрудно видеть, что $\lambda_L < 0$ при $L = 2j$. Отрицательность собственного значения означает, что канал Ландау-Стритера не может быть получен в результате положительной делимой эрмитовой эволюции [21] для любого j, однако он может быть реализован экспериментально в результате определенного взаимодействия с кутритным окружением [22].

3.2 Спектр выходного состояния

Рассмотрим сректральные свойства выходного оператора плотности, то есть спектр $\Phi[X]$, где X – входной оператор плотности.

Несложно видеть, что в случае $j = \frac{1}{2}$ спектр $\Phi[X]$ есть $\{\frac{1}{3}(x_1 + 2x_2), \frac{1}{3}(2x_1 + x_2)\}$, если спектр входной матрицы плотности ρ есть $\{x_1, x_2\}$.

Напомним, что чистотой квантового состояния ρ принято называть параметр, определенный формулой $\mu = \mathrm{tr}\left[\rho^2\right]$, а энтропия фон Неймана оператора плотности ρ определяется выражением $S = -\mathrm{tr}\left[\rho \log \rho\right]$ [1].

Следствие 1. *Чистота и энтропия выходного состояния канала Ландау-Стритера $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_2) \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ для всех чистых входных состояний со спином $\frac{1}{2}$ $|\psi\rangle\langle\psi|$ равны $\frac{5}{9}$ и $\log 3 - \frac{2}{3}$ соответственно.*

Как показывается в следующем предложении, в случае $j = 1$ спектр выходного состояния также зависит только от спектра входной матрицы плотности.

Утверждение 5. *Рассмотрим эрмитов оператор $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_3)$ со спектром $\{x_1, x_2, x_3\}$. Выходной оператор $\Phi[X]$ канала Ландау-Стритера $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_3) \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{H}_3)$ имеет спектр $\{\frac{1}{2}(x_1+x_2), \frac{1}{2}(x_1+x_3), \frac{1}{2}(x_2+x_3)\}$.*

Доказательство. В базисе собственных векторов J_z, действие канала Ландау-Стритера запишется как

$$\Phi\left[\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} X_{11}+X_{22} & X_{23} & -X_{13} \\ X_{32} & X_{11}+X_{33} & X_{12} \\ -X_{31} & X_{21} & X_{22}+X_{33} \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Так как канал Ландау-Стритера $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_3) \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{H}_3)$ глобально унитарно ковариантный по предложению 2, спектр выходного оператора $\Phi[X]$ зависит только от спектра входного оператора X. Чтобы найти явное отношение между спектрами, рассмотрим унитарный оператор U, который реализует переход из базиса собственных векторов X в базис собственных векторов J_z. Тогда в базисе из собственных векторов J_z имеем $UXU^\dagger = \mathrm{diag}(x_1, x_2, x_3)$ и $\Phi[UXU^\dagger] = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{2}(x_1+x_2), \frac{1}{2}(x_1+x_3), \frac{1}{2}(x_2+x_3)\right)$. Благодаря свойству глобальной унитарной ковариантности, последняя диагональная матрица – в точности спектр $\Phi[X]$. ■

Спектральные свойства канала Ландау-Стритера $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_3) \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{H}_3)$ похожи на спектральные свойства деполяризующего канала, но канал Ландау-Стритера не является деполяризующим в случае $j = 1$. Эта особенность возможна из-за тесной связи канала Ландау-Стритера и канала Вернера-Холево $\Phi_{\mathrm{WH}} : \mathcal{B}(\mathcal{H}_d) \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{H}_d)$, определенного через транспонирование $\top$ в некотором оротонормированном базисе по формуле [23]

$$\Phi_{\mathrm{WH}}[X] = \frac{1}{d-1}\left(\mathrm{tr}[X]I - X^\top\right).$$

Оказывается, что если $d = 3$ и транспонирование $\top$ производится в базисе собственных состояний J_z, то канал Ландау-Стритера $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_3) \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{H}_3)$ – это канал Вернера-Холево, объединенный с унитарным каналом:

$$\Phi[X] = \Phi_{\mathrm{WH}}[WXW^\dagger] = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}[X]I - WX^\top W^\dagger\right), \tag{20}$$

где $W = |1,1\rangle\langle 1,-1| - |1,0\rangle\langle 1,0| + |1,-1\rangle\langle 1,1|$ – унитарный оператор.

Так как спектр чистых состояний состоит из 1 и нулей, можно сделать заключение о чистоте выходного состояния $\mu_{\text{out}} = \operatorname{tr}\left[(\Phi[\rho])^2\right]$ и выходной энтропии $S_{\text{out}} = -\operatorname{tr}\left[\Phi[\rho]\log\Phi[\rho]\right]$ для чистых входных состояний в случаях $j = \frac{1}{2}$ и $j = 1$. Здесь, log понимается как $\log_2$, если энтропия и пропускная способность измеряются в битах.

Следствие 2. *Параметр чистоты и энтропия для выхода канала* $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_3) \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{H}_3)$ *для всех чистых входных состояний со спином* 1 *равны* $\frac{1}{2}$ *и* 1, *соответственно.*

В случае $j > 1$, спектр $\Phi[X]$ зависит не только от спектра X, но так же от формы оператора X. Например, в случае $j = \frac{3}{2}$, можно рассмотреть два различных чистых входных состояния $|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle\langle\frac{3}{2},\frac{3}{2}|$ и $|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle\langle\frac{3}{2},\frac{1}{2}|$ с одинаковым спектром $\{1,0,0,0\}$. По формуле (14) $\operatorname{Spec}\left(\Phi\left[|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\rangle\langle\frac{3}{2},\frac{3}{2}|\right]\right) = \{\frac{3}{5},\frac{2}{5},0,0\}$ and $\operatorname{Spec}\left(\Phi\left[|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\rangle\langle\frac{3}{2},\frac{1}{2}|\right]\right) = \{\frac{2}{5},\frac{1}{4},\frac{8}{15},0\}$, поэтому спектры выходного состояния могут не совпадать. Аналогично случаю $j = \frac{3}{2}$, для всех $j > 1$ можно всегда взять чистые входные состояния $|j,j\rangle\langle j,j|$ и $|j,j-1\rangle\langle j,j-1|$ и убедиться в том, что $\operatorname{Spec}(\Phi[|j,j\rangle\langle j,j|]) \neq \operatorname{Spec}(\Phi[|j,j-1\rangle\langle j,j-1|])$.

3.3 Максимальная p-норма и минимальная выходная энтропия

Максимальная p-норма канала Φ определяется по формуле

$$\nu_p(\Phi) = \sup_{\rho}\{\|\Phi[\rho]\|_p\}, \tag{21}$$

где $\|\Phi[\rho]\|_p = \{\operatorname{tr}(\Phi[\rho])^p\}^{1/p}$ – p-норма Шаттена $\Phi[\rho]$. Максимальная 2-норма – это квадратный корень из максимальной выходной чистоты. Перед тем, как переходить к анализу максимальной p-нормы и минимальной выходной энтропии канала Ландау-Стритера, докажем вспомогательные результаты, следующие из теории углового момента.

Лемма 1. *Пусть* $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$ *– единичный вектор,* $|\mathbf{k}| = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2} = 1$. *Спектр оператора* $\sum_{\alpha=1}^{3} k_\alpha J_\alpha$ *есть* $\{m\}_{m=-j}^{j}$.

Доказательство. Физически $\sum_{\alpha=1}^{3} k_\alpha J_\alpha$ – оператор проекции спина на пралеление $\mathbf{k}$ и поэтому имеет такой же спектр, как любой из операторов J_x, J_y, J_z. Математически существует унитарный оператор $U_g : \mathcal{B}(\mathcal{H}_{2j+1}) \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{H}_{2j+1})$, $g \in SU(2)$, такой что $\sum_{\alpha=1}^{3} k_\alpha J_\alpha = U_g^\dagger J_z U_g$. Таким образом, $\mathrm{Spec}\left(\sum_{\alpha=1}^{3} k_\alpha J_\alpha\right) = \mathrm{Spec}(J_z) = \{m\}_{m=-j}^{j}$. Вектор $\mathbf{k}$ – это столбец ортогональной матрицы Q, $\mathbf{k}_\beta = Q_{3\beta}$ по формуле (4). ■

Собственный вектор $|\psi_{\mathbf{k}}\rangle$ оператора $\sum_{\alpha=1}^{3} k_\alpha J_\alpha$, соответствующий максимальному собственному значению j, будем называть вектором с максимальной спиновой поляризацией. А именно, $|\psi_{\mathbf{k}}\rangle = U_g^\dagger |j,j\rangle$, где U_g – унитарный оператор, использованный в доказательстве Леммы 1.

Лемма 2. *Пусть* $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$, $|\mathbf{k}| = 1$. *Максимум выражения* $\left\|\sum_{\alpha=1}^{3} k_\alpha J_\alpha |\psi\rangle\right\|^2$ *по нормированным векторам* $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{2j+1}$ *равняется* j^2 *и достигается на состоянии* $|\psi_{\mathbf{k}}\rangle$ *с максимальной спиновой поляризацией.*

Доказательство. По Лемме 1, спектр $\left(\sum_{\alpha=1}^{3} k_\alpha J_\alpha\right)^2$ есть $\{m^2\}_{m=-j}^{j}$. Таким образом, $\| \left(\sum_{\alpha=1}^{3} k_\alpha J_\alpha\right) |\psi\rangle\|^2 = \langle\psi| \left(\sum_{\alpha=1}^{3} k_\alpha J_\alpha\right)^2 |\psi\rangle \le j^2 \langle\psi|\psi\rangle = j^2$ и $\langle\psi_{\mathbf{k}}| \left(\sum_{\alpha=1}^{3} k_\alpha J_\alpha\right)^2 |\psi_{\mathbf{k}}\rangle = j^2$. ■

Лемма 3. *Если* $j \ge 1$, *то* $\langle\psi|J_z|\psi\rangle^2 \le 9j^2 \frac{j^2 - \langle\psi|J_x^2|\psi\rangle}{2j-1}$ *для всех нормированных векторов* $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{2j+1}$.

Доказательство. По Лемме 1, спектральное разложение J_x^2 есть $J_x^2 = j^2(P_j + P_{-j}) + \sum_{\dots,-j+1}^{m=j-1} m^2 P_m$, где $P_m = |j,m\rangle_x \langle j,m|$ и $J_x |j,m\rangle_x = m|j,m\rangle_x$. Среднее значение $\langle J_x^2\rangle = j^2 - \epsilon \le pj^2 + (1-p)(j-1)^2$, где $p = \langle (P_j + P_{-j})\rangle$. Таким образом, $1 - p \le \frac{\epsilon}{2j-1} = \frac{j^2 - \langle J_x^2\rangle}{2j-1}$.

Пусть $|\psi\rangle = c_j |j,j\rangle_x + c_{-j}|j,-j\rangle_x + \sum_{m=-j+1}^{j-1} c_m |j,m\rangle_x$. Заметим, что ${}_x\langle j,j|J_z|j,j\rangle_x = 0$, ${}_x\langle j,-j|J_z|j,-j\rangle_x = 0$, ${}_x\langle j,j|J_z|j,-j\rangle_x = 0$ при $j \ge 0$, $p = |c_j|^2 + |c_{-j}|^2$, и $1 - p = \sum_{m=-j+1}^{j-1} |c_m|^2$. Имеем

$$\langle\psi|J_z|\psi\rangle = 2\mathrm{Re}\left(\sum_{m=-j+1}^{j-1} \overline{c_m}\, {}_x\langle j,m|\right) J_z \left(c_j|j,j\rangle_x + c_{-j}|j,-j\rangle_x\right) +$$

$$+ \left(\sum_{m=-j+1}^{j-1} \overline{c_m}\, {}_x\langle j,m|\right) J_z \left(\sum_{m'=-j+1}^{j-1} c_{m'} |j,m'\rangle_x\right) \le$$

$$\le 2\sqrt{p}\sqrt{1-p}\, j + (1-p)j \le 3\sqrt{1-p}\, j.$$

Заметим, что $-J_z$ и J_z имеют одинаковый спектр. Тогда очевидно, $\langle\psi|J_z|\psi\rangle \geq 2\sqrt{p}\sqrt{1-p}\,(-j)+(1-p)(-j) \geq -3\sqrt{1-p}\,j$ Значит, $\langle\psi|J_z|\psi\rangle \leq 3\sqrt{1-p}\,j$. Возьмем квадратный корень из обеих частей этого неравенства и вспомним, что $1-p \leq \frac{j^2-\langle J_x^2\rangle}{2j-1}$. Эти соображения заканчивают доказательство. ∎

Лемма 3 показывает, что среднее значение $\langle J_z\rangle$ не может быть большим, когда $\langle J_x^2\rangle$ близко к своему максимальному значению j^2. Лемма 3 очевидно остается справедливой, если заменить J_x на J_y.

Лемма 4. *Пусть векторы* $\mathbf{k},\mathbf{l}\in\mathbb{R}^3$ *удовлетворяют* $|\mathbf{k}|^2+|\mathbf{l}|^2=1$, *тогда* $\left\|\sum_{\alpha=1}^3(k_\alpha+il_\alpha)J_\alpha|\psi\rangle\right\|^2 \leq \max(j,j^2)$ *для всех нормированных векторов* $|\psi\rangle\in\mathcal{H}_{2j+1}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{k}$ и $\mathbf{l}$ линейно зависимы, то есть $\mathbf{k}=|\mathbf{k}|\mathbf{n}$ и $\mathbf{l}=|\mathbf{l}|\mathbf{n}$ для некоторого единичного вектора $\mathbf{n}\in\mathbb{R}^3$. Тогда $\left\|\sum_{\alpha=1}^3(k_\alpha+il_\alpha)J_\alpha|\psi\rangle\right\|^2 = (|\mathbf{k}|^2+|\mathbf{l}|^2)\left\|\sum_{\alpha=1}^3 n_\alpha J_\alpha|\psi\rangle\right\|^2 \leq j^2$ по Лемме 2.

Пусть $|\mathbf{k}|$ и $|\mathbf{l}|$ линейно независимы, и угол между вкторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{l}$ равен ϑ. Заметим, что $\left\|\sum_{\alpha=1}^3(k_\alpha+il_\alpha)J_\alpha|\psi\rangle\right\|^2 = \langle\psi|F|\psi\rangle$, где

$$F := \sum_{\alpha,\beta}(k_\alpha-il_\alpha)(k_\beta+il_\beta)J_\alpha J_\beta = \left(\sum_\alpha k_\alpha J_\alpha\right)^2+\left(\sum_\alpha l_\alpha J_\alpha\right)^2+\sum_\gamma[\mathbf{l}\times\mathbf{k}]_\gamma J_\gamma. \tag{22}$$

Мы использвали коммутационное соотношение $[J_\alpha,J_\beta]=i\sum_\gamma e_{\alpha\beta\gamma}J_\gamma$ и общепринятое обозначение $[\mathbf{l}\times\mathbf{k}]$ для векторного произведения векторов $\mathbf{l}$ и $\mathbf{k}$. Рассмотрим вращение Q в $\mathbb{R}^3$, такое что вектор $Q\left(\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}+\frac{\mathbf{l}}{|\mathbf{l}|}\right)$ направлен вдоль положительного направления оси x и вектор $Q[\mathbf{l}\times\mathbf{k}]$ направлен вдоль положительного направления оси z. Это всегда возможно, так как вектор $[\mathbf{l}\times\mathbf{k}]$ перпендикулярен и к $\mathbf{k}$, и к $\mathbf{l}$ и имеет длину $|[\mathbf{l}\times\mathbf{k}]|=|\mathbf{l}||\mathbf{k}|\sin\vartheta$. Таким образом, вектор $Q\mathbf{k}$ имеет координаты $(|\mathbf{k}|\cos\frac{\vartheta}{2},|\mathbf{k}|\sin\frac{\vartheta}{2},0)$, вектор $Q\mathbf{l}$ имеет координаты $(|\mathbf{l}|\cos\frac{\vartheta}{2},-|\mathbf{l}|\sin\frac{\vartheta}{2},0)$, и вектор $Q[\mathbf{l}\times\mathbf{k}]$ имеет координаты $(0,0,|\mathbf{k}||\mathbf{l}|\sin\vartheta)$, Сответствующее унитарное вращение $U_Q\in\{U_g\}_{g\in SU(2)}$

преобразует спиновые операторы в соответствии с формулой (4):

$$U_Q\left(\sum_\alpha k_\alpha J_\alpha\right)U_Q^\dagger=\sum_\beta (Q\mathbf{k})_\beta J_\beta=|\mathbf{k}|\left(\cos\frac{\vartheta}{2}J_x+\sin\frac{\vartheta}{2}J_y\right), \tag{23}$$

$$U_Q\left(\sum_\alpha l_\alpha J_\alpha\right)U_Q^\dagger=\sum_\beta (Q\mathbf{l})_\beta J_\beta=|\mathbf{l}|\left(\cos\frac{\vartheta}{2}J_x-\sin\frac{\vartheta}{2}J_y\right), \tag{24}$$

$$U_Q\left(\sum_\gamma [\mathbf{l}\times\mathbf{k}]_\gamma J_\gamma\right)U_Q^\dagger=\sum_\beta (Q[\mathbf{l}\times\mathbf{k}])_\beta J_\beta=|\mathbf{k}|\,|\mathbf{l}|\sin\vartheta J_z. \tag{25}$$

Подставим (23)–(25) в (22) и учтем, что $|\mathbf{k}|^2+|\mathbf{l}|^2=1$, получим

$$\begin{gathered}U_QFU_Q^\dagger=\cos^2\frac{\vartheta}{2}J_x^2+\sin^2\frac{\vartheta}{2}J_y^2+\\ +(|\mathbf{k}|^2-|\mathbf{l}|^2)\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\left(J_xJ_y+J_yJ_x\right)+|\mathbf{k}|\,|\mathbf{l}|\sin\vartheta J_z=\\ =\frac14\cos\vartheta(J_+^2+J_-^2)+\sin\vartheta\left(\frac{1}{4i}(|\mathbf{k}|^2-|\mathbf{l}|^2)(J_+^2-J_-^2)+|\mathbf{k}|\,|\mathbf{l}|J_z\right)+\\ +\frac12(J_x^2+J_y^2).\end{gathered}$$

Величины $|\mathbf{k}|^2-|\mathbf{l}|^2$ и $2|\mathbf{k}|\,|\mathbf{l}|$ могут рассматриваться как $\cos\eta$ and $\sin\eta$ для некоторого действительного η соответственно, потому что $(|\mathbf{k}|^2-|\mathbf{l}|^2)^2+4|\mathbf{k}|^2|\mathbf{l}|^2=(|\mathbf{k}|^2+|\mathbf{l}|^2)^2=1$. Таким образом,

$$U_QFU_Q^\dagger=\frac14\cos\vartheta(J_+^2+J_-^2)+\sin\vartheta\left(\frac{\cos\eta}{4i}(J_+^2-J_-^2)+\frac{\sin\eta}{2}J_z\right)+\frac12(J_x^2+J_y^2). \tag{26}$$

Если $j=1/2$, то $J_+^2=J_-^2=0$, $J_x^2=J_y^2=\frac14 I$, и $U_QFU_Q^\dagger=\frac12\sin\vartheta\sin\eta J_z+\frac14 I$. Тогда $\langle\psi|U_QFU_Q^\dagger|\psi\rangle\le\frac12=j$.

Если $j=1$, то матрица оператора $U_QFU_Q^\dagger$ в базисе $\{|j,m\rangle\}_{m=-j}^{j}$ имеет простой вид. Ее собственные значения не зависят от ϑ и η, они есть $1,1,0$.

В случае $j=3/2$ и $j=2$ можно найти собственные значения $U_QFU_Q^\dagger$, максимизировать их по ϑ и η и получить верхние границы $9/4$ и 4 соответственно.

Случай $j>2$ рассмотрим отдельно.

Заметим, что $A\cos\eta+B\sin\eta\le\sqrt{A^2+B^2}$ для $A,B,\eta\in\mathbb{R}$, так что среднее значение

$$\left\langle \left(\frac{1}{4i}(|\mathbf{k}|^2 - |\mathbf{l}|^2)(J_+^2 - J_-^2) + |\mathbf{k}|\,|\mathbf{l}| J_z \right) \right\rangle \le \frac{1}{4}\sqrt{\langle i(J_+^2 - J_-^2)\rangle^2 + 4\langle J_z\rangle^2}. \tag{27}$$

Аналогично $C\sin\vartheta + D\cos\vartheta \le \sqrt{C^2 + D^2}$ для всех $\vartheta, C, D \in \mathbb{R}$, поэтому

$$\langle U_Q F U_Q^\dagger \rangle \le \frac{1}{4}\sqrt{\langle (J_+^2 + J_-^2)\rangle^2 + \langle i(J_+^2 - J_-^2)\rangle^2 + 4\langle J_z\rangle^2} + \frac{1}{2}\langle (J_x^2 + J_y^2)\rangle. \tag{28}$$

Пусть максимум правой части выражения (28) достигается на некотором векторе $|\psi_0\rangle$, тогда этот максимум также достигается на векторе $|\psi_\theta\rangle = e^{-iJ_z\theta}|\psi_0\rangle$ из-за инвариантности (28) по отношению к вращениям вокруг оси z. С другой стороны, $\langle\psi_\theta|J_+|\psi_\theta\rangle = e^{i\theta}\langle\psi_0|J_+|\psi_0\rangle$, это значит, $\langle J_+\rangle$ всегда может быть выбран действительным, поэтому $\langle J_+\rangle = \langle J_-\rangle$. Другими словами,

$$\langle U_Q F U_Q^\dagger \rangle \le \max_{\psi:\langle\psi|\psi\rangle=1} \frac{1}{4}\sqrt{\langle\psi|(J_+^2 + J_-^2)|\psi\rangle^2 + 4\langle\psi|J_z|\psi\rangle^2} + \frac{1}{2}\langle\psi|(J_x^2 + J_y^2)|\psi\rangle =$$
$$= \max_{\psi:\langle\psi|\psi\rangle=1} \frac{1}{2}\sqrt{\langle\psi|(J_x^2 - J_y^2)|\psi\rangle^2 + \langle\psi|J_z|\psi\rangle^2} + \frac{1}{2}\langle\psi|(J_x^2 + J_y^2)|\psi\rangle.$$

Обозначим $a = \langle\psi|J_x^2|\psi\rangle$, $b = \langle\psi|J_x^2|\psi\rangle$, $c = \langle\psi|J_z|\psi\rangle^2$. Дисперсию спиновой проекции на ось z обозначим $d = \langle\psi|J_z^2|\psi\rangle - \langle\psi|J_z|\psi\rangle^2 = \langle\psi|J_z^2|\psi\rangle - c$. Заметим, что $0 \le a, b, c \le j^2$ и $d \ge 0$. Так как $J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 = j(j+1)I_{2j+1}$, имеем $a + b + c + d = j(j+1)$. Окончательно, из Леммы 3 следует, что $c \le 9j^2\frac{j^2-a}{2j-1}$ и $c \le 9j^2\frac{j^2-b}{2j-1}$. Таким образом, можно упростить (29):

$$\langle U_Q F U_Q^\dagger \rangle \le \max_{\substack{a,b,c,d:\\ 0\le a,b,c\le j^2\\ 0\le d\\ (2j-1)c\le 9j^2(j^2-a)\\ (2j-1)c\le 9j^2(j^2-b)\\ a+b+c+d=j(j+1)}} \sqrt{(a-b)^2 + c} + a + b. \tag{29}$$

Используя метод множителей Лагранжа, можно найти, что максимум в правой части выражения (29) достигается на границе для параметров a, b, c, d. Если $j > 2$, то максимум равняется j^2 и достигается в точках $a = j^2$, $c = 0$ или $b = j^2$ и $c = 0$.

Хотя мы рассмотрели случаи $j = 1, \frac{3}{2}, 2$ и $j > 2$ отдельно, их результаты могут быть объединены, а именно, $\langle U_Q F U_Q^\dagger \rangle \leq j^2$, если $j \geq 1$. Вспомним, что $\langle U_Q F U_Q^\dagger \rangle \leq \frac{1}{2}$ при $j = \frac{1}{2}$, получим, $\langle U_Q F U_Q^\dagger \rangle \leq \max(j, j^2)$. Так как это действительно для всех нормированных векторов состояния $|\psi\rangle$, окончательно заключаем, что $\langle F \rangle \leq \max(j, j^2)$. ■

Утверждение 6. *Максимальная p-норма ($p \geq 1$) и минимальная выходная энтропия канала Ландау-Стритера $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_{2j+1}) \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{H}_{2j+1})$ равны*

$$\nu_p(\Phi) = \frac{(j^p + 1)^{1/p}}{j+1} \quad \textit{и} \quad S_{\min}(\Phi) = \log(j+1) - \frac{j}{j+1} \log j, \qquad (30)$$

соответственно, и достигаются на состоянии $|j, j\rangle$.

Доказательство. Пусть $|\psi\rangle\langle\psi|$ – чистое состояние, на кором достигается максимальная ∞-норма. Тогда $\|\Phi[|\psi\rangle\langle\psi|]\|_\infty = \lambda$, где λ – максимальное собственное значение выходного состояния. С другой стороны,

$$\lambda = \max_\chi \frac{\langle\chi|\, \Phi[|\psi\rangle\langle\psi|]\, |\chi\rangle}{\langle\chi|\chi\rangle} = \max_\chi \frac{\sum_{\alpha=1}^3 |\langle\varphi_\alpha|\chi\rangle|^2}{j(j+1)\langle\chi|\chi\rangle}, \qquad |\varphi_\alpha\rangle = J_\alpha|\psi\rangle \qquad (31)$$

Вектор $|\chi\rangle$, максимизирующий (31) должен принадлежать линейной оболочке векторов $\{|\varphi_\alpha\rangle\}_{\alpha=1}^3$, т.е. $|\chi\rangle = \sum_{\beta=1}^3 c_\beta |\varphi_\beta\rangle$. Введем эрмитову матрицу Грама $G_{\alpha\beta} = \langle\varphi_\alpha|\varphi_\beta\rangle = \langle\psi|J_\alpha J_\beta|\psi\rangle$ и вектор $|c\rangle = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}^\top \in \mathcal{H}_3$, тогда $\sum_{\alpha=1}^3 |\langle\varphi_\alpha|\chi\rangle|^2 = \sum_{\alpha=1}^3 \left|\sum_{\beta=1}^3 G_{\alpha\beta} c_\beta\right|^2 = \langle c|G^2|c\rangle$ и $\langle\chi|\chi\rangle = \langle c|G|c\rangle$. Выражение (31) может быть упрощено с использованием вектора $|c'\rangle = \sqrt{G}|c\rangle$:

$$\lambda = \frac{1}{j(j+1)} \max_{|c\rangle} \frac{\langle c|G^2|c\rangle}{\langle c|G|c\rangle} = \frac{1}{j(j+1)} \max_{|c'\rangle} \frac{\langle c'|G|c'\rangle}{\langle c'|c'\rangle} = \frac{1}{j(j+1)} \|G\|_\infty. \quad (32)$$

С другой стороны, ∞-норма G – это

$$\|G\|_\infty = \max_{u:\, u^\dagger u = I} \sum_{\alpha,\beta=1}^3 \overline{u_{\alpha 1}} G_{\alpha\beta} u_{\beta 1} = \max_{u:\, u^\dagger u = I} \left\| \sum_{\alpha=1}^3 u_{\alpha 1} J_\alpha |\psi\rangle \right\|^2. \qquad (33)$$

Так как u – унитарная матрица, вектор $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} & u_{31} \end{pmatrix}^T = \mathbf{k} + i\mathbf{l}$, где $\mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{R}^3$ и $\mathbf{u}^\dagger \mathbf{u} = |\mathbf{k}|^2 + |\mathbf{l}|^2 = 1$. По Лемме 4 для любого $|\psi\rangle$

максимум в правой части (33) не больше, чем $\max(j,j^2)$. Таким образом,

$$\lambda = \frac{1}{j(j+1)}\|G\|_\infty \leq \max\left(\frac{j}{j+1}, \frac{1}{j+1}\right). \tag{34}$$

С другой стороны, если $|\psi\rangle = |j,j\rangle$, то по формуле (14) имеем $Spec\,(\Phi[|j,j\rangle\langle j,j|]) = \left\{\frac{j}{j+1}, \frac{1}{j+1}, 0, \ldots\right\}$. Это значит, что $\lambda = \max(\frac{j}{j+1}, \frac{1}{j+1})$ и $\|\Phi[|\psi\rangle\langle\psi|]\|_\infty$ достигается на векторе $|j,j\rangle$.

Обозначим $\boldsymbol{\lambda} = \left\{\frac{j}{j+1}, \frac{1}{j+1}, 0, \ldots\right\}$. Так как $\boldsymbol{\lambda}$ имеет только два ненулевых значения, и максимальное значение – это $\nu_\infty(\Phi)$, то $\boldsymbol{\lambda}$ мажорирует все выходные спектры $\boldsymbol{\mu}$. Здесь мы используем общепринятое определение мажоранты ([38], Определение 12.1): последовательность действительных чисел $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ мажорирует другую последовательность действительных чисел $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$, если после возможного перенумерования члены последовательностей $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\mu}$ удовлетворяют условию $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$, $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \ldots \geq \mu_n$, $\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_k \geq \mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_k$ для любого k, $1 \leq k \leq n-1$ и $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n$. В нашем случае, $\lambda_1 = \nu_\infty(\Phi)$, что гарантирует $\lambda_1 \geq \mu_1$ для всех выходных спектров $\boldsymbol{\mu}$. Более того, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1 = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_{2j+1} \geq \mu_1 + \mu_2$, таким образом, $\boldsymbol{\lambda}$ мажорирует любой выходной спектр $\boldsymbol{\mu}$. Так как функции $y(x) = x\mathrm{log}x$ и $y(x) = x^p$, $p \geq 1$ выпуклые, энтропия Шеннона $H(\mathbf{x}) = -\sum_{k=1}^n x_k \mathrm{log} x_k$ – вогнутая по Шуру функция от $\mathbf{x} \in [0,1]^n$, и выходная p-норма $\mathcal{V}_p(\mathbf{x}) = (\sum_{k=1}^n x_k^p)^{1/p}$ – выпуклая по Шуру функция от $\mathbf{x} \in [0,1]^n$ ([38], Определение 12.23, Теорема 12.26). Таким образом, $H(\boldsymbol{\mu}) \geq H(\boldsymbol{\lambda})$ и $\mathcal{V}_p(\boldsymbol{\mu}) \leq \mathcal{V}_p(\boldsymbol{\lambda})$ для всех выходных спектров $\boldsymbol{\mu}$. Это приводит к формуле (30). ■

Следствия 1 и 2 очевидны из Предложения 6.

Рассмотрим вторую тензорную степень $\Phi^{\otimes 2}$ канала $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Положим оператор плотности $\rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Тогда для факторизованного входного состояния $\rho^{\otimes 2}$ имеем $\Phi^{\otimes 2}[\rho^{\otimes 2}] = (\Phi[\rho])^{\otimes 2}$. Очевидно, чистота $\mathrm{tr}\left[\left(\Phi^{\otimes 2}[\rho^{\otimes 2}]\right)^2\right]$ состояния $\Phi^{\otimes 2}[\rho^{\otimes 2}]$ равна квадрату чистоты $\mathrm{tr}\left[(\Phi[\rho])^2\right]$ состояния $\Phi[\rho]$. Однако если использовать *запутанные* входные состояния $\varrho_{\mathrm{ent}} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^{\otimes 2})$ (то есть такие $\varrho \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^{\otimes 2})$, которые не представимы в виде $\varrho = \varrho_1 \otimes \varrho_2$, где ϱ_1, $\varrho_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ [1]), то в общем случае чистота состояния $\Phi^{\otimes 2}[\varrho_{\mathrm{ent}}]$ может быть больше, чем чистота всех факторизованных состояний $\Phi^{\otimes 2}[\rho^{\otimes 2}]$. Таким образом, в общем случае $\nu_2(\Phi^{\otimes 2}) \geqslant (\nu_2(\Phi))^2$. Очевидно, если $\nu_2(\Phi^{\otimes 2}) > (\nu_2(\Phi))^2$, то максимальная 2-норма для канала $\Phi^{\otimes 2}$ достигается на некотором запутанном состоянии.

Тем не менее, существуют каналы, для которых $\nu_2(\Phi^{\otimes 2}) = (\nu_2(\Phi))^2$ и использование входных запутанных состояний не помогает увеличить выходную чистоту [45]. Среди таких каналов есть класс унитальных кубитных каналов [46], поэтому для канала Ландау-Стритера $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_2) \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ мультипликативность максимальной 2-нормы выполняется. Так как канал Ландау-Стритера $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_3) \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{H}_3)$ сводится к каналу Вернера-Холево, мультипликативность максимальной p-нормы для такого канала выполнена для всех $1 \leqslant p \leqslant 2$, [10], и нарушается для $p > 4.79$, [23]. Канал Ландау-Стритера для $j > 1$ не может быть проанализирован таким же образом, как случай $j = 1$ и не удовлетворяет известному достаточному условию мультипликативности максимальной 2-нормы [45]. Несмотря на это, если $p = 2$, численно для $j = \frac{3}{2}$ и $j = 2$ можно показать, что максимальная 2-норма мультипликативна с точностью численных вычислений. Мы можем сделать предположение, что максимальная 2-норма мультипликативна для всех каналов Ландау-Стритера $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_{2j+1}) \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{H}_{2j+1})$.

4 Комплементарный канал

Согласно теореме Стайнспринга дуальный канал $\Phi^\dagger : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{H})$ имеет представление ([1], Теорема 6.9)

$$\Phi^\dagger[X] = V^\dagger (X \otimes I_{\mathcal{K}}) V, \tag{35}$$

где $I_{\mathcal{K}}$ – единичный оператор в некотором Гильбертовом пространстве $\mathcal{K}$, $V \colon \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ – изометрия, то есть, $V^\dagger V = I$.

В случае канала Ландау-Стритера $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_{2j+1}) \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{H}_{2j+1})$ дуальный канал $\Phi^\dagger$ совпадает с Φ, и соответствующее представление Стайнспринга получается с помощью изометрии $V \colon \mathcal{H}_{2j+1} \mapsto \mathcal{H}_{2j+1} \otimes \mathcal{H}_3$ в форме

$$V = \frac{1}{\sqrt{j(j+1)}} \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix}. \tag{36}$$

Таким образом, $\dim\mathcal{K} = 3$ и канал Ландау-Стритера $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_{2j+1}) \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{H}_{2j+1})$ может быть реализован с помощью трехмерного окружения. В картине Шредингера взаимодействия системы и окружения ([1], Теорема 6.9), имеем

$$\Phi[\rho] = \mathrm{tr}_{\mathcal{K}}\left[V\rho V^{\dagger}\right] = \mathrm{tr}_{\mathcal{K}}\left[U(\rho\otimes\xi)U^{\dagger}\right], \tag{37}$$

где $\xi \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_3)$ – чистое начальное состояние системы, $U : \mathcal{H}_{2j+1}\otimes\mathcal{H}_3 \mapsto \mathcal{H}_{2j+1}\otimes\mathcal{H}_3$ – унитарный оператор эволюции. Общий метод нахождения U описан, например, в [24], п. 8.2.3.

Если заменить частичный след по окружению $\mathrm{tr}_{\mathcal{K}}$ на частичный след по системе $\mathrm{tr}_{\mathcal{H}}$ в формуле (37), то получится комплементарный канал [49] $\widetilde{\Phi} : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{K})$ (он также называется сопряженным каналом [50]):

$$\widetilde{\Phi}[\rho] = \mathrm{tr}_{\mathcal{H}}\left[V\rho V^{\dagger}\right] = \mathrm{tr}_{\mathcal{H}}\left[U(\rho\otimes\xi)U^{\dagger}\right]. \tag{38}$$

В случае канала Ландау-Стритера $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_{2j+1}) \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{H}_{2j+1})$, комплементарный канал $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_{2j+1}) \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{H}_3)$ отображает состояния со спином j в трехмерные состояния окружения (кутритные состояния). Далее используем обозначение I_d для единичного оператора $I : \mathcal{H}_d \mapsto \mathcal{H}_d$.

Утверждение 7. *Канал $\widetilde{\Phi} : \mathcal{B}(\mathcal{H}_{2j+1}) \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{H}_3)$, комплементарный каналу Ландау-Стритера $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_{2j+1}) \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{H}_{2j+1})$, преобразует максимально смешанное входное состояние $\frac{1}{2j+1}I_{2j+1}$ в максимально смешанное выходное состояние $\frac{1}{3}I_3$.*

Доказательство. Обозначим $V_\alpha = [j(j+1)]^{-1/2}J_\alpha$, $\alpha = 1,2,3$, операторы Крауса Φ и $\widetilde{V}_i$, $i = 1,\ldots,2j+1$, – операторы Крауса $\widetilde{\Phi}$. Эти операторы Крауса связаны друг с другом по формуле (следует из [1], формула (6.42))

$$\langle\alpha_{\mathcal{K}}|\widetilde{V}_i = \langle i_{\mathcal{H}}|V_\alpha, \tag{39}$$

где $\{i_{\mathcal{H}}\}_{i=1}^{2j+1}$ – ортонормированный базис в $\mathcal{H}$ (вход) и $\{\alpha_{\mathcal{K}}\}_{\alpha=1}^{3}$ – ортонормированный базис в $\mathcal{K}$ (выход). Умножим (39) слева на $|\alpha_{\mathcal{K}}\rangle$ и просуммируем по α:

$$\widetilde{V}_i = \sum_{\alpha=1}^{3}|\alpha_{\mathcal{K}}\rangle\langle\alpha_{\mathcal{K}}|\widetilde{V}_i = \sum_{\alpha=1}^{3}|\alpha_{\mathcal{K}}\rangle\langle i_{\mathcal{H}}|V_\alpha = \frac{1}{\sqrt{j(j+1)}}\sum_{\alpha=1}^{3}|\alpha_{\mathcal{K}}\rangle\langle i_{\mathcal{H}}|J_\alpha. \tag{40}$$

Действие комплементарного канала $\widetilde{\Phi}$ на максимально смешанное состояние $(2j+1)^{-1}I_{2j+1}$ записывается как

$$\begin{aligned}\frac{1}{2j+1}\widetilde{\Phi}[I_{2j+1}] &= \frac{1}{2j+1}\sum_{i=1}^{2j+1}\widetilde{V}_i\widetilde{V}_i^{\dagger} = \\ &= \frac{1}{j(j+1)(2j+1)}\sum_{i=1}^{2j+1}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}|\alpha_{\mathcal{K}}\rangle\langle i_{\mathcal{H}}|J_\alpha J_\beta^{\dagger}|i_{\mathcal{H}}\rangle\langle\beta_{\mathcal{K}}| = \\ &= \frac{1}{j(j+1)(2j+1)}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}\mathrm{tr}\left[J_\alpha J_\beta^{\dagger}\right]|\alpha_{\mathcal{K}}\rangle\langle\beta_{\mathcal{K}}|. \qquad (41)\end{aligned}$$

Так как генераторы $SU(2)$ J_α, $\alpha = 1,2,3$, эрмитовы и удовлетворяют соотношению $\mathrm{tr}\,[J_\alpha J_\beta] = \frac{1}{3}j(j+1)(2j+1)\delta_{\alpha\beta}$ ([8], п. 2.3.4, формула (11)), то $\widetilde{\Phi}[\frac{1}{2j+1}I_{2j+1}] = \frac{1}{3}I_3$. ■

Канал Φ называется деградируемым [51], если существует канал T, такой что $\widetilde{\Phi} = T\circ\Phi$. Наоборот, канал Φ называется антидеградируемым [51], если существует канал T', такой что $\Phi = T'\circ\widetilde{\Phi}$. Структура деградируемых и антидеградируемых квантовых каналов изучена в [51]. Исследуем деградируемость и антидеградируемость канала Ландау-Стритера для различных j.

Можно проверить, что в случае $j=\frac{1}{2}$ канал Ландау-Стритера антидеградируемый, но не деградируемый. В этом случае Φ – кубитный деполяризующий канал с деполяризационным параметром $-\frac{1}{3}$, поэтому он является разрушающим сцепленность [69] и, следовательно, антидеградируемым. Комплементарный канал можно записать в виде

$$\widetilde{\Phi}[X] = \frac{1}{3}\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & -i\\ 1 & 0\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & i & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 0\\ i & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}1 & -i & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\right), \qquad (42)$$

Матрица Чоя [54] для T, где $T=\widetilde{\Phi}\circ\Phi^{-1}$, есть $\Omega_T = T\otimes Id_2[|\Psi_+\rangle\langle\Psi_+|]$,

$|\Psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{i=1}^{2}|i\rangle\otimes|i\rangle$:

$$\Omega_T = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3i & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3i & -3 & 0 \\ -3i & 0 & 1 & 0 & 0 & 3i \\ 0 & 3i & 0 & 1 & 3i & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -3i & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -3i & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{43}$$

Так как у Ω_T есть отрицательные собственные значения, T не вполне положительно, и Φ не деградируемый канал.

В случае $j = 1$ канал Ландау-Стритера унитарно эквивалентен каналу Вернера-Холево, поэтому $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_3) \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{H}_3)$ является как деградируемым, так и антидеградируемым ([51], п. 2.2). Используя формулу (40), можно явно найти операторы Крауса комплементарного канала. Для случая $j = 1$ получим

$$\widetilde{V}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{i}{2} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{V}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{i}{2} & 0 & -\frac{i}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{V}_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{i}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \tag{44}$$

Однако, для больших размерностей антидеградируемости нет.

Утверждение 8. *Канал Ландау-Стритера $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_{2j+1}) \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{H}_{2j+1})$ не является антидеградируемым при $j \geqslant \frac{3}{2}$.*

Доказательство. Так как комплементанрый к комплементарному каналу $\widetilde{\widetilde{\Phi}}$ унитарно эквивалентен Φ ([1], Упражнение 6.29), достаточно показать, что $\widetilde{\Phi} : \mathcal{B}(\mathcal{H}_{2j+1}) \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{H}_3)$ не является деградируемым. Выходное состояние для комплементарного канала трехмерное, поэтому мы используем Теорему 10 в [51], которая утверждает, что если $\widetilde{\Phi} : \mathcal{B}(\mathcal{H}_d) \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{H}_3)$ деградируемый, то ранг Чоя $\widetilde{\Phi}$ не больше 3. Ранг Чоя определяется как ранг матрицы Чоя [54] $\Omega_{\widetilde{\Phi}} = \widetilde{\Phi} \otimes \mathrm{Id}_d[|\psi_+\rangle\langle\psi_+|]$, $|\psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}}\sum_{i=1}^{d}|i\rangle\otimes|i\rangle$ – максимально сцепленное состояние. Матрица Чоя комплементарного канала

$\widetilde{\Phi} : \mathcal{B}(\mathcal{H}_{2j+1}) \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{H}_3)$ есть

$$\begin{aligned}
\Omega_{\widetilde{\Phi}} &= \frac{1}{2j+1} \sum_{m,m'=-j}^{j} \widetilde{\Phi}[|j,m\rangle\langle j,m'|] \otimes |j,m\rangle\langle j,m'| = \\
&= \frac{1}{j(j+1)(2j+1)} \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \sum_{m,m',i=-j}^{j} \{\langle j,m'|J_\beta|i\rangle\langle i|J_\alpha|j,m\rangle\, |\alpha\rangle\langle\beta| \otimes \\
&\otimes\ |j,m\rangle\langle j,m'|\} = \\
&= \frac{1}{j(j+1)(2j+1)} \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} |\alpha\rangle\langle\beta| \otimes J_\alpha^\top J_\beta^\top = \\
&= \frac{1}{j(j+1)(2j+1)} \begin{pmatrix} J_x^2 & -J_xJ_y & J_xJ_z \\ -J_yJ_x & J_y^2 & -J_yJ_z \\ J_zJ_x & -J_zJ_y & J_z^2 \end{pmatrix} = \\
&= \frac{1}{j(j+1)(2j+1)} \begin{pmatrix} J_x \\ -J_y \\ J_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_x & -J_y & J_z \end{pmatrix}, \qquad (45)
\end{aligned}$$

где транспонирование выполнено в базисе $\{|j,m\rangle\}_{m=-j}^{j}$ и, таким образом, $J_x^\top = J_x$, $J_y^\top = -J_y$, $J_z^\top = J_z$. Обозначим $C = (J_x, -J_y, J_z)$. Тогда $j(j+1)(2j+1)\Omega_{\widetilde{\Phi}} = C^\dagger C$ и $rank\Omega_{\widetilde{\Phi}} \le rankC \le 2j+1$. С другой стороны, $CC^\dagger = j(j+1)I_{2j+1}$ и $j(j+1)(2j+1)C\Omega_{\widetilde{\Phi}}C^\dagger = CC^\dagger CC^\dagger = j^2(j+1)^2 I_{2j+1}$. Это значит, что $2j+1 = rankC\Omega_{\widetilde{\Phi}}C^\dagger \le rank\Omega_{\widetilde{\Phi}}$. Отсюда следует, что $rank\Omega_{\widetilde{\Phi}} = 2j+1$. Таким образом, $\mathrm{rank}\Omega_{\widetilde{\Phi}} \ge 4$ при $j \geqslant \frac{3}{2}$. Поэтому $\widetilde{\Phi}$ не является деградируемым [51], а Φ не является антидеградируемым. ■

Утверждение 9. *Канал Ландау-Стритера $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_{2j+1}) \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{H}_{2j+1})$ не является деградируемым при $j \geqslant \frac{3}{2}$.*

Доказательство. Чтобы доказать, что отображение $T = \widetilde{\Phi}\circ\Phi^{-1}$ не вполне положительно, достаточно проверить, что некоторые диагональные элементы матрицы Чоя $\Omega_{\widetilde{\Phi}} = \widetilde{\Phi} \otimes \mathrm{Id}_{2j+1}[|\psi_+\rangle\langle\psi_+|]$ отрицательны, где $|\psi_+\rangle =$

$\frac{1}{\sqrt{2j+1}}\sum_{m'=-j}^{j}|j,m'\rangle\otimes|j,m'\rangle$. Рассмотрим диагональный элемент

$$\begin{aligned}\langle\alpha|\otimes\langle j,m|\Omega_T|\alpha\rangle\otimes|j,m\rangle &= \frac{1}{2j+1}\langle\alpha|\widetilde{\Phi}\circ\Phi^{-1}[|j,m\rangle\langle j,m|]|\alpha\rangle = \\ &= \frac{1}{2j+1}\sum_{i=1}^{2j+1}\langle\alpha|\widetilde{V}_i\Phi^{-1}[|j,m\rangle\langle j,m|]\widetilde{V}_i^{\dagger}|\alpha\rangle = \\ &= \frac{1}{2j+1}\sum_{i=1}^{2j+1}\langle i|\widetilde{V_\alpha}\Phi^{-1}[|j,m\rangle\langle j,m|]V_\alpha{}^{\dagger}|i\rangle = \\ &= \frac{1}{j(j+1)(2j+1)}tr\left(J\alpha\Phi^{-1}[|j,m\rangle\langle j,m|]J_\alpha\right) = \\ &= \frac{1}{j(j+1)(2j+1)}tr\left(J\alpha^2\Phi^{-1}[|j,m\rangle\langle j,m|]\right) = \\ &= \frac{1}{j(j+1)(2j+1)}tr\left(|j,m\rangle\langle j,m|\Phi^{-1}[J_\alpha^2]\right) = \\ &= \frac{1}{j(j+1)(2j+1)}\langle j,m|\Phi^{-1}[J_\alpha^2]|j,m\rangle \qquad (46)\end{aligned}$$

При вычислении (46) мы учли, что Φ – самодуальное отображение, и $tr\left(X\Phi^{-1}[Y]\right) = tr\left(\Phi[\Phi^{-1}[X]]\Phi^{-1}[Y]\right) = tr\left(\Phi^{-1}[X]\Phi^{\dagger}[\Phi^{-1}[Y]]\right)$
$= tr\left(\Phi^{-1}[X]Y\right)$.

Зафиксируем $\alpha = 3$ и вычислим оператор $\Phi[J_z]^2$, используя формулу (13) и спектральное разложение $J_z = \sum_{m'=-j}^{j} m'|j,m'\rangle\langle j,m'|$:

$$\begin{aligned}\Phi[J_z^2] &= \sum_{m'=-j}^{j}(m')^2\Phi[|j,m'\rangle\langle j,m'|] = \frac{1}{j(j+1)}\sum_{m'=-j}^{j}(m')^2[(m')^2|j,m'\rangle\langle j,m'| \\ &+ \frac{1}{2}(j(j+1)-m'(m'-1))|j,m'-1\rangle\langle j,m'-1| \\ &+ \frac{1}{2}(j(j+1)-m'(m'+1))|j,m'+1\rangle\langle j,m'+1|] \\ &= \frac{1}{j(j+1)}\sum_{m'=-j}^{j}[(j(j+1)-3)(m')^2+j(j+1)]|j,m'\rangle\langle j,m'| \\ &= \frac{j(j+1)-3}{j(j+1)}J_z^2 + I_{2j+1}. \qquad (47)\end{aligned}$$

Это означает, что $\frac{j(j+1)-3}{j(j+1)}\Phi[J_z^2 - I] = J_z^2$, и $\Phi^{-1}[J_z^2] = \frac{j(j+1)}{j(j+1)-3}(J_z^2 - I)$.

Подставим этот результат в формулу (46), получим

$$\begin{aligned} \langle 3| \otimes \langle j,m|\Omega_T|3\rangle \otimes |j,m\rangle &= \frac{1}{j(j+1)(2j+1)}\langle j,m|\Phi^{-1}[J_z^2]|j,m\rangle = \\ &= \frac{m^2-1}{(2j+1)(j^2+j-3)}. \end{aligned} \tag{48}$$

Если j полуцелое и $j \geq \frac{3}{2}$, то $\langle 3| \otimes \langle j,\frac{1}{2}|\Omega_T|3\rangle \otimes |j,\frac{1}{2}\rangle < 0$. Если j целое и $j \geq 2$, то $\langle 3| \otimes \langle j,0|\Omega_T|3\rangle \otimes |j,0\rangle < 0$. Таким образом, матрица Чоя Ω_T не является положительно полуопределенной, и T не является каналом. ■

5 Пропускные способности

5.1 Классическая пропускная способность

Классическая пропускная способность [55, 56] C квантового канала Φ равняется регуляризованной χ-пропускной способности C_χ, то есть, $C(\Phi) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}C_\chi(\Phi^{\otimes n})$, где χ-пропускная способность определена выражением

$$C_\chi(\Phi) = \sup_{\{p_i,\rho_i\}}\left[S\left(\sum_i p_i\Phi[\rho_i]\right) - \sum_i p_i S\left(\Phi[\rho_i]\right)\right], \tag{49}$$

$\{p_i,\rho_i\}$ – ансамбль квантовых состояний, в котором состояние ρ_i присутствует с вероятностью p_i.

Найдем $C_\chi(\Phi)$ для канала Ландау-Стритера (1).

Утверждение 10. *χ-пропускная способность $C_\chi(\Phi)$ канала Ландау-Стритера $\Phi : \mathcal{H}_{2j+1} \mapsto \mathcal{H}_{2j+1}$ равна*

$$C_\chi(\Phi) = \log\frac{2j+1}{j+1} + \frac{j}{j+1}\log j. \tag{50}$$

Если $j = 1/2$, то $C(\Phi) = C_\chi(\Phi) = \frac{5}{3} - \log 3$.

Доказательство. Используем тот факт, что канал Ландау-Стритера обладает $SU(2)$ ковариантностью. Так как представление U_g группы $SU(2)$ неприводимо, из [57] следует, что

$$\begin{aligned} C_\chi(\Phi) &= S\left(\Phi\left[\frac{1}{2j+1}I_{2j+1}\right]\right) - \min_\psi S\left(\Phi[|\psi\rangle\langle\psi|]\right) = \\ &= \log(2j+1) - \min_\psi S\left(\Phi[|\psi\rangle\langle\psi|]\right). \end{aligned} \tag{51}$$

Минимальная выходная энтропия Φ дается в предложении 6. Подставляя (30) в (51), получим формулу (50).

В случае $j = \frac{1}{2}$, χ-пропускная способность аддитивна [46], поэтому $C(\Phi) = C_\chi(\Phi) = \frac{5}{3}\log 2 - \log 3$. ■

5.2 Пропускная способность с помощью сцепленного состояния

Классическая пропускная способность с помощью сцепленного состояния (entanglement assisted classical capacity) C_{ea} показывает максимальную скорость передачи классической информации через квантовый канал Φ с помощью запутанности между получателем и отправителем [58]. Фундаментальным результатом является следующая формула [59, 60]:

$$C_{\mathrm{ea}}(\Phi) = \max_\rho \left\{ S(\rho) + S(\Phi[\rho]) - S(\rho, \Phi) \right\}, \tag{52}$$

где $S(\rho, \Phi)$ – обменная энтропия [61], $S(\rho, \Phi) = S(\widetilde{\Phi}[\rho])$, $\widetilde{\Phi}$ – комплементарный канал к каналу Φ. Найдем в явном виде C_{ea} для канала Ландау-Сритера.

Утверждение 11. *Для канала Ландау-Стритера* $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_{2j+1}) \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{H}_{2j+1})$ *выполнено* $C_{\mathrm{ea}}(\Phi) = 2\log(2j+1) - \log 3$.

Доказательство. Так как Φ не приводимо ковариантный по предложению 1, то максимум в (52) достигается на максимально смешанном входном состоянии $\rho = \frac{1}{2j+1} I_{2j+1}$ ([1], Предложение 9.3). Вспомнив, что Φ унитальный, и комплементарный канал $\widetilde{\Phi}$ преобразует максимально смешанное состояние $\frac{1}{2j+1} I_{2j+1}$ в максимально смешанное кутритное состояние $\frac{1}{3} I_3$ по предложению 7, получим $C_{\mathrm{ea}} = 2S[\frac{1}{2j+1} I_{2j+1}] - S(\frac{1}{3} I_3) = 2\log(2j+1) - \log 3$. ■

5.3 Квантовая пропускная способность

Когерентная информация [62] для канала $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{H})$ и состояния $\rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ определяется как $I_{\mathrm{c}}(\rho, \Phi) = S(\Phi[\rho]) - S(\widetilde{\Phi}[\rho])$. Максимизируя когерентную информацию по состояниям ρ, получим величину

$Q_1(\Phi) = \max_\rho I_{\mathrm{c}}(\rho, \Phi)$. Квантовая пропускная способность [64] – это регуляризованная величина Q_1, а именно, $Q(\Phi) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} Q_1(\Phi^{\otimes n})$. Если Φ деградируемый, то $Q(\Phi) = Q_1(\Phi)$ [48]. Если Φ антидеградируемый, то $Q(\Phi) = 0$ [65]. Если $j = \frac{1}{2}$ или $j = 1$, то каналы Ландау-Стритера $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_2) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ и $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_3) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_3)$ антидеградируемые, поэтому $Q(\Phi) = 0$. Так как канал Ландау-Стритера не является антидеградируемым при $j \geqslant \frac{3}{2}$ по предложению 8, можно ожидать, что $Q(\Phi) > 0$ при $j \geqslant \frac{3}{2}$. Заметим, что $I_{\mathrm{c}}(\rho^{\otimes n}, \Phi^{\otimes n}) = n I_{\mathrm{c}}(\rho, \Phi)$ [61], таким образом, $Q_1(\Phi^{\otimes n}) = \max_{\rho:\rho\in\mathcal{B}(\mathcal{H}^{\otimes n})} I_{\mathrm{c}}(\rho, \Phi^{\otimes n}) \geq \max_{\rho:\rho\in\mathcal{B}(\mathcal{H})} I_{\mathrm{c}}(\rho^{\otimes n}, \Phi^{\otimes n}) = n Q_1(\Phi)$. Следовательно, $Q(\Phi) \geqslant Q_1(\Phi) \geq I_{\mathrm{c}}(\rho_0, \Phi)$ для любого оператора плотности ρ_0. Это значит, можно оценить квантовую пропускную способность канала Ландау-Стритера $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_{2j+1}) \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{H}_{2j+1})$ снизу как $I_{\mathrm{c}}(\rho_0, \Phi)$. Вообще, если зафиксировать состояние $\rho_0 = \frac{1}{2j+1} I_{2j+1}$, то $Q(\Phi) \geqslant I_{\mathrm{c}}(\frac{1}{2j+1} I_{2j+1}, \Phi) = \log(2j+1) - \log 3$. Таким образом, доказан следующий результат.

Утверждение 12. $Q(\Phi) = 0$ *для каналов Ландау-Стритера* $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_2) \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$ *и* $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_3) \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{H}_3)$. *Если* $j \geqslant \frac{3}{2}$, *то* $Q(\Phi) \geqslant Q_1(\Phi) \geqslant \log(2j+1) - \log 3$ *для канала Ландау-Стритера* $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_{2j+1}) \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{H}_{2j+1})$.

6 Аннигиляция и сохранение сцепленности

Квантовое состояние $\rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B)$ называется сепарабельным, если оно может быть представлено как замыкание выпуклой комбинации $\sum_i p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B$, где $\{p_i\}$ – вероятностное распределение, $\rho_i^A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^A)$, и $\rho_i^B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^B)$ [66]. Канал $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}^A) \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{H}^A)$ называется разрушающим сцепленность, если $\Phi \otimes \mathrm{Id}_k^B[\rho]$ сепарабельно для всех входных состояний $\rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B)$, для любого $k = \dim \mathcal{H}^B$ [70]. Структура каналов, разрушающих сцепленность, хорошо изучена [70]. Канал $\Lambda : \mathcal{B}(\mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B) \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B)$ называется аннигилирующим сцепленность, если $\Lambda[\rho]$ сепарабельно для всех входных состояний $\rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B)$ [71]. Структура каналов, аннигилирующих сцепленность, полностью изучена для локальных кубитных каналов $\Lambda = \Phi_1 \otimes \Phi_2$ [73] и частично – для других типов каналов [74]. Рассмотрим свойства отображения $\Lambda = \Phi \otimes \Phi$, связанные с аннигиляцией сцепленности. Здесь Φ – канал Ландау-Стритера. Как будет показано ниже, $\Phi \otimes \Phi$

не является аннигилирующим сцепленность при $j \geqslant 1$,откуда следует, что Φ не является разрушающим сцепленность, и $\Phi \otimes \Phi$ не абсолютно разделяющий [75].

Утверждение 13. *Вторая тензорная степень канала Ландау-Стритера $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_{2j+1}) \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{H}_{2j+1})$, $\Phi \otimes \Phi$, является аннигилирующей сцепленность, если $j = \frac{1}{2}$, и не является аннигилирующей сцепленность при всех $j \geqslant 1$.*

Доказательство. Случай $j = \frac{1}{2}$ соответствует кубитному деполяризующему каналу с деполяризационным параметром $q = -\frac{1}{3}$. Аннигиляция спутанности у $\Phi \otimes \Phi$ в этом случае доказана в [71].

Пусть $j \geqslant 1$. Докажем, что $\Phi \otimes \Phi$ не является аннигилирующим сцепленность, представив запутанное состояние, которое остается запутанным после действия $\Phi \otimes \Phi$. Рассмотрим вектор $|\phi\rangle \in \mathcal{H}_{2j+1} \otimes \mathcal{H}_{2j+1}$ вида

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|j,j\rangle |j,j\rangle + |j,-j\rangle |j,-j\rangle \right), \tag{53}$$

где $|j,m\rangle$ – вектор состояния со спином j, соответствующий определенной проекции спина m на ось z, $J_z|j,m\rangle = m|j,m\rangle$, $m = j, j-1, \ldots, -j$. Пусть $\top$ – транспонирование в базисе $\{|j,m\rangle\}$. Так как $\top \circ \Phi[X] = \Phi[X^\top]$ для канала Ландау-Стритера Φ, то частично транспонированное выходное состояние $\Phi \otimes (\top \circ \Phi)[|\phi\rangle\langle\phi|]$ дается формулой

$$\begin{aligned} 2\,\Phi \otimes (\top \circ \Phi)[|\phi\rangle\langle\phi|] \;=\; & \Phi[|j,j\rangle\langle j,j|] \otimes \Phi[|j,j\rangle\langle j,j|] + \\ & + \Phi[|j,-j\rangle\langle j,-j|] \otimes \Phi[|j,-j\rangle\langle j,-j|] + \\ & + \Phi[|j,j\rangle\langle j,-j|] \otimes \Phi[|j,-j\rangle\langle j,j|] + \\ & + \Phi[|j,-j\rangle\langle j,j|] \otimes \Phi[|j,j\rangle\langle j,-j|]. \end{aligned} \tag{54}$$

Используя представление канала

$$\Phi[X] = [j(j+1)]^{-1} \left(\frac{1}{2} J_- X J_+ + \frac{1}{2} J_+ X J_- + J_z X J_z \right)$$

и формулу (12), получим

$$\Phi[|j,\pm j\rangle\langle j,\pm j|] = \frac{j}{j+1} |j,\pm j\rangle\langle j,\pm j| + \frac{1}{j+1} |j,\pm j \mp 1\rangle\langle j,\pm j \mp 1|, \tag{55}$$

$$\Phi[|j,\pm j\rangle\langle j,\mp j|] = -\frac{j}{j+1} |j,\pm j\rangle\langle j,\mp j|. \tag{56}$$

Если $j \geqslant 1$, то носители операторов $\Phi[|j,j\rangle\langle j,j|] \otimes \Phi[|j,j\rangle\langle j,j|]$ $+ \Phi[|j,-j\rangle\langle j,-j|] \otimes \Phi[|j,-j\rangle\langle j,-j|]$ и $\Phi[|j,j\rangle\langle j,-j|] \otimes \Phi[|j,-j\rangle\langle j,j|]$ $+ \Phi[|j,-j\rangle\langle j,j|] \otimes \Phi[|j,j\rangle\langle j,-j|]$ ортогональны. Более того, оператор

$$\begin{aligned} &\Phi[|j,j\rangle\langle j,-j|] \otimes \Phi[|j,-j\rangle\langle j,j|] + \Phi[|j,-j\rangle\langle j,j|] \otimes \Phi[|j,j\rangle\langle j,-j|] \\ &= \frac{j^2}{(j+1)^2} \left(|j,j\rangle\langle j,-j| + |j,-j\rangle\langle j,j|\right) \end{aligned} \tag{57}$$

не является положительно полуопределенным, так как содержит отрицательное собственное значение $-\frac{j^2}{(j+1)^2}$. Таким образом, частично транспонированное состояние $\Phi \otimes (\top \circ \Phi)[|\phi\rangle\langle\phi|]$ не является положительно полуопределенным, и $\Phi\otimes\Phi[|\phi\rangle\langle\phi|]$ запутанное по критерию Переса-Городецкого [76, 77]. ■

Утверждение 14. *Канал Ландау-Стритера $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_{2j+1}) \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{H}_{2j+1})$ является разрушающим сцепленность, если $j = \frac{1}{2}$, и не является разрушающим сцепленность, если $j \geqslant 1$.*

Доказательство. Если $j = \frac{1}{2}$, то канал Ландау-Стритера сводится к деполяризующему кубитному каналу с деполяризационным параметром $q = -\frac{1}{3}$. Известно, что такой канал является разрушающим сцепленность [69].

Пусть $j \geqslant 1$. Пусть канал Ландау-Стритера $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}_{2j+1}) \mapsto \mathcal{B}(\mathcal{H}_{2j+1})$ разрушающий сцепленность, тогда $\Phi \otimes \Phi$ должен быть аннигилирующим сцепленность по построению [71]. По предложению 13 это не так. Это противоречие означает, что Φ не является разрушающим сцепленность. ■

7 Заключение

Канал (1) был изначально построен как пример унитального вполне положительного, сохраняющего след отображения, которое является экстремальным в множестве каналов при $j \geqslant 1$ и, следовательно, не является случайно унитарным. По построению пример Ландау и Стритера $SU(2)$ ковариантен для всех j и глобально унитарно ковариантен при $j = \frac{1}{2}$ и $j = 1$. Мы доказали, что для $j > 1$ канал Ландау-Стритера не является $U(2j+1)$ ковариантным, поэтому глобальная унитарная ковариантность –

это свойство спина $\frac{1}{2}$ и спина 1. Используя теорию углового момента, мы явно нашли спектр канала Ландау-Стритера в предложении 4 и указали, что Φ всегда имеет отрицательные собственные значения. Отрицательность этих собственных значений означает, что Φ не может быть получен в результате эрмитовой марковской квантовой динамики.

Мы нашли разложение Стайнспринга для канала Ландау-Стритера, что важно для его физической реализации. Канал Ландау-Стритера может быть получен в результате контроллируемого взаимодействия между частицей со спином j (система) и частицей со спином 1 (окружение) [22]. Взятие частичного следа по окружению приводит к каналу Ландау-Стритера Φ, в то время, как частичный след по системе дает комплементарный канал $\widetilde{\Phi}$. Важное свойство комплементарного канала – действие на максимально смешанное входное состояние, которое мы установили в предложении 7. Если $j = \frac{1}{2}$, канал Ландау-Стритера антидеградируемый, но не деградируемый. Если $j = 1$, канал Ландау-Стритера унитарно эквивалентен каналу Вернера-Холево, поэтому в этом случае Φ является как деградируемым, так и антидеградируемым. Для больших спинов ($j \geqslant \frac{3}{2}$) канал Ландау-Стритера не является ни деградируемым, ни антидеградируемым.

Используя теорию углового момента, мы нашли минимальную выходную энтропию канала Ландау-Стритера в предложении 6. Соединяя этот результат с $SU(2)$ ковариантностью, мы смогли вычислить χ-пропускную способность (предложение 10) и пропускную способность с помощью сцепленного состояния (entanglement-assisted) (предложение 11). Также была оценена нижняя граница квантовой пропускной способности канала Ландау-Стритера (предложение 12).

Мы исследовали динамику запутанности, вызванную каналом Ландау-Стритера. Показано, что канал разрушает сцепленность тогда и только тогда, когда $j = \frac{1}{2}$. Вторая тензорная степень канала $\Phi \otimes \Phi$ не аннигилирует запутанность для любого $j \geqslant 1$. Мы построили состояние с рангом Шмидта 2, формула (53), которое остается запуанным после действия $\Phi \otimes \Phi$.

Так же было рассмотрено свойство мультипликативности максимальной p-нормы для канала Ландау-Стритера и предположена мультипликативность максимальной 2-нормы второй тензорной степени канала.

Список литературы

[1] A. S. Holevo, *Quantum Systems, Channels, Information* (Walter de Gruyter, Berlin, 2012).

[2] L. J. Landau and R. F. Streater, On Birkhoff's theorem for doubly stochastic completely positive maps of matrix algebras, Lin. Algebra Appl. **193**, 107–127 (1993).

[3] Sergey N. Filippov, Ksenia V. Kuzhamuratova, "Quantum informational properties of the Landau–Streater channel", J. Math. Phys., **60:**4, 42202 (2019)

[4] A. S. Holevo, A note on covariant dynamical semigroups, Rep. Math. Phys. **32**, 211–216 (1993).

[5] N. Datta, M. Tomamichel, and M. M. Wilde, On the second-order asymptotics for entanglement-assisted communication, Quantum Inf. Process. **15**, 2569–2591 (2016).

[6] A. S. Holevo, Covariant quantum Markovian evolutions, J. Math. Phys. **37**, 1812–1832 (1996).

[7] M. Mozrzymas, M. Studziński, and N. Datta, Structure of irreducibly covariant quantum channels for finite groups, J. Math. Phys. **58**, 052204 (2017).

[8] D. A. Varshalovich, A. N. Moskalev, and V. K. Khersonskii, *Theory of Angular Momentum* (World Scientific, Singapore, 1988).

[9] M. Al Nuwairan, The extreme points of SU(2)-irreducibly covariant channels, Int. J. Math. **25**, 1450048 (2014).

[10] N. Datta, Multiplicativity of maximal p-norms in Werner-Holevo channels for $1 \leq p \leq 2$, arXiv:quant-ph/0410063.

[11] M. Fannes, B. Haegeman, M. Mosonyi, and D. Vanpeteghem, Additivity of minimal entropy output for a class of covariant channels, arXiv:quant-ph/0410195.

[12] N. Datta, A. S. Holevo, and Y. Suhov, Additivity for transpose depolarizing channels, Int. J. Quantum Inform. **04**, 85 (2006).

[13] C. King, The capacity of the quantum depolarizing channel, IEEE Trans. Inf. Theory **49**, 221–229, (2003).

[14] M. M. Wolf and J. I. Cirac, Dividing Quantum Channels, Commun. Math. Phys. **279**, 147–168 (2008).

[15] T. Rybár, S. N. Filippov, M. Ziman, and V. Bužek, Simulation of indivisible qubit channels in collision models, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **45**, 154006 (2012).

[16] S. N. Filippov, J. Piilo, S. Maniscalco, and M. Ziman, Divisibility of quantum dynamical maps and collision models, Phys. Rev. A **96**, 032111 (2017).

[17] A. B. Klimov and S. M. Chumakov, Quasi-probability distributions for the simplest dynamical groups, J. Opt. Soc. Am. A **17**, 2315–2318 (2000).

[18] S. N. Filippov and V. I. Man'ko, Spin tomography and star-product kernel for qubits and qutrits, J. Russ. Laser Res. **30**, 129–145 (2009).

[19] S. N. Filippov and V. I. Man'ko, Inverse spin-s portrait and representation of qudit states by single probability vectors, J. Russ. Laser Res. **31**, 32–54 (2010).

[20] V. Bužek, M. Hilery and R. F. Werner, Optimal manipulations with qubits: Universal-NOT gate, Phys. Rev. A **60**, R2626 (1999).

[21] D. Chruściński, C. Macchiavello, and S. Maniscalco, Detecting non-Markovianity of quantum evolution via spectra of dynamical maps, Phys. Rev. Lett. **118**, 080404 (2017).

[22] A. I. Pakhomchik, I. Feshchenko, A. Glatz, V. M. Vinokur, A. V. Lebedev, S. N. Filippov, G. B. Lesovik, Realization of the Werner-Holevo and Landau-Streater quantum channels for qutrits on quantum computers, https://arxiv.org/abs/1905.05277

[23] R. F. Werner and A. S. Holevo, Counterexample to an additivity conjecture for output purity of quantum channels, J. Math. Phys. **43**, 4353-4357 (2002).

[24] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000).

[25] H.-P. Breuer and F. Petruccione, *The Theory of Open Quantum Systems* (Oxford University Press, Oxford, 2002).

[26] D. Pérez-García, M. M. Wolf, D. Petz, and M. B. Ruskai, Contractivity of positive and trace-preserving maps under L_p norms, J. Math. Phys. **47**, 083506 (2006).

[27] P. M. Alberti and A. Uhlmann, *Stochasticity and partial order: doubly stochastic maps and unitary mixing* (D. Reidel Pub. Co., Dordrecht, Boston, 1982).

[28] A. Arias, A. Gheondea, S. Gudder, Fixed points of quantum operations, J. Math. Phys. **43**, 58725881 (2002).

[29] M. Rahaman, Multiplicative properties of quantum channels, J. Phys. A: Math. Theor. **50**, 345302 (2017).

[30] A. Müller-Hermes, D. Reeb, and M. M. Wolf, Positivity of linear maps under tensor powers, J. Math. Phys. **57**, 015202 (2016).

[31] S. N. Filippov and K. Y. Magadov, Positive tensor products of maps and n-tensor-stable positive qubit maps, J. Phys. A: Math. Theor. **50**, 055301 (2017).

[32] S. L. Tregub, Bistochastic operators on finite-dimensional von Neumann algebras, Soviet Math. (Iz. VUZ) **30**, 105108 (1986).

[33] B. Kümmerer and H. Maassen, The essentially commutative dilations of dynamical semigroups on M_n, Commun. Math. Phys. **109**, 1–22 (1987).

[34] K. M. R. Audenaert and S. Scheel, On random unitary channels, New J. Phys. **10**, 023011 (2008).

[35] C. B. Mendl and M. M. Wolf, Unital quantum channels convex structure and revivals of Birkhoff's theorem, Commun. Math. Phys. 289, 1057–1086 (2009).

[36] S. N. Filippov and K. Y. Magadov, Spin polarization-scaling quantum maps and channels, Lobachevskii Journal of Mathematics **39**, 65–70 (2018).

[37] M. M. Wilde, *Quantum Information Theory* (Cambridge University Press, Cambridge, 2013).

[38] J. E. Pečarić, F. Proschan, and Y. L. Tong, *Convex functions, partial orderings, and statistical applications*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 187 (Academic Press, Boston, 1992).

[39] G. G. Amosov and A. S. Holevo, On the multiplicativity conjecture for quantum channels, Theor. Probab. Appl. **47**, 143–146 (2002).

[40] C. King, Maximal p-norms of entanglement breaking channels, Quantum Inf. Comput. **3**, 186–190 (2003).

[41] C. King and M. B. Ruskai, Comments on multiplicativity of maximal p-norms when $p = 2$, Quantum Inf. Comput. **4**, 500–512 (2004).

[42] C. King, M. Nathanson, M. B. Ruskai, Multiplicativity properties of entrywise positive maps, Lin. Algebra Appl. **404**, 367379 (2005).

[43] M. M. Wolf and J. Eisert, Classical information capacity of a class of quantum channels, New J. Phys. **7**, 93 (2005).

[44] V. Giovannetti, S. Lloyd, and M. B. Ruskai, Conditions for multiplicativity of maximal l_p-norms of channels for fixed integer p, J. Math. Phys. **46**, 042105 (2005).

[45] S. Michalakis, Multiplicativity of the maximal output 2-norm for depolarized Werner-Holevo channels, J. Math. Phys. **48**, 122102 (2007).

[46] C. King, Additivity for unital qubit channels, J. Math. Phys. **43**, 4641–4653 (2002).

[47] W. F. Stinespring, Positive functions on C^*-algebras, Proc. Amer. Math. Soc. **6**, 211–216 (1955).

[48] I. Devetak and P. W. Shor, The capacity of a quantum channel for simultaneous transmission of classical and quantum information, Commun. Math. Phys. **256**, 287-303 (2005).

[49] A. S. Holevo, On complementary channels and the additivity problem, Probab. Theory and Appl. **51**, 133-143 (2005).

[50] C. King, K. Matsumoto, M. Nathanson, and M. B. Ruskai, Properties of conjugate channels with applications to additivity and multiplicativity, Markov Process and Related Fields **13**, 391–423 (2007).

[51] T. S. Cubitt, M. B. Ruskai, and G. Smith, The structure of degradable quantum channels, J. Math. Phys. **49**, 102104 (2008).

[52] J. de Pillis, Linear transformations which preserve Hermitian and positive semidefinite operators, Pacific J. of Math. **23**, 129–137 (1967).

[53] A. Jamiołkowski, Linear transformations which preserve trace and positive semidefiniteness of operators, Rep. Math. Phys. **3**, 275–278 (1972).

[54] M.-D. Choi, Completely positive linear maps on complex matrices, Lin. Algebra Appl. **10**, 285–290 (1975).

[55] B. Schumacher and M. D. Westmoreland, Sending classical information via noisy quantum channels, Phys. Rev. A **56**, 131–138 (1997).

[56] A. S. Holevo, The capacity of quantum channel with general signal states, IEEE Trans. Inform. Theory **44**, 269–273 (1998).

[57] A. S. Holevo, Remarks on the classical capacity of quantum channel, arXiv:quant-ph/0212025.

[58] C. H. Bennett, P. W. Shor, J. A. Smolin, A. V. Thapliyal, Entanglement-assisted classical capacity of noisy quantum channel, Phys. Rev. Lett. **83**, 3081–3084 (1999).

[59] C. H. Bennett, P. W. Shor, J. A. Smolin and A. V. Thapliyal, Entanglement-assisted capacity of a quantum channel and the reverse Shannon theorem, IEEE Trans. Inf. Theory **48**, 2637–2655 (2002).

[60] A. S. Holevo, On entanglement-assisted classical capacity, J. Math. Phys. **43**, 4326–4333 (2002).

[61] H. Barnum, M. A. Nielsen, and B. Schumacher, Information transmission through a noisy quantum channel, Phys. Rev. A **57**, 4153-4175 (1998).

[62] B. Schumacher and M. A. Nielsen, Quantum data processing and error correction, Phys. Rev. A **54**, 2629–2635 (1996)

[63] S. Lloyd, Capacity of the noisy quantum channel, Phys. Rev. A **55**, 1613–1622 (1997).

[64] I. Devetak, The private classical capacity and quantum capacity of a quantum channel, IEEE Trans. Inf. Theory **51**, 44–55 (2005).

[65] V. Giovannetti and R. Fazio, Information-capacity description of spin-chain correlations, Phys. Rev. A **71**, 032314 (2005).

[66] R. F. Werner, Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model, Phys. Rev. A **40**, 4277–4281 (1989).

[67] A. S. Holevo, Quantum coding theorems, Russ. Math. Surveys **53**, 1295–1331 (1998).

[68] P. W. Shor, Additivity of the classical capacity of entanglement-breaking quantum channels, J. Math. Phys. **43**, 4334–4340 (2002).

[69] M. B. Ruskai, Qubit entanglement breaking channels, Rev. Math. Phys. **15**, 643–662 (2003).

[70] M. Horodecki, P. W. Shor, and M. B. Ruskai, Entanglement breaking channels, Rev. Math. Phys. **15**, 629–641 (2003).

[71] L.Moravčíková and M. Ziman, Entanglement-annihilating and entanglement-breaking channels, J. Phys. A: Math. Theor. **43**, 275306 (2010).

[72] S. N. Filippov, T. Rybár, and M. Ziman, Local two-qubit entanglement-annihilating channels, Phys. Rev. A **85**, 012303 (2012).

[73] S. N. Filippov, V. V. Frizen, and D. V. Kolobova, Ultimate entanglement robustness of two-qubit states against general local noises, Phys. Rev. A **97**, 012322 (2018).

[74] L. Lami and M. Huber, Bipartite depolarizing maps, J. Math. Phys. **57**, 092201 (2016).

[75] S. N. Filippov, K. Y. Magadov, and M. A. Jivulescu, Absolutely separating quantum maps and channels, New J. Phys. **19**, 083010 (2017).

[76] A. Peres, Separability criterion for density matrices, Phys. Rev. Lett. **77**, 1413–1415 (1996).

[77] M. Horodecki, P. Horodecki, and R. Horodecki, Separability of mixed states: necessary and sufficient conditions, Phys. Lett. A **223**, 1–8 (1996).