

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Государственный астрономический институт им. П. К. Штернберга

На правах рукописи

УДК 523.92-36

УДК 544.034

Горшков Алексей Борисович

ДИФФУЗИОННАЯ ЭВОЛЮЦИЯ ХИМИЧЕСКОГО СОСТАВА
В ЗВЕЗДАХ СОЛНЕЧНОГО ТИПА

Специальность 01.03.02 — Астрофизика и радиоастрономия

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
к.ф.-м.н. Батулин В. А.

Москва — 2016 г.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Введение	5
ГЛАВА 1. Математическое описание диффузии	21
1.1. Основные понятия и величины	21
1.2. Понятие о диффузии	23
1.3. Уравнение Больцмана	25
1.4. Уравнение переноса молекулярных признаков	26
1.5. Метод Бюргерса	28
1.5.1. Моменты левой части уравнения Больцмана.	29
1.5.2. Формулировка метода.	30
1.5.3. Моменты интеграла столкновений.	32
1.5.4. Уравнение диффузии в ионизованном газе.	35
1.6. Методы решения проблемы диффузии при моделировании эволюции звезд	37
1.6.1. Метод Мишо-Профи	37
1.6.2. Метод Тоул	39
1.7. Основные диффузионные процессы, изучаемые в данной диссертации	41
1.7.1. Концентрационная диффузия.	41
1.7.2. Бародиффузия.	42
1.7.3. Термодиффузия.	45
ГЛАВА 2. Постмодельные расчеты эволюции химического состава	48
2.1. Общие сведения	48
2.2. Эволюционные модели Солнца	51

2.3. Включение конвекции в расчеты диффузии	53
2.4. Скорость осаждения химических элементов из конвективной зоны	59
ГЛАВА 3. Диффузия водорода и гелия	61
3.1. Формулировка проблемы	61
3.2. Постановка задачи	62
3.3. Диффузионные потоки и профиль химического состава	64
3.4. Скачок у дна конвективной зоны	67
3.5. Сравнение с результатами других авторов	73
3.6. Влияние глубины конвективной зоны на содержание водорода и гелия	73
3.7. Влияние диффузии на эволюцию Солнца	74
ГЛАВА 4. Диффузия тяжелых элементов	77
4.1. Основные положения	77
4.1.1. Диффузия тяжелых элементов на фоне осаждения гелия.	77
4.1.2. Учет частичной ионизации элементов.	78
4.1.3. Учет фотодиффузии.	79
4.2. Состояния ионов тяжелых элементов внутри Солнца	81
4.3. Результаты расчетов	90
4.3.1. Эффект увлечения диффузионными потоками.	90
4.3.2. Влияние частичной ионизации на скорость диффузии.	90
4.3.3. Влияние потока излучения на диффузионное осаждение элемен- тов.	93
4.3.4. Скорости диффузии и профили содержания тяжелых элементов.	99
4.3.5. Результаты других авторов.	107
4.3.6. Область накопления тяжелых элементов под конвективной зоной.	107

4.3.7. Линейность осаждения тяжелых элементов из конвективной зоны по начальному содержанию.	108
Заключение	111
Литература	118

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе исследуется роль процессов микроскопической диффузии в изменении химического состава звезды солнечного типа. Изучаемые процессы не соответствуют обычному классическому представлению о диффузии, а описываются уравнением дрейфа-диффузии. Наличие в звезде сильных градиентов давления, температуры и поля излучения приводит к тому, что изучаемые процессы не выравнивают имеющиеся градиенты содержания химических элементов, а наоборот, увеличивают относительное содержание водорода во внешних слоях звезды и уменьшают во внутренних, или даже ведут к образованию областей сильного градиента содержания. Специфика исследуемых процессов связана с диффузией многокомпонентной плазмы звезды в условиях коллективных взаимодействий. Исследование процессов диффузионного перераспределения вещества проводилось с использованием уже готовых, независимо полученных эволюционных последовательностей моделей Солнца, рассчитанных с учетом диффузии, но в приближении более низкого порядка. Важной особенностью звезд солнечной массы на Главной последовательности (ГП) является наличие протяженной внешней конвективной зоны со смещающейся границей.

Актуальность темы

Важнейшей проблемой звездной астрофизики продолжает оставаться эволюция химического состава внутри звезд на протяжении их жизни на Главной последовательности. В отношении Солнца и звезд солнечного типа эта проблема формулируется следующим образом: 1) как распределены химические элементы внутри звезды (каков профиль химического состава) в настоящее время, и 2) как этот профиль меняется со временем и, в частности, каким

он был в прошлом? Предполагается, что химический состав эволюционирует от однородного или близкого к однородному состояния, соответствующего звезде нулевого возраста на стадии Главной последовательности.

Классические модели внутреннего строения Солнца (до 1990-х годов) строились в предположении, что химический состав меняется только в результате реакций термоядерного синтеза и, следовательно, остается неизменным во внешней, относительно холодной оболочке звезды. В течение 1990-х годов накопление и анализ гелиосейсмологических данных наложили серьезные ограничения на протяженность солнечной конвективной зоны (около 29% по радиусу, [1]) и на ее химический состав, в частности, на содержание гелия (0.24–0.25 по массе, [2]). Содержание гелия оказалась на 0.03 ниже, чем принималось прежде на основании оценок содержания гелия в начальной модели ([3], с. 234). Данное противоречие привело к заключению, что химический состав внешних слоев Солнца должен изменяться со временем. Основным кандидатом на роль механизма такого изменения явилась диффузия.

Под диффузией в данной работе понимается процесс взаимного перераспределения компонентов газовой смеси, вызванного микроскопическим (молекулярным) движением частиц (понятие и математическое описание диффузии приведены в главе 1 данной работы).

Диффузия возникает из-за отсутствия термодинамического равновесия в системе. Ее математическое описание стало возможным после создания кинетической теории газов. Эта теория была создана к 1917 году независимо Д. Энскогом и С. Чепменом. Теория показала, что диффузия в смеси газов может возникать не только вследствие градиента концентраций самих компонентов, но и при наличии градиента температуры (термодиффузия) или градиента давления (бародиффузия). Концентрационная диффузия стремится выровнять имеющиеся в среде неоднородности состава. Процессы термо-

и бародиффузии, наоборот, приводят к возникновению в среде градиентов концентраций.

Предположения о том, что диффузионное перераспределение элементов может протекать на звездах, были сделаны практически сразу же: в 1917 и 1922 году Чепмен ([4], [5] и [6]), а затем Эддингтон [7] и Росселанд [8] рассмотрели этот вопрос. Их вердикт, однако, отрицал значимость процесса диффузии для звезд солнечного типа. Следует заметить, что в то время даже вопрос об источниках энерговыделения звезд не был еще разрешен в пользу термоядерных реакций, и потому оценки градиентов давления и температуры могли существенно отличаться от принятых в настоящее время. Кроме того, Чепмен в своих расчетах предполагал, что звезды состоят из нейтральных атомов. В последующие годы выяснилось, что это предположение неверно: вещество звезд почти полностью ионизовано. В 1937 году Бирман [9] рассмотрел проблему электрического поля в недрах звезд и диффузии ионизованных элементов в этом поле. Он показал, что диффузия в полностью или частично ионизованной плазме отличается определенной спецификой.

В последующие годы попытки рассчитать диффузию на звездах продолжались одновременно с развитием методов, пригодных для таких расчетов. В 1949 году Грэд [10] предложил метод изучения неравновесных процессов в газах, основанный на разложении функции распределения в ряд по ортогональным тензорным полиномам от скоростей частиц. С некоторыми вариациями этот метод активно используется и в настоящее время. В 1969 году Бюргерс [11] построил систему уравнений (т.н. уравнения Бюргерса) для смеси ионизованных газов, описывающих поведение компонентов при наличии силы тяжести и взаимного «трения», вызванного передачей импульса между компонентами.

Аллер и Чепмен (1960 г., [12]) исследовали гравитационное осаждение тя-

желых элементов на Солнце, при этом содержание гелия принималось равным нулю. Примечательно, что авторами была высказана мысль о влиянии глубины конвективной зоны, которая тогда еще была известна менее точно, на степень осаждения элементов из внешних слоев Солнца.

В 1970 году Мишо [13] оценил, как влияет на осаждение тяжелых элементов давление излучения (т.н. эффект фотодиффузии) и магнитное поле.

В 1974 году Воклер и др. [14] построили самосогласованные модели с диффузией гелия для А-звезд Главной последовательности, т.е. модели, учитывающие влияние диффузии на свою структуру — положение границы конвективной зоны и др.

В 1977 году Нордлингер ([15], [16]) получил величину осаждения гелия из внешних слоев на Солнце, равную 0.03 по массе, при начальном содержании 0.23. Напомним, что разницу именно 0.03 по массе в содержании гелия по сравнению со стандартной солнечной моделью, не включавшей на тот момент диффузию, выявил анализ гелиосейсмологических данных в 1991 году.

Бакал с коллегами (см., например, [17]) проводил расчеты диффузии во внутренних областях звезд, чтобы выяснить, как влияет диффузионное перераспределение элементов на протекание реакций синтеза, потоки нейтрино и т.п. Конвективные оболочки в расчеты не включались и эволюция химического состава в них не исследовалась.

Широкое внедрение диффузии в модели звезд началось в начале 1990-х годов, когда появились удобные в применении методы ее расчета. Сначала Мишо и Профи (1991 год, [18]) вывели аппроксимационные формулы для расчета скорости диффузии водорода в водородно-гелиевой плазме и скорости диффузии тяжелого элемента как малой примеси к смеси гелия и водорода. Термодиффузия учитывалась в виде отдельной поправки. Затем в 1994 году Тоул, Бакал и Лоеб [19] на основе уравнений Бюргерса построили общую схе-

му решения проблемы диффузии для смеси ионизованных газов. Эта схема включает в себя эффекты термодиффузии и взаимного влияния диффузионных потоков различных компонентов смеси.

Начиная с 1992 года модели Солнца (см. [20], [21], [22], [23], [24] и др.) уже включают в себя диффузионное осаждение гелия из конвективной зоны. Диффузия гелия является фундаментальным фактором теории строения и эволюции звезд (см. [25]). С другой стороны, диффузия тяжелых элементов либо не используется в таких расчетах, либо трактуется с большими упрощениями — например, не делается различия между разными химическими элементами («монолитное» осаждение тяжелых элементов). Первой работой, в которой авторы получили самосогласованную эволюционную модель Солнца с учетом детальной поэлементной диффузии тяжелых элементов, стала статья Туркот с соавторами [26].

Диффузия тяжелых элементов как малых примесей на фоне основных компонентов, водорода и гелия, отличается от диффузии гелия на фоне водорода. Это проблема, все еще требующая изучения.

Знание деталей распределения тяжелых элементов внутри Солнца необходимо, например, для расчета непрозрачностей в этих областях и теоретического спектра собственных колебаний Солнца, а также для определения такого фундаментального параметра внутреннего строения, как положение нижней границы конвективной зоны.

Результаты исследования диффузионной эволюции внутри Солнца могут быть использованы для уточнения эволюционных треков звезд. Это особенно актуально в связи с космическими миссиями Kepler и COROT и активным развитием астросейсмологии — науки, изучающей акустические колебания звезд. Полученные данные позволили уточнить для многих сотен звезд их важнейшие характеристики: массу, радиус, возраст (см., например, [27], [28],

[29]).

Учет диффузии элементов приводит к эффективному ускорению расчетной эволюции Солнца: дополнительному уменьшению содержания водорода в ядре, более быстрому продвижению по диаграмме Герцшпрунга-Рассела. Поэтому актуальной становится задача изучения собственно процесса диффузии на звездах солнечного типа с их особенностями внутреннего строения — такими, как наличие энерговывделяющего ядра, зон лучистого и конвективного переноса, значительных градиентов силы тяжести, давления и температуры. Такое изучение, в конечном итоге, важно для эффективного подхода к эволюционному моделированию Солнца и ему подобных звезд. Кроме того, изучение диффузии актуально для смежных областей физики Солнца: гелиосейсмологии, физики солнечных нейтрино и др.

Основная цель работы

Детальное изучение процессов микроскопической диффузионно-дрейфовой эволюции в многокомпонентной плазме в недрах звезд солнечного типа; моделирование появления и развития особенностей в химическом составе, связанных с процессами диффузии и конвекции в радиативно-конвективных оболочках звезд.

Конкретные задачи и методы исследований

В качестве общей гипотезы при решении поставленной задачи использовалось предположение, что химический состав звезды меняется вследствие реакций термоядерного синтеза, локализованных в ядре звезды, и диффузии, протекающей в ядре и зоне лучистого переноса. Перемешивание вещества в конвективной зоне, по современным представлениям [30], происходит гораздо быстрее диффузионного перераспределения: отношение характерных времен

этих процессов достигает $10^{-10} - 10^{-11}$. Из этого следует, что химический состав одинаков по всей конвективной зоне звезды.

Основным инструментом исследования, примененным в данной работе, является реализованный автором метод постмодельных расчетов эволюции химического состава звезды. Суть этого метода заключается в решении системы уравнений дрейфа-диффузии на эволюционной последовательности звездных моделей. Система уравнений решается для выбранного состава химической смеси с учетом особенностей внутреннего строения звезды — а именно, наличия энерговывделяющего ядра и конвективной зоны. Ядерные реакции входят в уравнения через функцию источника. В качестве исходных данных используются эволюционные последовательности параметров внутреннего строения звезды: температуры, давления и плотности как функций координаты и времени; радиуса, светимости звезды и положения дна конвективной зоны как функций времени, полученные в ходе построения эволюционной модели звезды с помощью того или иного эволюционного кода.

Таким образом, задача сводится к решению системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, коэффициенты которой содержат информацию о внутреннем строении звезды и его изменении со временем. Через отдельный коэффициент в этой системе задается положение границы конвективной зоны, которое является точкой разрыва, и его изменение со временем.

Данный подход позволяет:

1. изучать эволюционные процессы для большего количества компонентов смеси, чем это заложено в исходной модели;
2. исследовать влияние на эволюцию химического состава различных физических механизмов, не учтенных в исходной модели (давление излучения, частичная ионизация и т.д.);

3. применять методы расчета диффузии элементов, отличные от используемых в исходной модели;
4. сравнивать в рамках одного подхода эволюцию химического состава на различных эволюционных моделях.

Метод постмодельных расчетов хорошо зарекомендовал себя на практике, позволил получить новые важные результаты, и в настоящее время область его применения вышла далеко за пределы тех задач, для решения которых он создавался.

В ходе выполнения работы решались следующие конкретные задачи:

1. Построить вычислительный алгоритм для решения уравнений химической эволюции с диффузионно-дрейфовыми членами, то есть обобщенного уравнения диффузии.
2. В приближении пост-модельной эволюции провести расчеты профилей химического состава для водородно-гелиевой смеси. Получить оценку точности соответствующих эволюционных расчетов диффузионной эволюции.
3. Провести расчеты эволюционных профилей содержания элементов тяжелее гелия в приближении диффузии малой примеси на фоне взаимной диффузии основных компонентов — водорода и гелия.
4. Получить величину диффузионного осаждения из конвективной зоны для гелия и наиболее обильных тяжелых элементов.
5. Оценить влияние диффузионных эффектов на общую эволюцию Солнца на Главной последовательности.

Научная новизна и практическая значимость работы

Научная новизна полученных в работе результатов заключается в следующем.

Определена скорость диффузионного осаждения тяжелых элементов в эволюционной модели Солнца, рассчитанной на базе нового уравнения состояния SAHA-S.

Рассмотрена поэлементная диффузия тяжелых элементов для шести наиболее обильных элементов — C, N, O, Ne, Si, Fe.

Объяснено возникновение области накопления тяжелых элементов под конвективной зоной.

Показано, что относительные скорости осаждения из конвективной зоны для гелия и тяжелых элементов почти одинаковы.

Обнаружена обратная зависимость скорости осаждения элементов от массы конвективной зоны M_{CZ} (при малых относительных изменениях M_{CZ}).

Результаты, полученные в данной работе, показывают, что диффузия приводит к постепенному, довольно медленному перераспределению химических элементов внутри Солнца. Максимальный эффект наблюдается в центре и в конвективной зоне, он составляет величину порядка 10% от исходного содержания. Однако, в некоторых областях даже небольшое изменение химического состава может заметно влиять на непрозрачность вещества, что особенно важно у нижней границы конвективной зоны, расчетное положение которой также может измениться. Поэтому учет диффузии совершенно необходим для построения высокоточных моделей внутреннего строения Солнца и ему подобных звезд.

Из общих соображений логично было бы предположить, что для разных элементов — в силу разной массы, степени ионизации, сечений взаимодействия с излучением и т. д. — скорость диффузии различается, и, как результат, можно ожидать разделение элементов, т. е. постепенное изменение их *относительного* содержания в одной точке звезды. Если использовать в качестве опорного факта осаждение гелия из конвективной зоны, то данная

работа показала, что осаждение тяжелых элементов не способно объяснить их низкое содержание, обнаруженное в работах [31] и [32]. Следовательно, необходим поиск других механизмов, способных объяснить этот эффект.

Результаты, полученные в данной работе, были использованы коллективом разработчиков открытого эволюционного кода MESA [33], предназначенного для расчета эволюции звезд. Кроме того, эти результаты были использованы автором для изучения области под конвективной зоной с целью согласовать теоретические расчеты скорости звука в данной области с гелио-сейсмическими данными [34], а также для исследования проблемы низкого содержания лития на Солнце [35].

На защиту выносятся следующие основные результаты

1. Получена величина уменьшения массовой доли гелия в конвективной зоне за время жизни Солнца, 4.6 млрд лет. Она равна 0.028 ± 0.002 , что составляет 10.3 % от исходного содержания гелия, принятого равным $Y_0 = 0.272$. Данный результат хорошо согласуется с расчетами других авторов и верифицирует использованную методику постмодельных расчетов, а также позволяет тестировать точность модельно-эволюционных расчетов диффузии в смеси водород-гелий.
2. Получено, что при исходном содержании тяжелых элементов, равном 0.0197 по массе, их суммарное осаждение из конвективной зоны составляет 0.0021 массовой доли, что составляет 12,0 % от начального содержания. Данный результат получен на основе покомпонентных расчетов в рамках модели диффузии Баккала-Тоул с учетом частичной ионизации элементов и фотодиффузии, а также взаимного влияния диффузионных потоков тяжелых элементов, водорода и гелия. Показано, что относительная величина диффузионного осаждения из конвективной

зоны практически одинакова для тяжелых элементов и для гелия.

3. Показано, что вследствие диффузии под конвективной зоной образуется локальная область, в которой содержание тяжелых элементов меняется незначительно со временем. Это объясняется поведением профиля температуры под основанием конвективной зоны. Содержание гелия и водорода меняется по-другому, и аналогичная область в профиле содержания гелия появляется только на начальном этапе эволюции Солнца на Главной последовательности, а к настоящему времени она полностью исчезает.
4. Установлено, что по сравнению с диффузией, рассчитанной без учета взаимодействия с полем излучения в предположении о полной ионизации элементов, учет частичной ионизации приводит к *увеличению* диффузионного осаждения, в то время как учет фотодиффузии *уменьшает* это осаждение для элементов, которые не ионизируются полностью внутри конвективной зоны. В частности, для железа учет частичной ионизации приводит к ускорению осаждения из конвективной зоны на 28 %, а учет фотодиффузии замедляет осаждение из конвективной зоны на 9.4 %.
5. Получено, что осаждение элементов из конвективной зоны происходит быстрее в модели с более мелкой конвективной зоной. Для гелия осаждение возрастает на 0.6 % при уменьшении глубины конвективной зоны на 0.01 долю радиуса Солнца. Это объясняется совместным эффектом уменьшения массы конвективной зоны и возрастания диффузионного потока по направлению от центра Солнца.

Личный вклад автора

Все расчеты диффузионной эволюции солнечного химического состава проведены лично автором с помощью оригинальных программ, написанных автором. Интерпретация полученных результатов также проведена автором.

Эволюционные последовательности моделей, послужившие базой для данной работы, были любезно предоставлены С. В. Аюковым (ГАИШ МГУ) и Й. Кристенсен-Далсгаардом (Орхусский университет, Дания).

Уравнение состояния SAHA-S [36], использованное при расчете моделей и распределений элементов по ионным состояниям, было предоставлено В. К. Грязновым (ИПХФ РАН) и соавторами.

При построении моделей Солнца наиболее распространен алгоритм описания диффузии, предложенный Мишо и Профи [18]. Однако, в данной работе использован более общий метод Тоул [19], который был модифицирован автором для учета фотодиффузии. Также автором был применен более общий и устойчивый численный метод его реализации, основанный на разложении по сингулярным числам (SVD).

В публикациях по теме диссертации, где первым автором указаны А. Б. Горшков или В. А. Батурин, автор участвовал в постановке задач и обсуждениях, им были проведены расчеты и получены основные результаты. В публикациях, где первым автором указан С. В. Аюков, расчеты и результаты автора использовались для достижения общей цели работы, автор участвовал в обсуждении хода работы и ее результатов.

Расчеты эволюции Солнца с учетом и без учета диффузии до момента исчерпания водорода в ядре были произведены С. В. Аюковым по просьбе автора. Результаты этих расчетов были использованы автором для оценки влияния диффузии на время пребывания Солнца на стадии Главной последовательности.

Достоверность результатов

Достоверность результатов проведенных исследований и обоснованность выводов, изложенных в работе, обеспечивается многократным тестированием разработанного автором программного кода на задаче диффузии в водородно-гелиевой смеси с малой примесью кислорода. Это сравнение было проведено для следующих эволюционных последовательностей Солнца: полученных С. В. Аюковым (ГАИШ МГУ), Model S [23], MESA [33] и CESAM [37]. За исключением последней, все эти проверки прошли успешно: рассчитанная эволюция водорода, гелия и кислорода находилась в хорошем соответствии с данными исходных эволюционных последовательностей. Различия в результатах расчетов диффузии для кода CESAM пока не получили объяснения и требуют дальнейшего изучения. Достоверность результатов также подтверждается апробацией на всероссийских и международных конференциях.

Публикации по теме диссертации

В рецензируемых журналах:

1. Батурин В.А., Горшков А.Б., Аюков С.В. Диффузионная эволюция химического состава в солнечной модели. // **Астрономический журнал**, 2006. — Том 83. С. 1115–1127.
2. Горшков А.Б., Батурин В.А. Диффузионное осаждение тяжелых элементов в недрах Солнца. // **Астрономический журнал**, 2008. — Том 85. С. 844–856.
3. Батурин В.А., Горшков А.Б., Орешина А.В. Формирование градиента химического состава под конвективной зоной и ранняя эволюция Солнца. // **Астрономический журнал**, 2015. — Том 92. С. 53–65.
4. Gorshkov A.B., Baturin V.A. Elemental diffusion and segregation processes

in partially ionized solar plasma. // **Astrophysics and Space Science**, 2010. — Vol. 328 — С. 171–174.

5. *Gorshkov A.B., Baturin V.A.* Diffusion segregation of heavy elements in the Sun. // **Journal of Physics: Conference Series**, 2011. — Vol. 271 — С. 012041.
6. *Аюков С.В., Батурич В.А., Горшков А.Б.* Модель внутреннего строения Солнца с уравнением состояния SAHA-S и осаждением гелия. // **Известия Крымской астрофизической обсерватории**, 2006. — Том 103 — С. 94–101.
7. *Горшков А.Б., Батурич В.А., Аюков С.В.* Моделирование диффузии химических элементов в недрах Солнца. // **Известия Крымской астрофизической обсерватории**, 2006. — Том 103 — С. 85–92.

В сборниках трудов конференций:

1. *Ayukov S.V., Baturin V.A., Gorshkov A.B.* Solar evolution model with diffusion and new equation of state. // Proceedings of SOHO 18/GONG 2006/HELAS I, Beyond the spherical Sun (ESA SP-624), Editor: Karen Fletcher. Scientific Editor: Michael Thompson. — Sheffield, UK, 2006. — Published on CDROM, P. 19.1.
2. *Горшков А.Б., Батурич В.А.* Диффузия элементов в недрах Солнца. // Труды конференции “Забабахинские научные чтения – 2010” — Снежинск: ВНИИТФ, 2010. — <http://www.vniitf.ru/index.php/2009-04-02-05-19-44/2009-04-02-05-20-16/2010-08-19-11-17-56/102--2010/592--2010>.

Апробация работы

Основные результаты, представленные в диссертации, были представлены научному сообществу на следующих конференциях и семинарах:

1. Международная конференция “Физика небесных тел”, Научный, Украина, сентябрь 2005 г.
2. Международная конференция “Beyond the spherical Sun”, Шеффилд, Великобритания, август 2006 г.
3. Конференция “Ломоносовские чтения”, Москва, Россия, апрель 2006 г.
4. Международная конференция “Солнце: активное и переменное”, Научный, Украина, сентябрь 2007 г.
5. XXIV Международная конференция “Взаимодействие сильных потоков энергии с материей”, Эльбрус, Россия, март 2009 г.
6. Международная конференция “Синергия между солнечным и звездным моделированием”, Рим, Италия, июнь 2009 г.
7. Международная конференция “Забабахинские чтения — 2010”, Снежинск, Россия, март 2010 г.
8. Международная конференция “Новая эра в сейсмологии Солнца и звезд типа Солнца”, Экс-ан-Прованс, Франция, июнь 2010 г.
9. Рабочее совещание-дискуссия “Активность Солнца и звезд на разных стадиях их эволюции”, Москва, Россия, декабрь 2010 г.
10. Международная конференция “Физика Солнца и солнечно-земные связи”, Научный, Украина, сентябрь 2011 г.
11. Всероссийская конференция с международным участием “Солнечная и солнечно-земная физика — 2014”, Пулковое, Россия, октябрь 2014 г.
12. Международная конференция “Физика Солнца: теория и наблюдения”, Научный, Россия, сентябрь 2015 г.

Диссертационная работа была выполнена при участии в части научной программы проектов: МНТЦ № 3755, РФФИ № 05-02-17302-а и № 12-02-00135-а.

Объем и структура работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав и заключения. Полный объем диссертации **125** страниц текста с **33** рисунками и 2 таблицами. Список литературы содержит **63** наименования.

ГЛАВА 1

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ДИФФУЗИИ

В данной главе изложено общее описание проблемы диффузии в звездном веществе, методы и схемы ее решения, а также физические основы рассматриваемых в диссертации механизмов диффузии: концентрационной диффузии, бародиффузии, термодиффузии, эффекта увлечения элементов в многокомпонентной смеси и фотодиффузии.

Теория, описывающая динамику неоднородного газа (смеси газов), была разработана Чепменом и Каулингом [38] и в дальнейшем развита Бюргерсом [11]. В обоих случаях было использовано кинетическое уравнение Больцмана.

1.1. Основные понятия и величины

Рассмотрим смесь газов, состоящую из молекул (частиц) нескольких сортов. Под словом «молекулы» везде в данной диссертации будут пониматься одиночные частицы, из которых состоит газ. Это могут быть и одиночные атомы, и ионы или электроны. Итак, молекулы газа находятся в постоянном хаотическом движении (характеризуется мгновенной скоростью $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$), которое можно разделить на случайную составляющую (собственную, или тепловую скорость \mathbf{v}) и на упорядоченное движение газа как целого (или его подсистемы из всех молекул сорта s) со средней скоростью \mathbf{u} (или, соответственно, \mathbf{u}_s). Газ характеризуется микроскопическими параметрами (распределением частиц по скоростям) и макроскопическими параметрами (давлением, температурой, скоростью потока и т.д.). Теоретические вопросы о взаимосвязи параметров двух этих видов подробно изложены в литературе по физической кинетике (см., например, [39]), а ниже приведены определения основных физических величин, которые потребуются при изложении матери-

алов диссертации.

В каждый момент времени t состояние системы молекул одного сорта s задается функцией распределения частиц по координатам и скоростям $f_s(\mathbf{v}_s, \mathbf{r}, t)$, которая определяется как вероятное число молекул сорта s , находящихся в момент времени t в интервале $[\mathbf{r}, \mathbf{r} + d\mathbf{r}]$ и имеющих скорости в диапазоне $[\mathbf{v}_s, \mathbf{v}_s + d\mathbf{v}_s]$. Из определения f_s следует, что эта функция неотрицательная. На нее налагаются условия стремления к нулю при $v_s \rightarrow \infty$, а также конечности и непрерывности при любых t . Концентрация n_s и средняя скорость \mathbf{u}_s молекул сорта s в момент t в точке \mathbf{r} соответственно равны:

$$n_s(\mathbf{r}, t) = \int f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}_s, t) d\mathbf{v}_s, \quad (1.1)$$

$$\mathbf{u}_s(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{n_s(\mathbf{r}, t)} \int \mathbf{v}_s f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}_s, t) d\mathbf{v}_s. \quad (1.2)$$

Средняя скорость \mathbf{u} и средняя массовая скорость \mathbf{u}_0 молекул всей смеси равны соответственно (опуская для краткости скобки с координатами):

$$\mathbf{u} = \frac{1}{n} \sum_s n_s \mathbf{u}_s, \quad \mathbf{u}_0 = \frac{1}{\rho} \sum_s \rho_s \mathbf{u}_s, \quad (1.3)$$

где плотность молекул одного сорта ρ_s и средняя плотность всей смеси ρ равны:

$$\rho_s = m_s n_s, \quad \rho = \sum_s \rho_s \quad (1.4)$$

Содержание по массе компонента s равно

$$X_s = \frac{\rho_s}{\rho}, \quad \sum_s X_s \equiv 1 \quad (1.5)$$

Компоненты тензора давления \mathbf{p}_s , парциальное давление молекул одного сорта p_s и полное газовое давление p определяются выражениями (см., например, [38], стр. 53–54):

$$p_{sij} = m_s \int v_i v_j f_s d\mathbf{v}_s, \quad p_s = \frac{1}{3} \rho_s \overline{v_s^2}, \quad p = \sum_s p_s \quad (1.6)$$

Тепловая энергия выделенного объема газа и тепловой поток (поток тепловой энергии) равны:

$$\varepsilon_s = \frac{m_s}{2} \int v_s^2 f_s d\mathbf{v}_s, \quad \mathbf{q}_s = \frac{m_s}{2} \int v_s^2 \mathbf{v}_s f_s d\mathbf{v}_s \quad (1.7)$$

В данной диссертации сила, действующая на частицу сорта s , будет рассматриваться как суперпозиция гравитационного, электрического и магнитного полей с напряженностями \mathbf{g} , \mathbf{E} и \mathbf{B} , соответственно:

$$\mathbf{F}_s = m_s \mathbf{g} + e_s \mathbf{E} + (e_s/c)[\mathbf{v}_s \times \mathbf{B}], \quad (1.8)$$

где m_s и e_s — масса и заряд частицы. Здесь и далее не будет проводиться различия между магнитной индукцией и напряженностью магнитного поля (магнитная восприимчивость принимается равной единице).

1.2. Понятие о диффузии

Само слово «диффузия» (от латинского «diffusio» — растекание, распространение, рассеивание) означает распространение молекул по доступному для них объему вследствие многочисленных случайных столкновений с другими молекулами. За достаточно большое время любая свободно выбранная молекула может сильно удалиться от своего первоначального положения. Если газ находится при постоянной температуре и при отсутствии внешних сил, вероятность встретить молекулу в разных частях занятого газом объема выравнивается. В таком случае можно говорить о самодиффузии, если газ состоит из молекул одного сорта, и о собственно диффузии, если мы имеем дело со смесью двух или более газов. Происходит сглаживание и, в конечном счете, исчезновение имевшихся в какой-то начальный момент неоднородностей содержания. То есть, казалось бы, диффузия по самому своему определению ведет к выравниванию концентрации и относительного содержания разных

компонентов. Однако, в неоднородной среде, при наличии перепадов давления и температуры, это не так. Наличие таких неоднородностей по-разному действует на молекулы различных компонентов смеси, сообщая им разные по величине и, иногда, направлению ускорения. В результате в газовой смеси возникают диффузионные потоки — дрейфовое движение компонентов смеси друг относительно друга. Эти потоки тем сильнее, чем больше неоднородности, то есть зависят от величины градиентов соответствующих величин:

$$\mathbf{J}_s = -D_{ns} \frac{\nabla n_s}{n_s} - D_{ps} \frac{\nabla p}{p} - D_{Ts} \frac{\nabla T}{T} - \dots, \quad (1.9)$$

где D_n , D_p , D_T — соответственно, коэффициенты концентрационной диффузии, бародиффузии и термодиффузии. Линейная зависимость (первый закон Фика) — следствие малости скорости диффузии по сравнению с тепловой скоростью.

Обычно из рассмотрения диффузии исключают движение газа как целого, — записывают уравнения в системе координат, движущейся в данной точке со скоростью центра масс выбранного объема газа. Таким образом, скорость диффузии компонента s определяется как разность массовых скоростей этого компонента и всей газовой смеси:

$$\mathbf{w}_s = \mathbf{u}_s - \mathbf{u}_0 \quad (1.10)$$

По определению,

$$\sum_s \rho_s \mathbf{w}_s = 0 \quad (1.11)$$

В каждой точке скорость изменения концентрации молекул сорта s задается уравнением непрерывности вещества:

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{J}_s \quad (1.12)$$

— при отсутствии источников и стоков этих молекул в данной точке.

Таким образом, в среде с неоднородными термодинамическими параметрами диффузия ведет к разделению элементов. Звезды являются яркими примерами такой среды — гигантские самогравитирующие шары с термоядерными источниками энергии обладают сильными градиентами давления, температуры и (в областях энерговыделения) химического состава. Следовательно, за время эволюции с момента выхода квазиоднородной звезды на главную последовательность диффузия приводит к изменению относительного содержания химических элементов по радиусу. Оценке величины этого изменения посвящено все дальнейшее изложение.

1.3. Уравнение Больцмана

Кинетическое уравнение Больцмана для функции распределения имеет вид (см, например, [39], стр. 23):

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}_s}{m_s} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial_e f_s}{\partial t}, \quad (1.13)$$

где $\partial_e f_s / \partial t$ — так называемый *интеграл столкновений*, равный скорости изменения функции распределения f_s из-за межмолекулярных столкновений.

Уравнение (1.13) описывает эволюцию во времени функции распределения f_s при наличии в системе столкновений и внешних силовых полей — гравитационного и электромагнитного.

Если записать функцию распределения f_s как функцию от собственных скоростей частиц $\mathbf{v}_s = \mathbf{v} - \mathbf{u}_s$, то производные в (1.13) будут включать в себя и производные от средней скорости \mathbf{u}_s :

$$\frac{\partial f_s(\mathbf{v}_s)}{\partial t} = \frac{\partial f_s(\mathbf{v}_s)}{\partial t} - \frac{\partial f_s(\mathbf{v}_s)}{\partial \mathbf{v}_s} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} \quad (1.14)$$

$$\frac{\partial f_s(\mathbf{v}_s)}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial f_s(\mathbf{v}_s)}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial f_s(\mathbf{v}_s)}{\partial \mathbf{v}_s} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \quad (1.15)$$

При этом уравнение Больцмана переписется в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_s}{\partial t} + \sum_h (v_{sh} + u_{sh}) \frac{\partial f_s}{\partial x_h} - \sum_h \frac{D_s u_{sh}}{Dt} \frac{\partial f_s}{\partial v_{sh}} \\ - \sum_h \sum_k v_{sk} \frac{\partial u_{sh}}{\partial x_k} \frac{\partial f_s}{\partial v_{sh}} + \sum_h \frac{F_{sh}}{m_s} \frac{\partial f_s}{\partial v_{sh}} = \frac{\partial_e f_s}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1.16)$$

где $D_s/Dt \equiv \partial/\partial t + \mathbf{u}_s \cdot \partial/\partial \mathbf{r}$ — производная по времени в сопутствующей системе координат.

1.4. Уравнение переноса молекулярных признаков

Молекулярным признаком называют произвольную функцию молекулярной скорости $\phi(\mathbf{v})$. Кроме скорости, молекулярный признак может также зависеть от координат и времени. Усреднение $\phi(\mathbf{v})$ по частицам, находящимся в промежутке времени dt в элементарном объеме $d\mathbf{r}$, дает величину

$$\bar{\phi} = \frac{1}{n_s} \int \phi f_s d\mathbf{v}_s = \frac{1}{n_s} \int \phi f_s d\mathbf{v}_s \quad (1.17)$$

Умножая уравнение Больцмана в виде (1.13) на ϕ и интегрируя по всему пространству молекулярных скоростей \mathbf{v} , получают уравнение переноса молекулярных признаков:

$$\frac{\partial n_s \bar{\phi}}{\partial t} = - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (n_s \overline{v_{si} \phi}) + n_s \left\{ \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} + \sum_i \overline{v_{si} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}} + \sum_i \frac{F_{si}}{m_s} \overline{\frac{\partial \phi}{\partial v_{si}}} + \Delta \bar{\phi} \right\}, \quad (1.18)$$

где $n_s \Delta \bar{\phi} \equiv \int \phi (\partial_e f_s / \partial t) d\mathbf{v}$ — скорость изменения $\bar{\phi}$ за счет столкновений. Уравнение имеет следующий смысл: скорость изменения (на единицу объема) просуммированного по всем частицам молекулярного признака определяется величиной потока частиц через границу объема (первое слагаемое справа), изменением самого молекулярного признака как функции времени, координат и скорости частиц (первые три слагаемых в фигурных скобках) и резуль-

татом столкновений частиц между собой (последнее слагаемое в фигурных скобках).

Если в качестве координаты в пространстве скоростей выбрать собственную скорость частиц \mathbf{v} , то уравнение переноса молекулярных признаков примет следующий вид ([38], с. 72 или [11], с. 22):

$$\begin{aligned} \frac{D_s}{Dt}(n_s \bar{\phi}) + n_s \bar{\phi} \sum_i \frac{\partial u_{si}}{\partial x_i} + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (n_s \overline{v_{si} \phi}) + n_s \sum_i \overline{\frac{\partial \phi}{\partial v_{si}} \frac{D_s u_{si}}{Dt}} + \\ + \sum_i \sum_j n_s v_{sj} \overline{\frac{\partial \phi}{\partial u_{si}} \frac{\partial u_{si}}{\partial x_j}} - \frac{n_s}{m_s} \sum_i \overline{f_{si}} \frac{\partial \phi}{\partial v_{si}} = n_s \Delta \bar{\phi}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Если при столкновениях частиц какой-либо молекулярный признак, просуммированный по взаимодействующим молекулам, не меняет своего значения, то его называют *аддитивным инвариантом* столкновений. Для такого признака $\Delta \bar{\phi} = 0$. Рассматривая в качестве возможных столкновений такие, в которых сохраняется количество частиц, их суммарный импульс и тепловая энергия, можно обнаружить три аддитивных инварианта:

$$\psi^{(1)} = 1, \quad \psi^{(2)} = m_s \mathbf{v}_s, \quad \psi^{(3)} = \varepsilon_s. \quad (1.20)$$

Подставляя $\psi^{(i)}$ в (1.19), получают уравнение непрерывности:

$$\frac{Dn_s}{Dt} + n_s \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{u}_s = 0, \quad (1.21)$$

уравнение движения:

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{r}} - \rho_s \left(\frac{\mathbf{F}_s}{m_s} - \frac{D \mathbf{u}_s}{Dt} \right) = 0, \quad (1.22)$$

и уравнение тепловой энергии (для одноатомного газа):

$$\frac{D3/2nkT}{Dt} + \frac{3nkT}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{p} : \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1.23)$$

1.5. Метод Бюргерса

Бюргерс ([11]) рассмотрел эволюцию во времени моментов функции распределения s -го компонента смеси:

$$(p_s)_{hk} = m_s \int v_{sh} v_{sk} f_s d\mathbf{v}_s \quad (1.24)$$

$$(p_s)_{hki} = m_s \int v_{sh} v_{sk} v_{si} f_s d\mathbf{v}_s \quad (1.25)$$

$$(p_s)_{hkij} = m_s \int v_{sh} v_{sk} v_{si} v_{sj} f_s d\mathbf{v}_s \quad (1.26)$$

Диагональные элементы тензора давления $(p_s)_{hk}$ составляют гидродинамическое давление:

$$p_s = \frac{1}{3} \sum_h (p_s)_{hh} , \quad (1.27)$$

а недиагональные элементы обозначаются через $(P_s)_{hk}$:

$$(P_s)_{hk} = (p_s)_{hk} - \delta_{hk} , \quad (1.28)$$

они равны компонентам тензора вязких напряжений, взятым с обратным знаком.

Ограничиваясь, как и ранее, рассмотрением молекул, не обладающих внутренней энергией (вся энергия заключена в поступательном движении), можно выразить компоненты теплового потока через $(p_s)_{hkj}$:

$$(q_s)_h = \frac{1}{2} \sum_k (p_s)_{hkk} \quad (1.29)$$

Кроме того, Бюргерс ввел в рассмотрение величины приведенных тепловых потоков:

$$r_{sh} = \frac{(q_s)_h}{p_s} = \frac{1}{2} \frac{\sum_k (p_s)_{hkk}}{p_s} \quad (1.30)$$

1.5.1. Моменты левой части уравнения Больцмана. Умножая левую часть уравнения Больцмана (1.13) на массу частиц m_s и различные степени (0, 1, 2) моментальной скорости \mathbf{v}_s и интегрируя по всему пространству скоростей, получают для множителя m_s :

$$\hat{M}_0 \equiv \frac{\partial}{\partial t} n_s m_s + \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} n_s m_s u_{sk} , \quad (1.31)$$

для множителя $m_s v_{sh}$:

$$\hat{M}_h \equiv \frac{\partial}{\partial t} n_s m_s u_{sh} + \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \{n_s m_s u_{sh} u_{sk} + (p_s)_{hk}\} - n_s m_s G_h - n_s e_s \hat{E}_{sh} , \quad (1.32)$$

для множителя $m_s v_{sh} v_{sk}$:

$$\begin{aligned} \hat{M}_{hk} \equiv & \frac{\partial}{\partial t} n_s m_s u_{sh} u_{sk} + \\ & + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \{n_s m_s u_{sh} u_{sk} u_{si} + u_{sk} (p_s)_{hi} + u_{sh} (p_s)_{ki} + (p_s)_{hki}\} - \\ & - n_s m_s (u_{sk} G_h + u_{sh} G_k) - n_s e_s (u_{sk} \hat{E}_{sh} + u_{sh} \hat{E}_{sk}) - \\ & - \frac{e_s}{m_s c} \{\delta_{hij} (p_s)_{ki} + \delta_{kij} (p_s)_{hi}\} B_j , \end{aligned} \quad (1.33)$$

и для множителя $m_s v_{sh} v_{sk} v_{si}$:

$$\begin{aligned} \hat{M}_{hki} \equiv & \frac{\partial}{\partial t} \{n_s m_s u_{sh} u_{sk} u_{si} + u_{si} (p_s)_{hk} + u_{sk} (p_s)_{hi} + u_{sh} (p_s)_{ki} + (p_s)_{hki}\} + \\ & + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \{n_s m_s u_{sh} u_{sk} u_{si} u_{sj} + u_{si} u_{sj} (p_s)_{hk} + u_{sk} u_{sj} (p_s)_{hi} + \\ & + u_{sh} u_{sj} (p_s)_{ki} + u_{sh} u_{sk} (p_s)_{ij} + u_{sh} u_{si} (p_s)_{kj} + u_{sk} u_{si} (p_s)_{hj} + \\ & + u_{sj} (p_s)_{hki} + u_{si} (p_s)_{hkj} + u_{sk} (p_s)_{hij} + u_{sh} (p_s)_{kij} + (p_s)_{hkij}\} - \\ & - \{(A_s)_{ki} G_h + (A_s)_{hi} G_k + (A_s)_{hk} G_i\} - \\ & - (e_s/m_s) \{(A_s)_{ki} \hat{E}_{sh} + (A_s)_{hi} \hat{E}_{sk} + (A_s)_{hk} \hat{E}_{si}\} - \\ & - (e_s/m_s c) [\{\delta_{hmn} (p_s)_{km} + \delta_{kmn} (p_s)_{hm}\} B_n u_{si} + \\ & + \{\delta_{hmn} (p_s)_{im} + \delta_{imn} (p_s)_{hm}\} B_n u_{sk} + \\ & + \{\delta_{kmn} (p_s)_{im} + \delta_{imn} (p_s)_{km}\} B_n u_{sh}] - \\ & - (e_s/m_s c) \{\delta_{hmn} (p_s)_{kim} + \delta_{kmn} (p_s)_{him} + \delta_{imn} (p_s)_{hkm}\} B_n , \end{aligned} \quad (1.34)$$

где $\hat{E}_{sh} \equiv E_h + \sum_{ij} \delta_{hij} u_{si} B_j / c$, $(A_s)_{hk} \equiv N_s m_s u_{sh} u_{sk} + (p_s)_{hk}$, а G_h , E_h и B_h — компоненты напряженностей гравитационного, электрического и магнитного полей, соответственно.

1.5.2. Формулировка метода. Стратегия Бюргерса заключается в следующем. Сначала из некоторых соображений, связанных с решаемой задачей, выбирается число N — максимальный порядок рассматриваемых моментов уравнения Больцмана. Получается $N^* = (N + 3)(N + 2)(N + 1)/6$ уравнений для моментов порядков $0-N$. Затем моменты N -го порядка — их $N^{**} = (N + 2)(N + 1)/2$ штук — каким-либо образом выражаются через моменты более низких порядков. Число оставшихся уравнений — $N^* - N^{**} = N(N + 2)(N + 1)/6$ — равно числу неизвестных моментов функции распределения порядков от 0 до $N-1$. Попутно указывается возможность построения функций распределения в виде

$$f_s = \exp(-v^2/a_s^2) \sum_{m=0}^N \sum_{ij\dots k} a_{ij\dots k}^{(m)} v_i v_j \cdots v_k, \quad (1.35)$$

где координатные индексы i, j, k принимают значения от 1 до 3 , а количество индексов в $a_{ij\dots k}^{(m)}$ и множителей в соответствующем произведении $v_i v_j \cdots v_k$ равно m . При каждом m можно образовать $(m + 2)(m + 1)/2$ различных произведений из m координат скорости. Если моменты функции распределения получены умножением f_s из (1.35) на идентичные произведения $v_i v_j \cdots v_k$, то вышеупомянутая система $N^* - N^{**}$ моментов уравнения Больцмана сводится к линейной системе уравнений относительно коэффициентов $a_{ij\dots k}^{(m)}$. Таким образом, система замыкается относительно числа неизвестных и может быть решена методами линейной алгебры. Моменты уравнения Больцмана, порядок которых превышает N , считаются малозначущими для выбранной задачи и никак не рассматриваются.

В качестве базового Бюргерс рассматривает случай $N = 4$. При этом получается 35 уравнений, 15 из которых исключаются выражением моментов функции распределения четвертого порядка через моменты второго порядка. Используя результаты [10], Бюргерс записывает:

$$(p_s)_{hkki} = (n_s m_s)^{-1} \{ (p_s)_{hk} (p_s)_{ij} + (p_s)_{hi} (p_s)_{kj} + (p_s)_{hj} (p_s)_{ki} \} . \quad (1.36)$$

Получилась система из 20 уравнений относительно 20 неизвестных коэффициентов.

Если недиагональные элементы тензора давления малы по сравнению с диагональными элементами, то выражение (1.36) сильно упрощается (раскладываем на сумму диагональной и недиагональной частей, подставляем в (1.36) и отбрасываем двойные произведения недиагональных элементов):

$$\frac{1}{2} (p_s)_{hkki} = \frac{5}{2} \delta_{hi} \frac{p_s^2}{n_s m_s} + \frac{7}{2} (P_s)_{hi} \frac{p_s}{n_s m_s} . \quad (1.37)$$

В некоторых задачах можно упростить моменты третьего порядка, выразив их через тепловые потоки, используя следующую аппроксимацию из [10]:

$$(p_s)_{hki} = \frac{2}{5} \{ \delta_{ki} (q_s)_h + \delta_{hi} (q_s)_k + \delta_{hk} (q_s)_i \} . \quad (1.38)$$

В случае переноса энергии в солнечной плазме можно пренебречь анизотропией давления:

$$(p_s)_{hk} = \delta_{hk} p_s \quad (1.39)$$

$$\frac{1}{2} (p_s)_{hkki} = \frac{5}{2} \delta_{hi} \frac{p_s^2}{n_s m_s} \quad (1.40)$$

Если дополнительно пренебречь магнитным полем (в то же время сохранив слагаемые, содержащие тепловые потоки), то уравнения для моментов запи-

шутся в виде (принимая на данном этапе правую часть равной нулю):

$$\frac{D_s}{Dt} n_s + n_s \sum_i \frac{\partial u_{si}}{\partial x_i} = 0 \quad (1.41)$$

$$n_s m_s \frac{D_s}{Dt} u_{sh} + \frac{\partial p_s}{\partial x_h} - n_s m_s G_h - n_s m_s E_{sh} = 0 \quad (1.42)$$

$$\frac{D_s}{Dt} \left(\frac{3}{2} p_s \right) + \frac{3}{2} p_s \sum_i \frac{\partial u_{si}}{\partial x_i} + \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial (q_s)_i} = 0 \quad (1.43)$$

$$\begin{aligned} \frac{D_s}{Dt} (q_s)_h + \frac{7}{5} (q_s)_h \sum_i \frac{\partial u_{si}}{\partial x_i} + \frac{7}{5} \sum_i (q_s)_i \frac{\partial u_{sh}}{\partial x_i} + \\ + \frac{2}{5} \sum_i (q_s)_i \frac{\partial u_{si}}{\partial x_h} + \frac{5}{2} \frac{\partial}{\partial x_h} \left(\frac{kT_s}{m_s} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.44)$$

1.5.3. Моменты интеграла столкновений. Метод вычисления интеграла столкновений у Бюргера аналогичен описанному в [38]. Рассматриваются исключительно парные абсолютно упругие столкновения. Предполагается, что это приближение будет работать для реальных газов, если эффективный радиус взаимодействия между молекулами газа много меньше средней длины свободного пробега (или, что то же самое, время столкновения много меньше среднего времени между двумя последовательными столкновениями).

Умножая интеграл столкновений на величины Q из набора:

$$Q = m_s; \quad m_s u_{sh}; \quad m_s u_{sh} u_{sk}; \quad \frac{1}{2} m_s u_s^2 u_{sh}, \quad (1.45)$$

получаем моменты правой части уравнения Больцмана для частиц типа s

$$\Delta Q \equiv \sum_t \iiint \int d\mathbf{v}_s d\mathbf{v}_t Q(\mathbf{v}_s) (f'_s f'_t - f_s f_t) g b db d\zeta, \quad (1.46)$$

где суммирование ведется по молекулам всех типов, включая s , а величины со штрихом относятся к моменту до столкновения. С использованием свойств симметрии парного соударения этот интеграл приводится к виду:

$$\Delta Q = \sum_t \iint d\mathbf{v}_s d\mathbf{v}_t f_s f_t g \iint (Q' - Q) b db d\zeta \quad (1.47)$$

Определяя разницу между скоростью центра масс сталкивающихся частиц и средней скоростью частиц сорта s как $\hat{C} \equiv (m_s \mathbf{v}_s + m_t \mathbf{v}_t)/(m_s + m_t) - \mathbf{u}_s$, для разных Q имеем:

$$Q' - Q = 0 \quad Q = m_s; \quad (1.48)$$

$$Q' - Q = \mu(g_h - g'_h) \quad Q = m_s v_{sh}; \quad (1.49)$$

$$Q' - Q = \mu\{\hat{C}_h(g_k - g'_k) + \hat{C}_k(g_h - g'_h)\} + \mu x_{st}(g'_h g'_k - g_h g_k) \quad Q = m_s v_{sh} v_{sk}; \quad (1.50)$$

$$Q' - Q = \frac{1}{2}\mu\{(\hat{C}^2 + x_{st}^2 g^2)(g_h - g'_h) + 2\hat{C}_h \hat{C}_k(g_k - g'_k)\} + \mu x_{st} \hat{C}_k(g'_h g'_k - g_h g_k) \quad Q = m_s v_s^2 v_{sh}, \quad (1.51)$$

где $\mu = m_s m_t / (m_s + m_t)$ — приведенная масса, $x_{st} = \mu / m_s$. Усредняя (1.48)–(1.51) по позиционному углу ζ , получаем величины, зависящие от так называемого сечения столкновения для постоянной относительной скорости:

$$S_{st}^{(l)} = 2\pi \int_0^\infty (1 - \cos^l \chi) b db, \quad (1.52)$$

где показатель степени l в нашем случае принимает значения 1 или 2. Дополнительно понадобятся величины a и α , имеющие размерность скорости:

$$a^2 = \frac{2kT_s T_t}{m_t T_s + m_s T_t}; \quad \alpha^2 = \frac{2k(m_t T_s + m_s T_t)}{m_s m_t} \quad (1.53)$$

Чтобы вычислить интегралы (1.47), Бюргерс использует разложение функции распределения в ряд по малому параметру, оставляя для рассмотрения только первые два члена этого ряда:

$$f_s = f_{s0}(1 + \phi_s), \quad (1.54)$$

где f_{s0} — функция распределения Максвелла, а ϕ_s — некоторая функция скорости, которую нужно найти. Произведение функций распределения в (1.47)

тогда записывается в виде:

$$f_s f_t = f_{s0} f_{t0} (1 + \phi_s + \phi_t + \phi_s \phi_t) . \quad (1.55)$$

Предполагая ϕ_s малой на всей области определения, последнее слагаемое в скобках можно отбросить (линейная аппроксимация).

При подстановке (1.54) в выражения для моментов интеграла столкновений (1.47) получаются интегралы с размерностью площади (сечения столкновения):

$$\Sigma_{st}^{(lj)} = \frac{4\pi}{\pi^{3/2}} \int_0^\infty dg \exp\left(\frac{-g^2}{\alpha^2}\right) \frac{g^{2j+3}}{g^{2j+4}} S_{st}^{(l)} \quad (1.56)$$

Бюргерс вводит новые коэффициенты K_{st} , z_{st} , z'_{st} , z''_{st} и z'''_{st} через отношения:

$$K_{st} = K_{ts} = \frac{2}{3} n_s n_t \mu \alpha \Sigma_{st}^{(11)} \quad (1.57)$$

$$\Sigma_{st}^{(12)} / \Sigma_{st}^{(11)} = \frac{5}{2} (1 - z_{st}) \quad (1.58)$$

$$\Sigma_{st}^{(13)} / \Sigma_{st}^{(11)} = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} z_{st} + \frac{5}{2} z'_{st} \quad (1.59)$$

$$\Sigma_{st}^{(22)} / \Sigma_{st}^{(11)} = z''_{st} \quad (1.60)$$

$$\Sigma_{st}^{(23)} / \Sigma_{st}^{(11)} = z'''_{st} . \quad (1.61)$$

K_{st} является по сути коэффициентом трения между частицами двух сортов, остальные же коэффициенты — зависят от закона взаимодействия частиц при столкновениях.

В итоге, объединяя левые и правые части моментов уравнения Больцмана, получают уравнения, определяющие динамику газовой смеси в заданном приближении:

уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (n_s u_{si}) = 0 \quad (1.62)$$

уравнение баланса импульсов:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(n_s m_s u_{sh}) + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \{n_s m_s u_{sh} u_{si} + (p_s)_{hi}\} = \\ & = n_s m_s g + n_s e_s \hat{E}_{sh} + \sum_t K_{st} (u_{th} - u_{sh}) + \sum_t K_{st} z_{st} \left(\frac{m_t}{m_s + m_t} r_{sh} - \frac{m_s}{m_s + m_t} r_{th} \right) \end{aligned} \quad (1.63)$$

уравнение баланса энергии:

$$\begin{aligned} & \frac{D_s(q_s)_h}{Dt} + \sum_i \left(\frac{7}{5}(q_s)_h \frac{\partial u_{si}}{\partial x_i} + \frac{7}{5}(q_s)_i \frac{\partial u_{sh}}{\partial x_i} + \frac{2}{5}(q_s)_i \frac{\partial u_{si}}{\partial x_h} \right) + p_s \frac{\partial}{\partial x_h} \left(\frac{5 k T_s}{2 m_s} \right) + \\ & + \sum_i \left\{ (P_s)_{hi} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{5 k T_s}{2 m_s} \right) + p_s \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{(P_s)_{hi}}{n_s m_s} \right) \right\} - \frac{e_s}{m_s c} \sum_m \sum_n \delta_{hmn} (q_s)_m B_n = \\ & = -\frac{5}{2} \sum_t K_{st} \frac{k T_s}{m_s} z_{st} \frac{m_t}{m} (u_{th} - u_{sh}) - \\ & - \sum_{all t} K_{st} \frac{k T_s}{m_s} \left[3 \frac{m_s^2}{m^2} z'_s t + \frac{4 m_s m_t}{5 m^2} z''_{st} \right] r_{sh} + \\ & + \sum_{all t} K_{st} \frac{k T_s}{m_s} \frac{m_t^2}{m^2} [3 + z'_s t - (4/5) z''_{st}] r_{th}, \end{aligned} \quad (1.64)$$

где $m \equiv m_s + m_t$, а индекс *all t* означает суммирование по всем t , включая $t = s$.

1.5.4. Уравнение диффузии в ионизованном газе. Бюргерс в [11] приводит результаты расчета коэффициента трения K_{st} для случая смеси ионизованных газов:

$$K_{st} = K_0 \frac{n_s n_t}{n_e^2} Z_s^2 Z_t^2 \left[\frac{m_s m_t}{(m_s + m_t) m_e} \right]^{1/2} \left[\frac{(m_s + m_t) T_e}{m_t T_s + m_s T_t} \right]^{3/2}, \quad (1.65)$$

где величины с индексом e относятся к электронам, а коэффициент K_0 задается выражением:

$$K_0 = \frac{16 \sqrt{\pi}}{3} \frac{n_e^2 e^4 m_e^{1/2}}{(2 k T_e)^{3/2}} \ln \Lambda, \quad (1.66)$$

где

$$\ln \Lambda = \ln \left[\frac{3kT}{e^2} \left(\frac{kT}{4\pi n e^2} \right)^{1/2} \right] \quad (1.67)$$

— кулоновский логарифм, а также:

$$z_{st} = 3/5; \quad z'_{st} = 13/10; \quad z''_{st} = z''; \quad z'''_{st} = 2z'' , \quad (1.68)$$

где коэффициент $z'' \approx 2$ подразумевается независимым от заряда и одинаковым для всех сортов частиц.

С учетом этих величин динамика смеси ионизованных газов задается уравнением движения

$$\begin{aligned} \nabla p_s - \frac{\rho_s}{\rho} \nabla p - n_s e_s \hat{\mathbf{E}} - \left(\mathbf{j}_s - \frac{\rho_s}{\rho} \mathbf{j} \right) \times \mathbf{B}/c = \\ = \sum_t K_{st} (\mathbf{w}_t - \mathbf{w}_s) + \sum_t K_{st} z_{st} \left(\frac{m_t}{m} \mathbf{r}_s - \frac{m_s}{m} \mathbf{r}_t \right) \end{aligned} \quad (1.69)$$

и уравнением тепловых потоков

$$\begin{aligned} \frac{5}{2} n_s k \nabla T_s - \frac{n_s e_s}{c} (\mathbf{r}_s \times \mathbf{B}) = -\frac{5}{2} \sum_t K_{st} z_{st} \frac{m_t}{m} (\mathbf{w}_t - \mathbf{w}_s) - \frac{2}{5} K_{ss} z''_{ss} \mathbf{r}_s - \\ - \sum_t K_{st} \left[3 \frac{m_s^2}{m^2} + \frac{m_t^2}{m^2} z'_{st} + \frac{4}{5} \frac{m_s m_t}{m^2} z''_{st} \right] \mathbf{r}_s + \sum_t K_{st} \frac{m_s m_t}{m^2} \left[3 + z'_{st} - \frac{4}{5} z''_{st} \right] \mathbf{r}_t \end{aligned} \quad (1.70)$$

Важно отметить, что диффузионные скорости и тепловые потоки входят в эти уравнения схожим образом — это говорит о тесной связи процессов диффузии и теплопроводности в газах. Второй важный момент — зависимость потоков одного компонента от потоков всех остальных компонентов. Так возникает эффект «увлечения» (за счет сил трения) молекул одного сорта диффузионным потоком молекул другого сорта.

В русскоязычной литературе метод моментов подробно описан в монографии В. М. Жданова [40].

1.6. Методы решения проблемы диффузии при моделировании эволюции звезд

В этом разделе будут описаны два наиболее распространенных метода решения проблемы диффузии, использующихся в настоящее время в расчетах эволюции звезд — метод Мишо-Профи и метод Бакала-Тоул.

1.6.1. Метод Мишо-Профи (далее — МР-методика) был предложен Ж. Мишо и Ш. Профи в статье [18]. Они рассмотрели диффузию в *полностью ионизованной* водородно-гелиевой смеси, содержащей тяжелые элементы в виде малой примеси. В таком приближении из уравнений Бюргерса (1.69) и (1.70) были получены приближенные формулы для скоростей диффузии.

Диффузия водорода и гелия. Выражение для скорости диффузии водорода w_H в смеси $H + He + e^-$ записывается следующим образом:

$$w_H = -\frac{BT^{5/2}}{\rho \ln \Lambda (0.7 + 0.3X)} \left[\left(\frac{5}{4} + \frac{9}{8} \frac{d \ln T}{d \ln p} \right) (1 - X) \frac{d \ln p}{dr} + \frac{(3 + X)}{(1 + X)(3 + 5X)} \frac{d \ln X_H}{dr} \right] \quad (1.71)$$

Обратим внимание на различие величин X и X_H в этом выражении. X означает содержание водорода, взятое из модели, а X_H — содержание водорода, вычисленное в процессе решения задачи диффузии.

Выражение для коэффициента B и кулоновского логарифма $\ln \Lambda$ записываются в виде:

$$B = \frac{15}{16} \left(\frac{2m_0}{5\pi} \right)^{1/2} \frac{k_B^{5/2}}{e^4}, \quad (1.72)$$

$$\ln \Lambda_{xy} = -19.95 - \frac{1}{2} \ln \rho - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{X+3}{2} \right) + \frac{3}{2} \ln T, \quad (1.73)$$

где m_0 , k_B и e — атомная единица массы, константа Больцмана и элементарный заряд соответственно.

Выражение (1.71) описывает бародиффузионный дрейф более тяжелого гелия к центру Солнца (члены, пропорциональные градиенту давления $\nabla \ln p$) с учетом поправки на термодиффузию. Влияние термодиффузии представлено слагаемым, пропорциональным градиенту температуры. В соответствии с выражением (1.71), термодиффузия усиливает бародиффузию на величину примерно 30% общего диффузионного потока. Слагаемое, пропорциональное градиенту содержания водорода, соответствует концентрационной диффузии и описывает поток в противоположную сторону (водород стремится к центру), хотя его доля не слишком велика в условиях Солнца.

Выражение для скорости диффузии тяжелых элементов имеет вид

$$w_i = -\frac{2BT^{5/2}}{\sqrt{5}\rho Z_i^2} \left[\frac{\frac{d}{dr} \left\{ \ln \left[\frac{X_i}{5X+3} \left(\frac{1+X}{5X+3} \right)^{Z_i} \right] \right\} + \left[1 + Z_i - A_i \left(\frac{5X+3}{4} \right) \right] \frac{d \ln p}{dr}}{X (\sqrt{A_{ix}} C_{ix} - \sqrt{A_{iy}} C_{iy}) + \sqrt{A_{iy}} C_{iy}} \right] + \frac{0.54BT^{5/2} (4.75X + 2.25) d \ln T}{\rho (\ln \Lambda_{xy} + 5) dr} + XV_H \frac{\sqrt{A_{ix}} C_{ix} - \sqrt{A_{iy}} C_{iy}}{X (\sqrt{A_{ix}} C_{ix} - \sqrt{A_{iy}} C_{iy}) + \sqrt{A_{iy}} C_{iy}} \quad (1.74)$$

где A_{ix} и C_{ix} — соответственно, приведенная атомная масса и частота столкновений i -го элемента с протонами, A_{iy} и C_{iy} — то же самое для i -го элемента и гелия. По аналогии с описанием формулы (1.71), первое слагаемое соответствует бародиффузии тяжелых элементов на фоне ионизованной смеси водорода и гелия. Последний член описывает эффект увлечения ионов диф-

фузионным потоком водорода. И наконец, второе слагаемое описывает влияние термодиффузии элементов. Обратим внимание, что в коэффициент бародиффузии (множитель перед градиентом давления) заряд Z_i и масса иона A_i входят с разными знаками. Это значит, что осаждение элементов к центру под действием гравитации замедляется с увеличением заряда иона. Этот эффект можно трактовать как следствие сохранения электрической нейтральности среды – если заряженный ион движется вниз, в том же направлении увлекаются и электроны – в количестве, равном заряду иона. Результатом такого увлечения является увеличение эффективного сечения взаимодействия, что ведет к торможению диффузионного осаждения. Другими словами, сильно ионизованный ион оседает медленнее, чем слабоионизованный.

Положительной стороной МР-методики является ее простота и нетребовательность к машинным ресурсам, с ее помощью диффузию рассчитывают многие современные эволюционные коды. Относительным недостатком является невозможность учета взаимного влияния диффузионных потоков различных тяжелых элементов и некоторая недооценка эффекта термодиффузии (см. [19]).

1.6.2. Метод Тоул был опубликован А. Тоул и Дж. Бакалом в статье [19]. Для компонента i солнечной плазмы (иона или электрона) уравнения баланса импульса (1.69) и энергии (1.70) записываются в виде (в сопутствующей системе координат, при отсутствии магнитного поля):

$$\nabla p_i - \rho_i \frac{F_i}{m_i} = \sum_k \left[G_{ik}^{(1)}(w_i - w_k) + \mu_{ik} G_{ik}^{(2)} \left(\frac{h_i}{m_i} - \frac{h_k}{m_k} \right) \right] \quad (1.75)$$

$$\frac{5}{2} P_i \frac{\nabla T}{T} = \sum_k \left[\frac{5}{2} \frac{\mu_{ik}}{m_i} G_{ik}^{(2)}(w_i - w_k) + G_{ik}^{(5)} h_i + G_{ik}^{(6)} h_k \right] \quad (1.76)$$

где p_i , ρ_i – парциальное давление и плотность i -компонента, T – температура, $F_i = m_i g - q_i E$ – внешняя сила, m_i , q_i – масса и заряд иона,

$\mu_{ik} = m_i m_k / (m_i + m_k)$ – приведенная масса, $G_{ik}^{(l)}$ – коэффициенты, описывающие обмен импульсом и энергией между компонентами при столкновениях частиц, w_i и h_i – скорости диффузии и приведенные тепловые потоки.

Система уравнений (1.75) и (1.76) дополняется условиями локальной электронной нейтральности и сохранения массы:

$$\sum_k \rho_{ek} w_k = 0, \quad \sum_k \rho_k w_k = 0 \quad (1.77)$$

где ρ_{ei} – плотность заряда компонента i .

Таким образом, для N компонентов смеси имеем линейную систему из $2N + 2$ уравнений для $2N + 2$ неизвестных: N скоростей диффузии w_i , N приведенных тепловых потоков h_i , локальное электрическое поле E и ускорение свободного падения g .

Трактовка ускорения свободного падения как неизвестной величины выглядит скорее математическим трюком для упрощения решения переопределенной системы. В данной работе метод Тоул был модифицирован таким образом, чтобы исключить g из числа неизвестных. Получившаяся вырожденная система $2N + 1$ уравнений решалась методом сингулярного разложения (SVD-метод, [41]).

Заметим, что компоненты i могут быть как различными химическими элементами, так и различно заряженными ионами одного химического элемента.

Решение уравнений (1.75)–(1.77) ищут в форме (K_0 – численный коэффициент):

$$w_i = K_0 \frac{T^{5/2}}{\rho} \left(A_P \frac{d \ln p}{dr} + A_T \frac{d \ln T}{dr} + \sum_k A_{Xk} \frac{d \ln X_k}{dr} \right), \quad (1.78)$$

и в итоге получают коэффициенты A в каждой (r, t) точке модели. Заменяя

$w_i(r, t)$ в уравнение диффузии

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = -\frac{1}{\rho r^2} \frac{\partial(r^2 \rho w_i X_i)}{\partial r}, \quad (1.79)$$

и интегрируя (1.79) по времени t с соответствующими граничными ($dX/dr(0, t) = 0$, $dX/dr(R_{Sun}, t) = 0$) и начальными ($X(r, 0) = const$) условиями, получают распределение содержания $X_i(r, t)$ для каждого компонента i .

1.7. Основные диффузионные процессы, изучаемые в данной диссертации

В этом разделе будут описаны особенности процессов, дающих основной вклад в диффузионное перераспределение химических элементов.

1.7.1. Концентрационная диффузия. Физика процесса, в том числе и элементарная теория, была рассмотрена в монографии Чепмена и Каулинга [38]. Если в какой-то момент слева и справа от определенной плоскости в системе находится разное количество частиц одного сорта на единицу объема (скажем, их концентрация растет слева направо), то при прочих равных условиях (температуре, давлении и т.д.) число частиц, пересекающих эту плоскость за единицу времени, с правой стороны будет больше, чем с левой. То есть возникнет направленный влево диффузионный поток частиц этого сорта. Если справа нет бесконечно большого источника частиц, то со временем концентрации слева и справа выровняются и диффузия прекратится.

То есть, концентрационная диффузия, или собственно диффузия, возникает при наличии в газовой смеси градиента концентрации ∇n_s одного или нескольких компонентов и протекает в направлении, противоположном этому градиенту:

$$\mathbf{J}_{ns} = -D_n \nabla n_s, \quad (1.80)$$

где D_n — коэффициент концентрационной диффузии.

Процесс ведет к постепенному выравниванию концентрации частиц сорта s в системе и, соответственно, обнулению градиента концентрации. Правда, последнее утверждение справедливо лишь в системе, где отсутствуют другие факторы, способные вызвать диффузионный поток одного компонента на фоне других: градиенты давления, температуры и т.д. При наличии таких факторов вызываемый ими диффузионный поток частиц одного сорта (скажем, s) \mathbf{J}_s создает градиент концентрации ∇n_s , который порождает концентрационную диффузию \mathbf{J}_{ns} в направлении, обратном \mathbf{J}_s . В пределе через достаточно большое время получаем стационарное распределение n_s и $\mathbf{J}_{ns} = -\mathbf{J}_s$. Таким образом, концентрационная диффузия оказывает демпфирующее действие по отношению к другим механизмам микроскопического перераспределения вещества.

1.7.2. Бародиффузия. Главным диффузионным эффектом на звездах солнечного типа является бародиффузия. Качественно данный эффект может быть описан следующим образом. Сила тяжести действует на частицы, поэтому поток частиц вниз будет больше, чем поток вверх. Чтобы скомпенсировать разницу потоков, нужно, чтобы внизу была несколько большая концентрация частиц. В результате получаем экспоненциальное распределение концентрации с высотой в изотермической атмосфере. Однако бародиффузия проявляется в системе с частицами разных масс. Для таких систем однородное по химическому составу (но не по плотности) распределение не является устойчивым. В химически однородной смеси концентрация легкого компонента падает с высотой слишком быстро (по сравнению с равновесным случаем), и поэтому диффузионный поток легких частиц вверх будет больше, чем поток, связанный с силой тяжести. Для тяжелого компонента ситуация противоположная. Таким образом, возникает поток легких частиц вверх и тя-

желых вниз. Для нахождения величины этого потока нужно найти импульс, передаваемый частицами одного сорта другому при взаимных столкновениях. Рассмотрим более подробно расчет бародиффузии для трехкомпонентной плазменной смеси (протоны, альфа-частицы и свободные электроны), следуя [17]. В такой смеси достаточно записать одно уравнение Бюргерса, например, для протонов, в виде

$$\mu_{\alpha p} n_p n_\alpha \sigma_{\alpha p} (w_p - w_\alpha) = -\nabla p_p + n_p (q_p \mathbf{E} + m_p \mathbf{g}) \quad (1.81)$$

В левой части (она соответствует левой части уравнения Больцмана) представлена плотность импульса, получаемая протонами при столкновении с альфа-частицами. При этом $\mu_{\alpha p} = m_p m_\alpha / (m_p + m_\alpha)$ — приведенная масса, а сечение столкновений $\sigma_{\alpha p}$ выражается через кулоновский логарифм и было впервые получено в работе [42]. Правая часть выражения состоит из трех слагаемых. Первое слагаемое представляет градиент парциального давления водорода. По смыслу это слагаемое соответствует концентрационной диффузии, то есть потоку протонов, вызываемому разностью концентраций. Последнее слагаемое выражает изменение импульса из-за действия силы тяжести. Разница между первым и третьим слагаемым соответствует бародиффузионной силе, действующей на протоны, описанной выше. Второе слагаемое является результатом электростатического взаимодействия протонов и свободных электронов. Малая масса электронов позволяет пренебречь как передачей импульса от электронов к ионам, так и силой тяжести при вычислении градиента концентрации электронов. Тогда напряженность поля выражается в виде

$$E = -\frac{1}{en_e} \frac{\partial p_e}{\partial r} \quad (1.82)$$

Электростатическое поле действует как на протоны, так и на альфа-частицы в одном направлении (от центра), но сила пропорциональна заряду Z_i , и,

значит, результат ее действия сводится к препятствованию осаждению гелия к центру. Это вывод можно обобщить на осаждение любых ионов — наличие поля свободных электронов замедляет гравитационное осаждение. После подстановки выражения для E , скорость оказывается пропорциональной величине ξ_H , равной

$$\xi_H = \frac{\partial}{\partial r} \ln(p_p p_e) + \frac{m_p g}{kT} \quad (1.83)$$

В дальнейшем используются выражения, справедливые для идеального полностью ионизованного газа

$$\frac{p_p}{p} = \frac{4X}{5X + 3}, \quad \frac{p_e}{p} = \frac{2(1 + X)}{5X + 3}, \quad (1.84)$$

где X — массовая доля водорода. Последнее слагаемое (1.83) может быть также выражено через градиент полного давления

$$\frac{m_p g}{k_B T} = -\frac{Xp}{p_p} \frac{\partial \ln p}{\partial r} \quad (1.85)$$

Подставляя выражения (1.84), получаем линейную форму для ξ_H :

$$\xi_H = \frac{\partial}{\partial r} \ln \left[\frac{X(1 + X)}{(5X + 3)^2} \right] + \left[2 - \frac{Xp}{p_p} \right] \frac{\partial \ln p}{\partial r} = \left[\frac{3 + X}{(1 + X)(5X + 3)} \right] \frac{\partial \ln X}{\partial r} + \left[\frac{5(1 - X)}{4} \right] \frac{\partial \ln p}{\partial r} \quad (1.86)$$

Ясно, что данная модель описывает только концентрационную диффузию и бародиффузию.

Аналогичным образом можно получить выражения для скорости осаждения тяжелого иона на фоне водорода и гелия. В левой части будет два слагаемых, соответствующих столкновениям с протонами и альфа-частицами. Выражение для ξ_A в этом случае имеет вид:

$$\xi_A = \frac{\partial}{\partial r} \ln(p_A p_e^{Z_A}) + \frac{A_i m_p g}{kT} \quad (1.87)$$

где A_i — атомная масса иона. Полученные таким образом выражения для скорости гравитационного осаждения гелия и тяжелых ионов были использованы в модели S [23]. Полные выражения, уточненные за термодиффузию (рассмотрено ниже), приведены в работе [18] (MP-модель диффузии).

1.7.3. Термодиффузия. Эффект термодиффузии является значительно более сложным, чем описанные выше процессы. Он состоит в том, что при наличии поддерживаемого градиента температуры в среде возникает градиент концентрации. Термодиффузия в газах была предсказана теоретически в 1917 году Энскогом и Чепменом, и вскоре ее существование было подтверждено экспериментально (исследования термодиффузии в жидкостях происходили независимо). Несмотря на многочисленные попытки, так и не удалось построить удовлетворительную качественную теорию термодиффузии (одна из наиболее успешных попыток изложена в [43]), в частности, способную предсказать направление потока в общем случае. Отметим лишь некоторые утверждения относительно термодиффузии. Для того, чтобы термодиффузия имела место, необходимо не только наличие градиента температуры, но и наличие зависимости сечения столкновений (или, эквивалентно, длины свободного пробега) от скорости частицы. В свою очередь, такая зависимость определяется законом взаимодействия между частицами. Это значит, что для определенных законов взаимодействия термодиффузионный эффект равен нулю или имеет разные направления. Например, в случае модели молекул как твердых сфер вероятность столкновения пропорциональна скорости. В результате для нейтральных газов более тяжелые молекулы диффундируют по направлению потока тепла, то есть в холодную область.

Однако, если сила взаимодействия между частицами изменяется обратно пропорционально некоторой степени расстояния, т. е. как $r^{-\nu}$, ситуация меняется. При малых степенях $\nu < 5$ вероятность столкновения между ча-

стицами уменьшается с увеличением скорости. В результате, в сильноионизованной плазме с кулоновским взаимодействием между близкими ионами ($\nu = 2$) термодиффузионный эффект становится обратным, более тяжелые частицы движутся против направления потока тепла, то есть к горячим областям. Такое направление термодиффузии в плазме отмечено в книге [38].

Термодиффузия, как и бародиффузия, имеет дифференциальный характер и проявляется только в смеси частиц. В однокомпонентном газе градиент температуры создает асимметрию потока частиц, однако этот избыточный поток из горячей области компенсируется разностью концентраций. Равновесное распределение легко получить в этом случае из условия постоянства давления.

Ситуация еще больше усложняется при наличии свободных электронов. Однако, как показывает анализ ([17], [18]), учет термодиффузии необходим для получения более точного результата.

К настоящему времени было предложено три формы учета термодиффузионного эффекта. Все они ведут к добавлению в выражение для ξ_H слагаемого, пропорционального градиенту температуры, и отличаются только величиной множителя. Во всех случаях влияние термодиффузионного эффекта усиливает осаждение тяжелых элементов к центру звезды. По отношению к бародиффузионному потоку, термодиффузия составляет примерно 30%. Величина термодиффузионного эффекта не зависит от заряда, что означает большой вклад термодиффузии в случае тяжелых сильнозаряженных ионов по сравнению с бародиффузией.

Первая, самая приближенная оценка была предложена в работе [17]. Для получения влияния градиента температуры оценивался поток электронов и соответствующим образом модифицировалось выражение для напряженности электрического поля. Как обсуждалось в [18], такая оценка является за-

вышенной. В [18] предложена другая форма, которая использовалась в некоторых расчетах данной работы. Наконец, наиболее точная аппроксимация соответствующих членов была дана в [19], и в данной работе используется именно эта трактовка термодиффузии.

ГЛАВА 2

ПОСТМОДЕЛЬНЫЕ РАСЧЕТЫ ЭВОЛЮЦИИ ХИМИЧЕСКОГО СОСТАВА

2.1. Общие сведения

Для решения конкретных задач, поставленных в данной работе, автором был реализован метод постмодельных расчетов эволюции химического состава.

Кроме собственно расчетов метод предназначен для анализа механизмов диффузии, их вклада в диффузионные потоки различных элементов, а также для проверки различных методов расчета диффузии.

Исходными данными для расчетов являются: масса звезды; ее радиус, светимость и положение границы конвективной зоны как функции времени; температура T , давление p и плотность ρ как функции времени и расстояния от центра звезды. Кроме того, необходимо задать химический состав звезды $X_i(r, 0)$ в начальный момент времени $t = 0$, где $X_i(r, t)$ — массовая доля компонента i в веществе звезды. По определению, в каждой точке (r, t) выполняется условие:

$$\sum X_i = 1 \quad (2.1)$$

Все необходимые исходные данные извлекаются из эволюционной последовательности моделей звезды, построенной в результате работы выбранного эволюционного кода. Таким образом фиксируется структура звезды и ее изменение во времени. Заметим, что одновременно в задачу привносятся допущения, использованные в эволюционном коде — в данной работе это сферическая симметрия звезды, отсутствие вращения и магнитного поля.

Затем выбирается объект исследования — химический состав солнечной плазмы. В простейшем случае он представляет собой смесь протонов, ядер

гелия и электронов. В более сложных случаях к этим основным компонентам добавляются ионы тяжелых элементов.

Собственно постмодельный расчет заключается в решении системы уравнений эволюции химического состава на заданной фиксированной структуре звезды:

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = -\frac{1}{\rho r^2} \frac{\partial(r^2 \rho w_i X_i)}{\partial r} + \left(\frac{\partial X_i}{\partial t} \right)_{NR}. \quad (2.2)$$

с заданным начальным условием $X_i(r, 0)$, в общем случае неоднородным, и двумя граничными условиями, выражающими равенство нулю потоков в центре звезды и на ее внешней границе:

$$\frac{\partial X_i(0, t)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial X_i(R, t)}{\partial t} = 0. \quad (2.3)$$

В общем случае расчет включает в себя ядерные реакции (слагаемое с индексом NR справа) и диффузию, скорость которой w_i для каждого компонента смеси в сопутствующей системе координат записывается в виде следующей суммы:

$$w_i = \alpha_i \frac{d \ln p}{dr} + \beta_i \frac{d \ln T}{dr} + \sum_k \gamma_{ik} \frac{d \ln X_k}{dr}. \quad (2.4)$$

Коэффициенты α_i , β_i и γ_{ik} зависят не только от координаты r и времени t , но и от $X_i(r, t)$, что делает уравнение (2.2) нелинейным.

Коэффициенты выражения (2.4) определяются с помощью аппроксимационных формул Мишо и Профи [18] или схемы Бакала-Тоул [19] решения уравнений Бюргерса [11] для смеси ионизованных газов (см. предыдущую главу). В постмодельных расчетах автора возможно использовать любой из этих методов в зависимости от поставленной задачи.

Второй подход, в отличие от первого, требует решения в каждой точке (r, t) системы $2N + 2$ линейных уравнений, где N — количество компонентов в смеси. Результатом же является более точный термодиффузионный

коэффициент β_i и возможность учета взаимного влияния диффузионных потоков разных компонентов (коэффициенты γ_{ik} , $k \neq i$). Кроме того, в схеме Тоул расчета скоростей диффузии можно учесть влияние на диффузионные потоки тяжелых элементов потока излучения (эффект фотодиффузии). Для этого в уравнение (1.75) нужно записать силу F_i в виде:

$$F_i = m_i g (1 - g_{rad}/g) - q_i E , \quad (2.5)$$

где g_{rad} — ускорение частиц тяжелого элемента i , вызываемое их взаимодействием с потоком излучения (см. описание процесса в главе 4).

Решение системы нелинейных дифференциальных уравнений (2.2) производилось численно с помощью метода PDEPE системы MATLAB.

Расчет ядерных реакций велся по сечениям, опубликованным проектом NACRE [44].

Метод постмодельных расчетов позволяет:

1. изучать эволюционные процессы для большего количества компонентов смеси, чем это заложено в исходной модели;
2. исследовать влияние на эволюцию химического состава различных физических механизмов, не учтенных в исходной модели (давление излучения, частичная ионизация и т.д.);
3. применять методы расчета диффузии элементов, отличные от используемых в исходной модели;
4. сравнивать в рамках одного подхода эволюцию химического состава на различных эволюционных моделях.
5. изучать эволюцию химических элементов в эволюционной модели, имеющейся только в виде таблиц результатов, но эволюционный код которой недоступен.

2.2. Эволюционные модели Солнца

Эволюционные модели являются базой, на которой построена данная диссертационная работа. Каждая такая модель является результатом расчета эволюционного кода. На вход такого расчета подаются начальные характеристики звезды — масса и химический состав. Затем запускается расчет эволюции по законам, заложенным в самом коде (уравнение состояния, сечения ядерных реакций, непрозрачности, параметр перемешивания в конвективной зоне α) с таким расчетом, чтобы к моменту времени $t = 4.6$ млрд лет (возраст Солнца по современным представлениям) получилась звезда с характеристиками Солнца — его радиусом, светимостью, положением дна конвективной зоны.

В данной работе использовались следующие эволюционные модели Солнца:

1. ASV 721-0001 [45] — модель, рассчитанная С. В. Аюковым (ГАИШ МГУ). Включает диффузию, рассчитанную по МР-методике. Скорость диффузии всех тяжелых элементов полагается равной таковой для полностью ионизованного кислорода. Уравнение состояния — SAHA-S, непрозрачности — OPAL-2005 [46]. Эта эволюционная модель является основной в данной диссертационной работе. Если в описании какого-либо расчета не указана иная модель, то была использована именно ASV 721-0001.
2. ASV 600-0100 [47] — модель, рассчитанная С. В. Аюковым (ГАИШ МГУ). Не включает диффузию. Уравнение состояния — OPAL-96 [48], непрозрачности — OPAL-95 [49].
3. Model S [23] — модель Й. Кристенсена-Далсгаарда. Включает диффузию, рассчитанную по МР-методике. Диффузия тяжелых элементов рассчитана по кислороду. Уравнение состояния — OPAL-96, непрозрач-

ности — OPAL-92 [50], [51]. Несмотря на 20-летний возраст, до сих пор эта модель служит репером для анализа и сравнения солнечных моделей.

4. Модель CESAM, рассчитанная А. В. Орешинной (ГАИШ МГУ) с помощью одноименного эволюционного кода [37]. Данный код позволяет выбирать несколько тяжелых элементов для расчета диффузии, а также методику такого расчета — МР или Тоул. Уравнение состояния — OPAL-2001. Непрозрачности — OPAL-95. Это единственный код в списке, включающий в расчет эволюцию звезды до стадии Главной последовательности. В работе использована модель, в которой параметр перемешивания α варьировался с течением времени, расчет диффузии велся по МР-методике.

Все эти эволюционные модели были рассчитаны для содержания тяжелых элементов по массе ≈ 0.02 [52].

Основные характеристики внутреннего строения Солнца, полученные в результате эволюционных расчетов, показаны на рисунках 2.1–2.5 (вертикальной штрих-пунктирной линией обозначена граница конвективной зоны в современном Солнце). Обращает на себя внимание факт, что строение современного Солнца в различных эволюционных моделях практически одинаково, в то время как начальное состояние заметно отличается. То есть эволюция Солнца в этих моделях происходит по различным траекториям. Отличие может быть вызвано использованием разных уравнений состояния, сечений реакций, непрозрачностей, а также разницей в алгоритмах расчета и их численной реализации.

На рисунке 2.6 показан профиль кулоновского логарифма (см. формулу 1.73) для моментов времени $t = 0$ и $t = 4.6$ млрд. лет.

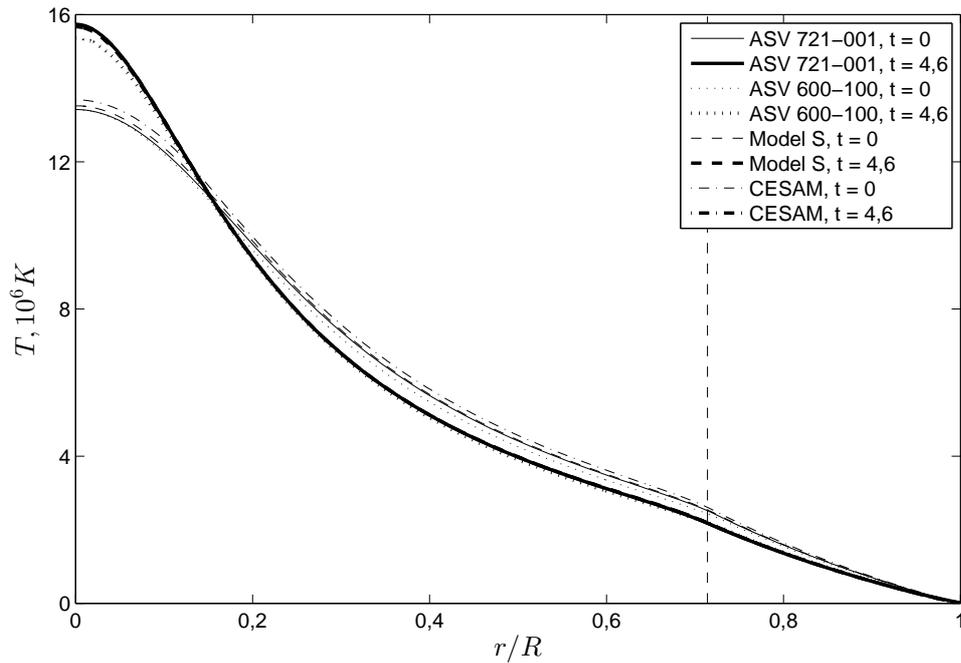


Рис. 2.1. Профиль температуры в различных эволюционных моделях Солнца. Тонкие линии соответствуют моменту $t = 0$, толстые — $t = 4.6$ млрд. лет.

2.3. Включение конвекции в расчеты диффузии

Верхнюю треть радиуса Солнца занимает конвективная зона. Согласно современным представлениям, составляющие ее конвективные элементы по мере движения от основания конвективной зоны наружу постепенно дробятся на более мелкие, а скорость их подъема увеличивается (от ~ 10 м/с до ~ 1 км/с).

На основе этих данных можно оценить характерное время конвективного перемешивания:

$$t_{conv} \approx \frac{R_{CZ}}{V_{conv}}, \quad (2.6)$$

Оценка характерной скорости диффузии атомов водорода (см. след. гла-

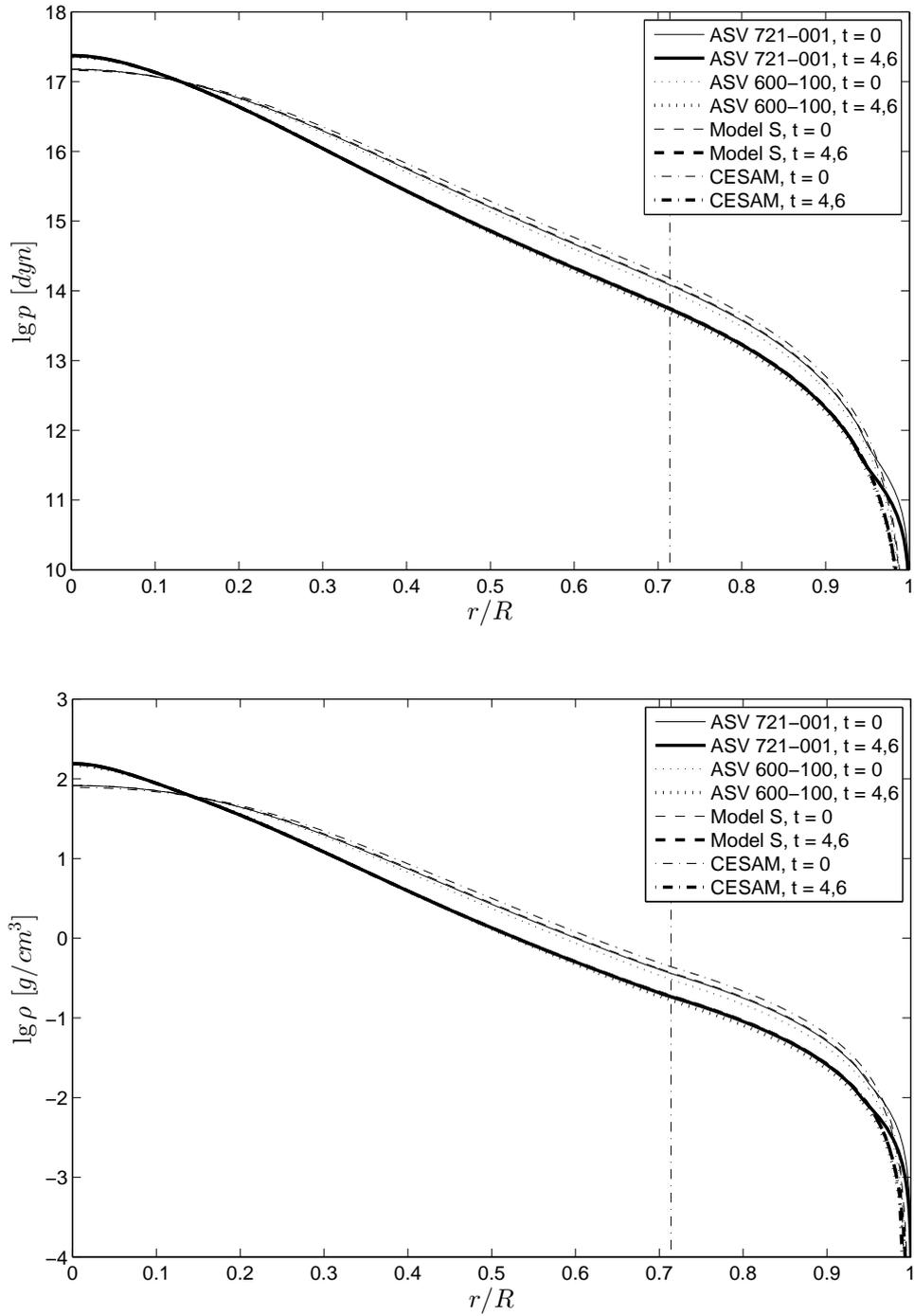


Рис. 2.2. Профили давления (вверху) и плотности (внизу) в различных эволюционных моделях Солнца. Тонкие линии соответствуют моменту

$t = 0$, толстые — $t = 4.6$ млрд. лет.

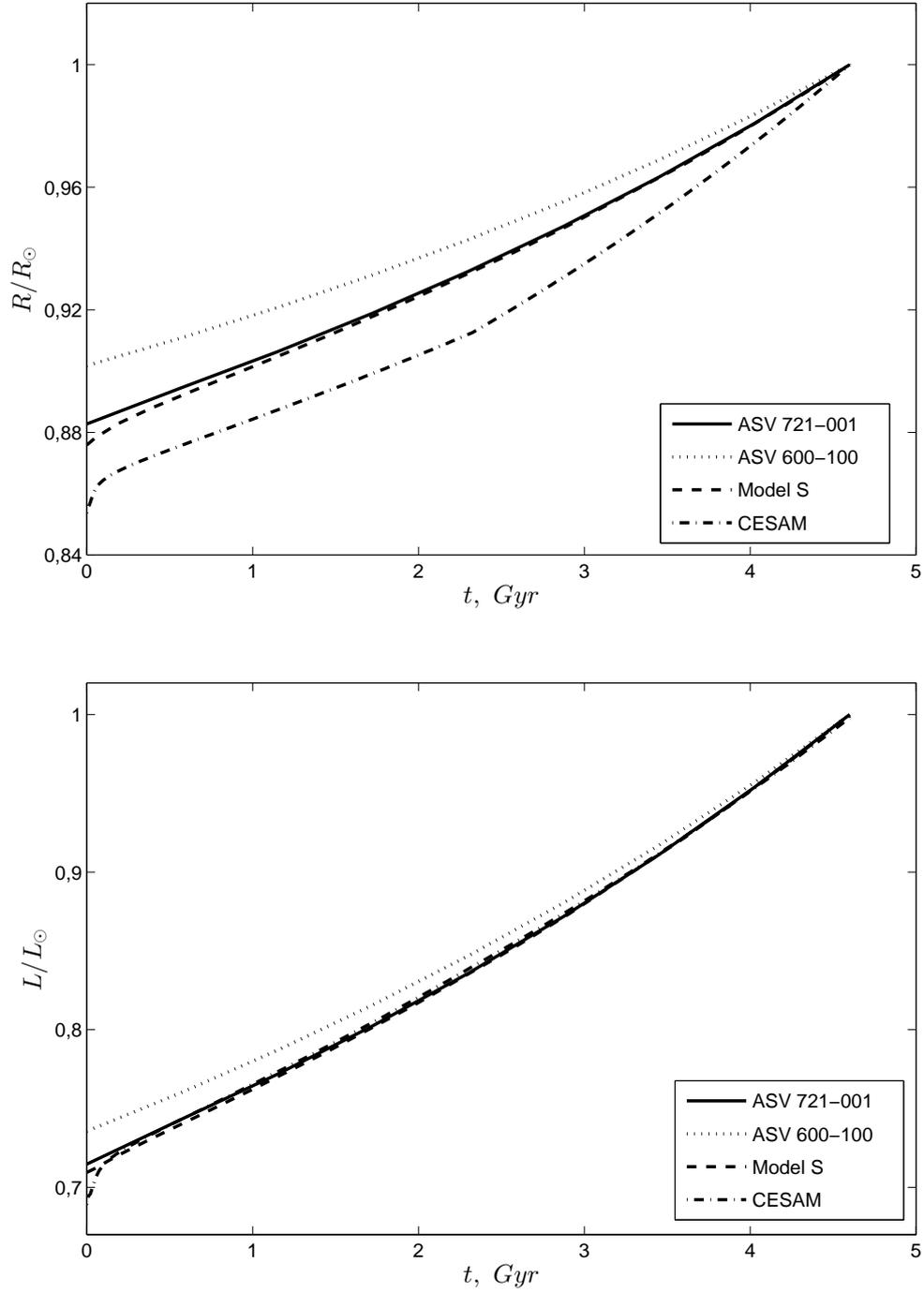


Рис. 2.3. Изменение радиуса (вверху) и светимости (внизу) Солнца в различных эволюционных моделях.

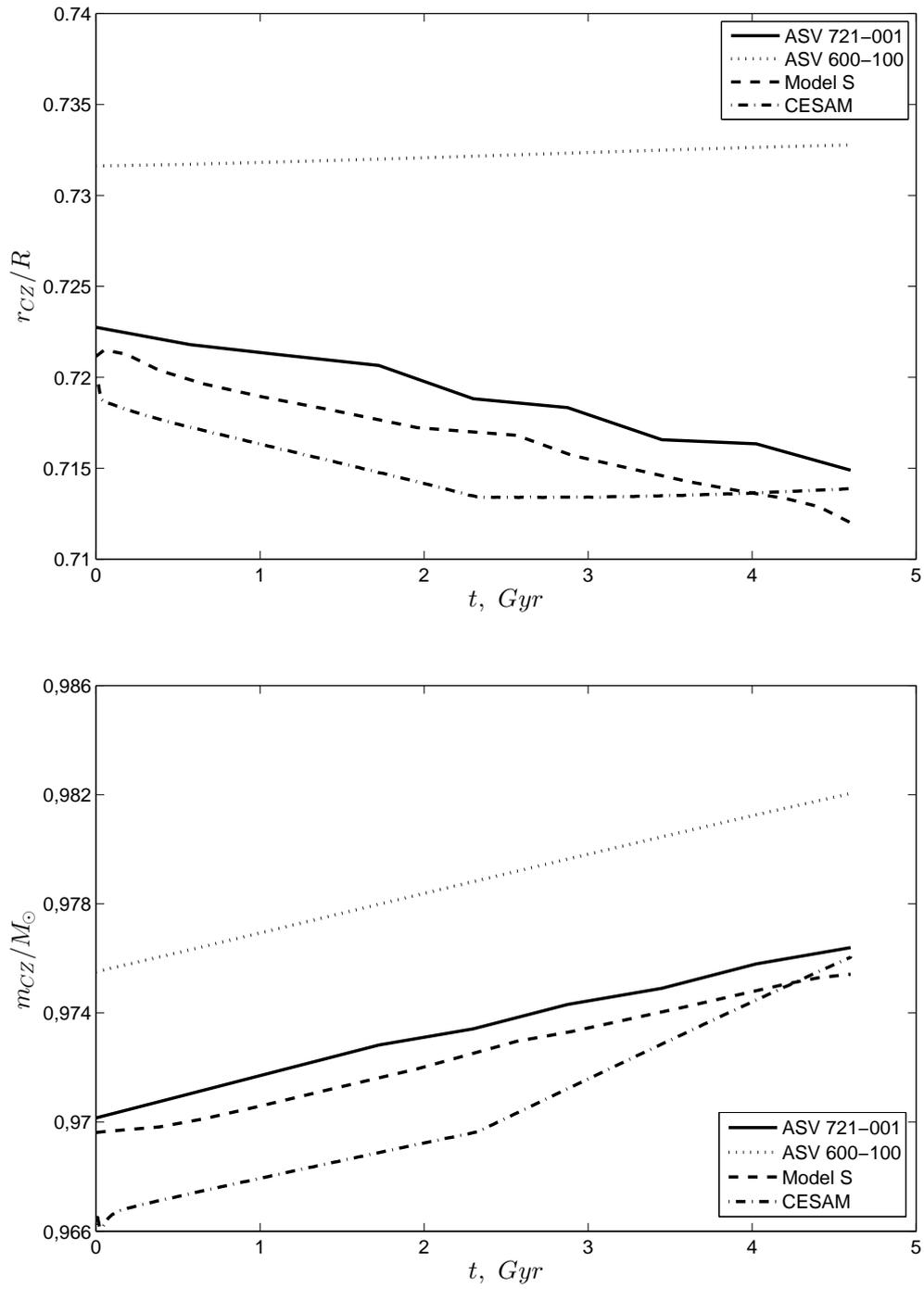


Рис. 2.4. Смещение с течением времени нижней границы конвективной зоны в координатах относительного радиуса (вверху) и относительной массы (внизу) в различных эволюционных моделях Солнца.

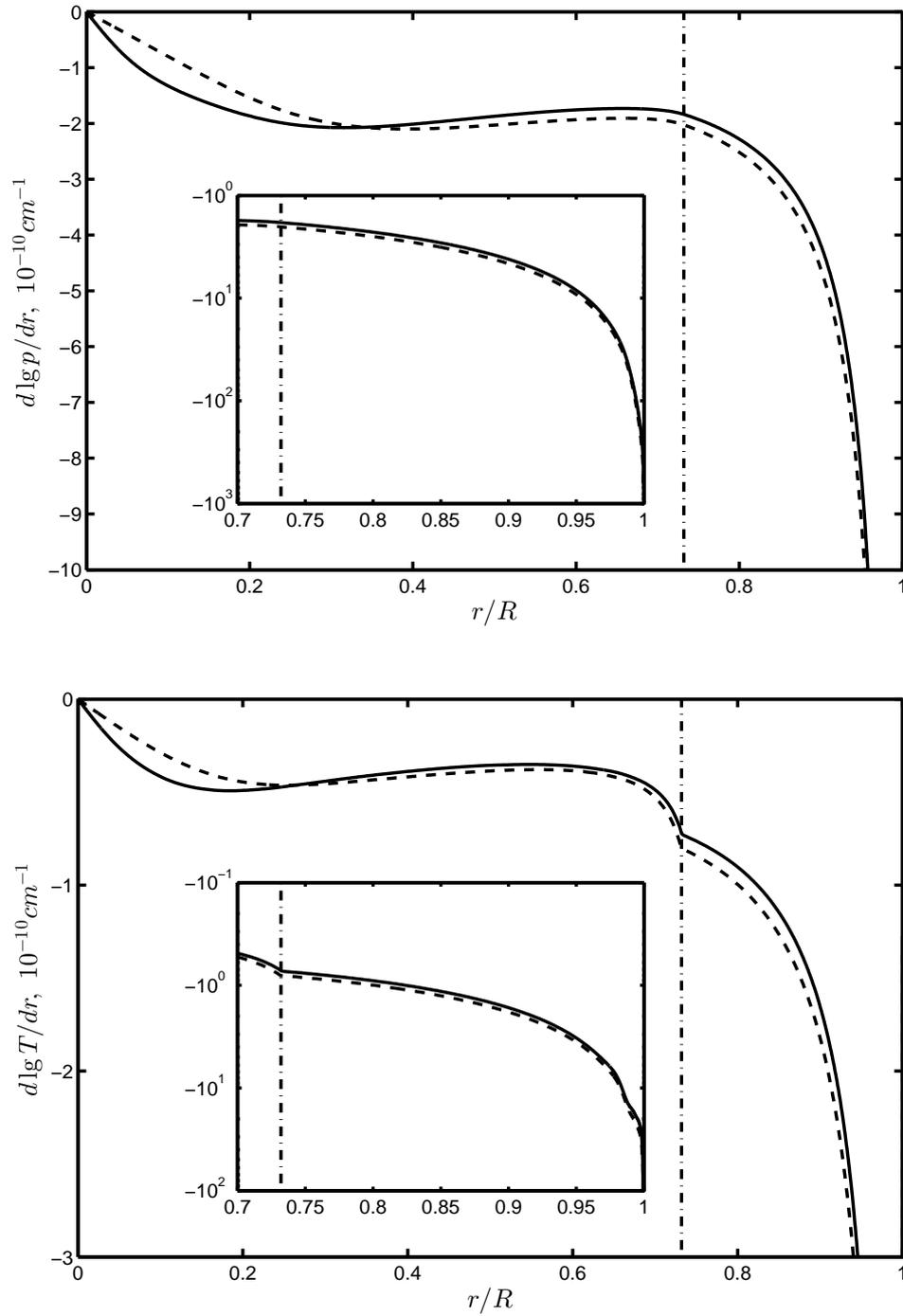


Рис. 2.5. Профили градиентов давления (вверху), и температуры (внизу) в эволюционной модели ASV 721-0001. Штриховые линии соответствуют моменту $t = 0$, сплошные — $t = 4.6$ млрд. лет.

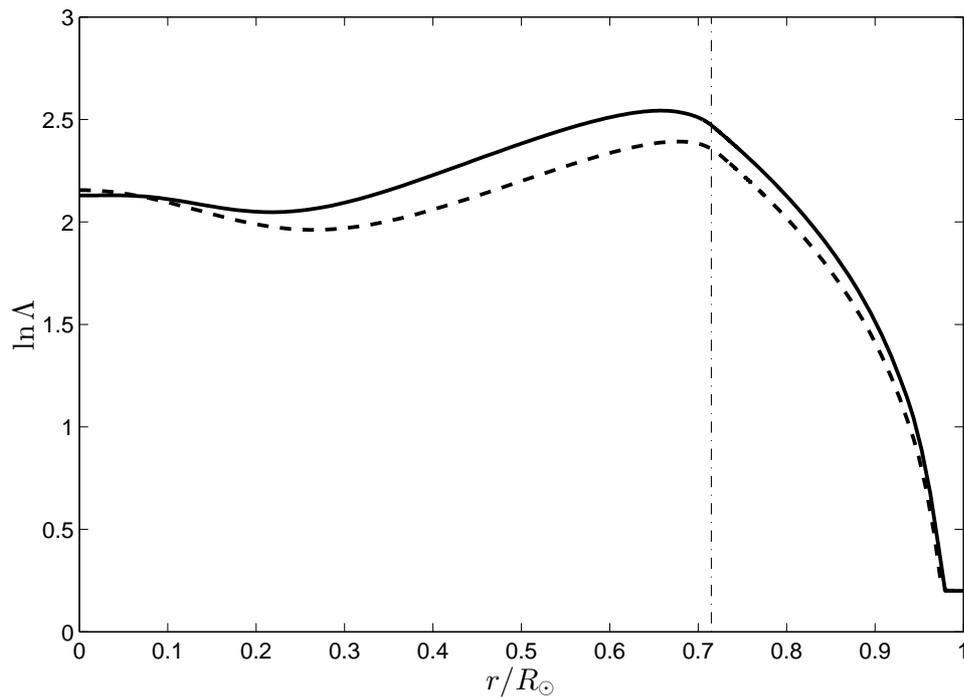


Рис. 2.6. Кулоновский логарифм в эволюционной модели ASV 721-0001.

Штриховые линии соответствуют моменту $t = 0$, сплошные — $t = 4.6$ млрд. лет. Штрих-пунктирной линией показано положение дна конвективной зоны в современном Солнце.

ву) дает величину порядка $V_{dif} \approx 10^{-9}$ см/с. Получаем, что

$$\frac{t_{dif}}{t_{conv}} \approx 10^{11}. \quad (2.7)$$

С точки зрения рассмотрения процесса диффузии конвекция — это практически моментальное выравнивание химического состава по всему объему конвективной зоны. Логичным будет предположить, что результатом такого процесса становится равномерное распределение элементов по конвективной зоне:

$$X_{i,CZ} = const \quad (2.8)$$

для любого i .

Схожим действием — выравниванием химического состава — обладает и концентрационная диффузия, но в гораздо меньшей степени.

Таким образом, детальная трактовка конвекции в задаче о диффузии на звездах солнечного типа является избыточной — можно принять за данность, что в конвективной зоне любая возникающая неоднородность химического состава мгновенно выравнивается. В диффузионной модели конвективную зону можно представить как область очень быстрой, мгновенно действующей концентрационной диффузии.

В данной работе это было сделано аналогично [26] путем введения в выражение для диффузионного потока очень большого (порядка 10^7) множителя перед градиентом X_i .

2.4. Скорость осаждения химических элементов из конвективной зоны

Выше было сказано, что из-за активного перемешивания химический состав внутри конвективной зоны можно считать постоянным, т.е. массовое содержание каждого химического элемента $X_{i,CZ}$ в этой области зависит только от времени, но не от координаты.

Очень важным понятием для описания диффузии на звездах солнечного типа является $\Delta X_{i,CZ}$ — *величина осаждения элементов из конвективной зоны*.

Строго говоря, этот термин корректно употреблять по отношению к гелию и тяжелым элементам, содержание которых в конвективной зоне со временем уменьшается, в то время как содержание водорода, как будет показано ниже, увеличивается.

Из определения величин X_i следует, что сумма $X_{i,CZ}$ по всем элементам

равна единице:

$$\sum_i X_{i,CZ} = 1. \quad (2.9)$$

Скорость осаждения элемента из конвективной зоны можно найти, усреднив уравнение диффузии по всей области перемешивания (в массовых координатах):

$$\begin{aligned} \frac{\partial X_{i,CZ}}{\partial t} &= \frac{\partial \langle X_i \rangle_{CZ}}{\partial t} = \\ &= \left\langle \frac{\partial X_i}{\partial t} \right\rangle_{CZ} = \left\langle -\frac{\partial 4\pi r^2 \rho V_i X_i}{\partial m} \right\rangle_{CZ} = \\ &= -\frac{\int_{CZ} 4\pi r^2 \rho V_i X_i dm}{\int_{CZ} dm} = \\ &= \frac{4\pi r_{CZ}^2 \rho_{CZ} V_{i,CZ} X_{i,CZ}}{M_{CZ}}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

где индексом CZ обозначены значения соответствующих величин на нижней границе конвективной зоны, а M_{CZ} — масса конвективной зоны (которая, вообще говоря, зависит от времени). Слагаемое, соответствующее верхней границе зоны перемешивания, равно нулю по выбранным граничным условиям (диффузионный поток на верхней границе равен нулю).

Смысл этого выражения соответствует известной теореме Остроградского-Гаусса и заключается в том, что скорость осаждения химического элемента из конвективной зоны равна по величине суммарному потоку этого элемента через границу конвективной зоны, деленному на полную массу конвективной зоны.

Величина осаждения элемента из конвективной зоны за время жизни звезды может быть вычислена интегрированием $\partial X_{i,CZ}/\partial t$ по времени.

В данной работе выражение (2.10) использовалось как дополнительная проверка результатов постмодельных расчетов, относящихся к области конвективной зоны.

ГЛАВА 3

ДИФФУЗИЯ ВОДОРОДА И ГЕЛИЯ

3.1. Формулировка проблемы

Водород и гелий являются основными химическими элементами в солнечном веществе (98,4% по массе, 99,9% по концентрации, [53]). Кроме них, большую долю по концентрации (но не по массе) занимают свободные электроны — до 57% от общего количества частиц. Все остальные компоненты можно рассматривать как малую примесь к смеси $\text{H}^+ + \text{He}^{2+} + e^-$ — за исключением внешних слоев фотосферы. В данной главе мы пренебрежем этой малой примесью и рассмотрим процесс диффузии в чистой водородно-гелиевой плазме.

Важность решения этой задачи определяется следующими моментами:

1. Водород является основным топливом для термоядерных реакций в ядре Солнца, диффузия меняет расчетную скорость исчерпания этого топлива, а также скорость изменения молекулярного веса в ядре. Таким образом, с учетом диффузии могут измениться наши оценки времени жизни Солнца на главной последовательности.
2. Содержание гелия в конвективной зоне является фундаментальным параметром физики внутреннего строения Солнца. «Стандартная» солнечная модель не включала в себя диффузионные процессы и строилась в предположении, что содержание гелия в конвективной зоне не изменяется с течением времени и равно 28% по массе. Эта величина противоречит результатам обработки гелиосейсмических наблюдений, которые приводят к цифре 25% [2]. В настоящее время диффузия считается основным физическим процессом, который может радикально уменьшить это несоответствие.

3. Встречные диффузионные потоки водорода и гелия оказывают влияние (вследствие ненулевой вязкости среды) на диффузионное перемещение тяжелых элементов.

3.2. Постановка задачи

Рассматриваем процесс взаимной диффузии в водородно-гелиевой смеси. В такой смеси, по определению,

$$X_H + X_{He} = 1. \quad (3.1)$$

Продифференцировав по времени, получаем

$$\frac{dX_H}{dt} = -\frac{dX_{He}}{dt}. \quad (3.2)$$

Если содержание тяжелых элементов X_Z отлично от нуля, то (3.1) и (3.2) преобразуются в

$$X_H + X_{He} + X_Z = 1 \quad (3.3)$$

и

$$\frac{dX_H}{dt} = -\frac{dX_{He}}{dt} - \frac{dX_Z}{dt}. \quad (3.4)$$

Изменение содержания водорода и гелия со временем может быть обусловлено разными причинами: термоядерными реакциями (это основной процесс изменения химического состава в солнечном ядре), диффузией и др. (см. рис. 3.1). Так как данная диссертация посвящена изучению именно диффузии, то представляется разумным выделить этот эффект, рассмотреть его отдельно, чтобы более детально изучить его закономерности и особенности. В пользу такого подхода говорят и предполагаемая малость изучаемого эффекта, и относительно небольшая роль концентрационной диффузии по сравнению с баро- и термодиффузией. Таким образом, для большей наглядности

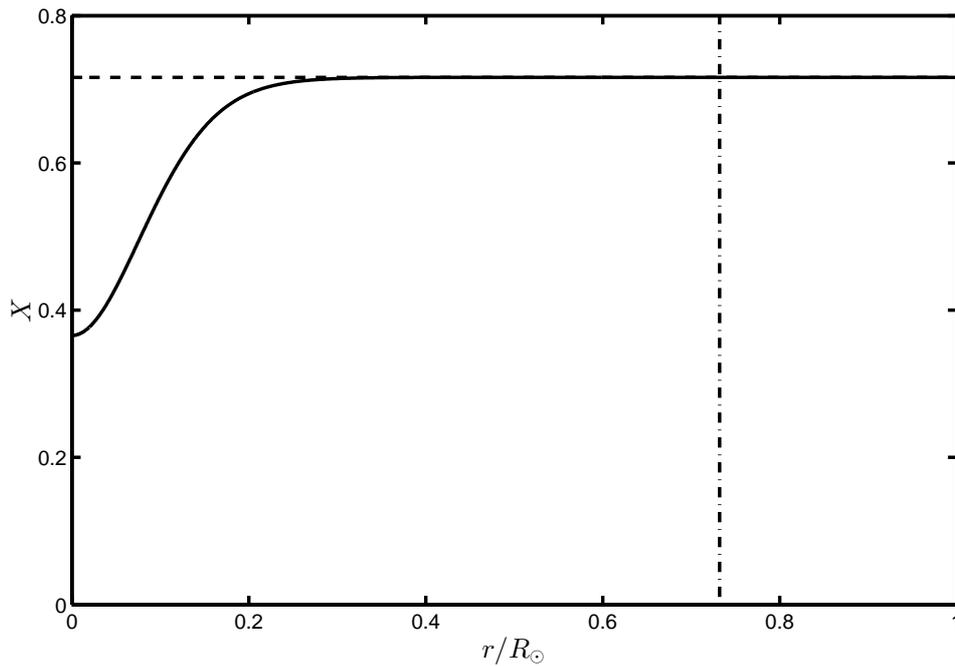


Рис. 3.1. Изменение содержания водорода X на Солнце вследствие ядерных реакций и диффузии. Показано начальное содержание водорода (пунктирная линия) и профили содержания на момент $t = 4.6$ млрд лет для эволюционных моделей ASV 600-0100 и ASV 721-0001. Положение конвективной зоны (штрих-пунктирная линия) показано для второй модели на момент времени $t = 4.6$ млрд лет.

результатов расчетов мы прибегаем к некоторым допущениям, которые, тем не менее, не влияют значительно на конечный результат:

1. Мы рассматриваем процесс диффузии в термодинамической модели Солнца, заданной эволюционной последовательностью моделей, которая рассчитана без учета диффузии. А именно, используется последовательность ASV 721-0001, описанная в разделе 2.2. Таким образом, все термодинамические параметры (температура, плотность, давление и др.), поле излучения, глубина конвективной зоны и т.д. принимаются заданными и независимыми от результатов наших расчетов.

2. Термоядерные реакции создают в ядре Солнца градиент концентрации водорода (и гелия), что приводит к возникновению соответствующих диффузионных потоков: водорода — вглубь ядра, гелия — наружу из ядра. Мы предполагаем, что эти потоки малы по величине (по крайней мере, на протяжении большей части времени жизни Солнца) и не вносят заметного вклада в изменение содержания водорода и гелия в ядре Солнца. Следует заметить, что с течением времени роль концентрационной диффузии в ядре может возрасти вследствие увеличения градиентов концентраций, и применимость данного допущения может стать менее обоснованной.

Следовательно, в каждой точке модели по радиусу изменение массовой доли водорода вследствие диффузии равно соответствующему изменению массовой доли гелия, взятому с обратным знаком. Равенства (3.1) и (3.2) позволяют нам ограничиться анализом диффузии водорода, результат для гелия выводится тривиально.

Для решения задачи используем метод постмодельных расчетов эволюции химического состава, описанный в предыдущей главе.

3.3. Диффузионные потоки и профиль химического состава

На рис. 3.2 приведены профили содержания водорода при изменениях, связанных только с диффузионными процессами, начиная от однородного состояния на начальной главной последовательности с шагом 1 млрд. лет до современного состояния Солнца. Изменения, связанные с ядерными превращениями водорода в гелий, на рисунке для наглядности не представлены. Однако в расчетах влияние ядерных реакций учитывалось, так же как и вклад концентрационной диффузии, которая несколько «тормозит» диффузионное осаждение гелия. Эволюционная последовательность профилей иллю-

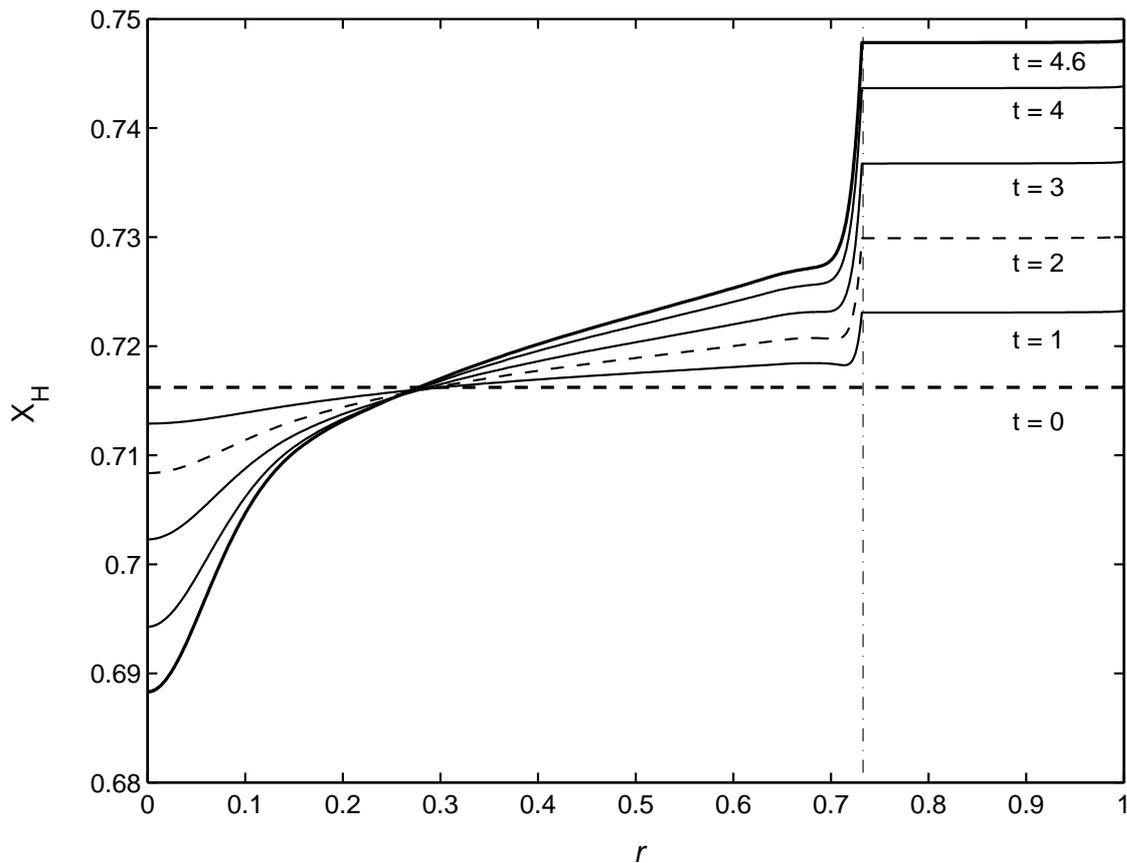


Рис. 3.2. Изменение содержания водорода, связанное с диффузионными процессами, для эволюционной последовательности моделей Солнца. Разные кривые соответствуют разным отсчетам по времени (надписи у кривых, млрд. лет)

стрирует общие принципы, которые были описаны выше. Гелий осаждается в ядро, обедняя внешние слои. Граница между обогащенными и обедненными слоями определяется положением максимума функции потока. Поскольку в процессе эволюции Солнца эта точка слабо смещается вглубь к центру модели, то на рис. 3.2 виден соответствующий «фокус» кривых вокруг точки, где содержание элементов практически не меняется в процессе диффузии.

Необходимо отметить глобальный характер бародиффузионного и термодиффузионного осаждения в звездах. Отличие глобального эффекта от локального связано с тем, что поток (см. рис. 3.3) отличен от нуля в большой

области внутри звезды (как в случае с рассматриваемыми нами эффектами). Если же функция потока локализована в какой-то области, то и перераспределение вещества происходит только в этой области, например, как в случае с концентрационной диффузией, проявляющейся только около основания конвективной зоны и в области ядра в поздних моделях (то же касается эффекта фотодиффузии, который будет рассмотрен ниже в главе, посвященной тяжелым элементам).

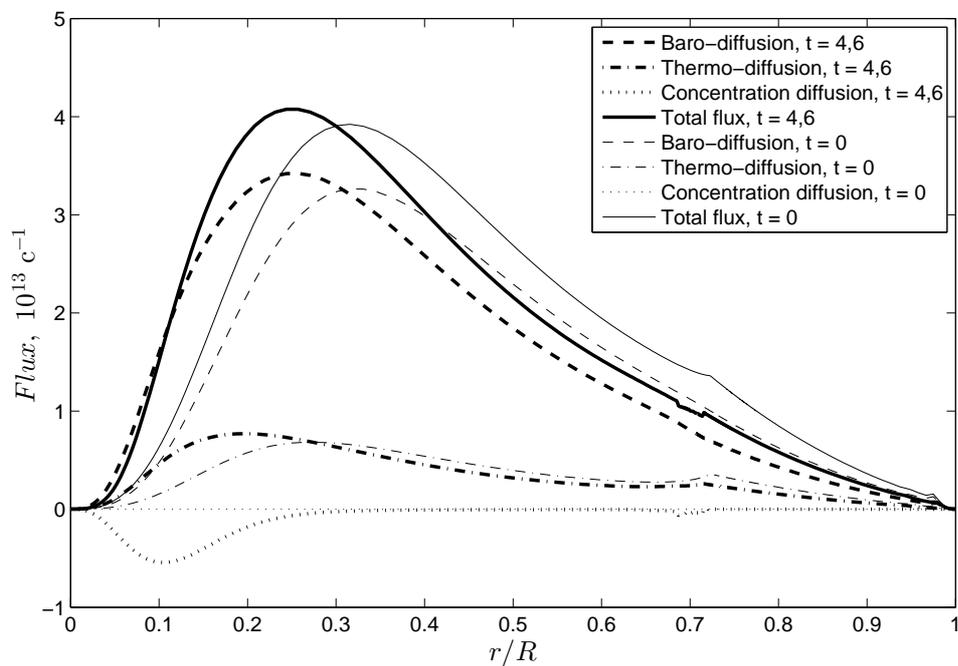


Рис. 3.3. Вклад различных механизмов в диффузионный поток водорода $\rho w X \times 4\pi r^2$. Суммарный поток обозначен сплошной линией, бародиффузионный поток — штриховой, термодиффузионный — штрихпунктирной, поток вследствие концентрационной диффузии — пунктирной. Тонкими линиями показаны потоки в начальный момент времени, толстыми — в момент $t = 4.6$ млрд лет.

Скорость диффузии и ее составляющие показаны на рис. 3.4. Отметим тот факт, что она *монотонно растет* от центра Солнца вплоть до грани-

цы конвективной зоны. Значения скорости диффузии *внутри* конвективной зоны имеют скорее справочное значение, так как быстрое перемешивание вещества в ней препятствует установлению диффузии.

Количественно скорость осаждения гелия можно охарактеризовать с двух сторон. Во-первых, это избыточное накопление гелия в ядре, то есть в центре звезды. По данным модели МР такое накопление составляет 2,8%, а по модели Тоул — 3.0% массовой доли водорода (или гелия). Анализ выражений для потока показывает, что эта величина получается достаточно устойчивым образом. Другими словами, можно считать твердо установленным, что Солнце более богато гелием в центральных областях, чем это следует из классических расчетов. Можно сказать, что Солнце проэволюционировало «дальше» по своему пути на главной последовательности за тот же интервал времени (количественные оценки влияния диффузии на прогнозируемую эволюцию Солнца приведены в конце этой главы). Другим принципиальным параметром осаждения гелия является изменение его содержания в конвективной зоне.

3.4. Скачок у дна конвективной зоны

В профиле водорода (рис. 3.2) появляется отчетливый скачок на дне конвективной зоны. Этот скачок есть следствие двух эффектов, описанных выше. Во-первых, это разрыв второй производной температуры, а во-вторых, усреднение химического состава в конвективной зоне. В результате химический состав в конвективной зоне меняется (гелий осаждается из конвективной зоны) быстрее, чем этого можно было бы ожидать, если «экстраполировать» профиль содержания из лучистой зоны наружу.

Для анализа поведения профиля химического состава ниже основания конвективной зоны рассмотрим отдельно вклад термодиффузии по сравне-

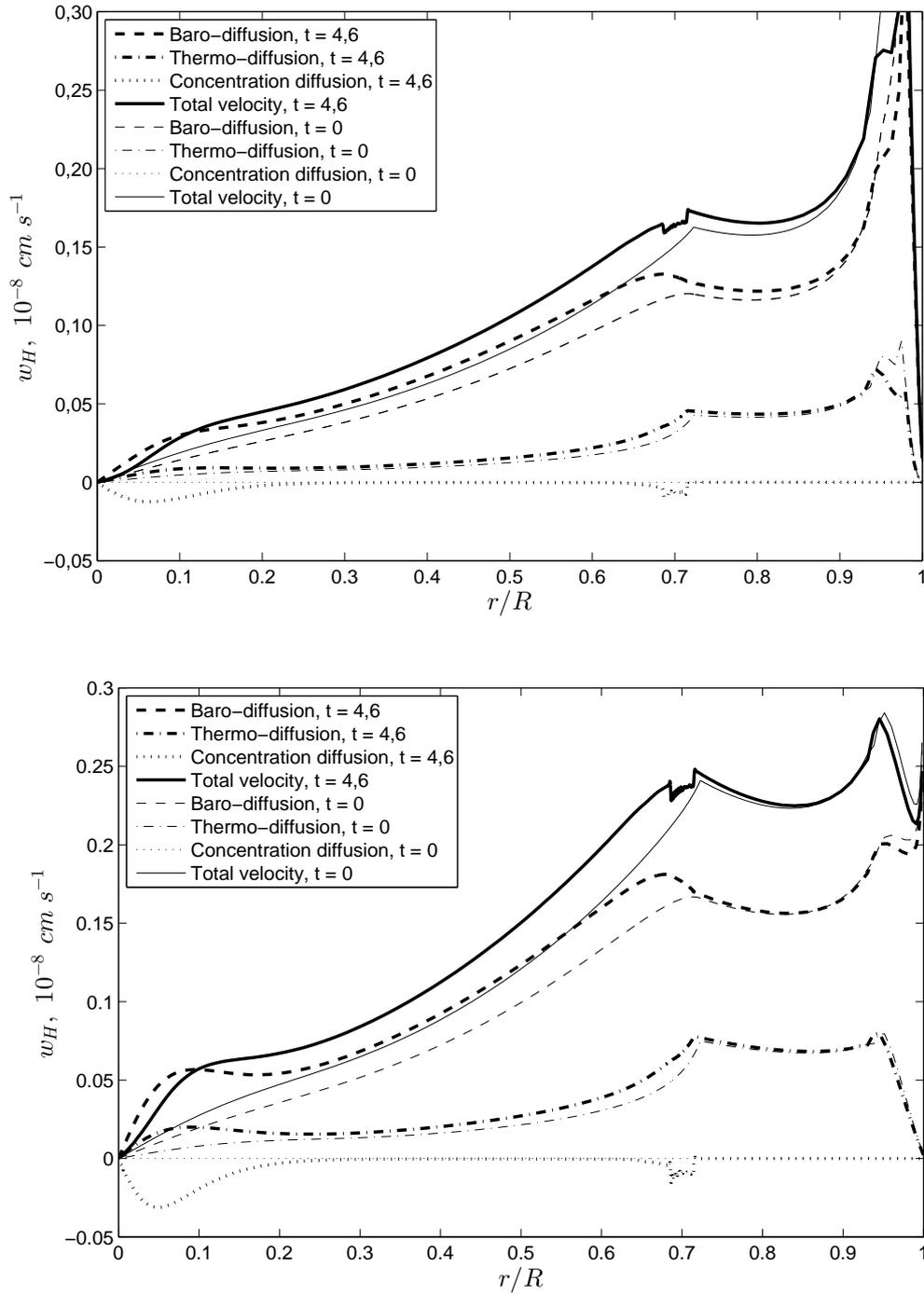


Рис. 3.4. Скорости диффузии и их компоненты, рассчитанные по разным методикам. Вверху — по аппроксимационным формулам Мишо и Профи [18], внизу — по схеме Тоул [19].

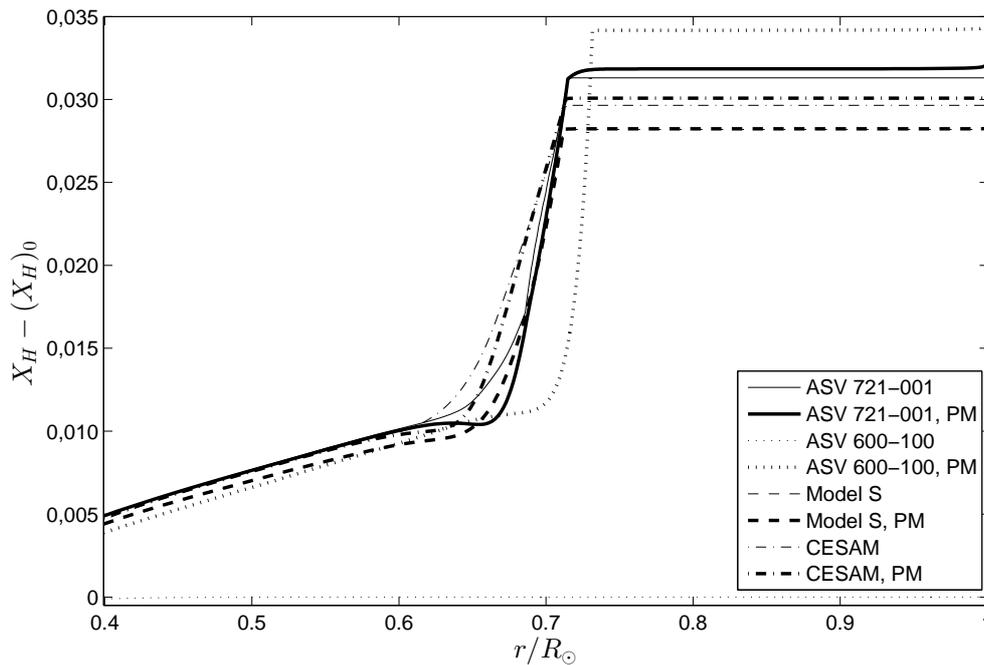


Рис. 3.5. Изменение содержания водорода X вследствие диффузии. Показана конвективная зона и область под ней. Тонкие линии означают профили X в исходных эволюционных моделях, толстые — результаты соответствующих постмодельных расчетов (обозначены как PM).

нию с бародиффузией. Эти вклады, наряду с вкладом концентрационной диффузии, представлены на рис. 3.7.

Отметим, что на рисунке представлены доли изменения химического состава за фиксированный интервал времени, обусловленные различными факторами, то есть бародиффузией (сплошные линии) и термодиффузией (точечные линии). Вклад в изменение содержания отличается от вклада в функцию потока, обычно анализируемого в работах по диффузии (например, [19]). Так, поток, вызываемый термодиффузией, всегда направлен так же, как и бародиффузионный, то есть ведет к осаждению тяжелых элементов к горячему центру. Однако изменение содержания водорода в некоторых областях может быть разного знака по сравнению с бародиффузионным накоплением.

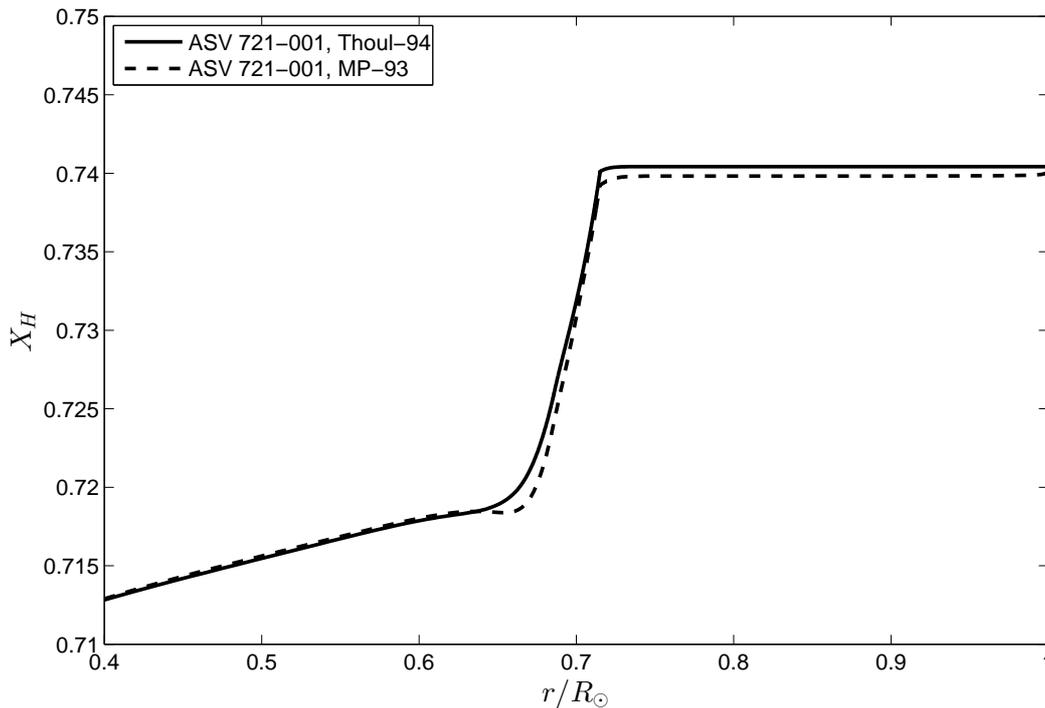


Рис. 3.6. Содержание водорода X в области конвективной зоны, рассчитанное по разным методикам — Мишо и Профи [18] и Тоул [19]).

В частности, под основанием конвективной зоны термодиффузия замедляет накопление водорода и, соответственно, осаждение тяжелых компонент здесь также менее выражено. Это может показаться удивительным, поскольку бародиффузионный и термодиффузионный потоки в МР-модели отличаются лишь на функцию логарифмического градиента температуры ∇ . Простота отношения v_{therm}/v_{baro} лежит в основе утверждения, что термодиффузия составляет примерно 30% эффекта бародиффузии [19]. Однако для изменений содержаний элементов данное утверждение несправедливо. Из сравнения кривых на рис. 3.2 можно сделать вывод, что термодиффузия — относительно слабый и лишь локально выраженный эффект.

Объяснить это можно, если учесть, что скорость изменения содержания пропорциональна производной от потока. Поэтому термодиффузионный

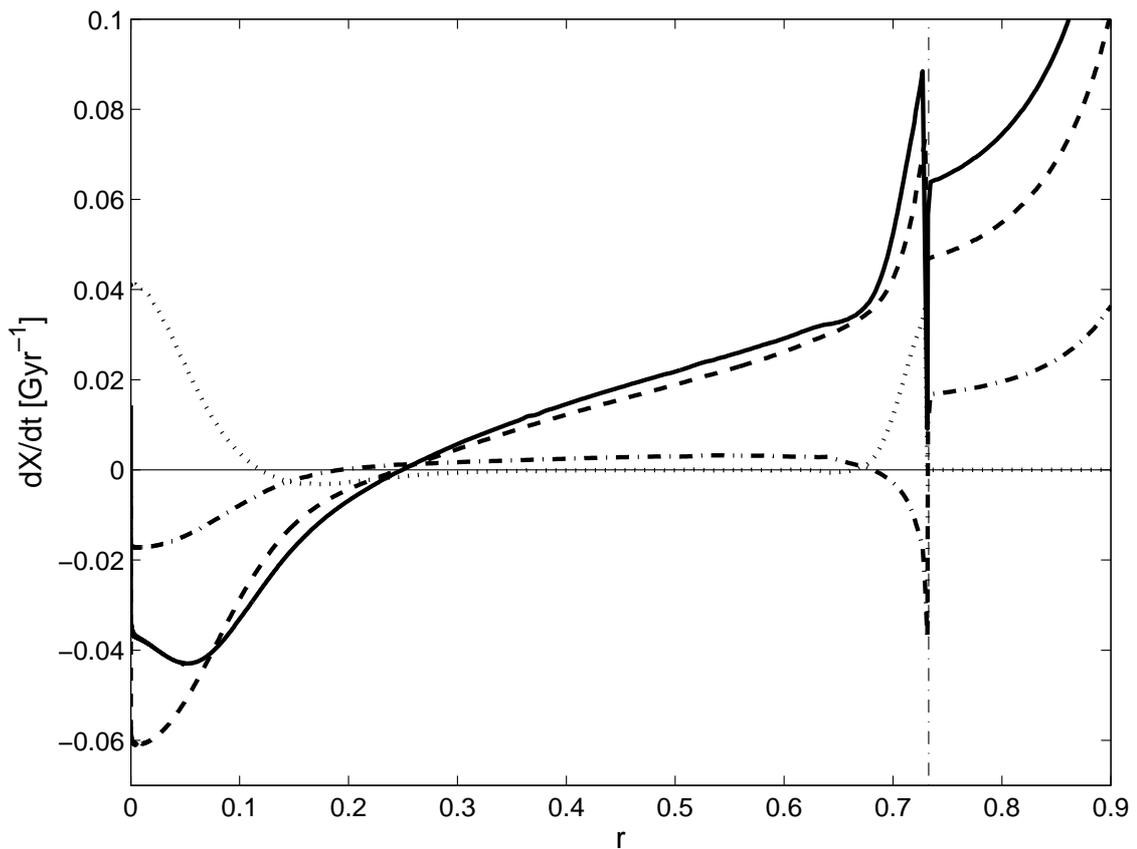


Рис. 3.7. Вклады баро- (штриховая), термо- (штрих-пунктирная) и концентрационной диффузии (пунктирная) в общую скорость (сплошная) изменения содержания водорода для современного Солнца.

вклад равен

$$dX_{therm} \sim (v_{baro} \nabla)' = \nabla dX_{baro} + v_{baro} \nabla' \quad (3.5)$$

Другими словами, помимо пропорциональной термодиффузионной добавки, изменение химического состава зависит от производной от температурного градиента. Сам температурный градиент показан на рис. 3.8, и его форма позволяет качественно объяснить поведение функции термодиффузионного вклада на рис. 3.7.

Под конвективной зоной производная температурного градиента велика и положительна, что ведет к противоположному вкладу термодиффузии по сравнению с бародиффузией. В результате, мы имеем особенность (неболь-

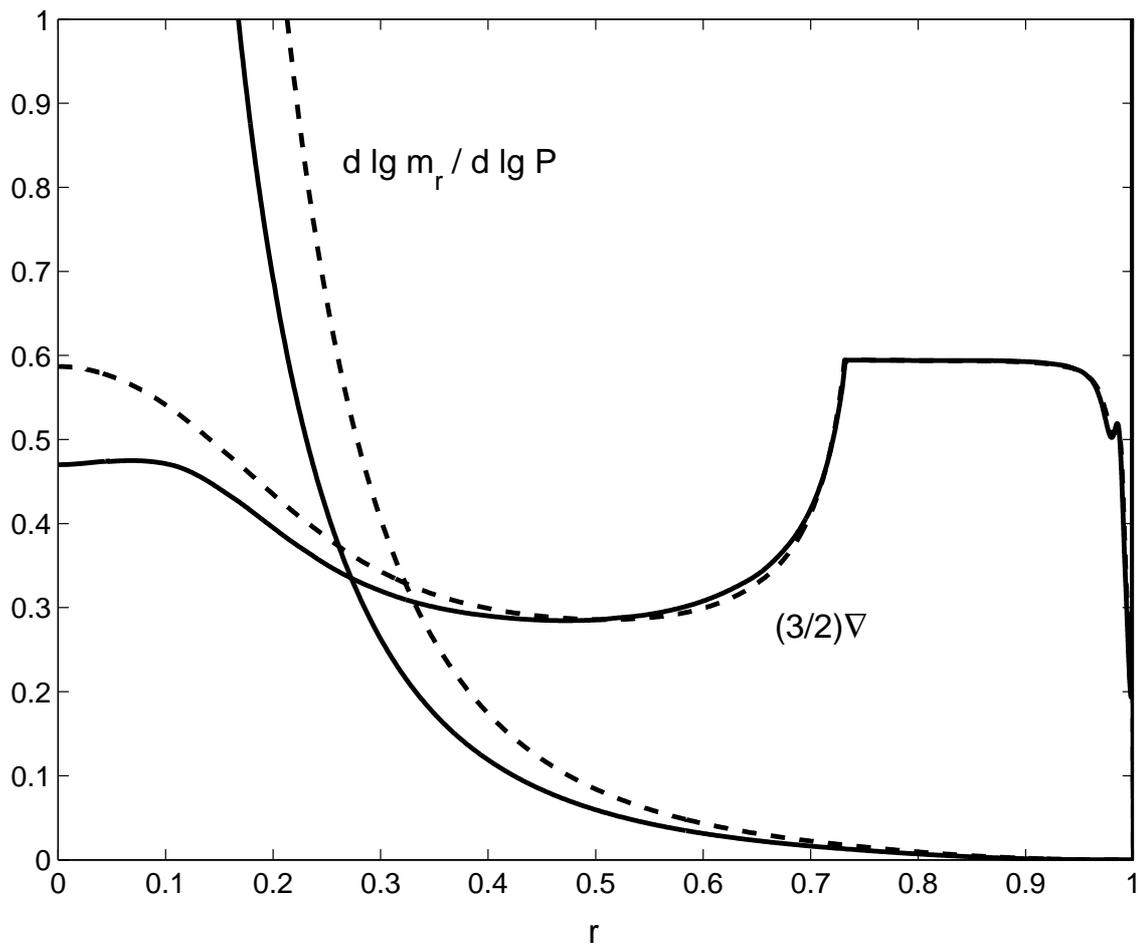


Рис. 3.8. Градиенты температуры ($\nabla = d \lg T / d \lg p$) и массы в солнечных моделях (сплошные — современное Солнце, штриховые — начальное), определяющие диффузионную эволюцию массовой доли водорода.

шой пик, который довольно слабо выражен для водорода) под конвективной зоной, и сравнительно небольшой почти постоянный вклад термодиффузии по всей лучистой зоне. В ядре, где производная температурного градиента меняет знак, вклад термодиффузии становится сравнимым с бародиффузией. Подчеркнем, что указанные эффекты связаны только с законом непрозрачности вещества, а не с наличием конвективной зоны.

Подобный анализ вклада различных механизмов важен потому, что точность оценки термодиффузионных членов, вообще говоря, невелика. Если

бы роль термодиффузии была существенна во всех областях Солнца, то итоговая точность моделирования была бы небольшой. Однако тот факт, что определяющую роль играет бародиффузия, модель для которой значительно проще, можно надеяться, что мы можем определить изменение химического состава с точностью порядка 30%. Ситуация в значительной степени меняется для тяжелых элементов, диффузионная эволюция которых рассматривается в следующей главе.

3.5. Сравнение с результатами других авторов

Ниже в таблице 3.1 приведены результаты диффузионных расчетов смеси водород-гелий, полученные разными авторами. Представлены изменения массовой доли водорода в конвективной зоне солнечной модели. Результаты наших расчетов (см. рис. 3.5), дающие величину $\Delta X_{CZ} = 0.030 \pm 0.002$, находятся в хорошем согласии с большинством расчетов других авторов.

3.6. Влияние глубины конвективной зоны на содержание водорода и гелия

В данной работе была проведена серия расчетов диффузии на базе эволюционных моделей со смещенной нижней границей конвективной зоны. Полученные в результате таких расчетов профили содержания водорода приведены на рис. 3.9.

В подтверждение приведенных в предыдущей главе оценок, из графика следует, что при увеличении массы конвективной зоны (т.е. при смещении ее нижней границы вглубь) итоговое содержание водорода в конвективной зоне становится меньше, а содержание гелия — больше. Эту зависимость можно аппроксимировать прямой. Тогда при смещении основания конвективной зоны на $0.01R_{Sun}$ к центру соответствующие изменения содержания составят:

Таблица 3.1

Изменение содержания водорода в конвективной зоне Солнца по результатам разных авторов

Автор	ΔX_H
Noerdlinger 1977 [15]	0.0260
Bahcall, Pinsonneault 1995 [22]	0.0313
Guenther, Kim, Demarque 1996 [54]	0.0169
Model S 1996 [23]	0.0282
Richard, Vauclair, Charbonnel, Dziembowski 1996 [55]	0.0213
Gabriel, Carlier 1997 [56]	0.0252
Guzik, Swenson 1997 [57]	0.0316
Brun, Turck-Chieze, Morel 1998 [58]	0.0315
Turcotte, Richard, Michaud et al. 1998 [26]	0.0306
Schlattl 2002 [24]	0.0318
Ayukov, Baturin, 2011 [45]	0.0309

-0.0012 (-0.16%) для водорода и $+0.0012$ ($+0.57\%$) для гелия.

Данный факт существенно важен для построения эволюционных моделей Солнца, так как он накладывает заметные ограничения на варьирование глубиной конвективной зоны в силу того, что содержание гелия в конвективной зоне надежно определяется из гелиосейсмических наблюдений. Нельзя «подвинуть» основание конвективной зоны (при фиксированных остальных параметрах модели), не изменив содержания гелия в ней.

3.7. Влияние диффузии на эволюцию Солнца

Нахождение Солнца на стадии Главной последовательности (ГП) определяется горением водорода в его ядре. Диффузия ускоряет истощение водорода

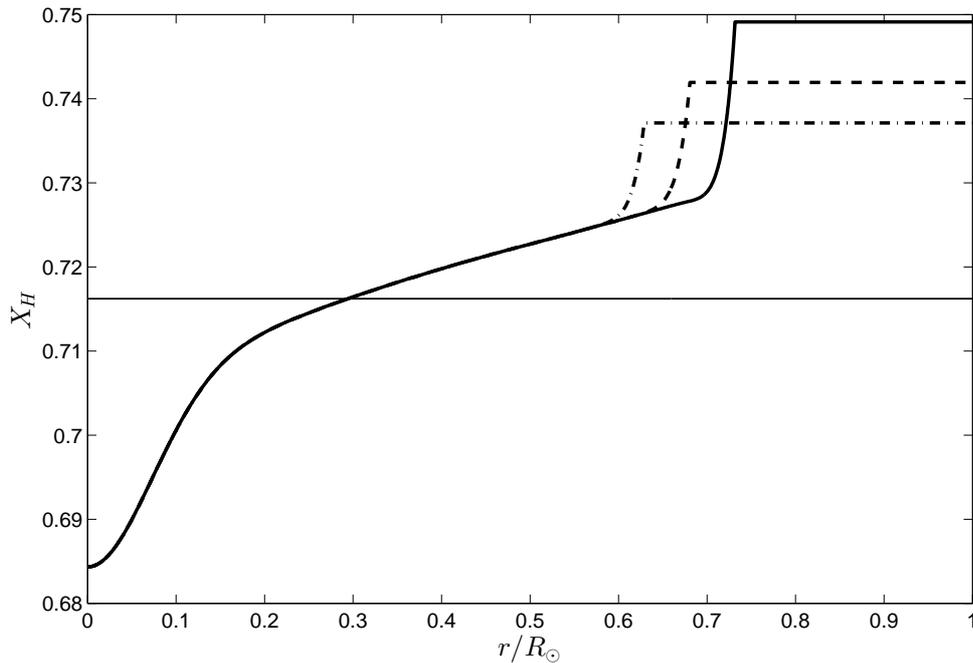


Рис. 3.9. Профили содержания водорода на момент $t = 4.6$ млрд. лет для трех эволюционных моделей Солнца: нормальной (положение дна конвективной зоны $0.73R_{Sun}$) и со смещенным дном конвективной зоны ($0.63R_{Sun}$ и $0.68R_{Sun}$).

да в этой области, что приводит к уменьшению расчетного времени пребывания на ГП. Расчеты показывают, что темп уменьшения содержания водорода в центре Солнца за счет ядерных реакций и диффузии составляет 0.38 массовой доли за 4.6 млрд лет при начальном содержании 0.71. При такой скорости исчерпание водорода в центре наступит в момент $t \approx 7.6$ млрд лет или на 0.71 млрд лет раньше, чем в случае, когда содержание водорода изменяется только в ходе ядерных реакций. По просьбе автора С. В. Аюковым (ГАИШ МГУ) две эволюционные модели Солнца — с диффузией и без ее учета — были просчитаны до возраста 9.2 млрд. лет (рис. 3.10). Расчеты показали, что содержание водорода в центре модели с диффузией достигает уровня 0.01 на 0.55 млрд лет раньше, чем в модели, которая диффузию не учитывает.

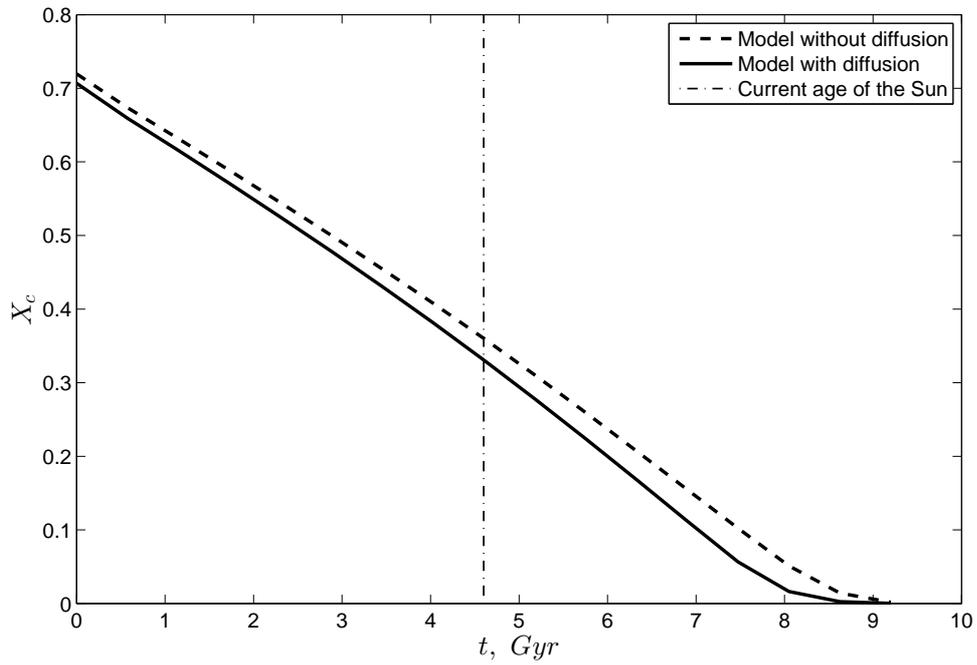


Рис. 3.10. Содержание водорода в центре Солнца как функция времени. Данные эволюционных расчетов до момента $t = 9.2$ млрд лет. Сплошной линией показан результат расчета с учетом диффузии, штриховой — без диффузии. Штрихпунктирная линия обозначает текущий возраст Солнца.

ГЛАВА 4

ДИФФУЗИЯ ТЯЖЕЛЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Диффузионное осаждение элементов тяжелее гелия в условиях солнечных недр рассмотрено в рамках многокомпонентного гидродинамического описания. Такой подход позволяет согласованным образом учесть эффект термодиффузии, а также ввести поправки за частичную ионизацию элементов с помощью среднего заряда ионов. Рассмотрен также эффект взаимодействия тяжелых элементов с полем излучения.

4.1. Основные положения

4.1.1. Диффузия тяжелых элементов на фоне осаждения гелия. При изучении диффузии тяжелых элементов их рассматривают как малую добавку к смеси H, He, e, так что число компонентов уже как минимум четыре. В своем движении тяжелый ион сталкивается как с «всплывающим» водородом, так и с «опускающимся» гелием. Это создает т.н. эффект увлечения примеси потоками основных компонентов. Рассмотрение влияния эффекта увлечения на скорость осаждения тяжелых элементов показало, что эффект увлечения оказался довольно малым.

Однако, скорость осаждения тяжелых элементов существенно зависит от заряда иона и передачи импульса через электронное облако. Например, если предположить, что железо на Солнце нейтрально или однократно ионизовано, то его бародиффузионное осаждение приведет к полному исчезновению из внешних слоев Солнца, то есть все железо сосредоточится в центральной части. Однако ионизация основных по населенности элементов (C, N, O) происходит довольно быстро с ростом температуры уже во внешних слоях конвективной зоны Солнца, а скорость осаждения быстро уменьшается с уве-

личением заряда иона. В результате описанного «катастрофического» осаждения тяжелых элементов ожидать не приходится. Расчеты указывают на заметное уменьшение скорости осаждения при учете реального значения степени ионизации элементов.

Для точного расчета скоростей осаждения использована расчетная схема, предложенная [19] и пригодная для произвольного числа компонентов. В этом случае решается система уравнений Бюргерса для всех четырех компонентов, и в коэффициенты уравнения вводятся соответствующие поправки, связанные с зарядом каждого иона или другими эффектами (см. обсуждение фотодиффузии ниже). Кроме того, такая схема позволяет включить эффект термодиффузии в приближении более высокого порядка по сравнению с формулами МР-модели.

4.1.2. Учет частичной ионизации элементов. При рассмотрении диффузии элементов с переменным по радиусу зарядом (то есть с меняющейся степенью ионизации) был сделан ряд упрощающих предположений относительно взаимовлияния диффузии компонентов и реакций ионизации-рекомбинации. Главное предположение состоит в том, что процессы диффузии не меняют состояния ионизационного равновесия, рассчитанного в каждой точке в соответствии с термодинамическим уравнением состояния. Такое предположение достаточно оправданно в условиях Солнца, где скорости диффузионных потоков настолько малы, что концентрация компонентов меняется на несколько процентов в течение миллиардов лет. Другими словами, дополнительный поток «внешних» ионов с другим зарядом пренебрежимо мал по сравнению со скоростью реакции ионизации.

Поэтому эффект переменного заряда иона состоит в том, что в каждой точке используется свое значение среднего заряда (или среднего квадрата заряда) по данному иону. В работе [24] была сделана попытка использовать

другой подход, когда ион в каждой степени ионизации рассматривается самостоятельно, как независимый компонент. Однако такой подход вызывает некоторые сомнения, поскольку не представляется возможным решать уравнения ионизации совместно с системой уравнений Бюргерса для скоростей диффузии. В конечном итоге, даже учет сохранения числа ионов данного сорта оказывается проблематичным. Поэтому результаты, полученные в [24], хотя и понятны, но представляются необоснованными физически в отношении данного специфического способа учета влияния частичной ионизации. В частности, в [24] были получены почти сингулярные слагаемые, возникающие около каждой зоны ионизации из-за больших градиентов концентрации отдельного ионизационного компонента.

Наша схема учета частичной ионизации более проста и основана на рассмотрении распределения состояний ионизации элементов по радиусу Солнца. Ионизация элементов С, N, O практически заканчивается внутри конвективной зоны, поэтому учет их частичной ионизации имеет относительно малый эффект. Для железа учет имеет максимальное значение и ведет к существенному повышению скорости его осаждения. С другой стороны, именно для железа распределение степеней ионизации имеет ряд особенностей, которые делают учет детальных реакций очень сложным.

4.1.3. Учет фотодиффузии. В англоязычной литературе утвердился термин «фотолевитация», то есть «подъем» тех или иных ионов в поле излучения. Представляется необходимым уточнить смысл данного эффекта. Любой элемент вещества внутри звезды находится в поле излучения, причем поток излучения направлен вверх, то есть против силы тяжести. Кроме того, для элемента вещества с большой оптической толщиной можно считать, что поле излучения находится в термодинамическом равновесии с веществом, то есть излучение и вещество имеют равные температуры. На практике это

значит, что фотон будет поглощен внутри данного элемента многократно. Общее влияние поля излучения в этом приближении описывается силой, равной ∇P_{rad} , действующей на весь элемент в целом. Эту силу вполне можно назвать силой фотолевитации.

В модельное уравнение гидростатического равновесия входит как газовое, так и лучистое давление, и сила тяжести компенсирует градиент полного давления. В рамках многокомпонентного описания естественно предположить, что для каждого компонента можно выделить силу со стороны потока излучения, которая пропорциональна вкладу данного компонента в непрозрачность. Другими словами, сильно поглощающий компонент приобретает некоторой импульс со стороны поля излучения, и этот импульс больше, чем импульсы для слабо поглощающих компонентов. Наиболее простой способ учесть такую силу — это модифицировать ускорение силы тяжести в уравнении Бюргерса для соответствующего компонента. Строго говоря, сумма таких модификаций должна быть равна градиенту лучистого давления — тем самым сохраняется справедливость уравнения гидростатического равновесия. В данной работе использовались лучистые ускорения, рассчитанные согласно данным Opacity Project [46].

В наших расчетах эффект лучистого давления учитывался только для тяжелых элементов, массовые содержания которых малы. Полученный результат состоит в уменьшении скорости осаждения к центру звезды. При этом эффект оказывается довольно «плавным» по радиусу, поскольку отдельные области ионизации элементов слабо разделены между собой. Во внешних областях конвективного переноса эффект лучистой поправки существенно понижается вследствие падения доли энергии, переносимой излучением. В целом, учет фотодиффузии приводит к уменьшению скорости осаждения на несколько процентов (до 14% в конвективной зоне для железа).

4.2. Состояния ионов тяжелых элементов внутри Солнца

Рассмотрим более детально распределение заряда ионов вдоль радиуса внутри Солнца для выбранных тяжелых элементов.

В расчетах распределений состояний иона z_j с атомным номером j (иногда вместо атомного номера будет использоваться химический индекс элемента, например, z_{Fe}) использовались дополнительные таблицы к уравнению состояния (УрС) SAHA-S ([59], [36]). Эти таблицы содержат концентрации каждого из шести тяжелых ионов n_j^z , где $z = 0 \dots j$, а $j = \{6, 7, 8, 10, 14, 26\}$. Основная используемая в дальнейших расчетах величина — это средний заряд ионов данного атомного номера, то есть

$$\bar{z}_j = \sum_{z=0}^j \tilde{n}_j^z z_j, \quad (4.1)$$

где относительные содержания равны $\tilde{n}_j^z = n_j^z / \sum_{z=0}^j n_j^z$. В термодинамических расчетах УрС SAHA-S учитываются также некоторые молекулы и их ионы, однако в данной работе их присутствие не учитывалось ввиду их практически полной локализации в самых внешних и наименее плотных областях.

Поскольку энергия ионизации возрастает с z , то степень ионизации иона последовательно увеличивается, и относительные содержания \tilde{n}_j^z отличны от нуля только для нескольких (не больше 3–4) значений z . Часто большинство ионов данного элемента находятся в одном или двух состояниях $z, z+1$. Тогда ошибка использования квадрата среднего заряда иона $(\bar{z}_j)^2$ вместо среднего квадрата заряда $\overline{z_j^2} = \sum_{z=0}^j \tilde{n}_j^z (z_j)^2$ оказывается малой. Простые алгебраические выкладки показывают, что в ситуации «парных» распределений ионов эта ошибка не превышает несколько процентов от самой величины. При расчетах средних зарядов внутри Солнца встречается более сложная ситуация, связанная с явлением «пропуска» состояний ионизации. Для некоторых со-

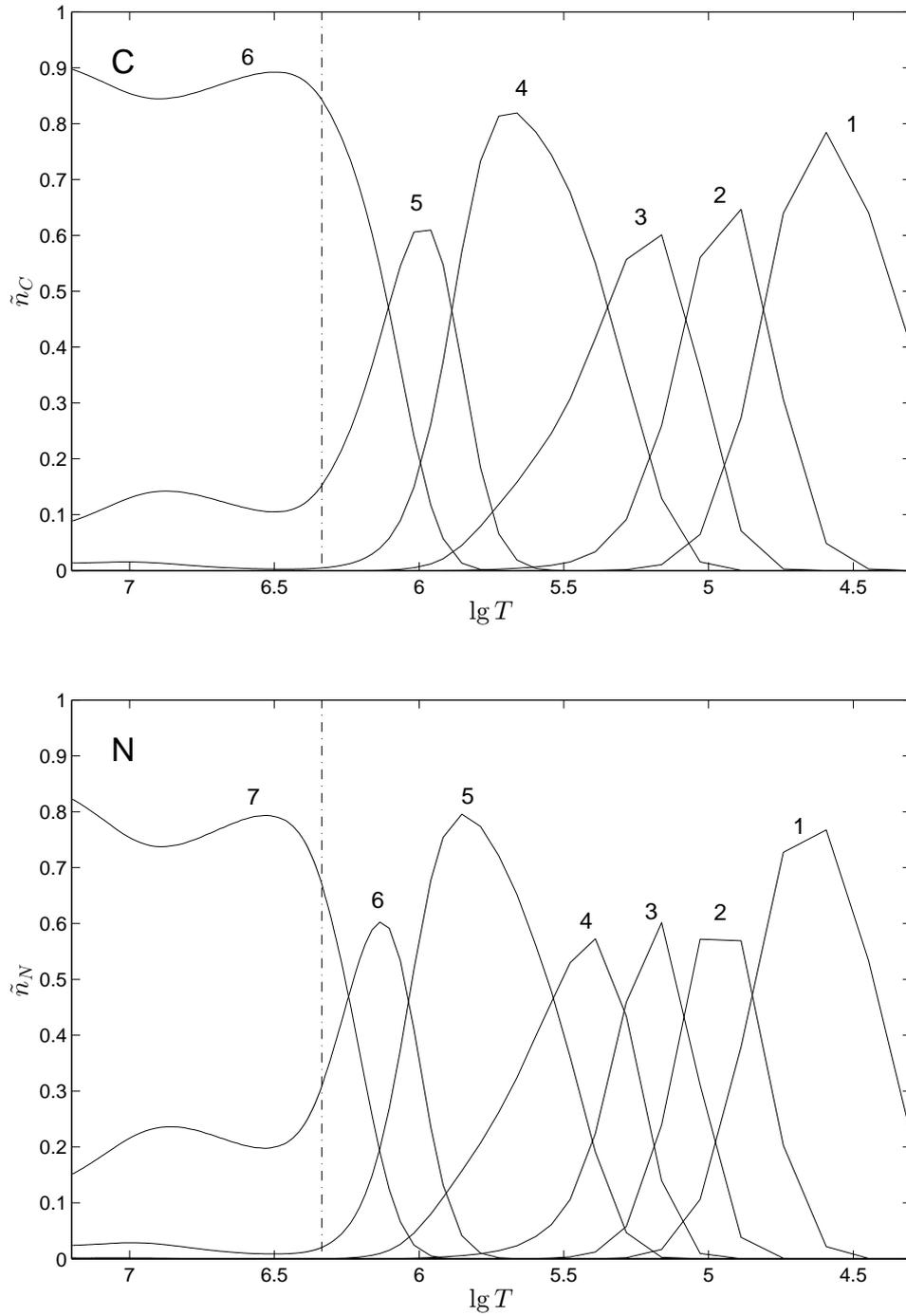


Рис. 4.1. Распределение относительных концентраций \tilde{n}_j^z ионов углерода ($j = 6$) и азота ($j = 7$) в используемой модели современного Солнца. По оси X отложен десятичный логарифм температуры. Штрихпунктирной линией обозначена граница конвективной зоны. Цифры показывают степень ионизации (заряд z) ионов.

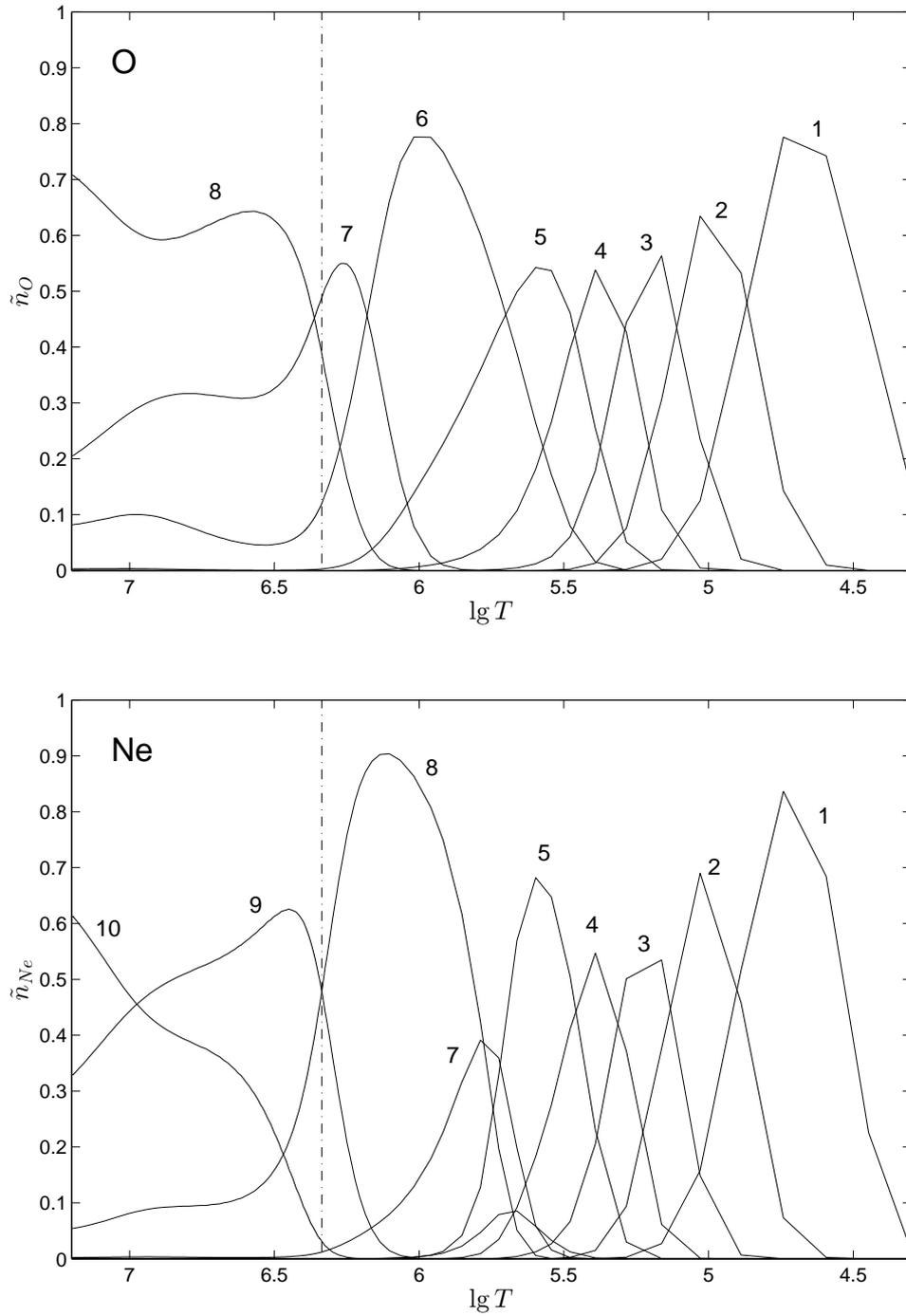


Рис. 4.2. Распределение относительных концентраций \tilde{n}_j^z ионов кислорода ($j = 8$) и неона ($j = 10$) в используемой модели современного Солнца. По оси X отложен десятичный логарифм температуры. Штрихпунктирной линией обозначена граница конвективной зоны. Цифры показывают степень ионизации (заряд z) ионов.

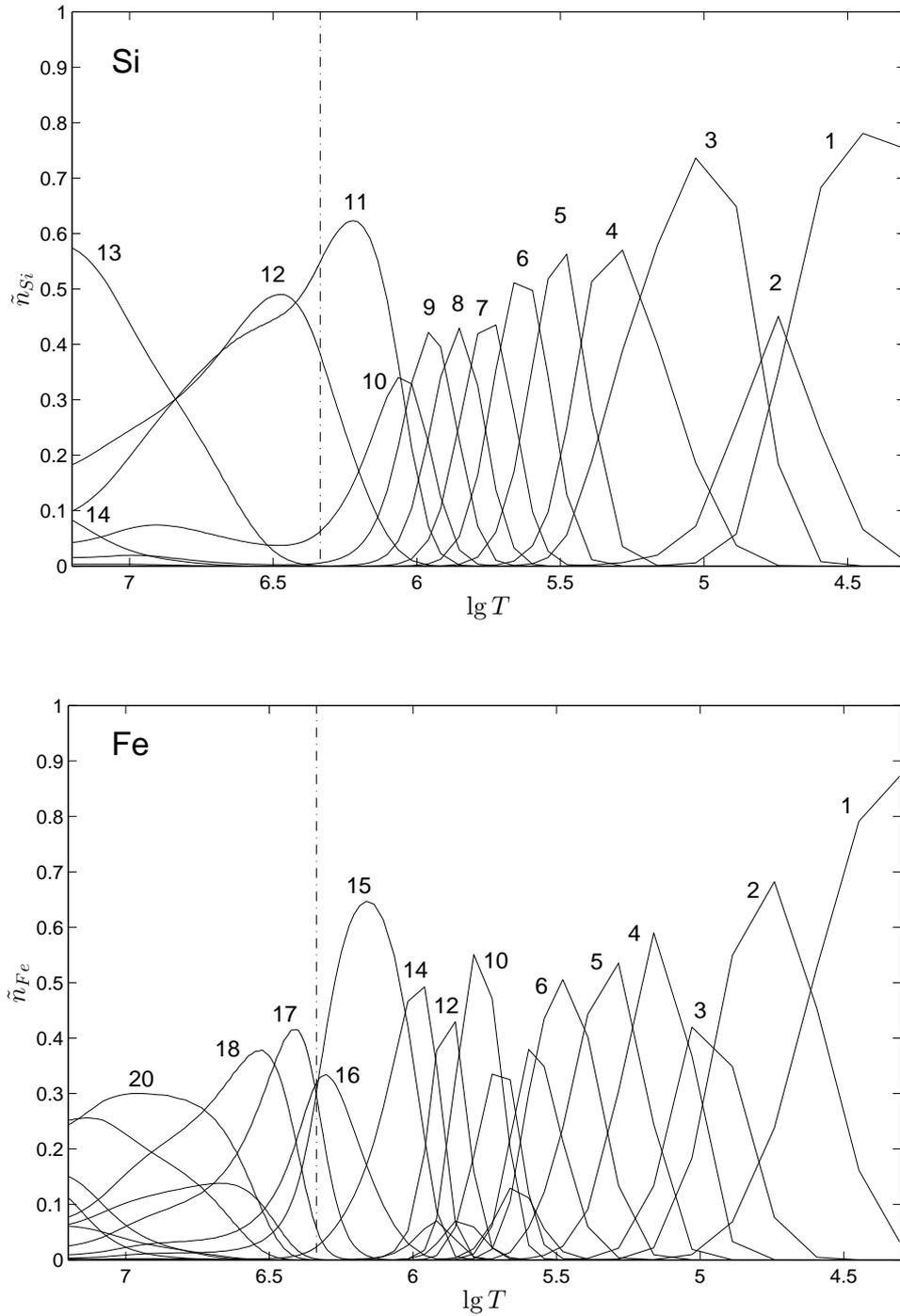


Рис. 4.3. Распределение относительных концентраций \tilde{n}_j^z ионов кремния ($j = 14$) и железа ($j = 26$) в используемой модели современного Солнца. По оси X отложен десятичный логарифм температуры. Штрихпунктирной линией обозначена граница конвективной зоны. Цифры показывают степень ионизации (заряд z) ионов.

стояний ионизации нет точки по радиусу Солнца, в которой соответствующая концентрация ионов была бы больше, чем все остальные. Такая ионизация «как бы» пропускается. В этом случае дисперсия распределения \tilde{n}_j^z увеличивается, и ошибка при усреднении квадрата заряда также растет.

На рисунках 4.1–4.3 приведены ионные распределения шести тяжелых элементов, рассчитанных для модели ASV 721-0001. Явление «пропуска» ионизаций для железа $\tilde{n}_{Fe}^z(r)$ можно видеть на рис. 4.3. Можно увидеть, что доля ионов в состоянии $z = 11$ и 13 никогда не превышает 15% общего числа ионов железа. При этом в точке, где $\tilde{n}_{Fe}^{11}(r)$ максимально, содержание ионов с другими зарядами больше, чем рассматриваемого. Подобное явление можно обнаружить для кремния, тогда как для элементов с меньшим атомным номером оно отчетливо не выделяется.

Остановимся на некоторых особенностях ионизации тяжелых элементов в условиях Солнца. Рассмотрим элементы с двумя электронными оболочками — K и L, то есть C, N, O и Ne из изучаемого набора. Ионизация электронов с L-оболочки происходит постепенно, и приведенная энергия ионизации ($\hat{I}_j^z = I_j^z / j^2$) в изоэлектронной последовательности растет с небольшим декрементом $\Delta \hat{I}_j^z \leq 1$ практически одинаково для всех элементов. В результате, средний заряд для этих элементов во внешней части конвективной зоны довольно близок. Однако декремент потенциала ионизации $\Delta \hat{I}_j^z$ резко возрастает (почти в десять раз), когда заряд иона равен $z = j - 2$, и должны ионизоваться электроны с K-оболочки. Это ведет к нескольким следствиям. Во-первых, образуется область, где ионы накапливаются в состоянии с $z = j - 2$, то есть $\tilde{n}_j^{j-2} \simeq 1$. В этой области средний заряд оказывается постоянным по радиусу. Во-вторых, при достижении соответствующей температуры, ионизация K-электрона оказывается четко выраженной в термодинамических параметрах, например, проявляясь как понижение показателя

адиабаты. В третьих, после ионизации К-электронов ион может рассматриваться как гелиево- или водородоподобный, и довольно быстро (по радиусу Солнца) достигает некоторого предела, не равного полному заряду.

Из более тяжелых ионов наибольший интерес представляет железо. Для него ионизация К-электронов вообще не достигается в условиях Солнца. Существует несколько менее выраженный барьер при ионизации 16-кратно ионизованного железа ($z = 10$, то есть ион подобен Ne), который проявляется похожим образом. Разница состоит в том, что такой «промежуточный» барьер слабее выражен, а также в том, за его пределами ионизация не выходит на предельный уровень, а продолжает постепенно нарастать, аналогично ионизации L-электронов у неона.

При рассмотрении ионизации в недрах Солнца следует иметь в виду разницу температурных градиентов в различных областях. В самых внешних областях конвективной зоны градиент температуры высок и ионизация происходит очень быстро для всех элементов. В адиабатической (основной) части конвективной зоны градиент температуры имеет почти постоянное значение, то есть $(d \lg T / d \lg \rho)_S = 2/3$. В области лучистого переноса ниже конвективной зоны градиент становится еще меньше, и химический потенциал электронов может уменьшаться с глубиной. Если ионизация насыщенная (как у элементов группы C–Ne), в этих областях степень ионизации может даже убывать с глубиной (если не учитывать зависимость внутренней статистической суммы от температуры и плотности). При ненасыщенной ионизации (как у железа и кремния) степень ионизации растет с глубиной, однако медленнее, чем в конвективной зоне.

Для оценки скорости диффузионного осаждения важно отметить, что полная ионизация для CNO происходит внутри конвективной зоны, для Ne — чуть глубже основания конвективной зоны. Наиболее важным для расчетов

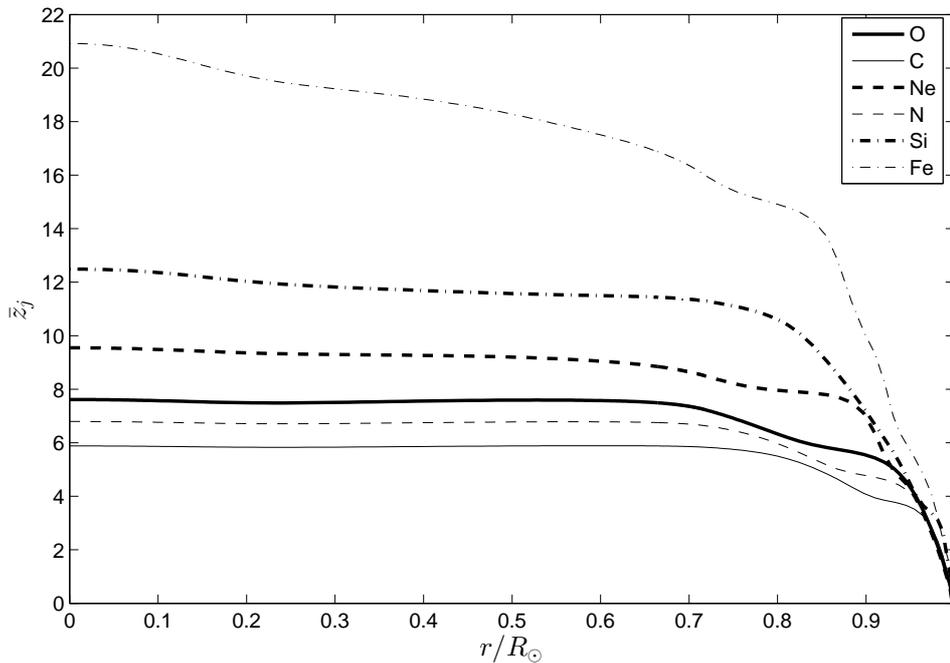


Рис. 4.4. Распределение среднего заряда элементов по радиусу в модели современного Солнца. Вертикальная штрихпунктирная линия обозначает границу конвективной зоны.

диффузии является величина заряда в лучистой зоне, и для указанных четырех ионов эта величина почти равна заряду ядра j . Для кремния и железа это не так, причем их средний заряд постепенно растет с глубиной (рис. 4.4). Любопытной особенностью ионизации кремния является то, что его К-барьер простирается практически по всей лучистой зоне, так и не будучи преодолен до самого центра.

Рассмотрим возможные физические механизмы влияния ионизации тяжелых элементов на скорость диффузионного осаждения. Первый эффект, с учетом которого мы проводим наши вычисления, состоит в том, что скорость бародиффузионного осаждения зависит от заряда (через сечение столкновений и взаимодействие с электронным полем). В действительности, зависимость сложная, но указанная пропорциональность является доминирующей.

В результате, скорости осаждения в каждой точке должны рассчитываться с учетом заряда иона в данных условиях. Дополнительным упрощением является использование приближения среднего заряда и подстановка этой величины в формулы для оценки скорости. Более правильным было бы вычисление скоростей осаждения для каждого иона в отдельности, а затем нахождение средней скорости по всем ионам данного элемента. Такой подход был применен в [26]. Однако корректное моделирование диффузии элементов, концентрация которых резко меняется на границах ионизации, связано с большими трудностями. Следует учесть также, что эти границы не постоянны, а смещаются с течением времени. С учетом особенностей распределения по состояниям ионизации ионов, описанного выше, мы полагаем, что ошибка приближения *среднего заряда* не превышает нескольких процентов величины.

Второй физический эффект частичной ионизации связан с наличием градиента степени ионизации по радиусу. Физическое содержание данного эффекта близко к явлению амбиполярной диффузии. Более точно, этот эффект возникает из-за наличия градиента концентрации электронов, а не отдельных ионов. Градиент химического потенциала электронов ведет к диффузионному потоку электронов, который увлекает за собой ионы соответствующего заряда. Однако в рассматриваемой нами задаче общее количество электронов определяется основными, почти полностью ионизованными компонентами — водородом и гелием, поэтому градиент электронной концентрации, вызванный, например, градиентом заряда железа, исключительно мал. Кроме того, для наиболее важной области — лучистой зоны — градиенты заряда ионов особенно малы, как вследствие малого градиента температуры, так и вследствие особенностей ионизации, описанных выше.

Описанный эффект градиента заряда нельзя учесть с помощью рассмотрения диффузии отдельных ионов как независимых частиц. Градиент кон-

центрации отдельного иона z_j может быть весьма высок (в области быстрой ионизации) и он не будет компенсироваться градиентом иона $z_j + 1$, как следует из условия сохранения общего числа ионов.

Третий эффект — это влияние диффузионного потока на состояние ионизационного равновесия. Другими словами, ионизационное равновесие предполагает, что количество ионизаций с ионами z_j уравнивается количеством рекомбинаций ионов $z_j + 1$, из чего находятся соответствующие концентрации n_j^z и n_j^{z+1} . Если существуют внешние потоки ионов различных степеней ионизации, то уравнение баланса уже не будет выполняться. В результате стационарные концентрации становятся другими. Это и следует рассматривать как диффузионное смещение ионизационных равновесий. Однако из-за весьма малой скорости диффузии в условиях Солнца мы также игнорируем этот эффект в наших расчетах. Данное приближение можно назвать приближением «замороженного» состояния ионизации, — в предположении, что ионизационные концентрации в каждой точке модели не зависят от того, есть или нет диффузионный поток любого вида.

Четвертый эффект состоит в изменении сечения столкновений (интеграла столкновений) с учетом столкновений, ведущих к ионизации. Другими словами, помимо упругих столкновений, необходимо учесть неупругие (рекомбинационные), а также трехчастичные и так далее. Математические модели для учета данного эффекта автору неизвестны.

Наконец, можно назвать пятый эффект, ведущий к изменению скорости диффузии. Перенос ионов нужно рассматривать как перенос частиц с внутренней энергией, дополнительной к кинетической. Вполне возможно, что такой перенос внутренней энергии (с последующей ее освобождением в реакции ионизации) может внести существенный вклад в тепловые члены в уравнениях Бюргера (см. главу 1), и повлиять на оценку скорости термодиффузии.

4.3. Результаты расчетов

4.3.1. Эффект увлечения диффузионными потоками. При рассмотрении диффузии тяжелых элементов, являющихся малой примесью на фоне основных компонентов, водорода и гелия, возникает эффект увлечения данной примеси основными диффузионными потоками. Этот эффект можно себе представить как совместное действие диффузионного осаждения примеси на фоне водорода с одной стороны, и на фоне гелия в другой. В первом случае эффект увлечения водородом будет направлен вверх, то есть скорость осаждения элемента в системе центра масс становится меньше, чем при отсутствии диффузионного потока самого водорода. Во втором случае — наоборот, гелий увлекает элемент за собой.

Численные оценки показывают, что эффект увлечения гелием сильнее, чем эффект увлечения водородом. Это можно объяснить более эффективной передачей импульса при столкновениях с гелием, так как массы тяжелых элементов ближе к гелию, чем к массе протона. Таким образом, эффект увлечения увеличивает скорость осаждения элементов. На рис. 4.6–4.8 представлены диффузионные потоки осаждения тяжелых элементов с выделением эффектов увлечения, термо- и бародиффузии отдельно.

4.3.2. Влияние частичной ионизации на скорость диффузии. Проблема учета частичной ионизации при вычислении скорости диффузии в общем случае весьма сложна. Выше были перечислены возможные механизмы взаимовлияния процессов ионизации и диффузии. В своих расчетах мы ограничились лишь главным механизмом, связанным с тем, что частично ионизованный ион имеет атомную массу A_i , однако его заряд z_i может и не быть равен атомному номеру i .

Для вычисления среднего заряда иона в состоянии частичной ионизации

использовались распределения по ионным состояниям, вычисленные как дополнения к таблицам уравнения состояния SAHA-S ([59]). В результате, в любой точке, принадлежащей плоскости $T - \rho$, в области, покрываемой уравнением состояния, нам известны распределения концентраций ионов тех элементов, которые учитывались в расчетах уравнения состояния. Такими элементами являются (помимо водорода и гелия) C, N, O, Ne, Si, Fe, для которых были выполнены наши оценки скорости диффузии. В расчетах использовался только средний заряд для данного иона $\bar{z}_i(r)$.

В использованной схеме расчетов заряд иона встречается в двух местах. Во-первых, в выражении для силы со стороны электрического поля E , которая пропорциональна заряду иона. Действие этой силы вполне аналогично силе тяжести, а с учетом условий сохранения массы и заряда можно показать, что эта сила (для диффузии тяжелых ионов на фоне легких) действует в противоположную сторону. Таким образом, данная сила замедляет осаждение тяжелых элементов, а с уменьшением заряда она становится меньше, то есть осаждение ускоряется. Во-вторых, заряд входит в сечение столкновений иона, которое пропорционально квадрату заряда z_i^2 . Поскольку коэффициент сопротивления K_{st} с уменьшением заряда становится меньше, то осаждение элементов ускоряется. Несмотря на более сильную зависимость от заряда, влияние коэффициента сопротивления на скорость осаждения не столь значительно, как первого эффекта наведенного электрического поля. Ясно, что как бы ни менялся заряд, длина свободного пробега все равно останется конечной, то есть частица будет испытывать столкновения и терять импульс, направленный вниз.

В работе [19] учитывалось отличие ионных состояний от полной ионизации, в частности, для железа. Однако при этом заряд иона принимался постоянным по радиусу, и равным примерно заряду ионов железа в центре

Солнца. Мы использовали средний заряд иона, вычисленный в каждой точке в соответствии с данными расширенного уравнения состояния и температурами и плотностями, взятыми из модели современного Солнца ASV 721-0001.

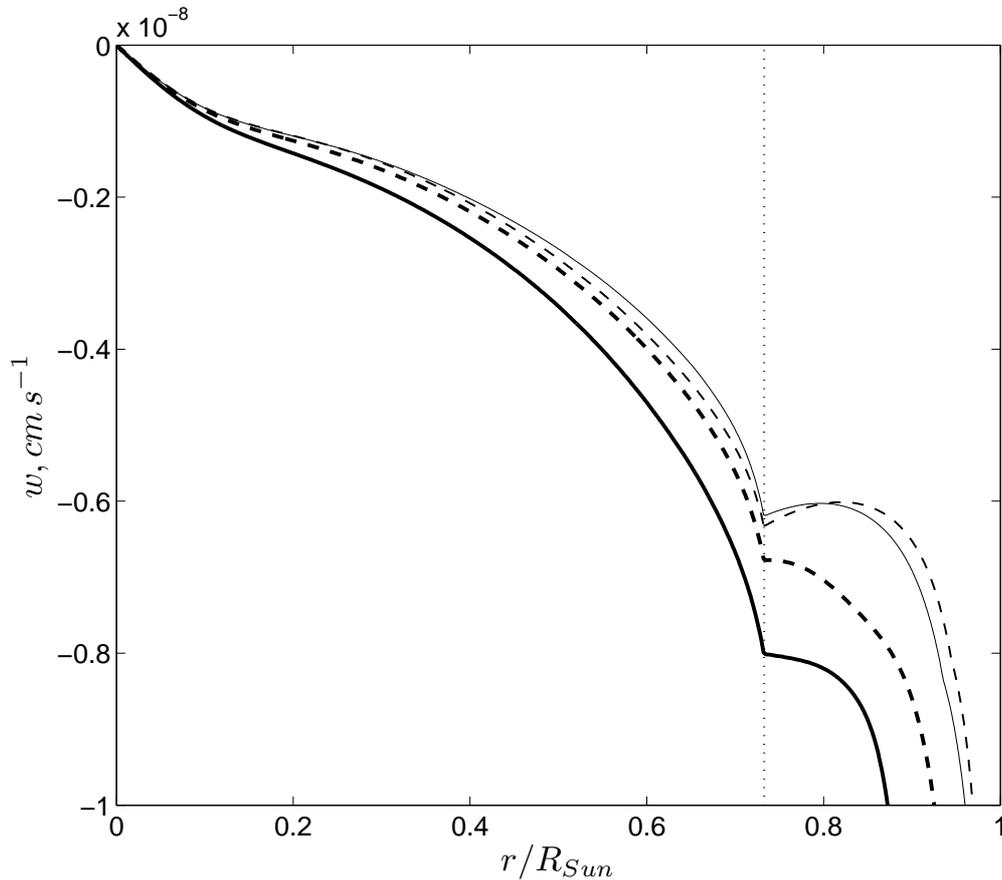


Рис. 4.5. Диффузионная скорость w для кислорода и железа (пунктир и сплошная линия соответственно) при учете (тонкие линии) и без учета (толстые линии) частичной ионизации элементов. Вертикальная пунктирная линия обозначает границу конвективной зоны.

Результаты показаны на рис. 4.5, где диффузионные скорости для железа и кислорода показаны как функции радиуса модели Солнца. Для кислорода эта поправка не велика, что связано с тем, что кислород почти достигает полной ионизации (точнее, состояния со средним зарядом, близким к 6) уже в конвективной зоне. В более глубоких слоях его заряд почти не меняется,

то есть общее отличие от предположения о полной ионизации незначительно. Для железа этот эффект значительно более выражен. Заряд железа у дна конвективной зоны около 14, а в центре этот заряд приближается к 21, то есть отличается от 26. Кроме того, в любых слоях в недрах Солнца существует градиент заряда ионов железа, то есть степень ионизации растет с температурой.

В результате, эффект неполной ионизации для железа в отношении скорости диффузии имеет относительный характер — разница в скоростях больше там, где максимальны сами скорости. Как обсуждалось в [60], сама диффузионная скорость определяется бародиффузией и, тем самым, профилем ускорения силы тяжести в модели. Что неплохо согласуется с полученными оценками для железа. Для получения изменения содержания элемента мы должны воспользоваться уравнением неразрывности для данного компонента.

4.3.3. Влияние потока излучения на диффузионное осаждение элементов. Прежде чем рассмотреть результаты расчетов скорости диффузии с учетом взаимодействия с полем излучения, рассмотрим физическую модель данного процесса. В недрах звезды вещество находится в поле излучения, переносящем поток энергии из недр к поверхности. В то же время, в любой точке предполагается выполнение ЛТР, что означает взаимодействие поля излучения и частиц вещества и одинаковую температуру излучения и вещества. Воздействие такого потока излучения на процессы переноса в газе вполне аналогично эффекту термодиффузии. При классической термодиффузии поток тепла, переносимый молекулярной теплопроводностью, влияет на скорость переноса импульса в диффузионных потоках. Наиболее наглядно это выражается в уравнениях линейной неравновесной термодинамики,

когда, следуя [61], можно записать поток тепла в виде

$$J_q = -\kappa \nabla T - L_{q1} A(n_i, \mu_i) \nabla n_1 \quad (4.2)$$

(мы опускаем полное выражение для A). А для потока вещества тогда справедливо

$$J_1 = -\frac{L_{1q}}{T^2} \nabla T - D_{11} \nabla n_1, \quad (4.3)$$

причем $L_{q1} = L_{1q}$ как выражение принципа взаимности Онзагера. В нашем случае также логично предположить, что в выражении для диффузионной скорости должен присутствовать член, связанный с потоком тепла, переносимым излучением. Наиболее просто обстоит дело с общим воздействием потока излучения на массу вещества в целом. Для того, чтобы оценить такой эффект фотолевитации, достаточно расписать уравнение гидростатического равновесия в виде

$$\nabla P_{gas} + \nabla P_{rad} = \mathbf{g} \rho. \quad (4.4)$$

Слагаемое в левой части ∇P_{rad} описывает «подъемную силу» со стороны излучения, действующую на элемент вещества. Отметим, что равновесная модель строится на основании полного давления, и данный эффект уже оказывается учтенным при построении модели.

Ясно, что подобный эффект возникает из-за разницы температур излучения на границах рассматриваемого объема, то есть из-за градиента температуры. Так же ясно, что сила фотолевитации не зависит от непрозрачности (при выполнении ЛТР), а определяется градиентом температуры. Наконец, поправка на наличие поля излучения может быть выражена как поправка к величине ускорения силы тяжести и поэтому называется *лучистым ускорением*.

В нашем случае необходимо знать соответствующие лучистые ускорения по отношению к отдельному компоненту смеси g_s^{rad} . Вычисление лу-

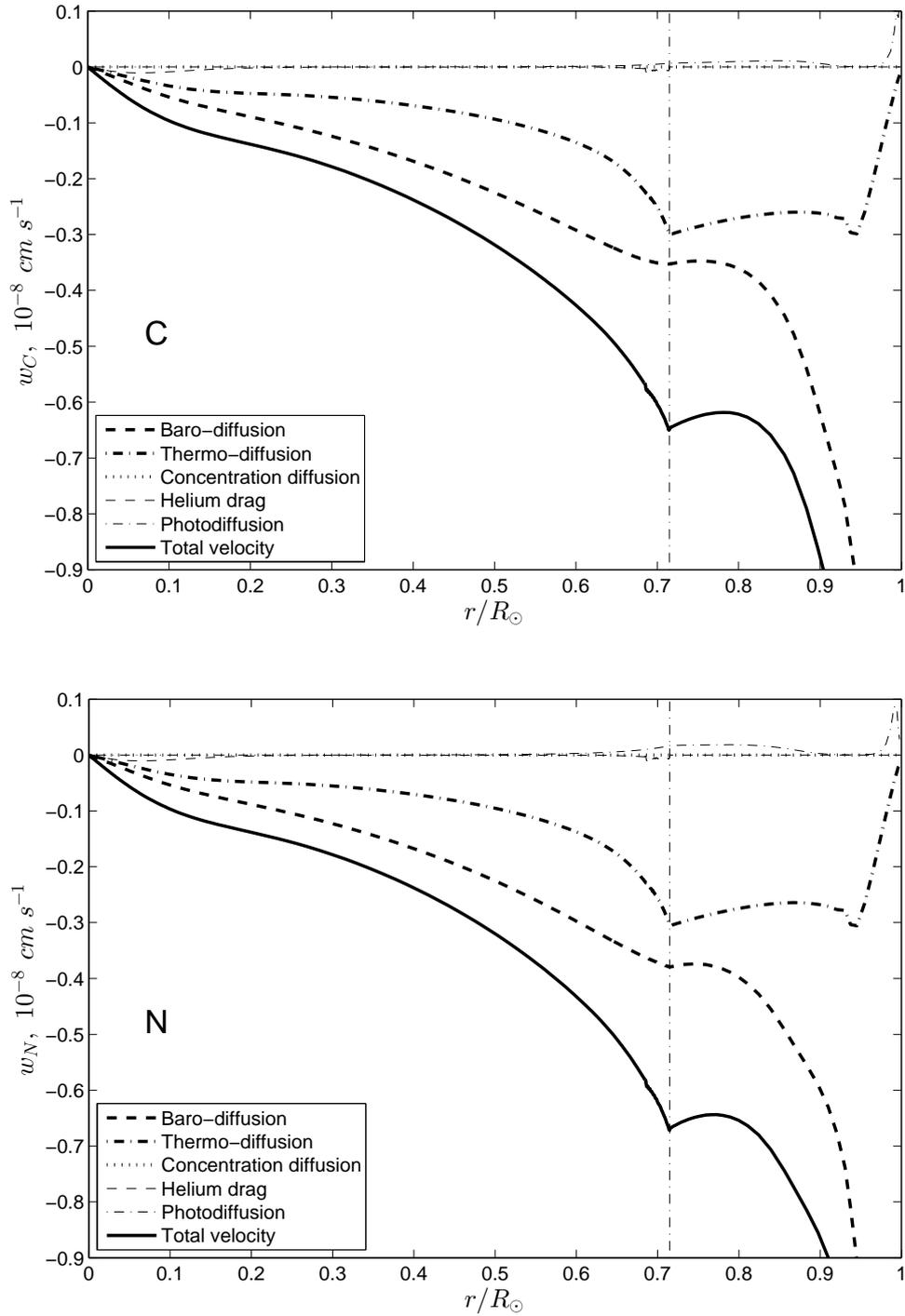


Рис. 4.6. Вклад различных факторов в скорость диффузии углерода и азота. Штрихпунктирной линией обозначена граница конвективной зоны.

Расчеты проведены для современного Солнца.

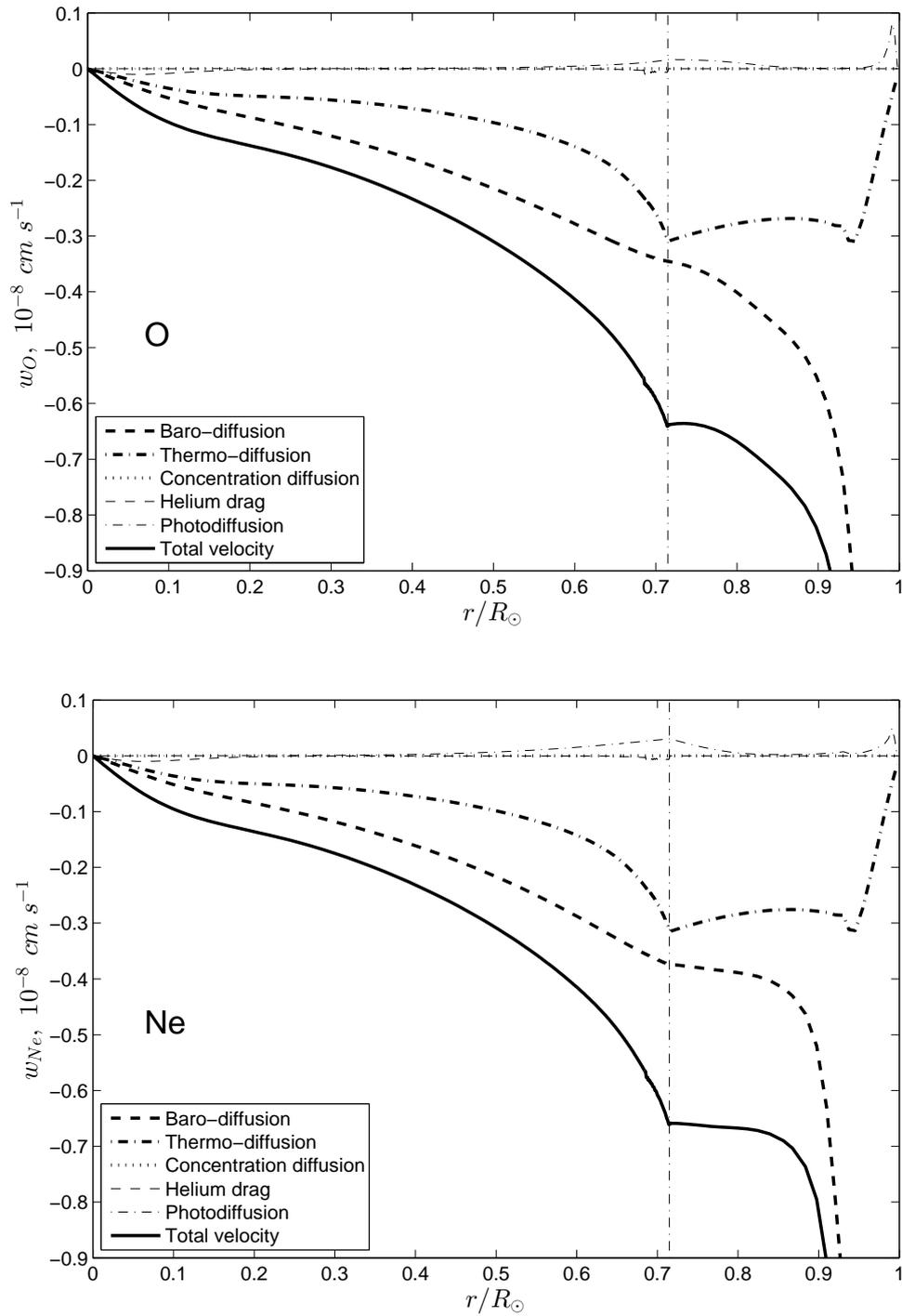


Рис. 4.7. Вклад различных факторов в скорость диффузии кислорода и неона. Штрихпунктирной линией обозначена граница конвективной зоны.

Расчеты проведены для современного Солнца.

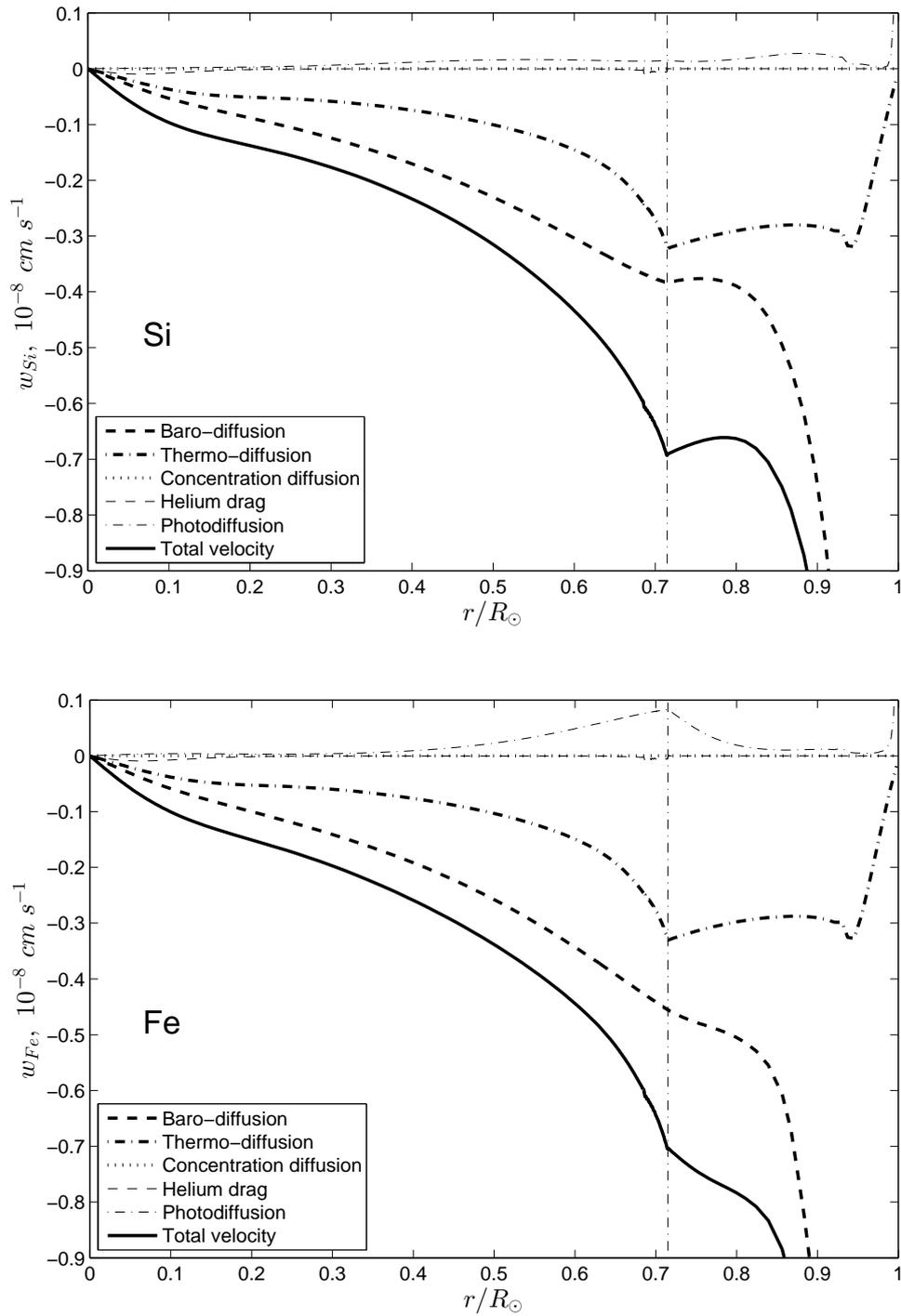


Рис. 4.8. Вклад различных факторов в скорость диффузии кремния и железа. Штрихпунктирной линией обозначена граница конвективной зоны.

Расчеты проведены для современного Солнца.

чистых ускорений эквивалентно вычислению парциального коэффициента непрозрачности κ_s/κ , то есть доли энергии, поглощенной веществом благодаря взаимодействию фотонов с конкретным сортом иона. Мы использовали результаты [62] и [63], откуда коэффициенты лучистого ускорения были взяты. Сила, действующая на весь элемент, определяется градиентом лучистого давления ∇P_{rad} , а ее часть, действующая на один компонент, равна $(\kappa_s/\kappa) \nabla P_{rad}$. В уравнение для импульса добавляется коррекция к ускорению силы тяжести, и лучистое ускорение оказывается умноженным на ρ/ρ_s . При суммировании уравнений переноса импульса по всем типам частиц, общий эффект в уравнении гидростатического равновесия оказывается равным градиенту лучистого давления.

В нашей работе мы рассматриваем этот эффект только для тяжелых элементов. Отметим также, что в конвективной зоне упомянутый эффект должен вычисляться с учетом доли лучистого переноса в общем потоке энергии, то есть он пропорционален величине $F_{rad}/F_{tot} = \nabla/\nabla_{rad}$ (здесь ∇ означает логарифмический градиент температуры по давлению), которая меньше единицы, иногда очень значительно (например, во внешних частях конвективной зоны). Другим упрощением является игнорирование теплового потока, переносимого диффузией в процессе поглощения потока лучистой энергии. Этот эффект вполне аналогичен молекулярной теплопроводности в классической термодиффузии и выражается в уравнениях переноса импульса и энергии в виде членов r_t . Хотя, скорее всего, для рассматриваемого случая малых примесей такой эффект мал, однако он мог бы оказать влияние на корректную оценку скорости термодиффузии. На рис. 4.9 приведены отношения лучистых ускорений к ускорению силы тяжести для тяжелых элементов вдоль данных по модели Солнца. Тот факт, что лучистое ускорение для железа почти на порядок больше, чем для кислорода, отражает отношение содержаний

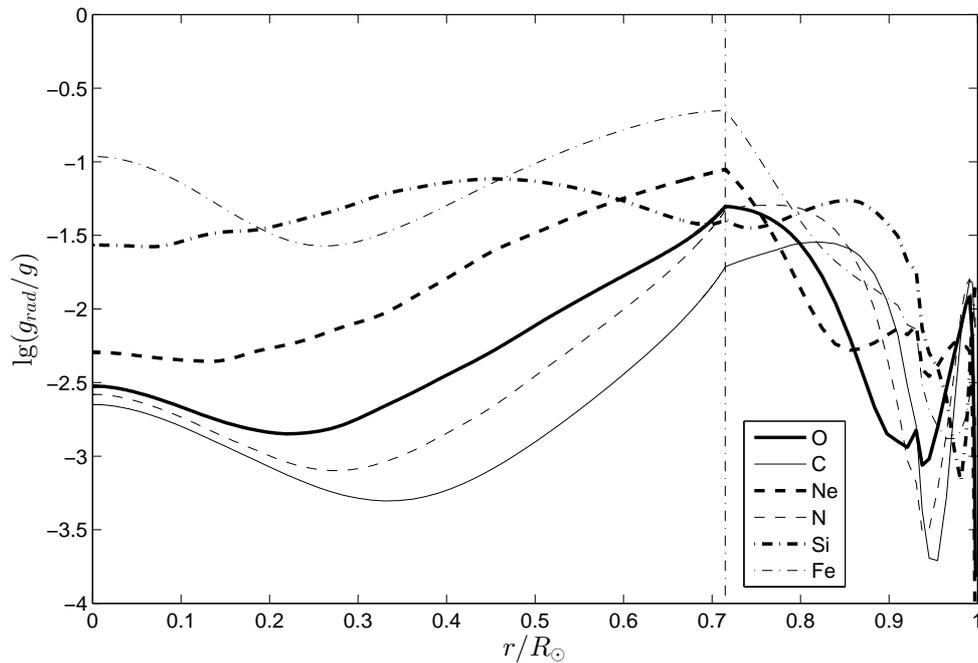


Рис. 4.9. Отношение лучистого ускорения к ускорению свободного падения в модели современного Солнца для шести тяжелых элементов.

Штрих-пунктирной линией обозначена граница конвективной зоны.

компонентов, хотя вклад частично ионизованного железа в общую непрозрачность также больше, чем для кислорода. С понижением температуры влияние лучистого ускорения растет, поскольку растет вклад поглощения в линиях. Однако ясно, что общий эффект поглощения не слишком значителен и ограничивается максимум десятью–двадцатью процентами по отношению к ускорению силы тяжести для железа, например. Это значит, что скорость осаднения железа будет на $\leq 20\%$ меньше, чем без учета такого эффекта.

4.3.4. Скорости диффузии и профили содержания тяжелых элементов. Расчеты показывают, что даже для элементов C, N, O, ионизация которых близка к полной, учет заряда ведет к изменению диффузионной скорости, хотя и на небольшую величину. Для частично ионизованных компо-

нентов (Fe и Si) изменение скорости осаждения хотя и больше, чем для полностью ионизованных, но не в той степени, в которой изменяется $\delta Z = Z_i - \bar{z}_i$. То есть для железа $\delta Z \approx 5$, а для углерода $\delta Z \approx 0.1$, тогда как изменения скорости осаждения отличаются не более, чем в десять раз. В любом случае, учет неполной ионизации элемента ускоряет его осаждение к центру. Поскольку теперь появилась новая зависимость скорости осаждения от δZ , которая сама по себе растет с ростом атомного номера элемента, то скорость осаждения для тяжелых элементов растет с атомным номером, причем этот рост вполне заметный.

Для иллюстрации данного вывода показана величина осаждения для всех исследованных элементов из конвективной зоны (рис. 4.10) и добавление содержания в центре (рис. 4.11) за время эволюции Солнца в различных приближениях.

Итоговые профили содержания тяжелых элементов в современном Солнце показаны на рис. 4.12–4.14. Приведены результаты расчетов в трех различных приближениях: а) полная ионизация элементов; б) приближение среднего заряда в каждой точке по радиусу, без учета фотодиффузии; в) приближение среднего заряда в каждой точке по радиусу, с учетом фотодиффузии. Начальное содержание по массе для каждого тяжелого элемента полагалось равным 0.02 — для удобства сравнения результатов.

Эффект фотодиффузии, или взаимодействия с потоком излучения, уменьшает эффект бародиффузионного осаждения тяжелых элементов, и особенно значителен для частично ионизованных элементов. Удалось выделить два момента, не отмеченных в других исследованиях. Эффект фотодиффузии вычисляется на основании лучистого потока энергии. Это значит, что в центральных областях Солнца должна учитываться зависимость текущей светимости L_r от радиуса, при том, что светимость здесь $L_r < L_\odot$, а в кон-

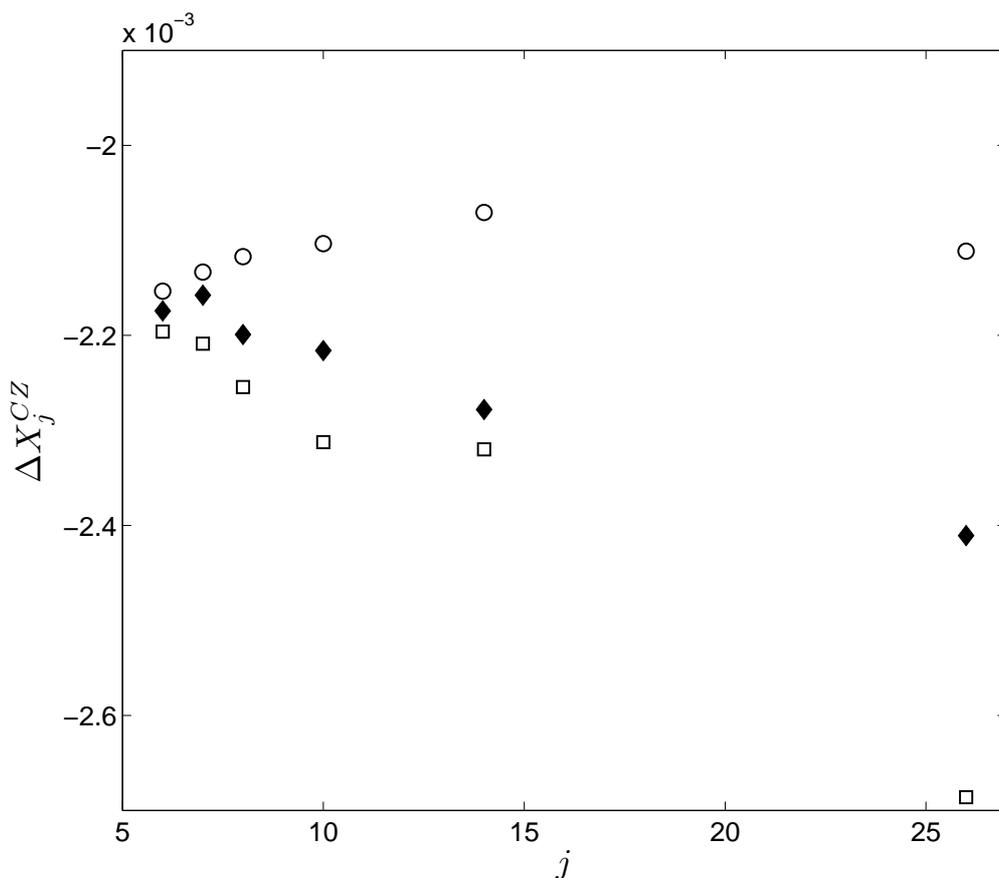


Рис. 4.10. Изменение массовой доли тяжелых элементов C, N, O, Ne, Si и Fe в конвективной зоне ΔX_j^{CZ} за время эволюции Солнца. По оси абсцисс отложен порядковый номер элементов. Круги соответствуют величинам ΔX_j^{CZ} , рассчитанным при $z = j$ и без учета фотодиффузии, квадратики — величинам, рассчитанным при $z = \bar{z}_j(r)$ и без учета фотодиффузии, ромбики — величинам, рассчитанным при $z = \bar{z}_j(r)$ и с учетом фотодиффузии. Начальное содержание каждого элемента полагалось равным 0.02.

вективной зоне — тот факт, что лучистый поток существенно меньше полного. Эффект фотодиффузии оказался не очень значительным. Максимален он для железа, и может привести к уменьшению эффективного ускорения свободного падения почти на 20% в отдельных областях. Для остальных элемен-

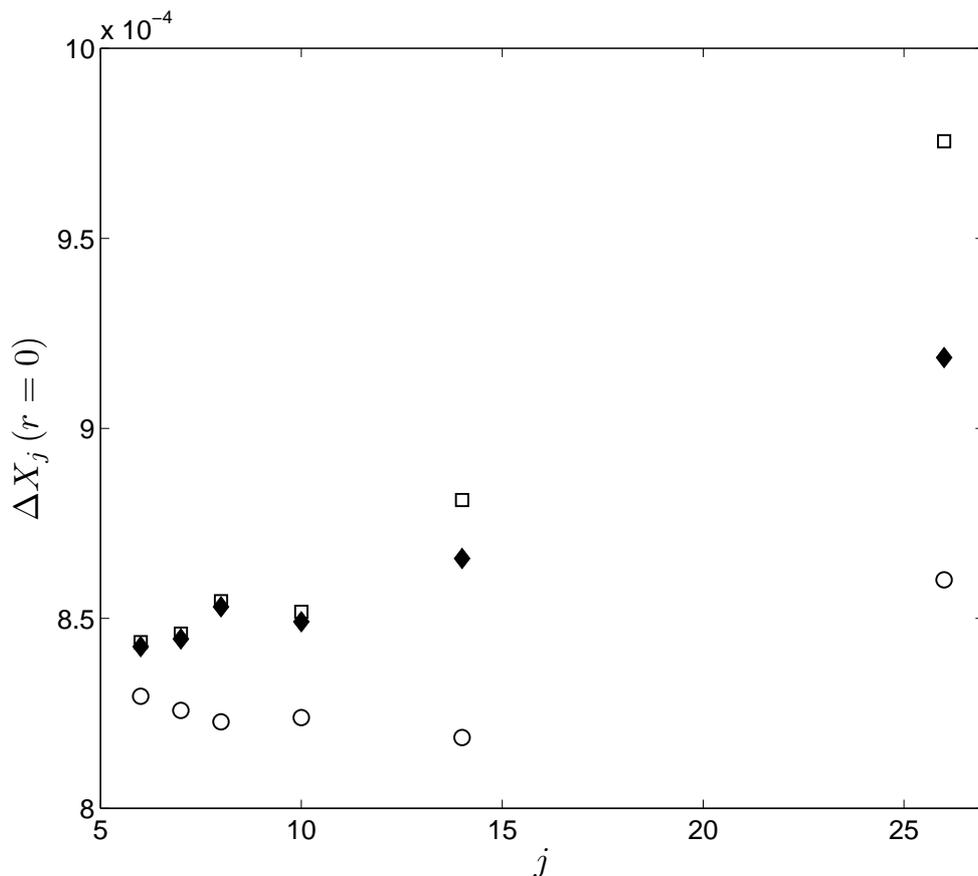


Рис. 4.11. Изменение массовой доли тяжелых элементов C, N, O, Ne, Si, Fe в центре Солнца $\Delta X_j(r=0)$ за время эволюции Солнца. По оси абсцисс отложен порядковый номер элементов. Круги соответствуют величинам $\Delta X_j(r=0)$, рассчитанным при $z=j$ и без учета фотодиффузии, квадратики — величинам, рассчитанным при $z=\bar{z}_j(r)$ и без учета фотодиффузии, ромбики — величинам, рассчитанным при $z=\bar{z}_j(r)$ и с учетом фотодиффузии. Начальное содержание каждого элемента полагалось равным 0.02.

тов он еще меньше. Существовали предположения, что фотоэффект может оказаться очень сильным в конвективной зоне, приводя к полной «компенсации» силы тяжести для отдельных компонентов. Однако в наших расчетах, с учетом доли энергии, переносимой конвекцией, ничего подобного не обна-

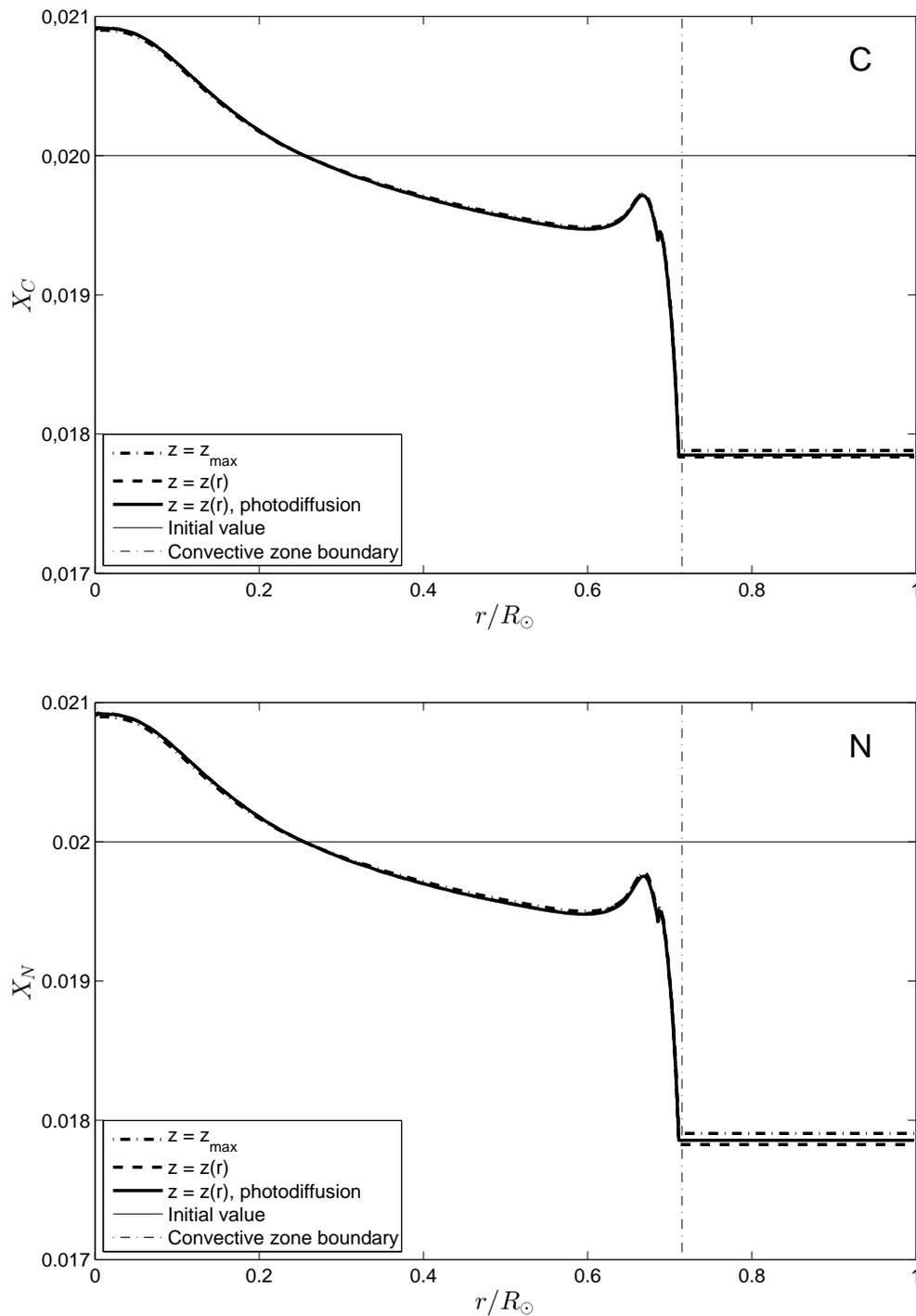


Рис. 4.12. Профили углерода и азота в современном Солнце, рассчитанные в трех приближениях: а) полная ионизация элементов (штрихпунктирная линия); б) приближение среднего заряда в каждой точке по радиусу, без учета фотодиффузии (штриховая линия); в) приближение среднего заряда в каждой точке по радиусу, с учетом фотодиффузии (сплошная линия).

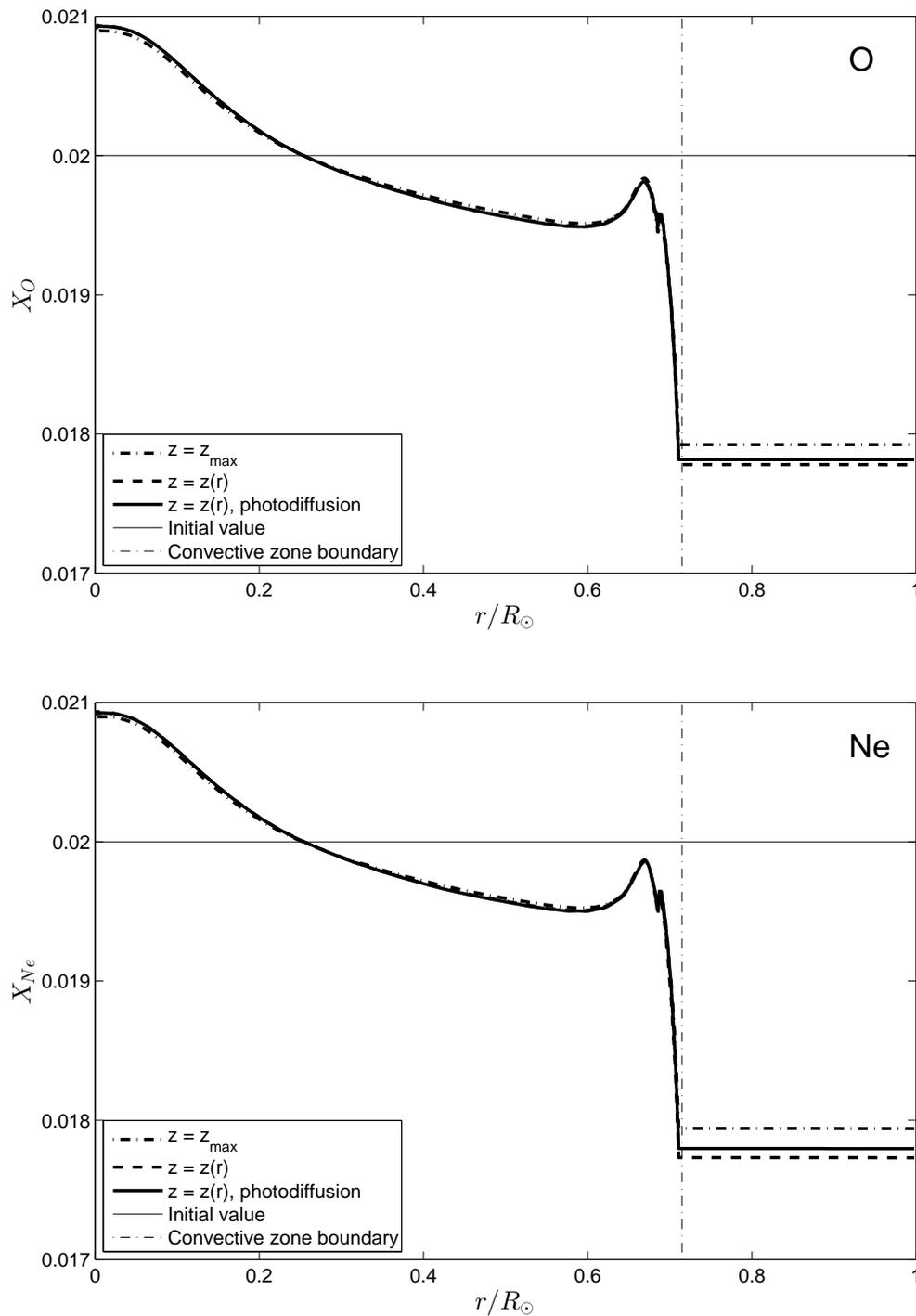


Рис. 4.13. Профили кислорода и неона в современном Солнце, рассчитанные в трех приближениях: а) полная ионизация элементов (штрихпунктирная линия); б) приближение среднего заряда в каждой точке по радиусу, без учета фотодиффузии (штриховая линия); в) приближение среднего заряда в каждой точке по радиусу, с учетом фотодиффузии (сплошная линия).

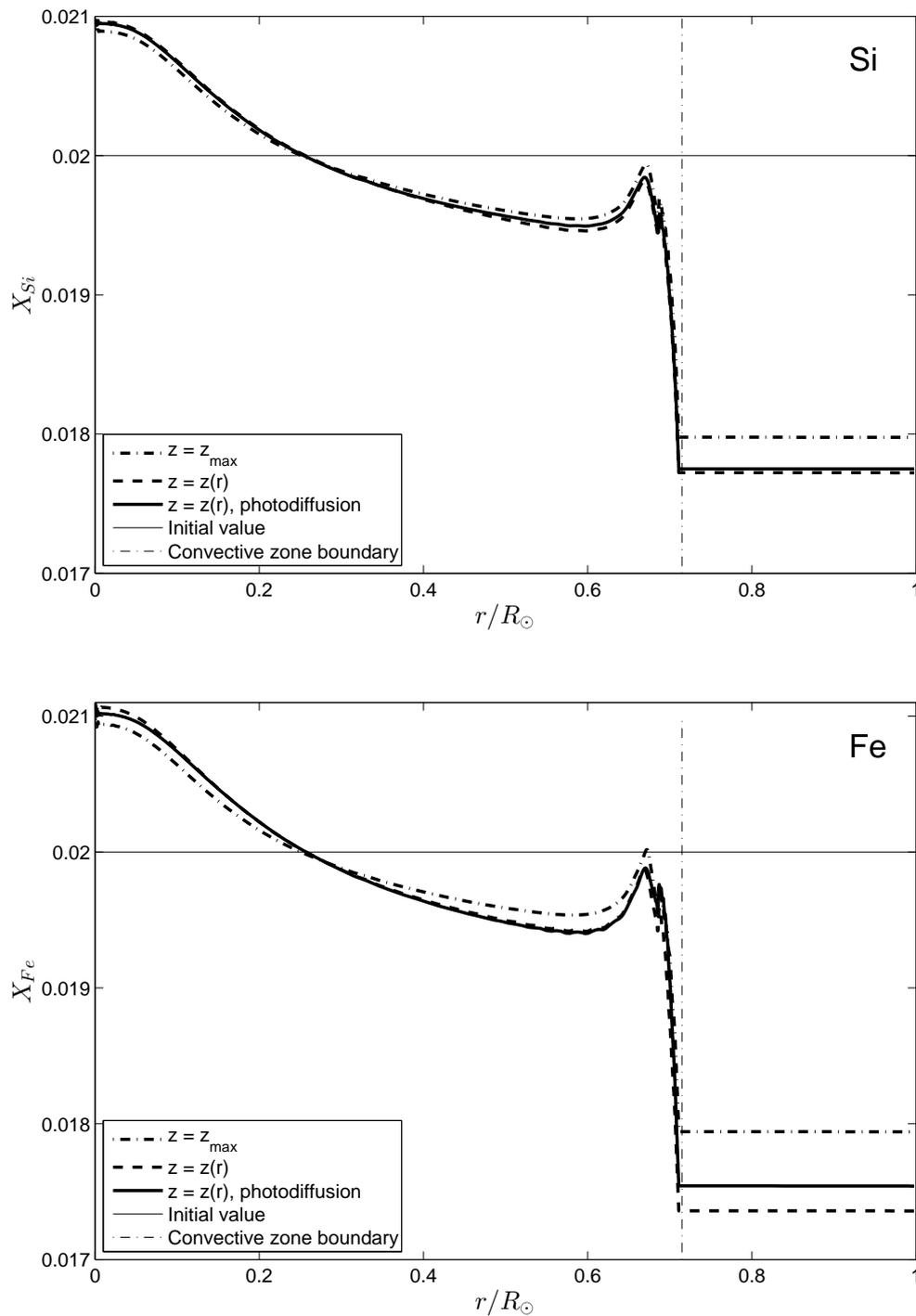


Рис. 4.14. Профили кремния и железа в современном Солнце, рассчитанные в трех приближениях: а) полная ионизация элементов (штрихпунктирная линия); б) приближение среднего заряда в каждой точке по радиусу, без учета фотодиффузии (штриховая линия); в) приближение среднего заряда в каждой точке по радиусу, с учетом фотодиффузии (сплошная линия).

руживается.

Расчеты показывают относительную стабильность содержания тяжелых элементов в ходе эволюции Солнца (рис. 4.15), а также примерное равенство относительного изменения содержания в конвективной зоне тяжелых элементов и гелия.

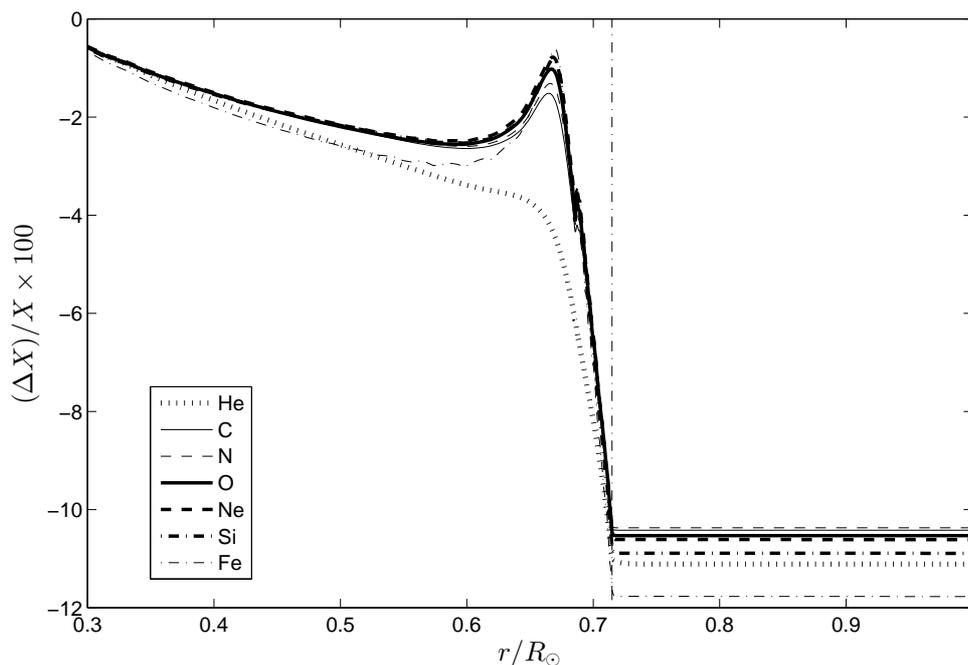


Рис. 4.15. Осаждение тяжелых элементов и гелия из конвективной зоны

Солнца на момент $t = 4.6$ млрд лет в процентах к их начальному содержанию. Расчеты для тяжелых элементов проведены в приближении среднего заряда в каждой точке по радиусу и с учетом фотодиффузии.

Осаждение тяжелых элементов в конвективной зоне не превышает нескольких процентов, то есть пренебрежимо мало по сравнению с возможной ошибкой определения их содержания. Поскольку в процессе вычисления модели на содержание тяжелых элементов не накладывается модельных или эволюционных ограничений, то изменения в таких пределах могут быть отнесены как к начальному, так и к современному содержанию, без принципиаль-

ных изменений в структуре моделей. Единственное модельное ограничение на содержание тяжелых элементов связано с точным значением непрозрачности у основания конвективной зоны и положением границы конвекции в современном Солнце. Однако построение полной модели с непрозрачностями, зависящими от содержания каждого тяжелого элемента, пока не представляется возможным. Полученные в данной работе поправки на относительное содержание тяжелых компонентов не противоречат основным параметрам стандартной солнечной модели.

4.3.5. Результаты других авторов. В таблице 4.1 приведены величины осаждения тяжелых элементов из конвективной зоны, полученные разными авторами.

Таблица 4.1

Уменьшение содержания тяжелых элементов (по массе) в конвективной зоне Солнца по результатам разных авторов при начальном содержании

$$Z_0 \approx 0.02$$

Автор	ΔZ
Model S 1996 [23]	0.00157
Guzik, Swenson 1997 [57]	0.00179
Brun, Turck-Chieze, Morel 1998 [58]	0.00154
Turcotte, Richard, Michaud et al. 1998 [26]	0.00170
Schlattl 2002 [24]	0.00190
Ayukov, Baturin, 2011 [45]	0.00163

4.3.6. Область накопления тяжелых элементов под конвективной зоной. На рис. 4.12–4.14 представляет интерес область под конвективной зоной, демонстрирующая локальный максимум содержания тяжелых

элементов. Объяснения возникновения этой области автор в литературе не встречал.

Такая область образуется из-за того, что здесь происходит переход от относительно быстрого диффузионного осаждения элемента к относительно медленному, то есть сумма диффузионных потоков на внешней и внутренней границах области заметно отлична от нуля. Это следует и из уравнения диффузии, в правой части которого скорость диффузии стоит под градиентом. На графиках скоростей диффузии (рис. 4.6–4.8) можно обнаружить, что наибольший градиент под конвективной зоной имеет компонент скорости, вызванный термодиффузией.

В свою очередь, скорость термодиффузии пропорциональна градиенту температуры. Поэтому логично предположить, что область локального максимума тяжелых элементов связана с поведением градиента температуры под конвективной зоной. Для подтверждения этого предположения был проведен численный эксперимент (см. рис. 4.16) — было вычислено осаждение кислорода в предположении, что термодиффузия отсутствует. В итоге был получен профиль содержания кислорода, в котором локальный максимум под конвективной зоной отсутствовал. На этом же графике показан градиент температуры. Легко заметить, что область накопления тяжелых элементов совпадает с областью, в которой вторая производная температуры меняется от минимума (непосредственно под конвективной зоной) до нуля (в точке $r \approx 0.63$).

4.3.7. Линейность осаждения тяжелых элементов из конвективной зоны по начальному содержанию. Как показывает предыдущее изложение, диффузия — процесс очень медленный, а ее эффект за все время жизни Солнца составляет порядка 10% от исходного содержания элементов. Автор провел серию расчетов эволюции кислорода, в которых X_0 варьировалось от 0.02 до 2×10^{-5} , с целью определить, как зависит итоговое

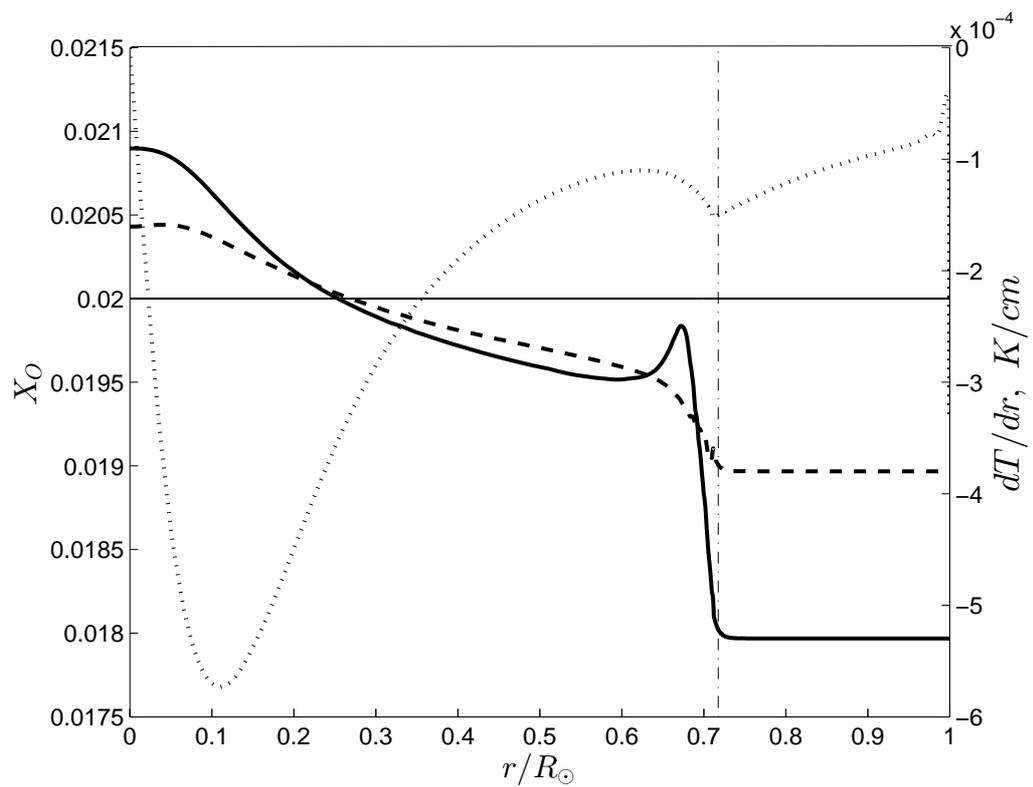


Рис. 4.16. Возникновение области замедленной диффузии под конвективной зоной. Показаны профили содержания кислорода, полученные при стандартной трактовке диффузии (сплошная линия) и без учета термодиффузии (штриховая линия). Пунктиром показан градиент температуры. Вертикальная штрих-пунктирная линия обозначает положение конвективной зоны.

(на момент $t = 4.6$ млрд лет) содержание конкретного элемента X в конвективной зоне от его начального содержания X_0 . Получившаяся зависимость позволяет утверждать, что диффузионное осаждение тяжелых элементов линейно по начальным условиям.

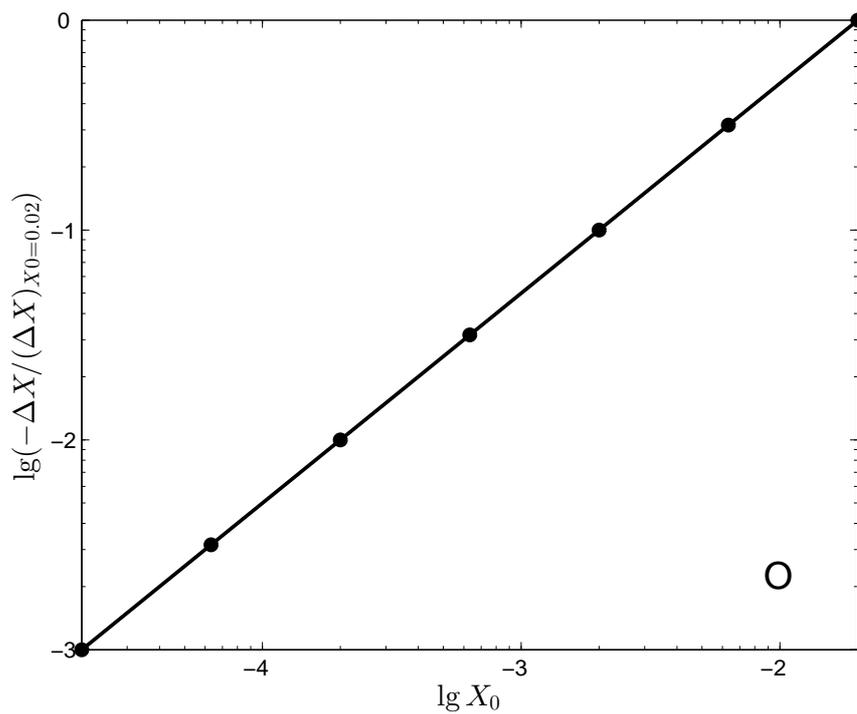


Рис. 4.17. Зависимость расчетной величины осаждения кислорода от его начального содержания X_0 . По оси ординат отложен логарифм отношения величины осаждения кислорода из конвективной зоны к такой же величине, полученной при начальном содержании $X_0 = 0.02$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В основе современных методов решения задачи диффузии на звездах лежит кинетическое уравнение Больцмана. При этом используется предположение, что интеграл столкновений, входящий в правую часть этого уравнения, описывает только двухчастичные упругие соударения.

Переход от кинетического к термодинамическому описанию процессов в газах возможен различными путями. Грэд [10] использовал разложение функции распределения в ряд по ортогональным тензорным полиномам от скоростей частиц. Бюргерс [11] применил так называемый метод моментов — свертку уравнения Больцмана с различными степенями собственных скоростей частиц.

Из уравнений Бюргерса следует, что скорость диффузии зависит от наличия в среде градиентов концентрации компонентов газовой смеси (концентрационная диффузия), градиента температуры (термодиффузия) и градиента давления (бародиффузия). Бародиффузия стремится переместить более тяжелые частицы в области с большим давлением. Этот эффект часто называют гравитационным осаждением, так как градиент давления на звездах вызывается самогравитацией вещества звезды. Знак эффекта термодиффузии зависит от закона, по которому взаимодействуют частицы смеси. Для кулоновских столкновений термодиффузия приводит к перемещению более тяжелых частиц в более горячие области.

Концентрационная диффузия стремится уменьшить имеющиеся в звезде градиенты содержания химических элементов, ее действие, как правило, противоположно действию баро- и термодиффузии.

Итог эволюции химического состава звезды — изменение содержания химических элементов и их распределения по радиусу за время ее жизни. Он определяется совместным действием ядерных реакций и диффузионных ме-

ханизмов.

Во второй главе описан метод постмодельных расчетов эволюции химического состава, реализованный автором. Кроме собственно расчетов метод предназначен для анализа механизмов диффузии, их вклада в диффузионные потоки различных элементов, а также для проверки различных методов расчета диффузии.

Исходными данными для расчетов являются: масса звезды; ее радиус, светимость и положение границы конвективной зоны как функции времени; температура T , давление p и плотность ρ как функции времени и расстояния от центра звезды. Кроме того, необходимо задать химический состав звезды $X_i(r, 0)$ в начальный момент времени $t = 0$, где $X_i(r, t)$ — массовая доля компонента i в веществе звезды.

Все необходимые исходные данные извлекаются из эволюционной последовательности моделей звезды, построенной в результате работы выбранного эволюционного кода. Таким образом фиксируется структура звезды и ее изменение во времени. Заметим, что одновременно в задачу привносятся допущения, использованные в эволюционном коде — сферическая симметрия звезды, отсутствие вращения и магнитного поля.

Затем выбирается объект исследования — химический состав солнечной плазмы. В простейшем случае он представляет собой смесь протонов, ядер гелия и электронов. В более сложных случаях к этим основным компонентам добавляются ионы тяжелых элементов.

Собственно постмодельный расчет заключается в решении системы уравнений эволюции химического состава на заданной фиксированной структуре звезды:

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = -\frac{1}{\rho r^2} \frac{\partial(r^2 \rho w_i X_i)}{\partial r} + \left(\frac{\partial X_i}{\partial t} \right)_{NR}. \quad (4.5)$$

В общем случае расчет включает в себя ядерные реакции (слагаемое с

индексом NR справа) и диффузию, скорость которой w_i для каждого компонента смеси в сопутствующей системе координат записывается в виде следующей суммы: $w_i = \alpha_i d \ln p / dr + \beta_i d \ln T / dr + \sum_k \gamma_{ik} d \ln X_k / dr$. Коэффициенты α_i , β_i и γ_{ik} зависят не только от координаты r и времени t , но и от $X_i(r, t)$, что делает уравнение эволюции химического состава нелинейным.

Наиболее распространенными в настоящее время методами определения коэффициентов в выражении для скорости диффузии являются аппроксимационные формулы Мишо и Профи [18] и схема Бакала-Тоул [19] решения уравнений Бюргерса [11] для смеси ионизованных газов. В постмодельных расчетах автора возможно использовать любой из этих методов в зависимости от поставленной задачи.

Второй метод, в отличие от первого, требует решения в каждой точке (r, t) системы $2N + 2$ линейных уравнений, где N — количество компонентов в смеси. Результатом же является более точный термодиффузионный коэффициент β_i и возможность учета взаимного влияния диффузионных потоков разных компонентов (коэффициенты γ_{ik} , $k \neq i$).

В главе показано, как можно в схему Бакала-Тоул встроить взаимодействие элементов с потоком излучения, чтобы учесть эффект т. н. фотодиффузии — изменения скорости диффузионного дрейфа вследствие взаимодействия компонентов смеси с потоком излучения.

Особую проблему в решаемой задаче представляет трактовка конвективной зоны, которая на Солнце простирается от $\approx 0.7R_\odot$ до фотосферы.

В этих пределах происходит активное перемешивание вещества, что ведет к быстрому выравниванию химического состава. Характерное время конвекции имеет величину порядка 0.1–1 года, что на 10–11 порядков меньше, чем характерное время диффузии в условиях Солнца. Этот факт позволяет нам при решении задачи *диффузионной* эволюции не вдаваться в подробно-

сти физического механизма конвекции — можно принять за данность, что в конвективной зоне любая возникающая неоднородность химического состава мгновенно выравнивается.

Граница конвективной зоны, определяемая критерием Шварцшильда $\nabla T = \nabla T_{ad}$, является точкой разрыва второй производной температуры по радиусу. Здесь же процесс медленного диффузионного перераспределения вещества скачкообразно сменяется процессом быстрого конвективного перемешивания. Граница конвективной зоны не стационарна, в массовых координатах она смещается с течением времени по направлению к внешним слоям Солнца. Т.е. масса конвективной зоны постепенно уменьшается. Аналогично тому, как это было сделано в [26], в уравнения эволюции химического состава граница конвективной зоны вводится через разрывный коэффициент концентрационной диффузии γ_{ii} при градиенте содержания. Вне области конвективного перемешивания этот коэффициент определяется формулами Мишо-Профи или Бакала-Тоул, а в конвективной зоне он увеличивается на 6–8 порядков. Такой подход приводит к однородности содержания химических элементов по всей конвективной зоне, что эквивалентно результату действия конвекции.

В третьей главе описывается диффузия основных компонентов солнечной плазмы — водорода и гелия.

Приведены результаты постмодельных расчетов эволюции химического состава Солнца от момента выхода на Главную последовательность до возраста 4.6 млрд лет. Расчеты проводились для плазмы, состоящей из ионов H^+ , He^{2+} и электронов. Предполагалось, что начальный химический состав является известным и задан в исходной эволюционной модели и что тяжелые элементы не влияют на эволюцию содержания водорода и гелия. В таком случае задача может быть решена для одного элемента, водорода, а эволюция

содержания гелия определяется из соотношения $\sum_i X_i(r, t) = 1$.

Получено, что наличие в недрах Солнца сильных градиентов давления и температуры приводит к дрейфу водорода от центра к внешним областям и противоположно направленному дрейфу гелия. Как следствие, возникают два эффекта. Во-первых, содержание гелия в конвективной зоне уменьшается со временем, и за 4.6 млрд лет оно становится меньше на величину ≈ 0.03 массовой доли. Во-вторых, в ядре Солнца, где водород перерабатывается в гелий в реакциях протон-протонного цикла, диффузионный дрейф водорода также уменьшает содержание этого элемента. В результате диффузии истощение водорода в ядре происходит быстрее, и расчетное время жизни Солнца на Главной последовательности сокращается на ≈ 0.71 млрд. лет.

Величины осаждения гелия из конвективной зоны, полученные в пост-модельном расчете и исходной эволюционной модели, находятся в хорошем согласии, что верифицирует метод постмодельных расчетов и подтверждает достоверность полученных с его помощью результатов.

Приведены результаты численных экспериментов, в которых граница конвективной зоны смещалась относительно ее положения в модельно-эволюционном расчете на величины $-0.1R_\odot$ и $-0.05R_\odot$ (т.н. эффект овершутинга). Расчетное содержание гелия в конвективной зоне при этом на момент 4.6 млрд лет увеличивалось соответственно на 0.012 и 0.007 массовой доли.

Четвертая глава описывает диффузию тяжелых элементов. В солнечной плазме тяжелые элементы являются малой примесью (до 2 % по массе) к смеси водорода и гелия. В то же время, они вносят определяющий вклад в непрозрачность вещества. Поэтому знание распределения тяжелых элементов по радиусу Солнца необходимо для расчета положения дна конвективной зоны.

Для изучения выбраны шесть элементов — O, C, N, Ne, Si, Fe как наиболее обильные и вносящие наибольший вклад в непрозрачность. Эти элементы, как и гелий, вследствие диффузии осаждаются по направлению к центру Солнца. Скорость этого осаждения в первом приближении пропорциональна массе ионов данного химического элемента и обратно пропорциональна их заряду. В связи с этим важно знать, как меняется заряд ионов по радиусу Солнца. Расчет распределения степени ионизации элементов по глубине проводился с использованием уравнения состояния SAHA-S [36]. O, C и N практически полностью ионизируются внутри конвективной зоны, в то время как Ne, Si и Fe сохраняют часть своих электронов в более глубоких областях, т.е. ионизованы частично. Железо не ионизовано полностью вплоть до центра Солнца. Показано, что отказ в расчетах от приближения полной ионизации тяжелых элементов приводит к увеличению их скоростей диффузии.

Диффузионные потоки тяжелых элементов через столкновения отдельных частиц взаимодействуют с диффузионными потоками водорода и гелия (которые направлены противоположно один другому). Получено, что этот эффект увеличивает скорость осаждения тяжелых элементов, вклад его составляет до 10 %.

В ядре и лучистой зоне через вещество проходит поток излучения, направленный из ядра наружу. Излучение взаимодействует с веществом и препятствует диффузионному осаждению тяжелых элементов. Показано, что этот эффект максимален для железа.

Для профилей содержания всех тяжелых элементов характерна общая особенность — локальный максимум в области под конвективной зоной, в которой содержание элемента не убывает или даже растет со временем. Показано, что данная особенность является следствием того, что в данной области градиент температуры возрастает по направлению от центра Солнца.

Поэтому термодиффузия имеет знак, противоположный бародиффузии, что эффективно замедляет осаждение элементов из данной области.

Спектроскопическими методами было обнаружено пониженное содержание кислорода во внешних слоях Солнца [31], и по настоящее время этот факт остается необъясненным, в том числе и с привлечением диффузионных механизмов осаждения элементов. Проблема заключается в том, что современные модели внутреннего строения Солнца требуют содержания тяжелых элементов по массе Z во внутренних областях на уровне 0.02. В противном случае практически невозможно получить границу конвективной зоны на том месте, где она находится по данным гелиосейсмологии. Результаты, полученные в данной работе, подтверждают, что известные механизмы диффузии не могут понизить Z в конвективной зоне на $\approx 50\%$, оставив его почти без изменения во внутренних областях. Следовательно, необходим поиск других механизмов, способных объяснить этот эффект.

Благодарности.

Автор благодарен Сергею Витальевичу Аюкову, Анне Валерьевне Оршиной и Йоргену Кристенсену-Далсгаарду за предоставленные эволюционные модели Солнца, послужившие базой для расчетов диффузионного перераспределения элементов. Автор выражает глубокую признательность всем коллегам, поддерживавшим его во время выполнения и подготовки к защите данной диссертационной работы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. J. Christensen-Dalsgaard, D. O. Gough, M. J. Thompson The depth of the solar convection zone // *The Astrophysical Journal*. — 1991. — Т. 378. — С. 413—437.
2. S. V. Vorontsov, V. A. Baturin, A. A. Pamyatnykh Seismological measurement of solar helium abundance // *Nature*. — 1991. — Т. 349. — С. 49—51.
3. К. У. Аллен *Астрофизические величины* // М.: Мир. — 1977.
4. S. Chapman Thermal Diffusion and the Stars // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 1917. — Т. 77. — С. 539—540.
5. S. Chapman Convection and Diffusion within Giant Stars // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 1917. — Т. 77. — С. 540—549.
6. S. Chapman Diffusion and Viscosity in Giant Stars // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 1922. — Т. 82. — С. 292—297.
7. A. S. Eddington *The Internal Constitution of the Stars* // New York: Dover. — 1926.
8. S. Rosseland *Astrophysik auf atomtheoretischer Grundlage / Struktur der Materie*. — Т. 2. // Berlin: Verlag von Julius Springer. — 1931.
9. L. Biermann Über die Verteilung der leichten und der schweren Elemente und das elektrische Feld im Innern der Sterne // *Astronomische Nachrichten*. — 1937. — Т. 263. — №. 10. — С. 185—198.
10. H. Grad On the kinetic theory of rarified gases // *Communications on Pure and Applied Mathematics*. — 1949. — Т. 2. — №. 4. — С. 331—407.
11. J. M. Burgers *Flow equations for composite gases* // New York: Academic. — 1969.

12. L. H. Aller, S. Chapman Diffusion in the Sun // The Astrophysical Journal. — 1960. — T. 132. — C. 461—472.
13. G. Michaud Diffusion Processes in Peculiar A Stars // The Astrophysical Journal. — 1970. — T. 160. — C. 641—658.
14. G. Vauclair, S. Vauclair, A. Pamjatnikh Diffusion Processes in the Envelopes of Main-sequence A Stars: Model Variations due to Helium Depletion// Astronomy and Astrophysics. — 1974. — T. 31. — C. 63—70.
15. P. D. Noerdlinger Diffusion of Helium in the Sun // Astronomy and Astrophysics. — 1977. — T. 57. — C. 407—415.
16. P. D. Noerdlinger Automatic Computations of Diffusion Rates // The Astrophysical Journal Supplement Series. — 1978. — T. 36. — C. 259—273.
17. J. N. Bahcall, A. Loeb Element diffusion in stellar interiors // The Astrophysical Journal. — 1990. — T. 360. — C. 267—274.
18. G. Michaud and C. R. Proffitt Partial Transport Processes / Inside the stars, IAU Colloquium 137, eds. W. W. Weiss, A. Baglin. — ASP Conference Series // 1993. — T. 40. — C. 246—259.
19. A. A. Thoul, J. N. Bahcall, A. Loeb Element diffusion in the solar interior // The Astrophysical Journal. — 1994. — T. 421. — C. 828—842.
20. J. N. Bahcall, M. H. Pinsonneault Helium Diffusion in the Sun The Astrophysical Journal. — 1992. — T. 395. — C. L119—L122.
21. J. N. Bahcall, M. H. Pinsonneault Standard solar models, with and without helium diffusion, and the solar neutrino problem // Reviews of Modern Physics. — 1992. — T. 64. — C. 885—926.
22. J. N. Bahcall, M. H. Pinsonneault, G. J. Wasserburg Solar Models with Helium and Heavy Element Diffusion // Reviews of Modern Physics. — 1995. — T. 67. — C. 781—808.

23. J. Christensen-Dalsgaard, W. Däppen, S. V. Ajukov, E. R. Anderson, H. M. Antia, S. Basu, V. A. Baturin, G. Berthomieu, B. Chaboyer, S. M. Chitre, A. N. Cox, P. Demarque, J. Donatowicz, W. A. Dziembowski, M. Gabriel, D. O. Gough, D. B. Guenther, J. A. Guzik, J. W. Harvey, F. Hill, G. Houdek, C. A. Iglesias, A. G. Kosovichev, J. W. Leibacher, O. Morel, C. R. Proffitt, J. Provost, J. Reiter, E. J. Rhodes, F. J. Rogers, I. W. Roxburgh, M. J. Thompson, R. K. Ulrich The current state of solar modeling // *Science*. — 1996. — T. 272. — C. 1286–1292.
24. H. Schlattl Microscopic diffusion of partly ionized metals in the Sun and metal-poor stars // *Astronomy and Astrophysics*. — 2002. — T. 395. — C. 85–95.
25. S. Vauclair Atomic Diffusion, Mixing, and Element Abundances in Main Sequence Stars // *ASP Conference Series*. — 2014. — T. 479. — C. 27–34.
26. S. Turcotte, J. Richar, G. Michaud, C. A. Iglesias, F. J. Rogers Consistent Solar Evolution Model Including Diffusion and Radiative Acceleration Effects // *The Astrophysical Journal*. — 1998. — T. 504. — C. 539–558.
27. S. Mathur, T. S. Metcalfe, M. Woitaszek, H. Bruntt, G. A. Verner, J. Christensen-Dalsgaard, O. L. Creevey, G. Doğan, S. Basu, C. Karoff, D. Stello, T. Appourchaux, T. L. Campante, W. J. Chaplin, R. A. García, T. R. Bedding, O. Benomar, A. Bonanno, S. Deheuvels, Y. Elsworth, P. Gaulme, J. A. Guzik, R. Handberg, S. Hekker, W. Herzberg, M. J. P. F. G. Monteiro, L. Piau, P.-O. Quirion, C. Régulo, M. Roth, D. Salabert, A. Serenelli, M. J. Thompson, R. Trampedach, T. R. White, J. Ballot, I. M. Brandão, J. Molenda-Zakowicz, H. Kjeldsen, J. D. Twicken, K. Uddin, B. Wohler A uniform asteroseismic analysis of 22 solar-type stars observed by Kepler // *The Astrophysical Journal*. — 2012. — T. 749. — C. 152–165.

28. W. J. Chaplin, S. Basu, D. Huber, A. Serenelli, L. Casagrande, V. Silva Aguirre, W. H. Ball, O. L. Creevey, L. Gizon, R. Handberg, C. Karoff, R. Lutz, J. P. Marques, A. Miglio, D. Stello, M. D. Suran, D. Pricopi, T. S. Metcalfe, M. J. P. F. G. Monteiro, J. Molenda-Zakowicz, T. Appourchaux, J. Christensen-Dalsgaard, Y. Elsworth, R. A. García, G. Houdek, H. Kjeldsen, A. Bonanno, T. L. Campante, E. Corsaro, P. Gaulme, S. Hekker, S. Mathur, B. Mosser, C. Régulo, D. Salabert Asteroseismic fundamental properties of solar-type stars observed by the NASA Kepler mission // *The Astrophysical Journal Supplement Series*. — 2014. — T. 210. — C. 1–22.
29. J.-D. do Nascimento Jr., R. A. García, S. Mathur, F. Anthony, S. A. Barnes, S. Meibom, J. S. da Costa, M. Castro, D. Salabert, T. Ceillier Rotation periods and ages of solar analogs and solar twins revealed by the Kepler mission // *The Astrophysical Journal Letters*. — 2014. — T. 790. — C. L23–L27.
30. Å. Nordlund, R. F. Stein, M. Asplund Solar Surface Convection // *Living Reviews in Solar Physics*. — 2009. — T. 6. — C. 2.
31. M. Asplund, N. Grevesse, A. J. Sauval, C. Allende Prieto, D. Kiselman Line formation in solar granulation. IV. [O I], O I and OH lines and the photospheric O abundance // *Astronomy and Astrophysics*. — 2004. — T. 417. — C. 751–768.
32. M. Asplund, N. Grevesse, A. J. Sauval The Solar Chemical Composition / In: T. G. Barnes, F. N. Bash (eds.) *Cosmic abundances as records of stellar evolution and nucleosynthesis*.// *ASP Conference Series*. — 2005. — T. 336. — C. 25–38.
33. B. Paxton, L. Bildsten, A. Dotter, F. Herwig, P. Lesaffre, F. Timmes Modules for experiments in stellar astrophysics (MESA)// *The*

- Astrophysical Journal Supplement Series. — 2011. — Т. 192. — article id. 3. — 35 pp.
34. А. Б. Горшков, В. А. Батулин Область диффузионного овершутинга под конвективной зоной Солнца / Солнечная и солнечно-земная физика — 2014, Главная (Пулковская) астрономическая обсерватория РАН // Санкт-Петербург. — 2014. — С. 109—112.
 35. Oreshina A. V., Baturin V. A., Gorshkov A. B. The Role of Mixing below a Convective Zone during the Evolution of Lithium on the Sun // Geomagnetism and Aeronomy. — 2015. — Т. 55. — С. 1171—1174.
 36. С. В. Аюков, В. А. Батулин, В. К. Грязнов, И. Л. Иосилевский, А. Н. Старостин, В. Е. Фортов Анализ малых примесей тяжелых элементов в солнечной плазме с помощью уравнения состояния SAHA-S // Письма в ЖЭТФ. — 2004. — Т. 80. — С. 163—166.
 37. P. Morel, Y. Lebreton CESAM: a free code for stellar evolution calculations // Astrophysics and Space Science. — 2008. — Т. 316. — С. 61—73.
 38. С. Чепмен, Т. Каулинг Математическая теория неоднородных газов // М.: ИЛ. — 1960.
 39. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский Физическая кинетика // М.: Физматлит. — 2001.
 40. В. М. Жданов Процессы переноса в многокомпонентной плазме // М.: Физматлит. — 2009.
 41. Numerical Recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Computing/ W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery. — 2nd ed. // Cambridge University Press. — 1992.
 42. Брагинский С. И. Явления переноса в плазме // В сб. Вопросы теории плазмы. Т. 1 / под ред. М. А. Леонтовича // М.: Атомиздат. — 1963. — Вып. 1. — С. 183.

43. T. G. Cowling Approximate theories of thermal diffusion// Journal of Physics A: General Physics — 1970. — T. 3. — C. 774—782.
44. C. Angulo, M. Arnould, M. Rayet, P. Descouvemont, D. Baye, C. Leclercq-Willain, A. Coc, S. Barhoumi, P. Aguer, C. Rolfs, R. Kunz, J. W. Hammer, A. Mayer, T. Paradellis, S. Kossionides, C. Chronidou, K. Spyrou, S. degl’Innocenti, G. Fiorentini, B. Ricci, S. Zavatarelli, C. Providencia, H. Wolters, J. Soares, C. Grama, J. Rahighi, A. Shotter, M. Lamahi Rachti A compilation of charged-particle induced thermonuclear reaction rates // Nuclear Physics A. — 1999. — T. 656. — C. 3—183.
45. S. V. Ayukov, V. A. Baturin Low-Z solar model: sound speed profile under the convection zone // Journal of Physics: Conference Series. — 2011. — T. 271 — C. 012033.
46. M. J. Seaton Opacity Project data on CD for mean opacities and radiative accelerations // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2005. — T. 362. — C. L1—L3.
47. S. V. Ayukov, V. A. Baturin, V. K. Gryaznov, I. L. Iosilevsky, A. N. Starostin Solar models using the SAHA-S equation of state: Equation of State and Thermodynamic Functions of Solar Plasma / In: Equation of State and Phase-Transition in Models of Ordinary Astrophysical Matter// AIP Conference Proceedings — 2004. — T. 731. — C. 178—186.
48. F. J. Rogers, F. J. Swenson, C. A. Iglesias OPAL Equation of State Tables for Astrophysical Applications // The Astrophysical Journal. — 1996. — T. 456. — C. 902—908.
49. C. A. Iglesias, F. J. Rogers Updated OPAL Opacities // The Astrophysical Journal. — 1996. — T. 464. — C. 943—953.

50. F. J. Rogers, C. A. Iglesias Radiative atomic Rosseland mean opacity tables // *Astrophysical Journal Supplement Series*. — 1992. — T. 79. — C. 507—568.
51. F. J. Rogers, C. A. Iglesias Rosseland mean opacities for variable compositions // *The Astrophysical Journal*. — 1992. — T. 401. — C. 361—366.
52. N. Grevesse, A. Noels Cosmic abundances of the elements / In: *Origin and Evolution of the Elements*, ed. N. Pratzko, E. Vangioni-Flam, M. Casse // Cambridge: Cambridge University Press. — 1993. — C. 15—25.
53. O. Engvold The solar chemical composition // *Physica Scripta* — 1977. — T. 16. — C. 48—50.
54. D. B. Guenther, Y.-C. Kim, P. Demarque Seismology of the standard solar model: tests of diffusion and the OPAL and the MHD equations of state // *The Astrophysical Journal*. — 1996. — T. 463. — C. 382—390.
55. O. Richard, S. Vauclair, C. Charbonnel, W. A. Dziembowski New solar models including helioseismological constraints and light-element depletion // *Astronomy and Astrophysics*. — 1996. — T. 312. — C. 1000—1011.
56. M. Gabriel, F. Carrier Influence of hydrogen diffusion on the solar p-mode spectrum // *Astronomy and Astrophysics*. — 1997. — T. 317. — C. 580—585.
57. J. A. Guzik, F. J. Swenson Seismological comparisons of solar models with element diffusion using the MHD, OPAL, and SIREFF equations of state // *The Astrophysical Journal*. — 1997. — T. 491. — C. 967—979.
58. A. S. Brun, S. Turck-Chieze, P. Morel Standard solar models in the light of new helioseismic constraints. I. The solar core // *The Astrophysical Journal*. — 1998. — T. 506. — C. 913—925.
59. V. K. Gryaznov, S. V. Ayukov, V. A. Baturin, I. L. Iosilevsky, A. N. Starostin, V. E. Fortov SAHA-S model: Equation of State and

- Thermodynamic Functions of Solar Plasma / In: Equation of State and Phase-Transition in Models of Ordinary Astrophysical Matter// AIP Conference Proceedings — 2004. — Т. 731. — С. 147—161.
60. Батулин В.А., Горшков А.Б., Аюков С.В. Диффузионная эволюция химического состава в солнечной модели. // *Астрономический журнал*, 2006. — Том 83. С. 1115–1127.
61. И. Пригожин, Д. Кондепуди Современная термодинамика. От тепловых двигателей до диссипативных структур // М.: Мир. — 2002.
62. M. J. Seaton Radiative accelerations in stellar envelopes // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 1997. — Т. 289. — С. 700—720.
63. M. J. Seaton, Yu Yan, D. Mihalas, A. K. Pradhan Opacities for stellar envelopes // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 1994. — Т. 266. — С. 805—828.