ДОПОВІДІ
НАЦІОНАЛЬНОЇ
АКАДЕМІЇ НАУК
УКРАЇНИ

5 • 2012

УДК 658.51.012

Член-корреспондент НАН Украины **Н. А. Азаренков,**
О. М. Пигнастый, В. Д. Ходусов

О законе возрастания энтропии технологического процесса

Обосновано применение статистического подхода для описания закономерностей поведения макропараметров технологического процесса. Приведено выражение для энтропии технологического процесса. Установлен механизм необратимости технологических явлений производственно- технических систем, который обусловлен взаимодействием предметов труда с технологическим оборудованием. На основе модельного представления о стохастическом характере воздействия технологического оборудования на предметы труда получен закон возрастания энтропии для замкнутой производственно-технической системы.

Впервые на важность применения энтропийных методов в теории управления указал Дж. фон Нейман [1]. В работах А. А. Красовского освещены основы термодинамического подхода к задачам управления и анализу сложных стохастических динамических систем [2]. Энтропийный подход к моделированию технологических процессов детально рассмотрен в [3, 4]. Зависимость энтропии технологического процесса от функции распределения параметров технологического процесса по возможным состояниям x показана в [3]

$$H_\Omega = \int_0^\infty f(t,x) \ln\left(\frac{e}{f(t,x)}\right) dx, \tag{1}$$

где функция $f(t,x)$ в явной форме не связана с параметрами, описывающими состояние предметов труда в ходе технологической обработки. В то же время современные традиционные подходы к построению моделей технологических процессов, фундамент которых заложен в работах [5–7], основаны на особенностях движения предметов труда по технологическому маршруту.

В связи с этим актуальным является построение моделей технологического процесса, в которых энтропия производственно-технической системы связана с функцией распределения предметов труда по состояниям, а также статистическое обоснование закона возрастания энтропии технологического процесса, основанное на кинетическом уравнении, описывающем эволюцию функции распределения предметов труда по состояниям. Поэтому целью настоящей работы является статистическое обоснование закона возрастания энтропии технологического процесса, основанное на модельных представлениях характера взаимодействия предметов труда и технологического оборудования.

В качестве функции состояния технологического процесса введем функцию H_Ω, характеризующую меру его неопределенности [3, 4, 8]:

$$H_\Omega = \int_0^\infty \chi(t,S,\mu)\ln\left(\frac{e}{\chi(t,S,\mu)}\right)d\mu. \tag{2}$$

Энтропия технологического процесса H_Ω (1) записана через функцию распределения $\chi(t,S,\mu)$ предметов труда по микросостояниям, где S и μ — соответственно усредненные по бесконечно малой ячейке фазового технологического пространства $\Delta\Omega$ характеристики состояния предметов труда S_j, μ_j, представляющие затраты, перенесенные на предмет труда и интенсивность переноса технологических ресурсов на предмет труда. Функция распределения предметов труда по микросостояниям определяется кинетическим уравнением технологического процесса [9]

$$\begin{gathered}\frac{\partial\chi(t,S,\mu)}{\partial t} + \frac{\partial\chi(t,S,\mu)}{\partial S}\mu + \frac{\partial\chi(t,S,\mu)}{\partial \mu}f(t,S) = \\ = \lambda(t,S)\left\{\int_0^\infty \psi(t,S,\mu)\widetilde{\mu}\chi(t,S,\widetilde{\mu})\,d\widetilde{\mu} - \mu\chi(t,S,\mu)\right\}, \\ \chi(t,S,0)=0, \qquad \chi(t,S,\infty)\to 0.\end{gathered} \tag{3}$$

Производственная функция [7] обобщенной единицы технологического оборудования $f(t,S)$ определяется из способа производства. Оборудование воздействует на предмет труда, изменяя его качественно и количественно. Учитывает вероятностный характер воздействия технологического оборудования на предмет труда функция $\psi(t,S,\mu)$, определяющая вероятность того, что после воздействия технологического оборудования на предмет труда скорость переноса затрат станет равной μ. Определим моменты $[\psi]_k$ и $[\chi]_k$ функции $\psi(t,S,\mu)$ и следующими выражениями:

$$\int_0^\infty \psi(t,S,\mu)\,d\mu = 1, \qquad \int_0^\infty \mu^k\psi(t,S,\mu)\,d\mu = [\psi]_k, \qquad k=1,2\ldots, \tag{4}$$

$$\int_0^\infty \chi(t,S,\mu)\,d\mu = [\chi]_0, \qquad \int_0^\infty \mu^k\chi(t,S,\mu)\,d\mu = [\chi]_k. \tag{5}$$

Если функция $\psi(t,S,\mu)$ не зависит от состояния предметов труда до испытания воздействия со стороны технологического оборудования, то уравнение (1) примет вид:

$$\frac{\partial\chi(t,S,\mu)}{\partial t} + \frac{\partial\chi(t,S,\mu)}{\partial S}\mu + \frac{\partial\chi(t,S,\mu)}{\partial \mu}f(t,S) = \lambda(t,S)\{\psi(t,S,\mu)[\chi]_1 - \mu\chi(t,S,\mu)\}. \tag{6}$$

На основе (5) изменение энтропии технологического процесса со временем может быть определено

$$\frac{dH_\Omega}{dt} = \frac{d}{dt}\int\limits_0^\infty \chi(t,S,\mu)\ln\left(\frac{e}{\chi(t,S,\mu)}\right)d\mu =$$

$$= -\int\limits_0^\infty \lambda(t,S)\{\psi(t,S,\mu)[\chi]_1 - \mu\chi(t,S,\mu)\}\ln\chi(t,S,\mu)\,d\mu. \tag{7}$$

Состояние статистического равновесия полностью симметрично относительно замены будущего настоящим. При изменении знака времени необходимо переставить состояния до воздействия и после воздействия технологического оборудования на предмет труда. Следовательно, мы можем утверждать, что в состоянии статистического равновесия число взаимодействий продуктов труда с технологическим оборудованием $\mu\chi(t,S,\mu)$ при переходе в состояние $\psi(t,S,\mu)[\chi]_1$ (прямой процесс) равно числу взаимодействий предметов с технологическим оборудованием $\psi^*(t,S,\mu^*)[\chi]_1^*$ при переходе в состояние $\mu^*\chi^*(t,S,\mu^*)$ (обратный процесс). Правую часть уравнения (7), которая описывает прямой процесс при переходе предмета труда в состояние $\psi(t,S,\mu)[\chi]_1$, обозначим J_{pr}. Если провести замену $\mu\chi(t,S,\mu)$ на $\mu^*\chi^*(t,S,\mu^*)$ и $\psi(t,S,\mu)[\chi]_1$ на $\psi^*(t,S,\mu^*)[\chi]_1^*$, то для обратного процесса можно записать

$$J_{\mathrm{obr}} = -\int\limits_0^\infty \lambda(t,S)\{\psi^*(t,S,\mu^*)[\chi]_1^* - \mu^*\chi^*(t,S,\mu^*)\}\ln\left(\frac{\psi^*(t,S,\mu^*)[\chi]_1^*}{\mu^*}\right)d\mu. \tag{8}$$

Правую часть уравнения (7) можно представить в следующем виде:

$$J = \frac{J_{\mathrm{pr}} + J_{\mathrm{obr}}}{2} = -\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \lambda(t,S)\{\psi(t,S,\mu)[\chi]_1 - \mu\chi(t,S,\mu)\}\ln\chi(t,S,\mu)\,d\mu -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \lambda(t,S)\{\psi^*(t,S,\mu^*)[\chi]_1^* - \mu^*\chi^*(t,S,\mu^*)\}\ln\left(\frac{\psi^*(t,S,\mu^*)[\chi]_1^*}{\mu^*}\right)d\mu. \tag{9}$$

С применением соотношения

$$\mu^* = -\mu, \qquad \chi^*(t,S,\mu^*) = \chi(t,S,\mu), \qquad [\chi]_1^* = -[\chi]_1, \qquad \psi^*(t,S,\mu^*) = \psi(t,S,\mu) \tag{10}$$

интеграл (7) может быть записан окончательно в виде:

$$\frac{dH_\Omega}{dt} = -\frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \lambda(t,S)\psi(t,S,\mu)[\chi]_1\left\{1 - \frac{\mu\chi(t,S,\mu)}{\psi(t,S,\mu)[\chi]_1}\right\}\ln\frac{\chi(t,S,\mu)\mu}{\psi(t,S,\mu)[\chi]_1}d\mu \geqslant 0. \tag{11}$$

Подынтегральное выражение, а следовательно и весь интеграл, положителен. Действительно, величина $\lambda(t,S)\psi(t,S,\mu)[\chi]_1$ положительна по определению. Функция же вида $(1-y)\ln y$ положительна при всех $y > 0$, поскольку $\ln y > 0$ при $y > 1$ и $\ln y < 0$ при $y < 1$. Таким образом, приходим к закону возрастания энтропии для технологического процесса. Равенство выполняется только для квазистатических процессов, когда макропараметры технологического процесса находятся в состоянии установившегося равновесия:

$$\frac{dH_\Omega}{dt} = 0. \tag{12}$$

Средние значения параметров технологического процесса, определяемые через функцию распределения предметов труда по микросостояниям $\chi(t, S, \mu)$ [2, 3, 9], могут быть определены как для равновесного, так и для неравновесного состояния технологического процесса. Функция распределения $\chi(t, S, \mu)$ характеризует степень неполноты задания микросостояний ансамбля предметов труда. При этом возможно выделить два предельных случая:

а) технологический процесс находится в равновесном состоянии с заданными межоперационными заделами и темпом выпуска продукции. Состояние предметов труда определяется набором параметров технологического оборудования и параметрами системы управления запасами предприятия. Число задаваемых параметров технологического процесса много меньше полного числа степеней свободы предметов труда, находящихся в технологическом процессе (для технологического процесса с N предметов труда число степеней свободы производственно-технической системы равно $2N$);

б) предполагается, что в начальный момент функционирования технологического процесса для каждого предмета труда известны координаты S и μ в фазовом технологическом пространстве (S, μ). В этом случае из уравнений Эйлера

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial I}{\partial \dot{S}_i} = \frac{\partial I}{\partial S_i}, \qquad i = 1, \ldots, N, \tag{13}$$

описывающего перемещение предмета труда вдоль технологического маршрута производственно-технической системы с целевой функцией $I(S, \mu)$, можно однозначно найти значения координат S и μ в произвольный момент времени. Поэтому функция распределения предметов труда по микросостояниям $\chi(t, S, \mu)$ для технологического процесса представима в виде

$$\chi(t, S, \mu) = \sum_{j=1}^{N} \delta_j(S_j - S_j(S_{j0}, t - t_0)). \tag{14}$$

Первый случай соответствует максимальной неопределенности состояния предметов труда, а второй — полному динамическому описанию изменения параметров состояния предметов труда технологического процесса, при котором неопределенность состояния предметов труда равна нулю. Между этими предельными случаями есть огромное множество различных вариантов функционирования технологического процесса, соответствующих той или иной степени неопределенности его состояния. Для неравновесных технологических процессов различные степени неопределенности производственно-технической системы соответствуют различным стадиям релаксационных процессов. Производственная практика показывает, что релаксационные технологические процессы являются необратимыми. В то же время исходные уравнения Эйлера (13) являются обратимыми. Формально это проявляется в том, что уравнения Эйлера остаются неизменными при замене

$$t \to -t, \qquad \mu_j \to -\mu_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, N). \tag{15}$$

Вопрос о том, на какой стадии и по каким причинам исходные уравнения Эйлера (13) заменяются необратимыми уравнениями, является одним из важных вопросов, возникающих при исследовании социально-экономических и производственно-технических систем.

Основным фактором, приводящим к необратимости, является неустойчивость (расходимость) технологических траекторий предметов труда [3, 9]. При точном задании начальных условий $S_j(t_0)$ в момент времени t_0 можно однозначно предсказать состояние предмета труда $S_j(t)$ в произвольный момент времени t. При задании начальных условий для предметов труда $S_j(t_0)$ с небольшой погрешностью $\Delta S_j(t_0)$ возможны следующие ситуации:

а) расхождение траекторий $\Delta S_j(t)$ с начальными условиями $\Delta S_j(t_0)$ в любой последующий момент времени t остается малым $\lim\limits_{t\to\infty} \Delta S_j(t) \to 0$;

б) расхождение траекторий $\Delta S_j(t)$ становится сколь угодно большим $|\lim\limits_{t\to\infty} \Delta S_j(t)| \to \infty$.

В последнем случае говорят о неустойчивости поведения микропараметров предметов труда. Можно утверждать, что в фазовом технологическом пространстве (S, μ) происходит перемешивание фазовых технологических траекторий. Если расходимость траекторий происходит по экспоненциальному закону, то имеет место стохастизация. Последнее означает, что, с точки зрения динамической теории, траектории движения предметов труда в фазовом технологическом пространстве (S, μ) становятся непредсказуемыми. Вследствие непредсказуемости технологической траектории предмета труда становится возможным лишь статистическое предсказание наиболее вероятного поведения средних характеристик технологического процесса.

Впервые на роль неустойчивости движения и фактора перемешивания в возникновении необратимости явлений указал Н. С. Крылов. Для оценки меры неустойчивости динамической системы из N объектов А. Н. Колмогоров ввел специальную характеристику, получившую название энтропии Крылова–Колмогорова, или К-энтропии. Для технологического процесса К-энтропия определяется формулой

$$k(t) = \frac{1}{t}\ln\left(\sqrt{\sum_{j=1}^{N}(\Delta S_j(t))^2}\Bigg/\sqrt{\sum_{j=1}^{N}(\Delta S_j(0))^2}\right) \qquad (j = 1, 2, \ldots, N). \tag{16}$$

Если движение предметов труда по технологическому маршруту является асимптотически устойчивым, то $\lim\limits_{t\to\infty} \Delta S_j(t) \to 0$ и $\lim\limits_{t\to\infty} k(t) \to 0$.

Таким образом, необратимость явлений при движении предметов труда по технологическому маршруту заключается во взаимодействии предметов труда с технологическим оборудованием. Траектории движения предметов труда в фазовом технологическом пространстве (S, μ) после взаимодействия с технологическим оборудованием оказываются непредсказуемыми. Становится возможным лишь статистическое предсказание. При этом важным является нахождение наиболее вероятных значений параметров технологического процесса.

Таким образом, на основании понятия энтропии технологического процесса [3, 4] в работе доказан закон возрастания энтропии для замкнутой производственно-технической системы. Постоянство энтропии характеризует квазистатические технологические процессы, являющиеся идеализацией реальных технологических процессов производственно-технических систем.

1. *Нейман Дж.* Теория самовоспроизводящих автоматов. – Москва: Мир, 1971. – 382 с.
2. *Красовский А. А.* Фазовое пространство и статистическая теория динамических систем. – Москва: Наука, 1974. – 232 с.

3. *Петров Б. Н., Уланов Г. М., Гольденблат И. И., Ульянов С. В.* Теории моделей в процессах управления (информационный и термодинамический аспекты). – Москва: Наука, 1978. – 224 с.
4. *Прангишвили И. В.* Энтропийные и другие системные закономерности: Вопросы управления сложными системами. – Москва: Наука, 2003. – 428 с.
5. *Шкурба В. В. и др.* Планирование дискретного производства в условиях АСУ. – Киев: Техника, 1975. – 296 с.
6. *Первозванский А. А.* Математические методы в управлении производством. – Москва: Наука, 1975. – 616 с.
7. *Бусленко Н. П.* Моделирование сложных систем. – Москва: Наука, 1978. – 356 с.
8. *Faber M., Niemes H., Stephan G.* Entropy, environment and resources. An essay in physico-economics. 2^{nd} ed. – Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1995. – 205 p.
9. *Пигнастый О. М.* Статистическая теория производственных систем. – Харьков: Изд-во Харьк. нац. ун-та им. В. Н. Каразина, 2007. – 388 с.

Харьковский национальный университет
им. В. Н. Каразина

Поступило в редакцию 17.05.2011
После доработки — 13.12.2011

Член-кореспондент НАН України **Н. А. Азаренков, О. М. Пігнастий, В. Д. Ходусов**

Про закон зростання ентропії технологічного процесу

Обгрунтовано застосування статистичного підходу для опису закономірностей поведінки макропараметрів технологічного процесу. Наведено вираз для ентропії технологічного процесу. Показано механізм необоротності технологічних явищ виробничо-технічних систем. З використанням модельного уявлення про стохастичний характер взаємодії технологічного обладнання та предметів праці доведено закон зростання ентропії для замкнутої виробничо-технічної системи. Необоротність технологічних явищ полягає у взаємодії предметів праці з технологічним обладнанням.

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **N. A. Azarenkov, O. M. Pignasty, V. D. Khodusov**

On the entropy increase law for a technological process

The application of a statistical approach to the description of regularities of a behavior of macroparameters of a technological process is substantiated. The formula for the entropy of a technological process is deduced. A mechanism of irreversibility of technological phenomena is presented. With the use of a model idea of the stochastic character of the interaction of technological facilities and the objects of labor, the entropy increase law for a closed productive-technical system is proved. The irreversibility of technological phenomena is related to the interaction of the objects of labor and technological facilities.