

Специализированный учебно-научный центр (СУНЦ)
имени А.Н. Колмогорова, факультет Московского
государственного университета имени М.В. Ломоносова

Заочная школа СУНЦ МГУ 9 класс, алгебра

Н. Е. Шавгулидзе



СУНЦ МГУ
2015

Шавгулидзе Н.Е. *Заочная школа СУНЦ МГУ, 9 класс, алгебра.* — М.: Школа им. А.Н. Колмогорова СУНЦ МГУ, 2015 — 64 с., ил.

В брошюре приведены материалы заочной школы СУНЦ МГУ для 9 класса (алгебра): теоретический материал, задачи разного уровня сложности с решениями, примеры контрольных работ.

Предисловие

Заочная школа СУНЦ МГУ начала работать в 2013 году. Тогда был только 9 класс. В 2014 году появился 8 класс, а в 2015 году — 10 класс. Обучение бесплатное, в сентябре проводится конкурсный отбор школьников. В заочной школе обучаются школьники со всей России, в том числе из самых отдаленных ее уголков. Основная цель — развитие интереса к математике, физике, информатике, химии и биологии, а также повышение общеобразовательного уровня учащихся.

Начиная с 2015 года школьники 8-го, 9-го и 10-го классов могут изучать в заочной школе СУНЦ пять предметов: математику, физику, информатику, химию и биологию. Материалы готовят сотрудники профильных кафедр СУНЦ МГУ. Учебный год начинается 1 октября. Школьники получают доступ к учебным материалам, размещенным на нашем сайте. Обучение полностью заочное.

Курс математики для 9 класса заочной школы состоит из пятнадцати тем, из них пять тем по геометрии и десять тем по алгебре. Каждая тема состоит из теоретических материалов, включающих в себя примеры задач с решениями, задач для самостоятельной работы с ответами и контрольной работы. Решение контрольной работы учащийся загружает на наш сайт в установленный срок (две темы в месяц). Преподаватели заочной школы проверяют его, выставляют оценку и добавляют комментарии учащемуся. Когда работа оценена, школьник получает доступ к файлу с решением контрольной работы. Учебный год заканчивается 30 апреля.

Лучшие учащиеся 9 класса заочной школы приглашаются на очную сессию, которая проходит в СУНЦ МГУ в конце марта во время весенних каникул.

1 Свойства квадратичной функции

Функция $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ называется квадратичной функцией. Для того, чтобы изучить ее свойства, выделим полный квадрат:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c = \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c. \end{aligned}$$

Обозначим $x_0 = -\frac{b}{2a}$ и $y_0 = -\frac{b^2}{4a} + c$. В новых обозначениях имеем: $y = a(x - x_0)^2 + y_0$. График этой функции — парабола, полученная из графика функции $y = ax^2$ с помощью двух параллельных переносов:

- сдвига вдоль оси O_x на $|x_0|$ единиц (вправо, если $x_0 > 0$ или влево, если $x_0 < 0$);
- сдвига вдоль оси O_y на $|y_0|$ единиц (вверх, если $y_0 > 0$ или вниз, если $y_0 < 0$).

Точка с координатами $(x_0; y_0)$ называется вершиной параболы. Для того, чтобы правильно построить график функции, необходимо также найти точки пересечения графика с осями координат.

Задача 1. Построить график функции $y = 0.5x^2 - x - 1$.

Решение. Первый способ. Найдем вершину параболы $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2 \cdot 0.5} = 1$; $y = -1.5$. Затем найдем значения в соседних точках:

x	-1	0	1	2	3
y	0.5	-1	-1.5	-1	0.5

заметим, что значения в точках, симметричных относительно от вершины, одинаковы. Кроме этого, необходимо найти точки пересечения графика с осями координат (см. второй способ). После этого строим график.

Второй способ. Выделим полный квадрат:

$$0.5x^2 - x - 1 = 0.5(x^2 - 2x) - 1 = \frac{x^2 - 2x + 1}{2} - \frac{1}{2} - 1 = \frac{(x - 1)^2}{2} - 1.5.$$

Сначала построим график функции $y = \frac{x^2}{2}$ (на рисунке 1 он изображен пунктиром). Затем сдвинем его вправо вдоль оси O_x на 1, получим график $y = \frac{(x-1)^2}{2}$ (он изображен пунктиром).

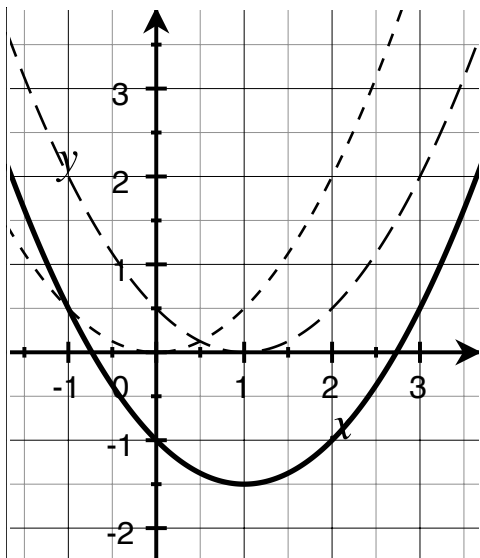


рис.1

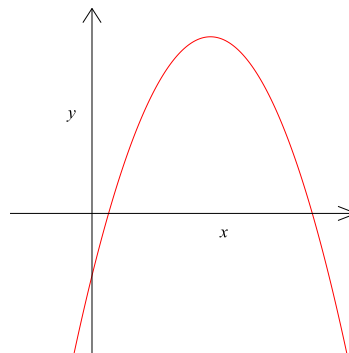


рис.2

Сдвинем график $y = \frac{(x-1)^2}{2}$ вниз по оси O_y на 1.5, получим искомый график $y = \frac{(x-1)^2}{2} - 1.5$ (см. рис. 1).

Вершина параболы в точке $(1; -1.5)$. График пересекает ось y в точке $(0; -1)$. Решив уравнение $\frac{(x-1)^2}{2} - 1.5 = 0$, находим точки, в которых график пересекает ось O_x : $(1 - \sqrt{3}; 0)$ и $(1 + \sqrt{3}; 0)$.

Парабола $y = ax^2 + bx + c$ пересекает ось O_y в точке $(0; c)$, а ось O_x в двух точках, если уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет 2 корня. Если уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет ровно один корень, то парабола имеет ровно одну общую точку с осью O_x , и говорят, что она касается оси O_x . Если уравнение корней не имеет, то парабола не пересекает ось O_x .

Ветви параболы $y = ax^2 + bx + c$ направлены вверх при $a > 0$ и вниз при $a < 0$.

По графику параболы можно сразу сделать вывод о знаках чисел a , b , c .

Задача 2. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ изображена на рис. 2. Определить знаки чисел a , b , c .

Решение. График функции пересекает ось O_y в точке $(0; c)$. Следовательно, $c < 0$. Так как оси параболы направлены вниз, то $a < 0$. Вершина

парабола в точке $(x_0; y_0)$, $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Из рисунка следует, что $x_0 > 0$, то есть $\frac{b}{2a} < 0$. Так как $a < 0$, то $b > 0$.

Кроме того мы можем сказать, что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня, то есть $D = b^2 - 4ac > 0$.

Задача 3. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ изображена на рис. 2. Определить знак числа $a + c - b$.

Решение. При $x = -1$ имеем $y = a(-1)^2 + b(-1) + c = a - b + c$. На рисунке 2 парабола ниже оси O_x для всех $x < 0$. Следовательно, $a + c - b < 0$.

Ответ: $a + c - b < 0$.

Задача 4. Пусть $f(x) = -2x^2 + bx + c$, уравнение $f(x) = 0$ имеет 2 различных корня $x_1 < x_2$. При каких значениях $f(3)$ выполняется неравенство $x_1 < 3 < x_2$?

Решение. Рассмотрим параболу $y = -2x^2 + bx + c$. Ее ветви направлены вниз (рисунок 3), так как коэффициент при x^2 меньше нуля (равен -2). Парабола пересекает ось O_x в точках x_1 и x_2 .

Так как ветви параболы направлены вниз, то если x находится между x_1 и x_2 , то $f(x) > 0$, а в остальных случаях $f(x) \leq 0$. Следовательно, $x_1 < 3 < x_2$ тогда и только тогда, когда $f(3) > 0$.

Ответ: $f(3) > 0$.

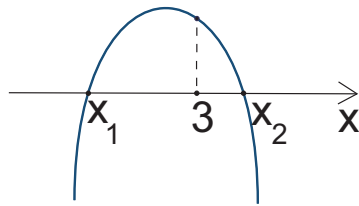


рис.3

Пусть x_1, x_2, x_3 — различные числа.

Теорема. Через любые три точки $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$, не лежащие на одной прямой, можно провести параболу, и притом только одну.

Пусть точки $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$ не лежат на одной прямой. Тогда парабола, проходящая через эти точки, задается уравнением

$$y = y_1 \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + y_2 \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + y_3 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Проверить это легко: достаточно подставить x_1 , x_2 и x_3 .

Тот факт, что парабола единственна, доказать не сложно, но мы здесь этого делать не будем.

Эту задачу можно решать и другим способом: подставить точки $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$ в уравнение $y = ax^2 + bx + c$ и решить систему из трех уравнений с тремя неизвестными a , b , c .

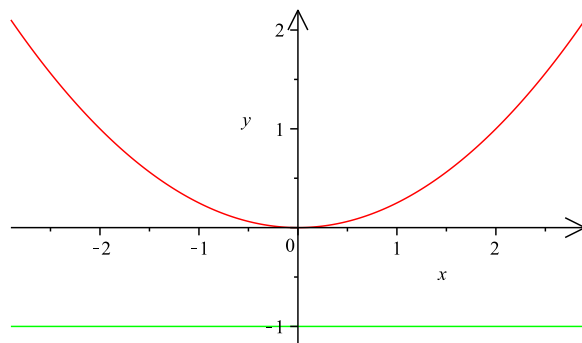


рис.4

Задача 5. Прямая l задана уравнением $y = -1$; точка A имеет координаты $(0; 1)$. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от прямой l и точки A .

Решение. Расстояние между точками $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ вычисляется по формуле $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Пусть точка M имеет координаты $(x; y)$. Тогда $AM = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2}$.

Расстояние от точки до прямой — длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую. В нашем случае расстояние зависит только

от координаты y и равно $y + 1$.

То, что точка M равноудалена от прямой l и точки A , означает, что расстояния AM и $y + 1$ совпадают. Таким образом, искомое множество точек — множество решений уравнения

$$y + 1 = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2}.$$

Отметив, что $y \geq -1$, возводим в квадрат: $y^2 + 2y + 1 = x^2 + y^2 - 2y + 1$. Уравнение принимает вид $4y = x^2$, то есть искомое множество точек — это парабола $y = \frac{1}{4}x^2$ (см. рисунок 4 (красным цветом)).

Ответ: $y = \frac{1}{4}x^2$.

Задачи.

1. Построить график функции $y = 3x^2 - 4x + 2$.
2. Построить график функции $y = -2x^2 - 4x + 3$.
3. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ изображена на рисунке 1. Определить знаки чисел a , b , c .

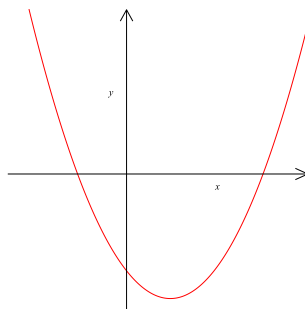


рис.1

4. При каком значении параметра c парабола $y = x^2 + 10x + c$ касается оси O_x ?
5. Известно, что $ac < 0$. В скольких точках парабола $y = ax^2 + bx + c$ пересекает ось O_x ?

6. Ветви параболы $y = f(x)$ направлены вниз, парабола пересекает ось O_x в двух точках. При каких значениях $f(4)$ корни уравнения $f(x) = 0$ лежат по разные стороны от точки 4?
7. Известно, что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, $a > 0$, имеет корни x_1 и x_2 , причем $x_1 < 1 < x_2$. Определить знак суммы $a + b + c$.
8. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ имеет вершину в точке $(-4; 2)$, причем $9a - 3b + c < 0$. Определить знаки чисел a , b , c .
9. Построить параболу $y = ax^2 + bx + c$ проходящую через точки $(1; -6)$, $(2; -4)$, $(3; 4)$.

Ответы к задаче. (3) $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$; (4) 25; (5) 2; (6) $f(4) > 0$; (7) $a + b + c < 0$; (8) $a < 0$, $b < 0$, $c < 0$; (9) $y = 3x^2 - 7x - 2$.

Контрольная работа.

1. Построить график функции $y = -2x^2 + 5x - 3$.
2. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ изображена на рисунке 1. Определить знаки чисел a , b , c .

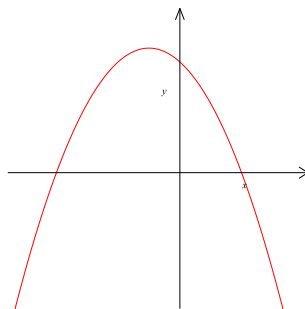


рис.1

3. При каком значении параметра c парабола $y = 4x^2 - 12x + c$ касается оси O_x .

4. При каких значениях c корни уравнения $x^2 + bx + c = 0$ имеют разные знаки?
5. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ имеет вершину в точке $(4; -10)$, причем $a + b + c > 0$. Определить знаки чисел a, b, c .
6. Известно, что уравнение $-2x^2 + bx + c = 0$, имеет корни x_1 и x_2 , причем $x_1 < -2 < x_2$. Определить знак числа $-8 - 2b + c$.
7. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от точки $(2; 2)$ и прямой $y = 0$.
8. Построить параболу $y = ax^2 + bx + c$ проходящую через точки $(1; -6), (2; -4), (3; 4)$.

2 Основные методы решения уравнений с одной переменной.

Выражение вида $f(x) = g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ — заданные числовые функции, называется уравнением с неизвестным x . Корнем, или решением, этого уравнения называется любое числовое значение величины x , при котором обе части уравнения определены и принимают одинаковые значения.

Решить уравнение означает найти все его корни, если они существуют, или доказать, что корней у него нет. Обычно процесс решения уравнения заключается в последовательном переходе к равносильным уравнениям „более простого вида“. Уравнения называются равносильными, если множества их корней совпадают.

Пример. Уравнения $\frac{x^2-4}{x+3} = 0$ и $x^2 - 4 = 0$ равносильны (их корни -2 и 2), а уравнения $\frac{x^2-4}{x+2} = 0$ и $x^2 - 4 = 0$ не равносильны, так как $x = -2$ — корень второго уравнения, но не корень первого.

Уравнения можно решать с помощью замены переменной.

Задача 1. Решить уравнение

$$\frac{x^2 + 1}{2x + 3} + \frac{2x + 3}{x^2 + 1} = \frac{29}{10}.$$

Решение. Обозначим $\frac{x^2+1}{2x+3}$ через y , получим $y + \frac{1}{y} = \frac{29}{10}$. Заметим, что $y = 0$ не является корнем уравнения, и домножим на $10y$. Получим $10y^2 + 10 = 29y$, то есть $10y^2 - 29y + 10 = 0$. Корни этого уравнения: $y = \frac{2}{5}$ и $y = \frac{5}{2}$. Заметим, что $x \neq -1.5$ и найдем x :

$$\left[\begin{array}{l} \frac{x^2+1}{2x+3} = \frac{2}{5} \\ \frac{x^2+1}{2x+3} = \frac{5}{2} \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x^2+5=4x+6 \\ 2x^2+2=10x+15 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x^2-4x-1=0 \\ 2x^2-10x-13=0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-0.2 \\ x=5-\sqrt{51} \\ x=5+\sqrt{51} \end{array} \right]$$

Ответ: $1, -0.2, 5 \pm \sqrt{51}$.

Задача 2. Решить уравнение

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 5 = 4\left(x + \frac{1}{x}\right).$$

Решение. Попробуем подобрать замену переменной. Заметим, что $(x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$. Сделаем замену переменной $t = x + \frac{1}{x}$. Тогда уравнение примет вид

$$t^2 + 3 = 4t.$$

Корнями этого уравнения являются числа 1 и 3. Вернемся к переменной x . При $t = 1$ имеем $x + \frac{1}{x} = 1$, или $x^2 - x + 1 = 0$. Это уравнение не имеет корней.

При $t = 3$ имеем $x + \frac{1}{x} = 3$, или $x^2 - 3x + 1 = 0$. Корнями этого уравнения являются числа $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Ответ: $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Задача 3. Решить уравнение

$$\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 10 \left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x} \right).$$

Решение. Попробуем преобразовать уравнение и подобрать замену переменной:

$$3 \left(\frac{x}{3} \right)^2 + 3 \left(\frac{4}{x} \right)^2 = 10 \left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x} \right).$$

Заметим, что $\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x} \right)^2 = \left(\frac{x}{3} \right)^2 - \frac{8}{3} + \left(\frac{4}{x} \right)^2$. Сделаем замену переменной $y = \frac{x}{3} - \frac{4}{x}$. Уравнение принимает вид

$$3 \left(y^2 + \frac{8}{3} \right) = 10y,$$

то есть

$$3y^2 - 10y + 8 = 0.$$

Его корни $y = 2$ и $y = \frac{4}{3}$. Следовательно, $\frac{x}{3} - \frac{4}{x} = 2$ или $\frac{x}{3} - \frac{4}{x} = \frac{4}{3}$. То есть $x^2 - 6x - 12 = 0$ или $x^2 - 4x - 12 = 0$. Корни первого уравнения $x = 3 \pm \sqrt{21}$, корни второго — $x = -2$ и $x = 6$.

Ответ: $-2, 6, 3 \pm \sqrt{21}$.

Задача 4. Решить уравнение

$$\frac{4x}{4x^2 - 8x + 7} + \frac{3x}{4x^2 - 10x + 7} = 1.$$

Решение. Заметим сходство дробей и, отметив, что $x = 0$ не является решением уравнения, поделим числители и знаменатели дробей на x :

$$\frac{4}{4x - 8 + \frac{7}{x}} + \frac{3}{4x - 10 + \frac{7}{x}} = 1.$$

Теперь стало видно, что следует сделать замену переменной $y = 4x + \frac{7}{x}$. Уравнение принимает вид

$$\frac{4}{y - 8} + \frac{3}{y - 10} = 1.$$

Переносим все в левую часть, приводим к общему знаменателю, решаем уравнение. Получаем $y = 9$ и $y = 16$.

Вернемся к переменной x : при $y = 9$ получаем уравнение $4x + \frac{7}{x} = 9$. Его корни $x = \frac{1}{2}$ и $x = \frac{7}{2}$.

При $y = 16$ получаем уравнение $4x + \frac{7}{x} = 16$, которое не имеет корней.

Ответ: $1/2$ и $7/2$.

Уравнения специального вида.

1. Уравнения вида $a(f(x))^2 + bf(x)g(x) + c(g(x))^2$, $a, b, c \in \mathbf{R}$, решаются с помощью замены переменной. Сначала делим на $g(x)$, убедившись, что $g(x) \neq 0$ (если некоторые корни $g(x) = 0$ являются корнями исходного уравнения, то записываем их в ответ, а потом делим уравнение на $g(x)$).

Затем делаем замену переменной $y = \frac{f(x)}{g(x)}$. Получаем квадратное уравнение.

Задача 5. Решить уравнение

$$(x^2 + 2)^2 + 3(x^2 + 2)(2x + 1) = 4(2x + 1)^2.$$

Решение. Заметим, что $x = -1/2$ не является корнем уравнения. Делим уравнение на $(2x + 1)^2$.

$$\left(\frac{x^2 + 2}{2x + 1}\right)^2 + 3\left(\frac{x^2 + 2}{2x + 1}\right) = 4$$

Делаем замену переменной $y = \frac{x^2+2}{2x+1}$, получаем уравнение $y^2+3y-4=0$. Его корни $y = -4$ и $y = 1$. Вернемся к x , получаем совокупность уравнений $\frac{x^2+2}{2x+1} = -4$ и $\frac{x^2+2}{2x+1} = 1$, то есть $x^2+8x+6=0$ и $x^2-2x+1=0$. Корнями первого уравнения являются числа $x = -4-\sqrt{10}$ и $x = -4+\sqrt{10}$, а второе имеет единственный корень $x = 1$.

Ответ: 1, $-4-\sqrt{10}$ и $-4+\sqrt{10}$.

2. Уравнения вида $ax^{2k} + bx^k + c = 0$ решаются с помощью замены переменной $t = x^k$.

3. Симметричные уравнения третьей степени:

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0,$$

или

$$ax^3 + bx^2 - bx - a = 0,$$

где a, b — действительные числа, $a \neq 0$. Один из корней первого уравнения $x = -1$, а второго уравнения — $x = 1$.

Задача 6. Решить уравнение $4x^3 + 5x^2 + 5x + 4 = 0$.

Решение. Один из корней уравнения $x = -1$; разложим выражение $4x^3 + 5x^2 + 5x + 4$ на множители:

$$4x^3 + 5x^2 + 5x + 4 = 4(x^3 + 1) + 5x(x + 1) = (x + 1)(4x^2 - 4x + 4 + 5x),$$

уравнение $4x^3 + 5x^2 + 5x + 4 = 0$ примет вид

$$(x + 1)(4x^2 + x + 4) = 0.$$

Уравнение $4x^2 + x + 4 = 0$ не имеет корней.

Ответ: -1 .

4. Симметричные уравнения четвертой степени:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0, \text{ или } ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0,$$

где a, b, c — действительные числа, $a \neq 0$.

Поделим уравнения на x^2 и заметим, что $(x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$. Сделаем замену $t = x + \frac{1}{x}$ (во втором замена $t = x - \frac{1}{x}$).

Задача 7. Решить уравнение $x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 5x + 1 = 0$.

Решение. Поделим уравнение на x^2 , получим $x^2 - 5x + 6 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$. Сделаем замену $t = x + \frac{1}{x}$, заметим, что $t^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$. Уравнение примет вид

$$t^2 - 5t + 4 = 0.$$

Его корни $t = 1$ и $t = 4$. Следовательно, $x + \frac{1}{x} = 1$ или $x + \frac{1}{x} = 4$. То есть $x^2 - x + 1 = 0$ или $x^2 - 4x + 1 = 0$. Первое уравнение не имеет корней, корни второго $x = 2 - \sqrt{3}$ и $x = 2 + \sqrt{3}$.

Ответ: $2 - \sqrt{3}$ и $2 + \sqrt{3}$.

Некоторые уравнения решаются с помощью удобной группировки слагаемых.

Задача 8. Решить уравнение

$$(*) \quad \frac{2}{x+8} + \frac{5}{x+9} = \frac{3}{x+15} + \frac{4}{x+6}.$$

Решение. Если мы перенесем все дроби в левую часть и приведем к общему знаменателю, то в числителе получится многочлен не более, чем третьей степени. вычислим коэффициент при x^3 : $2 + 5 - 3 - 4 = 0$. Следовательно, степень числителя не больше двух, и такое уравнение мы точно решим. Теперь осталось привести дроби к общему знаменателю: $\frac{2(4x^2+9x+198)}{(x+5)(x+6)(x+8)(x+9)} = 0$.

Корнями уравнения $4x^2 + 9x + 198 = 0$ являются числа $x = 6$ и $x = -33/4$. При этих значениях x знаменатель не обращается в 0.

Ответ: $x = 6$ и $x = -33/4$.

Замечание. Приведение к общему знаменателю занимает много времени и при этом очень легко допустить ошибку (можно и не одну). Для начала можно попробовать складывать дроби попарно (это можно сделать тремя способами: первую со второй, первую с третьей, первую с четвертой). В первом случае получим $\frac{7x+58}{(x+8)(x+9)} - \frac{7x+84}{(x+15)(x+6)} = 0$. Во втором: $\frac{-x+6}{(x+8)(x+15)} + \frac{x-6}{(x+9)(x+6)} = 0$. Нам повезло, уравнение (*) эквивалентно следующему:

$$(x-6) \left(-\frac{1}{(x+8)(x+15)} + \frac{1}{(x+9)(x+6)} \right) = 0,$$

$$\text{то есть } (x - 6) \cdot \frac{8x + 66}{(x^2 + 23x + 120)(x^2 + 15x + 54)} = 0.$$

Задача 9. Решить уравнение

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+7} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+6}.$$

Решение. Приведение к общему знаменателю такого количества дробей займет много времени и, скорее всего, мы получим в числителе сложное уравнение (к тому же легко совершить арифметическую ошибку). Попробуем решить задачу по-другому. Перенесем все в левую часть и попробуем сгруппировать так, чтобы при сложении по две дроби получился одинаковый числитель:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+7} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+6} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x+4} = 0.$$

Попарно приведем к общему знаменателю:

$$\frac{2x+7}{x^2+7x} - \frac{2x+7}{x^2+7x+6} + \frac{2x+7}{x^2+7x+10} - \frac{2x+7}{x^2+7x+12} = 0,$$

то есть

$$(2x+7) \left(\frac{1}{x^2+7x} - \frac{1}{x^2+7x+6} + \frac{1}{x^2+7x+10} - \frac{1}{x^2+7x+12} \right) = 0.$$

Так как при $x = -7/2$ ни один знаменатель не обращается в нуль, то это один из корней нашего уравнения. Осталось решить

$$\frac{1}{x^2+7x} - \frac{1}{x^2+7x+6} + \frac{1}{x^2+7x+10} - \frac{1}{x^2+7x+12} = 0.$$

Сделаем замену переменной $y = x^2 + 7x$. Тогда уравнение принимает вид

$$\frac{1}{y} - \frac{1}{y+6} + \frac{1}{y+10} - \frac{1}{y+12} = 0.$$

Приведем к общему знаменателю, раскроем скобки:

$$\frac{8(y^2 + 7y + 90)}{y(y+6)(y+10)(y+12)} = 0.$$

Третья степень в числителе сократилась и мы получили квадратное уравнение $y^2 + 7y + 90 = 0$, которое не имеет корней. Следовательно, $x = -7/2$ — единственное решение исходного уравнения.

Ответ: $-7/2$.

Задачи.

Решить уравнения

$$(1) \quad 8x^6 - 63x^3 - 8 = 0;$$

$$(2) \quad 2x + \sqrt{x} = 10;$$

$$(3) \quad 3x^3 + 4x^2 - 4x - 3 = 0;$$

$$(4) \quad \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-3} = \frac{6}{x-6};$$

$$(5) \quad (x^2 - x + 1)(x^2 - x + 2) = 12;$$

$$(6) \quad \frac{1}{8x^2 + 2x + 1} + \frac{3}{8x^2 + 2x + 3} = \frac{10}{8x^2 + 2x + 7};$$

$$(7) \quad 2x^4 - 5x^2(x + 2) + 3(x + 2)^2 = 0;$$

$$(8) \quad \frac{x^{17} - 1}{1 - x^{15}} = \frac{1 - x^{15}}{x^{13} - 1}.$$

Ответы к задачам. (1) 2, $-1/2$; (2) 4; (3) 1, $\frac{-7 \pm \sqrt{13}}{6}$; (4) $\frac{21 \pm 3\sqrt{5}}{11}$; (5) -1 и 2 ; (6) $-1/2$ и $1/4$; (7) -1 , 2 , $\frac{3 - \sqrt{57}}{4}$ и $\frac{3 + \sqrt{57}}{4}$; (8) 0 и -1 .

Контрольная работа.

Решить уравнения

$$(1) \quad x^4 - 5x^2 - 36 = 0;$$

$$(2) \quad x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 6x + 1 = 0;$$

$$(3) \quad (1 - x + x^2)(6 + x - x^2) = 10;$$

$$(4) \quad \frac{6x}{2x^2 - 10x + 5} + \frac{5x}{2x^2 - 6x + 5} = 3;$$

$$(5) \quad (2x^2 - 11)^2 + 21(2x - 5)^2 = 10(2x^2 - 11)(2x - 5);$$

$$(6) \quad \frac{2}{x^2 - 4} - \frac{1}{x(x - 2)} + \frac{x - 4}{x(x + 2)} = 0;$$

$$(7) \quad \left(\frac{x}{x - 1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x + 1}\right)^2 = \frac{10}{9}.$$

3 Теорема Безу и деление многочленов с остатком

Функция

$$(*) \quad P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

где $a_n, \dots, a_0$ — вещественные числа, причем $a_n \neq 0$, называется многочленом степени n .

Разделить многочлен $P(x)$ на многочлен $H(x)$ означает найти многочлены $Q(x)$ и $R(x)$, такие что $P(x) = Q(x)H(x) + R(x)$ для любого x .

Теорема. Если $P(x)$ — многочлен степени n , $H(x)$ — многочлен степени m , $m < n$, то существуют многочлены $Q(x)$ и $R(x)$, такие что $P(x) = Q(x)H(x) + R(x)$, причем степень $R(x)$ меньше m . Многочлен $Q(x)$ называется частным, а $R(x)$ — остатком.

Теорема Безу. Остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $x - a$ равен $P(a)$, то есть существует многочлен $Q(x)$, такой что

$$P(x) = (x - a)Q(x) + P(a).$$

Из теоремы Безу следует, что если $P(a) = 0$, то существует многочлен $Q(x)$, такой что $P(x) = (x - a)Q(x)$.

Многочлены можно делить разными способами.

Поделим $x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ на $x + 5$.

Первый способ:

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 + 3x + 4 &= x^2(x+5) - 3x^2 + 3x + 4 = \\ &= x^2(x+5) - 3x(x+5) + 15x + 3x + 4 = x^2(x+5) - 3x(x+5) + 18x + 4 = \\ &= x^2(x+5) - 3x(x+5) + 18(x+5) - 90 + 4 = (x^2 - 3x + 18)(x+5) - 86. \end{aligned}$$

Второй способ: деление в столбик.

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 + 2x^2 + 3x + 4 & x + 5 \\
 \underline{x^3 + 5x^2} & \\
 -3x^2 + 3x & \\
 \underline{-3x^2 - 15x} & \\
 18x + 4 & \\
 \underline{18x + 90} & \\
 -86 &
 \end{array}$$

Третий способ: схема Горнера. Этот способ возможен только при делении на двучлен $x - b$. Покажем на примере деления многочлена $P(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ на $x - b$.

Сначала заполняем верхнюю строчку, выписываем туда коэффициенты многочлена, а также записываем число b в левую клетку второй строчки:

	a_3	a_2	a_1	a_0
b				

Затем заполняем вторую строку следующим образом:

	a_3	a_2	a_1	a_0
b	a_3	$ba_3 + a_2$	$b(ba_3 + a_2) + a_1$	$b(b(ba_3 + a_2) + a_1) + a_0$

Число в правом нижнем углу таблицы — остаток $(P(b))$. Числа во второй строке между числом b и остатком — коэффициенты частного в порядке убывания.

Аналогично выписывается схема Горнера для уравнений других степеней.

Поделим $x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ на $x + 5$ с помощью схемы Горнера:

	1	2	3	4
-5				

	1	2	3	4
-5	1			

	1	2	3	4
-5	1	$-5 \cdot 1 + 2$		

	1	2	3	4
-5	1	-3	$-5 \cdot (-3) + 3$	

	1	2	3	4
-5	1	-3	18	$-5 \cdot 18 + 4$

	1	2	3	4
-5	1	-3	18	-86

Табличку нужно писать один раз (а не шесть), здесь просто продемонстрирован порядок заполнения.

Частное: $x^2 - 3x + 18$, остаток -86 .

То есть $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = (x^2 - 3x + 18)(x + 5) - 86$ или

$$\frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{x + 5} = x^2 - 3x + 18 + \frac{-86}{x + 5}.$$

Задача 1. Поделить с остатком $x^4 - 15$ на $x^2 - 4$.

Решение. Первый способ: $x^4 - 15 = x^2(x^2 - 4) + 4x^2 - 15 = x^2(x^2 - 4) + 4(x^2 - 4) + 1 = (x^2 + 4)(x^2 - 4) + 1$.

Второй способ: деление в столбик.

$$\begin{array}{r|l} -x^4 & -15 \\ x^4 - 4x^2 & x^2 - 4 \\ \hline -4x^2 - 15 & \\ 4x^2 - 16 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

Третий способ: заметим, что $x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4)$ (разность квадратов). Следовательно, $x^4 - 15 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) + 1$.

Ответ: $\frac{x^4 - 15}{x^2 - 4} = x^2 + 4 + \frac{1}{x^2 - 4}$.

Задача 2. Поделить с остатком $x^4 - 15$ на $x - 3$.

Решение. Поделим по схеме Горнера:

	1	0	0	0	-15
3	1	3	9	27	66

Ответ: $\frac{x^4 - 15}{x - 3} = x^3 + 3x^2 + 9x + 27 + \frac{66}{x - 3}$.

Задача 3. Разложить многочлен $P(x) = x^3 - 7x + 6$ на множители.

Решение. Заметим, что $P(1) = 0$. Следовательно, $P(x)$ делится на $x - 1$ без остатка. Поделим по схеме Горнера:

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 0 & -7 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \cdot 1 + 0 & & \end{array}; \begin{array}{c|ccc} & 1 & 0 & -7 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \cdot 1 - 7 & \end{array}; \begin{array}{c|ccc} & 1 & 0 & -7 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}.$$

Получаем $x^3 - 7x + 6 = (x - 1)(x^2 + x - 6)$. Корнями $x^2 + x - 6 = 0$ являются числа 2 и -3 . Следовательно, $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$, откуда получаем $x^3 - 7x + 6 = (x - 1)(x - 2)(x + 3)$.

Ответ: $x^3 - 7x + 6 = (x - 1)(x - 2)(x + 3)$.

Задача 4. Решить уравнение $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$.

Решение. Это симметричное уравнение четвертой степени, его можно решать так же как и уравнение в задаче 7 части 2. Но есть и другой способ. Заметим, что $x = -1$ не является решением уравнения.

Далее, так как $(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1) = x^5+1$, то $x^4-x^3+x^2-x+1 = \frac{x^5+1}{x+1}$. Следовательно, уравнение $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$ эквивалентно уравнению

$$\frac{x^5 + 1}{x + 1} = 0.$$

Равенство $x^5 = -1$ выполняется только при $x = -1$, но при $x = -1$ знаменатель равен нулю.

Ответ: Нет корней.

Задача 5. Разложить многочлен $P(x) = x^4 + 1$ на множители.

Решение. Несмотря на то, что уравнение $x^4 + 1 = 0$ не имеет корней, многочлен $x^4 + 1$ все же можно разложить на множители. Делается это так:

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = \\ &= (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = (x^2 + 1 - \sqrt{2}x)(x^2 + 1 + \sqrt{2}x). \end{aligned}$$

Ответ: $(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$.

Задачи.

1. Поделить с остатком $6x^4 + x + 5$ на $x^2 - 2x + 1$.

2. Представить $\frac{2x^3-4x^2+5x}{x-2}$ в виде $ax^2 + bx + c + \frac{d}{x-2}$.
3. $P(x) = x^5 - 5x^4 - 4x^3 - 20x^2 - 8$. Найти $P(7)$ с помощью схемы Горнера.
4. Разложить многочлен $P(x) = 2x^3 + 3x - 5$ на множители.
5. Разложить многочлен $P(x) = x^4 + 25$ на множители.
6. Разложить многочлен $P(x) = x^4 + x^2 + 1$ на множители.
7. Решить уравнение $x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1 = 0$.
8. Решить уравнение $x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1 = 0$.

Ответы к задачам. (1) $6x^4+x+5=(x^2-2x+1)(6x^2+12x+18)+25x-13$; (2) $2x^2+5+\frac{10}{x-2}$; (3) 2442; (4) 1; (5) $(x^2 - x\sqrt{10} + 5)(x^2 + x\sqrt{10} + 5)$; (6) $(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$; (7) нет корней; (8) нет корней.

Контрольная работа.

1. Поделить $x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$ на $x^2 + 2x + 1$.
2. Поделить $x^7 - 1$ на $x - 1$.
3. $P(x) = x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 10x^2 - 7$. Найти $P(-5)$ с помощью схемы Горнера.
4. Разложить многочлен $P(x) = 9x^4 + 4$ на множители.
5. Решить уравнение $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$.
6. Решить уравнение

$$\frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1} + \frac{x^2 + 8x + 20}{x + 4} = \frac{x^2 + 4x + 6}{x + 2} + \frac{x^2 + 6x + 12}{x + 3}.$$

4 Формула Виета. Многочлен с целыми коэффициентами

4.1 Теорема Виета.

Уравнение вида

$$(*) \quad a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

где $a_n, \dots, a_0$ — вещественные числа, причем $a_n \neq 0$, называется алгебраическим уравнением степени n . Оно имеет не более n вещественных корней, может вообще не иметь корней (например, $x^2 + 1 = 0$).

Вопросы нахождения решений алгебраических уравнений давно интересовали математиков. Уже в XVI веке были известны формулы для решения уравнений второй, третьей и четвертой степени. Поиски общих формул для решения уравнений более высоких степеней безуспешно велись до начала XIX века, когда было доказано, что для любого $n \geq 5$ не существует общей формулы, которая для всех уравнений степени n выражала бы корни через коэффициенты при помощи радикалов (корней).

При этом, можно доказать, что любой многочлен степени $n \geq 3$ можно разложить в произведение многочленов степени 1 и 2. Например,

$$x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1).$$

В некоторых случаях следующая теорема существенно упрощает решение задачи.

Теорема Виета. Если уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет корни $x_1 \leq x_2$, то $x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$.

Доказательство. Дискриминант уравнения $x^2 + px + q = 0$ неотрицательный (т.к. есть корни) и равен $D = p^2 - 4q$. Получаем $x_1 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2}$, $x_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2}$. Тогда

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-p - \sqrt{D}}{2} + \frac{-p + \sqrt{D}}{2} = -p, \\ x_1 x_2 &= \frac{-p - \sqrt{D}}{2} \cdot \frac{-p + \sqrt{D}}{2} = \frac{p^2 - D}{4} = \frac{4q}{4} = q. \end{aligned}$$

Задача 1. Найти произведение корней уравнения $5x^2 + 267x - 145 = 0$.

Решение. Дискриминант уравнения равен $267^2 + 4 \cdot 5 \cdot 145 > 0$. Следовательно, уравнение имеет два корня. По теореме Виета их произведение равно $-145/5 = -29$.

Ответ: -29 .

Задача 2. Найти произведение корней уравнения

$$10x^2 + 123x + 1234 = 0.$$

Решение. Дискриминант уравнения равен

$$123^2 - 4 \cdot 10 \cdot 1234 < 200^2 - 4 \cdot 10 \cdot 1234 = 40000 - 4 \cdot 12340 < 0.$$

Следовательно, уравнение не имеет корней.

Ответ: Корней нет.

Задача 3. Найти число $x_1^2 + x_2^2$, где x_1, x_2 — корни уравнения

$$x^2 + 47x - 58 = 0.$$

Решение. Дискриминант уравнения равен $47^2 + 4 \cdot 58 > 0$. Следовательно, уравнение имеет два корня, причем $x_1 + x_2 = -47$, $x_1x_2 = -58$. Следовательно,

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (-47)^2 + 2 \cdot 58 = 2325.$$

Ответ: 2325.

Обратная теорема Виета. Если числа x_1 и x_2 удовлетворяют соотношениям $x_1 + x_2 = -p$ и $x_1x_2 = q$, то они удовлетворяют уравнению $x^2 + px + q = 0$.

Доказательство. Подставим $p = -(x_1 + x_2)$ и $q = x_1x_2$ в уравнение $x^2 + px + q = 0$, получим $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$, то есть $(x - x_1)(x - x_2) = 0$. Таким образом, x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Задача 4. Решить уравнение $x^2 - 10x + 21 = 0$.

Решение. По теореме Виета $x_1 + x_2 = 10$, $x_1x_2 = 21$. Легко угадываются корни 3 и 7.

Ответ: 3, 7.

Задача 5. Решить уравнение $58x^2 - 47x - 11 = 0$.

Решение. Угадаем корень $x = 1$. По теореме Виета $x_1x_2 = -11/58$. Следовательно, второй корень $-11/58$.

Ответ: $1, -11/58$.

Обобщенная теорема Виета. Пусть для уравнение (*) выполняется $a_n = 1$ и

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n),$$

где $x_1, \dots, x_n$ — корни уравнения. Тогда верны следующие равенства:

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= -(x_1 + \dots + x_n); \\ a_{n-2} &= x_1x_2 + \dots + x_1x_n + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n; \\ a_{n-3} &= -(x_1x_2x_3 + \dots + x_{n-2}x_{n-1}x_n); \\ &\dots \\ a_0 &= (-1)^n x_1 \dots x_n. \end{aligned}$$

Доказать это можно, раскрыв скобки.

Частный случай $n = 3$: если

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3),$$

то

$$\begin{aligned} a_2 &= -(x_1 + x_2 + x_3); \\ a_1 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3; \\ a_0 &= -x_1x_2x_3. \end{aligned}$$

Для доказательства достаточно раскрыть скобки:

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3.$$

Задача 6. Известно, что уравнение $7x^3 + 35x^2 - 329x + 246 = 0$ имеет три различных корня. Найти их произведение.

Решение. Поделим обе части уравнения на 7, для того чтобы мы могли воспользоваться теоремой Виета: $x^3 + \frac{35}{7}x^2 - \frac{329}{7}x + \frac{246}{7} = 0$. Согласно теореме Виета произведение корней равно $-\frac{246}{7}$.

Ответ: $-\frac{246}{7}$.

4.2 Многочлен с целыми коэффициентами.

Рассмотрим уравнение

$$(**) \quad a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0,$$

где $a_n, \dots, a_0$ — целые числа, причем $a_n \neq 0$.

Утверждение. Если рациональное число $x = \frac{p}{q}$ (p — целое, q — натуральное, дробь несократимая) является корнем уравнения (**), то a_0 делится на p , а a_n делится на q .

Доказательство. Подставим $x = \frac{p}{q}$ в уравнение (**) и домножим его на q^n . Получим

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0.$$

Перенесем $a_0 q^n$ вправо, а в левой части вынесем p за скобку:

$$(a_n p^{n-1} + a_{n-1} p^{n-2} q + \dots + a_1 q^{n-1}) p = -a_0 q^n.$$

Слева и справа у нас целые числа, так как все слагаемые целые. Левая часть делится на p , следовательно, правая часть тоже делится на p . Но p и q не имеют общих множителей, следовательно, a_0 делится на p .

Аналогично доказывается то, что a_n делится на q . Переносим $a_n p^n$ в правую часть, тогда левая часть делится на q . Следовательно, правая часть делится на q , то есть a_n делится на q .

Задача 7. Решить уравнение $2x^3 - 7x^2 + 10x - 6 = 0$.

Решение. Проверим, есть ли у уравнения рациональные корни. Если $\frac{p}{q}$ (p — целое, q — натуральное, дробь несократимая) является корнем, то 6 делится на p , а 2 делится на q . Выпишем все возможные p и q :

$$\begin{aligned} p &: 1, 2, 3, 6, -1, -2, -3, -6; \\ q &: 1, 2; \\ \frac{p}{q} &: 1, 2, 3, 6, -1, -2, -3, -6, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Сразу заметим, что корень не может быть отрицательным числом (иначе сумма будет меньше нуля). Корень также не может быть нечетным

числом, потому что тогда получится, что сумма трех четных и одного нечетного равна нулю. Остались $2, 6, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$. Подставляем в уравнение, проверяем. Как только находим корень — заканчиваем подставлять, можно уже будет понизить степень уравнения.

Удобно подставлять с помощью схемы Горнера (но можно и стандартным образом, просто дольше):

$$\begin{array}{c|ccc} & 2 & -7 & 10 & -6 \\ \hline 2 & 2 & -3 & 4 & 2 \end{array} ; \quad \begin{array}{c|ccc} & 2 & -7 & 10 & -6 \\ \hline 6 & 2 & 5 & 40 & 234 \end{array} ;$$

$$\begin{array}{c|ccc} & 2 & -7 & 10 & -6 \\ \hline \frac{1}{2} & 2 & -6 & 7 & -\frac{5}{2} \end{array} ; \quad \begin{array}{c|ccc} & 2 & -7 & 10 & -6 \\ \hline \frac{3}{2} & 2 & -4 & 4 & 0 \end{array} .$$

Число $\frac{3}{2}$ является корнем уравнения. Нам подошло только последнее, обычно больше везет. Уравнение принимает вид $(x - \frac{3}{2})(2x^2 - 4x + 4) = 0$. Уравнение $2x^2 - 4x + 4 = 0$ не имеет корней.

Ответ: $\frac{3}{2}$.

Замечание. Для того, чтобы подставить 4 числа в уравнение, не обязательно писать 4 схемы Горнера, можно обойтись одной:

$$\begin{array}{c|cccc} & \mathbf{2} & \mathbf{-7} & \mathbf{10} & \mathbf{-6} \\ \hline 2 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 5 & 40 & 234 \\ \frac{1}{2} & 2 & -6 & 7 & -\frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} & 2 & -4 & 4 & 0 \end{array} .$$

Задачи.

Все задачи выполняются без калькулятора.

1. Придумать уравнение, корнями которого являются числа -1 , -2 и -3 .
2. Найти сумму корней уравнения $9x^2 + 18x - 1 = 0$.
3. x_1 и x_2 — различные корни уравнения $x^2 + 41x - 53 = 0$. Найти $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$.
4. Решить уравнение $x^4 - 7x^2 - 18 = 0$.
5. Решить уравнение $(x + 1)^6 + 7(x + 1)^3 - 8 = 0$.
6. Уравнение $x^3 + 13x^2 - 11x - 123$ имеет 3 различных корня. Найти их сумму.
7. Найти произведение корней уравнения

$$(51x^2 - 43x + 777)(64x^2 + 43x - 555) = 0.$$

8. Решить уравнение $3x^3 + 4x^2 - 4x - 3 = 0$.
9. Решить уравнение $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$.
10. Решить уравнение $21x^3 + x^2 + 68x - 20 = 0$.
11. Найти произведение корней уравнения $6x^4 - 5x^3 + 37x^2 - 30x + 6 = 0$.
12. Решить уравнение $x^8 - 2x^6 + 4x^4 - 8x^2 + 16 = 0$.

Ответы к задачам. (1) $x^3 + 6x + 11x + 6 = 0$; (2) -2 ; (3) $-33\frac{38}{53}$; (4) $-3, 3$; (5) $0, -3$; (6) -13 ; (7) $-\frac{555}{64}$; (8) $1, \frac{-7-\sqrt{13}}{6}, \frac{-7+\sqrt{13}}{6}$; (9) $1, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}$; (10) $\frac{2}{7}$; (11) $\frac{1}{6}$; (12) нет корней.

Контрольная работа.

1. Решить уравнение $9x^8 + 5x^4 - 4 = 0$.
2. Уравнение $0.4x^5 + 0.1x^4 - 20x^3 + 50x + 10 = 0$ имеет 5 различных корней. Найти их сумму и произведение.
3. Найти произведение корней уравнения $3x^3 + 16x^2 - 36x + 17 = 0$. Если корень один, то в ответе указать его.
4. Найти сумму кубов корней уравнения $23x^2 - 27x - 18 = 0$. В ответе получить рациональное число, представленное в виде обыкновенной дроби.
5. Решить уравнение $3x^4 + 8x^3 - 7x + 2 = 0$.
6. Решить уравнение $x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1 = 0$.
7. Решить уравнение $(1 + x)^8 + (1 + x^2)^4 = 2x^4$.
8. Решить уравнение $x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 6x - 2 = 0$.

5 Принцип включения-исключения

Множеством называется набор объектов определенного рода.

Примеры множеств:

$\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел;

$\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел;

$\mathbb{Q}$ — множество всех рациональных чисел;

$\mathbb{R}$ — множество всех действительных чисел;

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ — множество, состоящее из чисел 1, 2, 3, 4, 5;

Множество, не содержащее никаких элементов, называется *пустым* и обозначается $\emptyset$.

Тот факт, что элемент a принадлежит множеству A , обозначается следующим образом: $a \in A$.

Если все элементы множества A принадлежат множеству B , то множество A называется *подмножеством* множества B . Это обозначается так: $A \subset B$.

Например, множество $A = \{1, 3, 5\}$ является подмножеством множества $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Если все элементы множества A принадлежат множеству B и все элементы множества B принадлежат множеству A , то множества называются *равными*. Это обозначается так: $A = B$.

Таким образом, из $A \subset B$, $B \subset A$ следует, что $A = B$.

Пересечением множеств A и B называется множество C , состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат одновременно множествам A и B . Это обозначается так: $A \cap B$. На рисунке 1 множество $A \cap B$ закрашено зеленым цветом.

Например, если $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, то $A \cap B = \{3, 4, 5\}$.

Объединением множеств A и B называется множество D , содержащее в себе все элементы множеств A и B . Это обозначается так: $A \cup B$ (см. рисунок 2).

Например, если $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, то $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

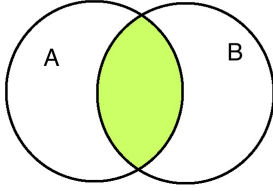


рис.1

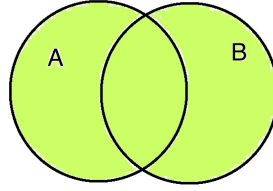


рис.2

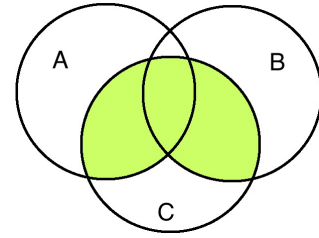


рис.3

Круги, которыми мы обозначаем множества на картинках для наглядности, называются кругами Эйлера.

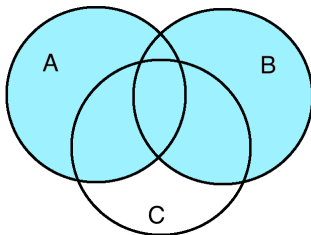
Задача 1. Доказать, что $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Решение. Пусть $x \in (A \cup B) \cap C$. Тогда $x \in C$ и $x \in A \cup B$. Если $x \in A$, то $x \in A \cap C$. Аналогично, если $x \notin A$, то $x \in B$ и $x \in B \cap C$. Следовательно, $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

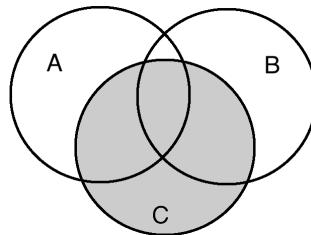
Пусть $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Если $x \in A \cap C$, то $x \in A$ и $x \in C$. Следовательно, $x \in A \cup B$ и $x \in (A \cup B) \cap C$.

Таким образом, множества $(A \cup B) \cap C$ и $(A \cap C) \cup (B \cap C)$ равны (см. рис. 3).

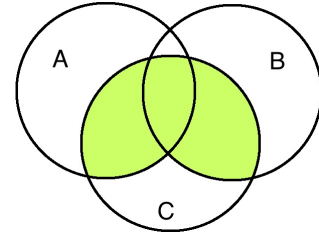
Приведем также доказательство с помощью кругов Эйлера:



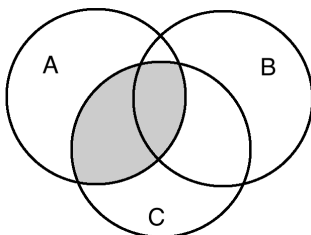
$A \cup B$



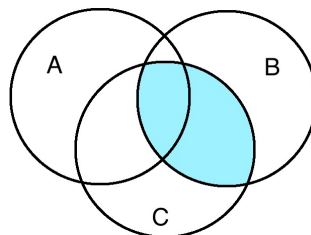
C



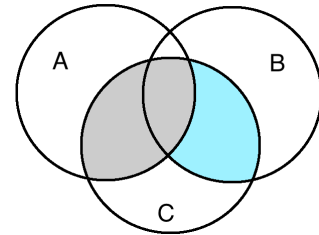
$(A \cup B) \cap C$



$A \cap C$



$B \cap C$



$(A \cap C) \cup (B \cap C)$

рис. 4

Пусть A — конечное множество. Обозначим через $|A|$ количество элементов множества A .

Например для $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ имеем: $|A| = 5$.

Теорема (Метод включения-исключения для двух множеств).

Пусть A_1 и A_2 — конечные множества. Тогда верно равенство

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

Доказательство. В сумме $|A_1| + |A_2|$ элементы пересечения $A_1 \cap A_2$ посчитаны дважды. Поэтому, для того чтобы посчитать количество элементов в объединении множеств, из суммы $|A_1| + |A_2|$ вычитаем количество элементов объединения.

Теорема (Метод включения-исключения для трех множеств).

Пусть A_1 , A_2 и A_3 — конечные множества. Тогда верно равенство

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

Доказательство. Обозначим $B = A_1 \cup A_2$. Тогда из предыдущей теоремы следует, что $|B \cup A_3| = |B| + |A_3| - |B \cap A_3|$, то есть

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1 \cup A_2| + |A_3| - |(A_1 \cup A_2) \cap A_3|.$$

Также из предыдущей теоремы и из задачи 1 получаем

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| \quad \text{и} \\ (A_1 \cup A_2) \cap A_3 = (A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3),$$

следовательно,

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|.$$

Теорема (Метод включения-исключения). Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ — конечные множества. Тогда верно равенство

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| - \\ - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \dots + |A_{n-1} \cap A_n|) + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|.$$

Теорема доказывается по индукции.

Задача 2. В классе 30 учеников. Из них 20 человек изучает французский язык и 15 - английский язык. Сколько школьников изучает оба языка, если известно, что только один школьник не изучает ни английского, ни французского?

Решение. Пусть A — школьники, изучающие французский язык, B — школьники, изучающие английский язык. Тогда $|A \cup B| = 30 - 1 = 29$. Вычислим количество школьников, изучающих оба языка:

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 20 + 15 - 29 = 6.$$

Ответ: 6.

Задача 3. В классе 25 человек. Из них 15 человек посещают музыкальную школу, 10 человек занимаются рисованием и 18 человек занимаются танцами. При этом 5 человек одновременно занимаются рисованием и ходят в музыкальную школу, 7 человек занимаются танцами и рисованием, 9 человек ходят в музыкальную школу и на танцы. Известно, каждый школьник занимается либо рисованием, либо танцами, либо ходит в музыкальную школу. Сколько человек одновременно занимаются танцами, рисованием и ходят в музыкальную школу?

Решение. Пусть A — школьники, посещающие музыкальную школу, B — школьники, занимающиеся рисованием, C — школьники, которые ходят на танцы. Тогда $|A \cap B| = 5$, $|A \cap C| = 9$, $|B \cap C| = 7$. Следовательно,

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|, \\ 25 &= 15 + 10 + 18 - 5 - 9 - 7 + |A \cap B \cap C|, \\ |A \cap B \cap C| &= 3. \end{aligned}$$

Ответ: 3.

Задача 4. Сколько существует целых чисел от 1 до 1000, которые не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 5?

Решение. Обозначим за A_i множество чисел от 1 до 1000, которые делятся на i . Вычислим количество элементов в множествах A_2 , A_3 и A_5 . Количество четных чисел от 1 до 1000 равно 500, то есть $|A_2| = 500$.

На 3 делятся числа $3, 6, 9, \dots, 999$, т. е. числа $3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 3, \dots, 3 \cdot 333$. Следовательно, $|A_3| = 333$.

На 5 делятся числа $5, 10, 15, \dots, 1000$, т. е. числа $5 \cdot 1, 5 \cdot 2, 5 \cdot 3, \dots, 5 \cdot 200$; $|A_5| = 200$.

Докажем вспомогательное утверждение.

Утверждение. Количество целых чисел от 1 до n , делящихся на k , равно $\left[\frac{n}{k}\right]$, где $[a]$ — целая часть числа a (самое большое целое число, не превосходящее a).

Доказательство. Если $k > n$, то таких чисел нет. Число $\left[\frac{n}{k}\right] = 0$, так как $\frac{n}{k} < 1$.

При $k < n$ обозначим за m такое число, что $km \leq n < k(m+1)$. Тогда mk — самое большое число, не превосходящее n и делящееся на k . Тогда $\left[\frac{n}{k}\right] = m$, так как $m \leq \frac{n}{k} < m+1$. Итак, на k делятся числа $k, 2k, 3k, \dots, mk$. То есть, количество целых чисел от 1 до n , делящихся на k , равно $m = \left[\frac{n}{k}\right]$.

Продолжение решения задачи 4. Количество чисел, делящихся на 2, на 3 или на 5 равно

$$|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = |A_2| + |A_3| + |A_5| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_5| - |A_3 \cap A_5| + |A_2 \cap A_3 \cap A_5|.$$

Количество чисел, делящихся одновременно на 2 и на 3, равно количеству чисел, делящихся на 6, то есть

$$|A_2 \cap A_3| = |A_6| = \left[\frac{1000}{6}\right] = \left[\frac{500}{3}\right] = \left[166\frac{2}{3}\right] = 166.$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} |A_2 \cap A_5| &= |A_{10}| = \left[\frac{1000}{10}\right] = 100; \\ |A_3 \cap A_5| &= |A_{15}| = \left[\frac{1000}{15}\right] = \left[\frac{200}{3}\right] = \left[66\frac{2}{3}\right] = 66; \\ |A_2 \cap A_3 \cap A_5| &= |A_{30}| = \left[\frac{1000}{30}\right] = \left[\frac{100}{3}\right] = \left[33\frac{1}{3}\right] = 33. \end{aligned}$$

Следовательно, $|A_2 \cup A_3 \cup A_5| = 500 + 333 + 200 - 166 - 100 - 66 + 33 = 734$. Количество чисел, не делящихся ни на 2, ни на 3, ни на 5, равно $1000 - 734 = 266$.

Ответ: 266.

Замечание. $|A_4 \cap A_6| = A_{12} \neq A_{24}$.

Задачи.

Все задачи выполняются без калькулятора.

1. В классе 30 учеников. Из них 20 человек изучает французский язык и 15 — английский язык. Сколько школьников изучает оба языка, если известно, что только один школьник не изучает ни английского, ни французского?
2. Выписать формулу включения-исключения для $n = 4$.
3. В классе все увлекаются математикой, физикой или информатикой. Причем 20 человек увлекается математикой, 12 человек — физикой, 7 человек — математикой и физикой. Сколько человек в классе, если информатикой увлекается столько же человек, сколько и физикой, причем все, кто увлекаются информатикой, увлекаются математикой.
4. В автобусе едет 27 человек. Они все либо с рюкзаком, либо в шляпе. Среди них 10 мужчин с рюкзаком и столько же женщин в шляпе, 7 женщин с рюкзаком и 5 мужчин в шляпе. Сколько мужчин в шляпе и с рюкзаком едет в автобусе, если там 3 женщины в шляпе и с рюкзаком?
5. Доказать, что множества корней уравнений $x^2 - 10x + 16 = 0$ и $\sqrt{x(10 - x)} = 4$ совпадают.
6. Сколько существует целых чисел от 1 до 1001, которые не делятся ни на 3, ни на 5, ни на 7?
7. Сколько существует целых чисел от 1 до 600, которые не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 4?
8. Сколько существует целых чисел от 1 до 1005, которые не делятся ни на 4, ни на 5, ни на 6?
9. Сколько существует целых чисел от 64 до 1000, которые не являются ни полным квадратом, ни полным кубом, ни четвертой степенью?

10. На столе, площади 1, лежат три журнала, площади $1/2$ каждый. Требуется оценить площадь наибольшего из пересечений двух журналов.

Ответы к задачам. (1) 6; (2)

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = & |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| - \\ & - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| - |A_3 \cap A_4| + \\ & + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| - \\ & - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|; \end{aligned}$$

- (3) 25; (4) 2; (5) корни -2 и 8 ; (6) 908; (7) 200; (9) 908; (10) от $\frac{1}{6}$ до $\frac{1}{2}$.

Контрольная работа.

Все задачи выполняются без калькулятора.

1. Доказать, что $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
2. На олимпийских играх наши спортсмены завоевали 33 медали. Из них 20 бронзовых и серебряных, 24 серебряных и золотых. Сколько серебряных медалей завоевали наши спортсмены?
3. 19 школьников возвращаются домой из школы и обсуждают чем заняться в свободное время. У всех есть планы: 10 человек собираются играть в волейбол, 7 человек — в шахматы, 8 человек — смотреть телевизор. Причем 4 человека собираются поиграть и в шахматы и в волейбол, 2 человека играть в волейбол и смотреть телевизор, и никто из них не собирается успеть поиграть в шахматы, в волейбол и посмотреть телевизор.

Вдруг им дорогу перебежала черная кошка. 5 человек предпочли выбрать другую дорогу. Среди этих пяти один планирует поиграть в волейбол и все планируют смотреть телевизор. Сколько из них собираются играть в шахматы?

4. Три сумасшедших маляра начали одновременно красить пол, один красной краской, другой синей, а третий зеленой. Первый успел закрасить 75% пола, другой 70%, а третий 65%. Какая часть пола заведомо закрашена всеми тремя цветами?
5. Сколько существует целых чисел от 1 до 1005, которые не делятся ни на 2, ни на 3, ни на 4, ни на 5, ни на 6?
6. Сколько существует целых чисел от 1 до 8000, которые не являются ни полным квадратом, ни полным кубом, ни четвертой степенью?
7. Доказать, что множества корней уравнений

$$\frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 6}{x^2 - 4} = 0 \quad \text{и} \quad 2x^4 + x^3 - x^2 - 3x = 15$$

совпадают.

6 Обобщенный метод интервалов

Рациональными неравенствами называются неравенства, в левой и правой части которых находятся суммы отношений многочленов. Чтобы решить такое неравенство, нужно перенести все в левую часть, привести к общему знаменателю и разложить числитель и знаменатель на множители. Получившаяся слева функция непрерывна во всех точках, кроме нулей знаменателя. Отметим на числовой прямой нули числителя и нули знаменателя. Эти точки разбивают числовую прямую на промежутки (интервалы и полуинтервалы), причем на каждом промежутке функция непрерывна и не равна нулю. Следовательно, она либо больше нуля, либо меньше нуля. Чтобы определить знак функции на промежутке, достаточно определить знак функции в какой-нибудь одной точке из данного промежутка.

Задача 1. Решить неравенство $x^2 - 4x + 3 < 0$.

Решение. Находим корни уравнения $x^2 - 4x + 3 = 0$: $x = 1$ и $x = 3$. Найдем знаки функции $f(x) = x^2 - 4x + 3$ на промежутках $(-\infty; 1)$, $(1; 3)$ и $(3; +\infty)$. На первом промежутке при $x = 0$ имеем $f(0) = 3 > 0$, следовательно, $f(x) > 0$ (на рисунке 1 ставим знак "+" над промежутком $(-\infty; 1)$); на втором $f(2) = -1 < 0$, следовательно, $f(x) < 0$; на третьем $f(10) = 100 - 40 + 3 > 0$, следовательно, $f(x) > 0$. Рисуем числовую прямую, отмечаем нули функции, над промежутками знакопостоянства отмечаем знак функции (см. рисунок 1).

Ответ: $(1; 3)$.

Заметим, что в задаче 1 функция $y = f(x)$ является параболой, ветви которой направлены вверх. Исходя из этого можно расставить "+" и "-" без подстановки.

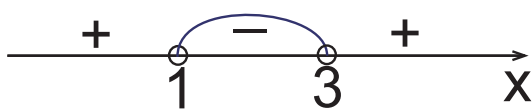


рис.1

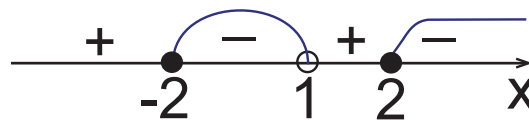


рис.2

Задача 2. Решить неравенство $\frac{3x}{x-1} \leq x + 4$.

Решение. Перенесем все в левую часть, приведем к общему знаменателю:

$$\frac{3x - x^2 - 3x + 4}{x - 1} \leq 0.$$

Разложим на множители числитель:

$$\frac{(2 - x)(2 + x)}{x - 1} \leq 0.$$

Отмечаем корни числителя ($x = 2$ и $x = -2$) закрашенными точками на числовой прямой (так как неравенство нестрогое), а корни знаменателя ($x = 1$) выколотыми (см. рис. 2). Получаем 4 промежутка, определяем на них знак функции $f(x) = \frac{(2-x)(2+x)}{x-1}$: на первом $f(-3) = 1.25 > 0$, на втором $f(0) = -4 < 0$, на третьем $f(1.5) = 3.5 > 0$, на четвертом $f(3) = -2.5 < 0$.

Ответ: $[-2; 1) \cup [2; +\infty)$.

Зачем нужно раскладывать числитель и знаменатель на множители? Можно этого не делать, однако после разложения на множители удобнее определять знак функции на промежутках, особенно, если их много.

В некоторых задачах числовая прямая разбивается на большое число промежутков, и нахождение для каждого из них знака функции может занять немало времени. Возьмем неравенство вида $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$, в котором числитель и знаменатель уже разложены на множители. Рассмотрим знаки на соседних промежутках $(a; b)$ и $(b; c)$. Возьмем число $x_1 \in (a; b)$ и число $x_2 \in (b; c)$. Когда мы будем вычислять знак $\frac{f(x_1)}{g(x_1)}$ и знак $\frac{f(x_2)}{g(x_2)}$, то разные значения будут только для множителя $(x - b)^k$ (он может встречаться как в числителе, так и в знаменателе). Если степень $(x - b)$ нечетная, то знаки $\frac{f(x_1)}{g(x_1)}$ и $\frac{f(x_2)}{g(x_2)}$ разные, а если четная, то одинаковые (если $(x - b)$ встречается в числителе и знаменателе одновременно, то смотрим на сумму степеней).

Задача 3. Решить неравенство

$$\frac{(x - 2)^4(x - 6)(x + 2)^5}{(x - 1)^3(x + 5)^2} \geq 0.$$

Решение. Отмечаем на прямой нули числителя (закрашенные точки, так как неравенство нестрогое) и нули знаменателя (выколотые точки). Подставляем в

$$f(x) = \frac{(x-2)^4(x-6)(x+2)^5}{(x-1)^3(x+5)^2}$$

число $x = 10$, получаем $f(10) > 0$, ставим "+" над промежутком $(6; +\infty)$. Затем двигаемся справа налево (см. рис. 3):

- при переходе через точку $x = 6$ функция $f(x)$ меняет знак, так как $x - 6$ в нечетной (первой) степени; над $(2; 6)$ ставим "-";
 - при переходе через точку $x = 2$ функция $f(x)$ не меняет знак, так как $x - 2$ в четной степени; над $(1; 2)$ снова ставим "-";
 - при переходе через точку $x = 1$ функция $f(x)$ меняет знак, так как $x - 1$ в нечетной степени; над $(-2; 1)$ ставим "+";
 - при переходе через точку $x = -2$ функция $f(x)$ меняет знак, так как $x + 2$ в нечетной степени; над промежутком $(-5; -2)$ ставим "-";
 - при переходе через точку $x = -5$ функция $f(x)$ не меняет знак, так как $x + 5$ в четной степени; над $(-\infty; -5)$ снова ставим "-".
- Делаем проверку: подставляем $x = -10$, получаем $f(-10) < 0$.

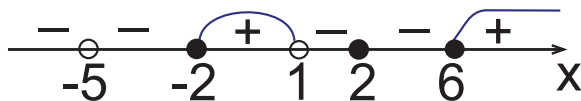


рис.3

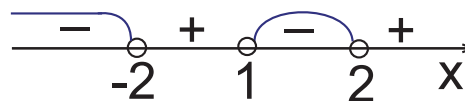


рис.4

Осталось только выписать ответ. Так как неравенство нестрогое, то не забываем включить в ответ все точки, в которых функция равна нулю (то есть точки, в которых числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля).

Ответ: $[-2; 1) \cup \{2\} \cup [6; +\infty)$.

Задача 4. Решить неравенство $4x^3 + 5x^2 + 5x + 4 < 0$.

Решение. Уравнение $4x^3 + 5x^2 + 5x + 4 = 0$ имеет корень $x = -1$.

Разложим $4x^3 + 5x^2 + 5x + 4$ на множители, неравенство примет вид

$$(x + 1)(4x^2 + x + 4) < 0.$$

Уравнение $4x^2 + x + 4 = 0$ не имеет корней. Следовательно, выражение $4x^2 + x + 4$ имеет постоянный знак, то есть $4x^2 + x + 4 > 0$, и на него можно поделить. Исходное неравенство принимает вид $x + 1 < 0$, то есть $x < -1$.

Ответ: $(-\infty; -1)$.

То, что $4x^2 + x + 4 > 0$, следует также из того, что

$$4x^2 + x + 4 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{16} + 4 = (2x + \frac{1}{4})^2 + 3\frac{15}{16} > 0.$$

Задача 5. Решить неравенство $4x^2 - 4x + 1 > 0$.

Решение. Выражение $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2 \geq 0$, причем равенство выполняется только при $x = \frac{1}{2}$.

Ответ: $x \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$.

Задача 6. Решить неравенство $x^7 - 8x^4 - x^3 + 8 < 0$.

Решение. Так как

$$\begin{aligned} x^7 - 8x^4 - x^3 + 8 &= x^4(x^3 - 8) - x^3 + 8 = (x^4 - 1)(x^3 - 8) = \\ &= (x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)(x - 2)(x^2 + 2x + 4), \end{aligned}$$

то неравенство принимает вид

$$(x + 1)(x - 1)(x^2 + 1)(x - 2)(x^2 + 2x + 4) < 0.$$

Так как $x^2 + 1 > 0$ и $x^2 + 2x + 4 > 0$ для всех x , то на эти выражения можно поделить, после чего неравенство примет вид

$$(x + 1)(x - 1)(x - 2) < 0.$$

Отметим на числовой прямой числа -1 , 1 и 2 (см. рисунок 4). Расставим “+” и “-”, запишем ответ.

Ответ: $x \in (-\infty; -1) \cup (1; 2)$.

Задача 7. Решить неравенство $\frac{x^2-7x+6}{x^3+7x^2-8x} < 0$.

Решение. Разложим числитель и знаменатель на множители, получим

$$\frac{(x-1)(x-6)}{x(x-1)(x+8)} < 0.$$

Отметим точки $x = 1$, $x = 6$, $x = 0$ и $x = -8$ на прямой (см. рисунок 5), после чего на $x-1$ можно сократить. При $x \neq 1$ неравенство примет вид

$$\frac{x-6}{x(x+8)} < 0.$$

Расставим знаки функции $f(x) = \frac{(x-1)(x-6)}{x(x-1)(x+8)}$ на прямой. Справа от 6 ставим "+" (подставим в $f(x)$, например, $x = 10$).

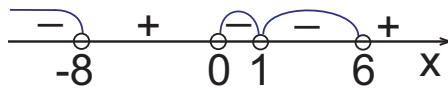


рис.5

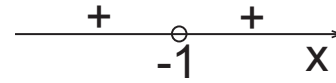


рис.6

При переходе через точку $x = 6$ функция $f(x)$ меняет знак, так как множитель $(x-6)$ в нечетной степени; над $(1; 6)$ ставим "-". При переходе через точку $x = 1$ функция $f(x)$ не меняет знак, так как множитель $(x-1)$ мы сократили; над $(0; 1)$ снова ставим "-".

При переходе через точку $x = 0$ функция $f(x)$ меняет знак, так как множитель x в нечетной степени; над $(-8; 0)$ ставим "+".

При переходе через точку $x = -8$ функция $f(x)$ меняет знак, так как множитель $x+8$ в нечетной степени; над $(-\infty; -8)$ ставим "-".

Ответ: $x \in (-\infty; -8) \cup (0; 1) \cup (1; 6)$.

Задача 8. Решить неравенство

$$(8) \quad x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 < 0.$$

Решение. Если мы попробуем найти корни уравнения

$$x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0,$$

то у нас ничего не получится. Например, рациональных корней у него нет (проверять нужно только ± 1). Однако, это очень простая задача. Сейчас покажем, что уравнение $x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 = 0$ не имеет корней.

Заметим, что $x = -1$ не является решением неравенства. Так как числа $1, -x, x^2, -x^3, x^4, -x^5, x^6$ образуют геометрическую прогрессию, сумма которой равна $\frac{1+x^7}{1+x}$, то неравенство (8) эквивалентно неравенству

$$\frac{1+x^7}{1+x} < 0.$$

Отмечаем на прямой нули числителя и знаменателя, расставляем знаки функции (см. рис. 6).

Ответ: Нет корней.

Утверждение. Для любого положительного числа a выполняется неравенство

$$a + \frac{1}{a} \geq 2.$$

Доказательство: преобразуем неравенство: перенесем все в левую часть и приведем к общему знаменателю:

$$\frac{a^2 - 2a + 1}{a} \geq 2,$$

то есть $\frac{(a-1)^2}{a} \geq 2$, то есть $a > 0$.

Следствие. Для любого отрицательного числа a выполняется неравенство

$$a + \frac{1}{a} \leq -2$$

Задача 9. Решить неравенство

$$\frac{1}{x^2 - x + 1} + x^2 - x \leq 1 - (x^3 - 1)^2.$$

Решение. Обозначим $a = x^2 - x + 1$, получим

$$(9) \quad \frac{1}{a} + a \leq 2 - (x^3 - 1)^2.$$

Заметим, что $a > 0$ (дискриминант уравнения $x^2 - x + 1 = 0$ отрицательный). Следовательно, $\frac{1}{a} + a \geq 2$.

При этом, $2 - (x^3 - 1)^2 \leq 2$. Таким образом (9) выполняется только если обе части равны двум. Это возможно только при $x = 1$.

Ответ: 1.

Задача 10. Решить неравенство

$$\frac{1}{x^5 - 6} + x^5 < 10 - x^2.$$

Решение. Обозначим $a = x^5 - 6$, получим

$$(10) \quad \frac{1}{a} + a < 4 - x^2.$$

При $a = 0$ (то есть $x = \sqrt[5]{6}$) знаменатель равен нулю, неравенство не выполняется.

Пусть $a > 0$ (то есть $x > \sqrt[5]{6}$). Тогда, $\frac{1}{a} + a \geq 2$. При этом $x^2 > \sqrt[5]{36} > \sqrt[5]{32} > 2$. Следовательно,

$$\frac{1}{a} + a \geq 2 > 4 - \sqrt[5]{36} > 4 - x^2,$$

то есть $x > \sqrt[5]{6}$ неравенство (10) не выполняется.

Пусть $a < 0$ (то есть $x < \sqrt[5]{6}$). Тогда, $\frac{1}{a} + a \leq -2$. При $x \in [-2; \sqrt[5]{6})$ неравенство (10) выполняется, так как $\frac{1}{a} + a \leq -2 < 0 \leq 4 - x^2$.

При $x < -2$ неравенство (10) выполняется, так как $x^5 + x^2 < x^2(x^3 - 1) < 0$, то есть

$$\frac{1}{x^5 - 6} + x^5 + x^2 < 10.$$

Ответ: $(-\infty, \sqrt[5]{6})$.

Задачи.

Решить неравенства:

1. $x^2 > 4$;
2. $x^2 - 10x + 24 < 0$;
3. $x^2 - 10x + 25 > 0$;
4. $x^2 - 10x + 27 < 0$;
5. $5x < x^2 + 6$;
6. $x^4 - 7x^2 + 12 \leq 0$;
7. $\frac{1}{x-1} \geq 5$;
8. $\frac{x^2+3x+4}{x^2+4x+3} \leq x$;
9. $\frac{(x+5)(x-2)^2}{(x-7)^3x^4} \leq 0$;
10. $\frac{(x+5)(x-2)^2}{(x-7)^3x^4} \geq 0$;
11. $\frac{(x^2-1)^2(x-3)^6(x^2+4)}{(2x-3)^3(x+2)^4} < 0$;
12. $\frac{1}{2x^2-2x+1} + 2x^2 \leq 2x^3 + 2x - x^6$;
13. $\frac{4x}{4x^2-8x+7} + \frac{3x}{4x^2-10x+7} \leq 1$;
14. $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 > 0$.
15. $x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \geq 0$.

Ответы к задачам. (1) $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$; (2) $(4; 6)$; (3) $(-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$; (4) нет решений; (5) $(-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$; (6) $[-2; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; 2]$; (7) $(1; 1.2]$; (8) $(-3; -1) \cup [1; +\infty)$; (9) $[-5; 0) \cup (0; 7)$; (10) $(-\infty; -5] \cup \{2\} \cup (7; +\infty)$; (11) $(-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \frac{3}{2})$; (12) 1 ; (13) $(-\infty; 0.5] \cup [3.5; +\infty)$; (14) $(-\infty; +\infty)$; (15) $(-\infty, +\infty)$.

Контрольная работа.

Решить неравенства

1. $x^2 \leq 9$;

2. $4 \leq \frac{1}{x-1}$;

3. $(x+3)(x-3)^2 > 0$;

4. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} > 2$;

5. $\frac{(x+3)^3(x-3)^4}{(x+1)^2(x-5)} \geq 0$;

6. $\frac{x^3-9x^2+14x}{x^2-4} < 0$;

7. $\frac{6x}{2x^2-10x+5} + \frac{5x}{2x^2-6x+5} \geq 3$.

7 Иррациональные уравнения

Иррациональными уравнениями называются уравнения, в которых присутствует знак радикала ($\sqrt{}$).

Напомним, что $\sqrt{a}$ — это такое неотрицательное число, которое в квадрате равно a .

Задача 1. Решить уравнение $(x^2 - 4)\sqrt{1 - x} = 0$.

Решение.

$$(x^2 - 4)\sqrt{1 - x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \\ 1 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \pm 2 \\ x \leq 1 \end{cases}$$

Ответ: 1; -2.

Утверждение. Уравнение вида

$$(1) \quad \sqrt{f(x)} = g(x)$$

эквивалентно системе

$$(2) \quad \begin{cases} f(x) = (g(x))^2 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}.$$

Действительно, если $x = a$ является корнем уравнения (1), то есть $\sqrt{f(a)} = g(a)$, то, возведя это равенство в квадрат, получим $f(a) = (g(a))^2$. Из $\sqrt{f(a)} = g(a)$ следует также, что $g(a) \geq 0$, так как $\sqrt{f(a)} \geq 0$.

Если $x = a$ является корнем (2), то $g(a) \geq 0$, $f(a) = (g(a))^2 \geq 0$. Следовательно, из обеих частей неравенства можно извлечь корень. Получаем $\sqrt{f(a)} = g(a)$.

Уравнение (1) можно также возвести в квадрат, решить получившееся уравнение. Чтобы избавиться от посторонних корней, подставить получившиеся корни в (1). Но подстановка, обычно, занимает много времени, поэтому лучше решать способом, указанным выше.

Задача 2. Решить уравнение $\sqrt{x - 1} = 3 - x$.

Решение. Уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} x-1=(3-x)^2 \\ 3-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-7x+10=0 \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x-5)=0 \\ x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Ответ: 2.

Задача 3. Решить уравнение $\sqrt{x+1} = 6-x$.

Решение.

$$\sqrt{x-1} = 3-x \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=(6-x)^2 \\ 6-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-13x+35=0 \\ x \leq 6 \end{cases}$$

Уравнение $x^2 - 13x + 35 = 0$ имеет корни $x = \frac{13-\sqrt{29}}{2}$ и $x = \frac{13+\sqrt{29}}{2}$. Первый корень меньше 6, а второй больше 6.

Ответ: $\frac{13-\sqrt{29}}{2}$.

Задача 4. Решить уравнение $\sqrt{1+x\sqrt{x^2-24}} = x-1$.

Решение. Уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases} 1+x\sqrt{x^2-24}=(x-1)^2 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\sqrt{x^2-24}=x^2-2x \\ x \geq 1 \end{cases}.$$

Так как $x > 0$, то на него можно поделить:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-24}=x-2 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-24=(x-2)^2 \\ x \geq 2 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ x \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow x=7.$$

Ответ: 7.

Задача 5. Решить уравнение $\sqrt{2x+10} + 3\sqrt{7-x} = 10$.

Решение. Сделаем замену переменной $t = \sqrt{7-x}$ ($x = 7-t^2$, $t \geq 0$).

Получим $\sqrt{24-2t^2} + 3t = 10$, то есть $\sqrt{24-2t^2} = 10-3t$. Сделаем эквивалентные преобразования:

$$\begin{cases} \sqrt{24-2t^2}=10-3t \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24-2t^2=(10-3t)^2 \\ 10-3t \geq 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11t^2 - 60t + 76 = 0 \\ t \leq \frac{10}{3} \\ t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} t = 2 \\ t = 6\frac{10}{11} \\ 0 \leq t \leq 3\frac{1}{3} \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow t = 2.$$

Вернемся к x :

$$\sqrt{7-x} = t = 2 \Leftrightarrow 7-x = 4 \Leftrightarrow x = 3.$$

Ответ: 3.

Задача 6. Решить уравнение $\sqrt[3]{3-x} = 1 - \sqrt{x-2}$.

Решение. Сделаем замену переменной $t = \sqrt[3]{3-x}$ ($x = 3 - t^3$).

Получим $t = 1 - \sqrt{1-t^3}$, то есть $\sqrt{1-t^3} = 1-t$. Возведем обе части в квадрат:

$$\begin{cases} 1-t^3 = (1-t)^2 \\ 1-t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-t)(t^2+2t) = 0 \\ t \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 0 \\ t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 11 \\ x = 3 \\ x = 2 \end{cases}$$

Ответ: 2, 3, 11.

Уравнение вида

$$(3) \quad \sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = c^2$$

эквивалентно уравнению

$$(\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)})^2 = c^4,$$

так как в уравнении (3) левая и правая часть положительны.

Таким образом, задачу 5 можно решить с помощью возведения в квадрат обеих частей. Задачу 6 также можно решать с помощью возведения в степень, но это займет много времени.

Уравнение вида

$$(4) \quad \sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = \sqrt{h(x)}$$

эквивалентно уравнению

$$(\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)})^2 = (\sqrt{h(x)})^2,$$

так как в уравнении (4) левая и правая часть положительны.

Задача 7. Решить уравнение $\sqrt{15-x} - \sqrt{x-5} = \sqrt{x-2}$.

Решение. Перенесем $\sqrt{x-5}$ в правую часть (если сразу возвести в квадрат, то придется еще добавлять условие, что $\sqrt{15-x} - \sqrt{x-5} \geq 0$). Возведем обе части в квадрат:

$$(\sqrt{15-x})^2 = (\sqrt{x-5} + \sqrt{x-2})^2,$$

то есть $15-x = (\sqrt{x-5})^2 + 2\sqrt{x-5}\sqrt{x-2} + (\sqrt{x-2})^2$.

То, что $15-x \geq 0$, писать необязательно, так как справа выражение в квадрате (поэтому оно не меньше нуля). Продолжаем преобразовывать уравнение:

$$\begin{aligned} 15-x &= x-5 + 2\sqrt{x-5}\sqrt{x-2} + x-2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 22-3x &= 2\sqrt{x-5}\sqrt{x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} 22-3x = 2\sqrt{x^2-7x+10} \\ x \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (22-3x)^2 = 4(x^2-7x+10) \\ 22-3x \geq 0 \\ x \geq 5 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2-104x+444=0 \\ x \leq 7\frac{1}{3} \\ x \geq 5 \end{cases} \end{aligned}$$

Уравнение $5x^2 - 104x + 444 = 0$ имеет корни $x = 6$ и $x = 14.8$, нам подходит только $x = 6$.

Ответ: 6.

Утверждение. Уравнение вида $f(x) = g(x)$, где $f(x)$ возрастает, а $g(x)$ убывает имеет не более одного корня.

Действительно, разность $f(x) - g(x)$ — возрастающая функция, следовательно, она может пересекать ось абсцисс не более чем в одной точке.

Посмотрим еще раз на задачу 7. Запишем ее в виде

$$\sqrt{15-x} = \sqrt{x-5} + \sqrt{x-2}.$$

Функция слева убывает на своей области определения, а функция справа возрастает на своей области определения. Следовательно, уравнение имеет не более одного корня. Попробуем его найти. В нашем случае очень легко выписать область определения трех корней уравнения: $x \in [5; 15]$. Подстановкой начнем перебирать целые числа из этого отрезка. Быстро получаем, что $x = 6$ является корнем. Следовательно, других корней нет.

Задача 2 также быстрее решается данным способом. Функция слева возрастает на своей области определения, а функция справа убывает на своей области определения. Следовательно, уравнение имеет не более одного корня. Так как $3 - x$ и $x - 1$ должны быть больше нуля, то корень может находиться только на отрезке $[1; 3]$. Подстановкой убеждаемся, что $x = 2$ является корнем.

В задаче 3 функция слева возрастает, а функция справа убывает. Но ее не получится решить таким способом, так как корень не является целым числом.

Задача 5 не решается данным способом, так как $y = \sqrt{2x + 10}$ возрастает, а $y = 3\sqrt{7 - x}$ убывает.

Задача 8. Решить уравнение $6\sqrt[3]{x - 3} + \sqrt[3]{x - 2} = 5\sqrt[6]{(x - 2)(x - 3)}$.

Решение. Обозначим $a = \sqrt[6]{x - 2}$, $b = \sqrt[6]{x - 3}$. Уравнение примет вид

$$6b^2 + a^2 = 5ab,$$

то есть $a^2 - 5ab + 6b^2 = 0$. Так как $x = 3$ не является решением уравнения, то можно поделить на b^2 :

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 5\frac{a}{b} + 6 = 0.$$

Получаем квадратное уравнение, находим корни $\frac{a}{b} = 2$ и $\frac{a}{b} = 3$. Вернемся к переменной x , получим $\sqrt[6]{x - 2} = 2\sqrt[6]{x - 3}$ и $\sqrt[6]{x - 2} = 3\sqrt[6]{x - 3}$. Возводим в шестую степень, получаем $x = \frac{190}{63}$ и $x = \frac{2185}{728}$.

Ответ: $\frac{190}{63}, \frac{2185}{728}$.

Задача 9. Решить уравнение $(5x - 7)\sqrt{x} + (5x + 2)\sqrt{1 - x} = 0$.

Решение. Так как подкоренное выражение не может быть меньше нуля, то $x \in [0; 1]$. Перенесем первое слагаемое в правую часть, получим $(5x+2)\sqrt{1-x} = (7-5x)\sqrt{x}$. Заметим, что при $x \in [0; 1]$ обе части уравнения больше либо равны нулю. Следовательно,

$$\begin{aligned} (5x+2)\sqrt{1-x} &= (5x-7)\sqrt{x} \Leftrightarrow ((5x+2)\sqrt{1-x})^2 = ((7-5x)\sqrt{x})^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} (25x^2+20x+4)(1-x) = (25x^2-70x+49)x \\ x \in [0; 1] \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 50x^3-75x^2+33x-4=0 \\ x \in [0; 1] \end{cases} \end{aligned}$$

Найдем корни с помощью схемы Горнера. Отрицательными корни быть не могут, так как тогда справа получится отрицательное число. Согласно §5 перечислим все возможные положительные числа, которые могут быть рациональными корнями: 1, 2, 4, 1/2, 1/5, 2/5, 4/5, 1/10, 1/25, 2/25, 4/25, 1/50.

	50	-75	33	-4
1	50	-25	8	4
2	50	25	83	162
4	50	125	533	>0
$\frac{1}{2}$	50	-50	8	0

Следовательно, $x = \frac{1}{2}$ является корнем уравнения $50x^3-75x^2+33x-4=0$, причем оно представимо в виде $(x - 1/2)(50x^2 - 50x + 8) = 0$. Корнями уравнения $50x^2 - 50x + 8 = 0$ (то есть $25x^2 - 25x + 4 = 0$) являются числа $x = \frac{1}{5}$ и $x = \frac{4}{5}$. Все корни меньше трех.

Ответ: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$ и $\frac{4}{5}$.

Второй способ решения задачи 9. Продемонстрируем следующий фокус: обозначим $f(x) = (5x-7)\sqrt{x}$. Подставим $x = 1-t$, получим

$$f(1-t) = -(5t+2)\sqrt{1-t}.$$

Таким образом, уравнение $(5x-7)\sqrt{x} + (5x+2)\sqrt{1-x} = 0$ можно записать в виде $f(x) - f(1-x) = 0$, то есть $f(x) = f(1-x)$. Подставим в него $x = 1/2$, получим $f(1/2) = f(1/2)$. Следовательно, $x = \frac{1}{2}$ является корнем уравнения $(5x-7)\sqrt{x} + (5x+2)\sqrt{1-x} = 0$.

Далее, решаем задачу первым способом, но нам не придется искать корень с помощью схемы Горнера.

Задача 10. Решить уравнение $9\sqrt{y} + 2x + 3 = 4\sqrt{x} + 6\sqrt[4]{y}$.

Решение. Обозначим $a = \sqrt{x}$, $b = \sqrt[4]{y}$ и перенесем все слагаемые в левую часть. Уравнение примет вид $9b^2 - 6b + 2a^2 - 4a + 3 = 0$. Выделим полный квадрат (с переменной b): $(3b - 1)^2 + 2a^2 - 4a + 2 = 0$. Выделим полный квадрат (с переменной a):

$$(3b - 1)^2 + 2(a - 1)^2 = 0.$$

Так как квадрат действительного числа не может быть отрицательным, то полученное уравнение эквивалентно системе:

$$\begin{cases} 3b - 1 = 0 \\ a - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{3} \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{81} \\ x = 1 \end{cases}.$$

Ответ: $x = 1$, $y = \frac{1}{81}$.

Неравенство Коши. Для любых неотрицательных чисел a и b среднее геометрическое не превосходит среднего арифметического:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2},$$

причем равенство выполняется только при $a = b$.

Задача 11. Решить уравнение $\sqrt{(x - 1)(x - 5)} = x - 3$.

Решение. Заметим, что $x - 3 = \frac{x - 1 + x - 5}{2}$. Так как подкоренное выражение не может быть отрицательным, то $x \in [1; 5]$.

Так как $\sqrt{(x - 1)(x - 5)} \geq 0$, то $x - 3 \geq 0$, то есть $x \in [3; 5]$. Следовательно, $x - 1 \geq 0$ и $x - 5 \geq 0$. Воспользуемся неравенством Коши, получим:

$$\sqrt{(x - 1)(x - 5)} = x - 3,$$

причем равенство выполняется только при $x - 1 = x - 5$, что невозможно.

Ответ: нет корней.

Задача 12. Решить уравнение $\sqrt{x^2 - 17} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 17}} = 2 - \sqrt{x}$.

Решение. Из утверждения части 11 следует, что $\sqrt{x^2 - 17} + \frac{1}{\sqrt{x^2 - 17}} \geq 2$. Следовательно, $2 - \sqrt{x} \geq 2$, то есть $x = 0$.

Но $x=0$ не является решением уравнения $\sqrt{x^2-17}+\frac{1}{\sqrt{x^2-17}}=2-\sqrt{x}$, следовательно, оно не имеет корней.

Ответ: нет корней.

Задачи.

Решить уравнения

1. $(x^2 - 77)\sqrt{7-x} = 0$;
2. $\sqrt{-x} = x + 1$;
3. $3\sqrt{2-x} = 3 - x$;
4. $2\sqrt{-(x+2)(x+4)} = -(x+2)$;
5. $\sqrt{7-x} = \sqrt{x} - \sqrt{7}$;
6. $\sqrt{x-2} + \sqrt{x-1} + \sqrt{x} + \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} = 0$.

Ответы к задачам. (1) $-\sqrt{77}$, 7; (2) $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$; (3) $\frac{-3-3\sqrt{5}}{2}$, $\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}$; (4) -2 , -3.6 ; (5) 7; (6) нет корней.

Контрольная работа.

Решить уравнения

1. $(x^2 - 7x + 6)\sqrt{3-x} = 0$;
2. $\sqrt{3x+1} = 9 - x$;
3. $\sqrt{2x+1} - \sqrt{16-x} = 3$
4. $\sqrt[4]{2x+3} + \sqrt[4]{3x+2} + \sqrt[4]{5} = 0$;
5. $3\sqrt[3]{x-3} + 9 = 2\sqrt[3]{x^2-6x+9}$;
6. $\sqrt{5-2x} = \sqrt{8-x^2} - \frac{1}{\sqrt{5-2x}}$

8 Иррациональные неравенства

Иррациональными неравенствами называются неравенства, в которых присутствует знак радикала ($\sqrt{}$).

Задача 1. Решить неравенство $(x - 4)(x^2 - 9)\sqrt{x - 1} > 0$.

Решение. Область определения функции $f(x) = (x - 4)(x^2 - 9)\sqrt{x - 1}$ — $(1; +\infty)$, корнями уравнения $f(x) = 0$ являются числа $x = 1$, $x = 3$ и $x = 4$. Отмечаем на числовой прямой область определения и нули функции (см. рис. 1). Область определения разбивается на три промежутка. Находим на них знаки функции $f(x)$ и выписываем ответ.

Ответ: $(1; 3) \cup (4; +\infty)$.

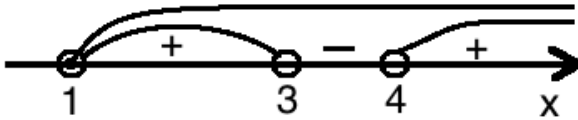


рис.1

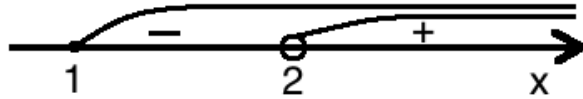


рис.2

Если мы уже решили иррациональное уравнение $f(x) = 0$, то решить неравенство $f(x) > 0$, как правило, не составит особого труда. Для этого нужно найти область определения функции $y = f(x)$, отметить это на прямой. После этого добавить на прямую точки, в которых $f(x) = 0$. Таким образом, прямая разобьется на промежутки, на которых знак функции будет постоянен, и нам будет достаточно подставить по одному числу из каждого промежутка.

Задача 2. Решить неравенство $\sqrt{x - 1} > 3 - x$.

Решение. Корнем уравнения $\sqrt{x - 1} = 3 - x$ является число 2 (см. задачу 2 из §13). Отмечаем на прямой область определения функции $y = \sqrt{x - 1} - 3 + x$: это промежуток $[1; +\infty)$. Отмечаем точку $x = 2$ (см. рисунок 2).

Для решения неравенства $\sqrt{x - 1} - (3 - x) > 0$ нужно рассмотреть два промежутка: $[1; 2)$ и $(2; +\infty)$. Сразу отметим, что число 2 не удовлетворяет неравенству. Возьмем любое число из промежутка $[1; 2)$, например, $x = 1.5$, получим $\sqrt{0.5} - 1.5 < 0$. Следовательно, на этом

промежутке неравенство не выполняется.

Возьмем число $x = 5 \in (2; +\infty)$ получим $\sqrt{4} + 2 > 0$. Следовательно, на этом промежутке неравенство выполняется. Таким образом, неравенство $\sqrt{x-1} > 3-x$ выполняется на промежутке $(2; +\infty)$.

Ответ: $(2; +\infty)$.

Неравенство вида

$$\sqrt{f(x)} < g(x)$$

эквивалентно системе

$$\begin{cases} f(x) < (g(x))^2 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Неравенство вида

$$\sqrt{f(x)} > g(x)$$

эквивалентно совокупности систем

$$(*) \quad \left[\begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > (g(x))^2 \end{cases} \right]$$

Это можно доказать также, как и аналогичное утверждение для иррациональных уравнений из §7.

Заметим также, что совокупность систем $(*)$ можно заменить на более короткую эквивалентную ей совокупность

$$(*) \quad \left[\begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \vee f(x) > (g(x))^2 \right]$$

Задача 3. Решить неравенство $\sqrt{x-1} < 2-x$.

Решение. Сделаем эквивалентные преобразования:

$$\sqrt{x-1} < 2-x \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 < (2-x)^2 \\ x-5 \geq 0 \\ 2-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 5 > 0 \\ x \geq 1 \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; \frac{5-\sqrt{5}}{2}) \cup (\frac{5+\sqrt{5}}{2}; +\infty) \\ x \geq 1 \\ x < 2 \end{cases}$$

Так как $\frac{5-\sqrt{5}}{2} > \frac{5-3}{2} = 1$; $\frac{5-\sqrt{5}}{2} < \frac{5-1}{2} = 2$ и $\frac{5+\sqrt{5}}{2} > 2$, то $x \in [1; \frac{5-\sqrt{5}}{2})$ (см. рисунок 3).

Ответ: $x \in [1; \frac{5-\sqrt{5}}{2})$.

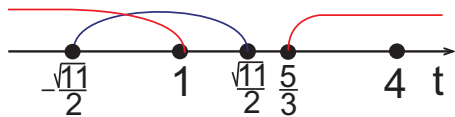


рис.3

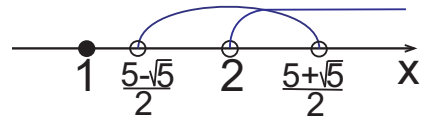


рис.4

Задача 4. Решить неравенство $\sqrt{x-1} > 2-x$.

Решение. Сделаем эквивалентные преобразования:

$$\sqrt{x-1} > 2-x \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x < 0 \\ x-1 \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \\ x-1 > (2-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x \geq 1 \\ x \geq 2 \\ x^2 - 5x + 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x \in (\frac{5-\sqrt{5}}{2}; \frac{5+\sqrt{5}}{2}) \end{cases}$$

Так как $\frac{5-\sqrt{5}}{2} < 2 < \frac{5+\sqrt{5}}{2}$, то $x \in (\frac{5-\sqrt{5}}{2}; +\infty)$ (см. рисунок 4).

Ответ: $x \in (\frac{5-\sqrt{5}}{2}; +\infty)$.

Задача 5. Решить неравенство $\sqrt{2x+1} + \sqrt{5-x} \leq 4$.

Решение. Возведем обе части в квадрат, получим:

$$\sqrt{2x+1} + \sqrt{5-x} \leq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x+6+2\sqrt{-2x^2+9x+5} \leq 16 \\ x \in [-\frac{1}{2}; 5] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{-2x^2+9x+5} \leq 10-x \\ x \in [-\frac{1}{2}; 5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(-2x^2+9x+5) \leq (10-x)^2 \\ x \in [-\frac{1}{2}; 5] \\ x \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 - 56x + 80 \geq 0 \\ x \in [-\frac{1}{2}; 5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 2\frac{2}{9}] \cup [4; +\infty) \\ x \in [-\frac{1}{2}; 5] \end{cases}$$

Следовательно, $\frac{\sqrt{11}}{2} < \frac{5}{3}$. Поэтому $t \in [0; 1]$ (см. рисунок 5).

Ответ: $x \in [\frac{1}{2}; 2\frac{2}{9}] \cup [4; 5]$.

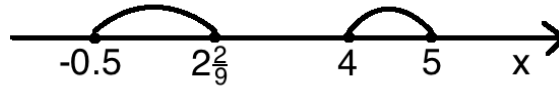


рис.5

Задача 6. Решить неравенство $\sqrt{-(x+2)(x+4)} \leq -(x+2)$.

Ответ: $x \in [-4; -3] \cup \{2\}$.

Задача 7. Решить неравенство $\frac{1}{\sqrt{5-4x}} + \sqrt{5-4x} \leq 1 + 2x - x^2$.

Решение. Воспользоваться утверждением из части 11.

Ответ: 1.

Задача 8. Решить неравенство

$$\sqrt{(x - \sqrt{x-7})(\sqrt{2x-3} - x)} \leq \sqrt{2x-3} - \sqrt{x-7}.$$

Решение. Заметим, что $\sqrt{2x-3} - \sqrt{x-7} = (x - \sqrt{x-7}) + (\sqrt{2x-3} - x)$. Обозначим $a = x - \sqrt{x-7}$, $b = \sqrt{2x-3} - x$. Неравенство примет вид $\sqrt{ab} \leq a + b$.

Так как подкоренное выражение и квадратный корень не могут быть отрицательными, то

$$\begin{cases} ab \geq 0 \\ a + b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}.$$

Вернемся к x :

$$\begin{cases} x - \sqrt{x-7} \geq 0 \\ \sqrt{2x-3} - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \sqrt{x-7} \\ \sqrt{2x-3} \geq x \end{cases}.$$

Уравнение $\sqrt{2x-3} = x$ не имеет корней, соответственно, неравенство $\sqrt{2x-3} \geq x$ либо выполняется для любого $x \in [7; +\infty)$, либо не имеет

решений. Подставим $x = 10$, получим $\sqrt{17} \geq 10$, что неверно. Следовательно, неравенство не имеет корней. Это означает, что неравенство $\sqrt{(x - \sqrt{x - 7})(\sqrt{2x - 3} - x)} \leq \sqrt{2x - 3} - \sqrt{x - 7}$ не имеет корней.

Ответ: нет корней.

Задача 9. Решить неравенство

$$(*) \quad \sqrt{(x - \sqrt{x + 2})(\sqrt{4x + 5} - x)} \leq \sqrt{4x + 5} - \sqrt{x + 2}.$$

Решение. Заметим, что $\sqrt{4x + 5} - \sqrt{x + 2} = (x - \sqrt{x + 2}) + (\sqrt{4x + 5} - x)$. Обозначим $a = x - \sqrt{x + 2}$, $b = \sqrt{4x + 5} - x$. Неравенство примет вид $\sqrt{ab} \leq a + b$.

Так как подкоренное выражение и квадратный корень не могут быть отрицательными, то

$$\begin{cases} ab \geq 0 \\ a + b \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$$

Воспользуемся неравенством Коши, получим: $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq a + b$. Следовательно, неравенство $\sqrt{ab} \leq a + b$ выполняется для всех $a \geq 0$, $b \geq 0$.

Вернемся к x :

$$(**) \quad \begin{cases} x - \sqrt{x + 2} \geq 0 \\ \sqrt{4x + 5} - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \sqrt{x + 2} \\ \sqrt{4x + 5} \geq x \\ x \geq -1.25 \end{cases}$$

Корнем уравнения $x = \sqrt{x + 2}$ является число 2, соответственно, для решения неравенства $x \geq \sqrt{x + 2}$ нужно рассмотреть два промежутка: $[-1.25; 2)$ и $(2; +\infty)$. Сразу отметим, что число 2 удовлетворяет неравенству. Возьмем любое число из промежутка $[-1.25; 2)$, например, $x = 0$, получим $0 \geq \sqrt{2}$, что неверно.

Возьмем число $x = 7 \in (2; +\infty)$ получим $7 \geq \sqrt{9}$. Следовательно, на этом промежутке неравенство выполняется. Таким образом, неравенство $x \geq \sqrt{x + 2}$ выполняется на промежутке $[2; +\infty)$.

Корнем уравнения $\sqrt{4x+5} = x$ является число 5, соответственно, для решения неравенства $\sqrt{4x+5} \geq x$ нужно рассмотреть два промежутка: $[2; 5)$ и $(5; +\infty)$. Сразу отметим, что число 5 удовлетворяет неравенству. Возьмем любое число из промежутка $[2; 5)$, например, $x = 3$, получим $\sqrt{17} \geq 3$. Следовательно, на этом промежутке неравенство выполняется. Возьмем число $x = 10 \in (5; +\infty)$ получим $\sqrt{45} \geq 10$, что неверно. Таким образом, неравенство $\sqrt{4x+5} = x$ выполняется на отрезке $[2; 5]$.

Из вышеизложенного следует, что решением системы $(**)$ (а также неравенства $(*)$) является отрезок $[2; 5]$.

Ответ: $[2; 5]$.

Задача 10. Решить неравенство $\sqrt{15-x} - \sqrt{x-5} \leq \sqrt{x-2}$.

Решение. Функция $f(x) = \sqrt{15-x} - \sqrt{x-5}$ убывает, а функция $g(x) = \sqrt{x-2}$ возрастает на всей области определения. Следовательно, они пересекаются не более чем в одной точке. Функции определены при $x \in [2; 15]$. С помощью подстановки можно убедиться, что они пересекаются при $x = 6$. Следовательно, при $x < 6$ имеем $f(x) > g(x)$, а при $x > 6$ имеем $f(x) < g(x)$.

Ответ: $x \in [6; 15]$.

Задача 11. Решить неравенство $\frac{\sqrt{x^2-1}-2\sqrt{1-x}}{\sqrt{x+7}-1} \leq 0$.

Ответ: $x \in [-7; -6] \cup [-5; -1] \cup \{1\}$.

Задача 12. Решить неравенство $\frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10} \leq \frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9}$.

Ответ: $x \in [-4; 1] \cup \{2\}$.

Задачи.

Решить неравенства

1. $(x^2 - 77)\sqrt{7-x} > 0;$
2. $(x^2 - 77)\sqrt[3]{7-x} > 0;$
3. $x + 4\sqrt{x} - 12 < 0$
4. $\sqrt{-x} < x + 1;$

$$5. 3\sqrt{2-x} \geq 12-x$$

$$6. \sqrt{7-x} < \sqrt{x} - \sqrt{7};$$

Ответы к задачам. (1) $(-\infty; -\sqrt{77})$; (2) $(-\infty; -\sqrt{77}) \cup (7; \sqrt{77})$; (3) $(0; 4)$; (4) $(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}; 0)$; (5) $[6; +\infty)$; (6) нет корней.

Контрольная работа.

Решить неравенства

$$1. (x^2 - 7x + 6)\sqrt{3-x} > 0;$$

$$2. \sqrt{5-x} < x+7$$

$$3. \sqrt{3x+1} > 3x;$$

$$4. \sqrt{2x} - \sqrt{x-1} > 1$$

$$5. \sqrt{x} - \sqrt{\pi-x} \geq \sqrt{\pi};$$

$$6. x - \sqrt{2x+3} + \frac{1}{x-\sqrt{2x+3}} \leq \sqrt{1 - \frac{x^2}{16}}.$$

Содержание

1	Свойства квадратичной функции	4
2	Основные методы решения уравнений с одной переменной.	11
3	Теорема Безу и деление многочленов с остатком	19
4	Формула Виета. Многочлен с целыми коэффициентами	24
4.1	Теорема Виета.	24
4.2	Многочлен с целыми коэффициентами.	27
5	Принцип включения-исключения	31
6	Обобщенный метод интервалов	39
7	Иррациональные уравнения	48
8	Иррациональные неравенства	56

Шавгулидзе Наталия Евгеньевна, кандидат физико-математических работ, старший научный сотрудник кафедры математики СУНЦ МГУ. Окончила мехмат МГУ в 2006 году. В 2010 году защитила диссертацию на тему "Радиколы решеточно упорядоченных колец" на кафедре Высшей алгебры механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. Преподает в СУНЦ МГУ с 2007 года.